

# Calcolo Numerico 2022-23

## Esercitazione 3

### A Approssimazione di un set di dati tramite Minimi Quadrati

Sia  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$  un set di dati, che devono essere approssimati da un polinomio

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

di grado  $n \in \mathbb{N}$  fissato.

Si definisce una matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$$

E i vettori

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Reimpostando il problema con la formulazione ai minimi quadrati e risolvendo quindi il problema

$$\min_{\alpha} \|A\alpha - y\|_2^2$$

si ottengono i coefficienti  $\alpha$  che definiscono in modo univoco il polinomio  $p(x)$ .

## A.1 Risoluzione tramite equazioni normali

Quando  $A$  è di rango massimo, il problema ai minimi quadrati

$$\min_{\alpha} \|A\alpha - y\|_2^2$$

può essere risolto col metodo delle equazioni normali, ossia osservando che il problema di minimo può essere riscritto come:

$$A^T A \alpha = A^T y$$

Risolvendo questo sistema lineare (i ottiene il vettore degli  $\alpha$  che corrisponde ai coefficienti del polinomio approssimante.

## A.2 Risoluzione tramite SVD

Consideriamo la decomposizione SVD della matrice  $A$

$$A = USV^T$$

Con  $U \in \mathbb{R}^{N \times N}$  e  $V^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrici unitarie e  $S \in \mathbb{R}^{N \times n}$  diagonale.

La soluzione di minima norma del problema di minimi quadrati è data da:

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^m \frac{(u_i^T y) v_i}{s_i}, \quad i = 0, \dots, n$$

## Esercizio 1

i. Calcolare il polinomio di grado  $n = 5$  che approssimi i seguenti dati:

$$\{(1.0, 1.18), (1.2, 1.26), (1.4, 1.23), (1.6, 1.37), (1.8, 1.37), (2.0, 1.45), (2.2, 1.42), \\ (2.4, 1.46), (2.6, 1.53), (2.8, 1.59), (3.0, 1.50)\}$$

ii. Risolvere il problema ai minimi quadrati sia con le equazioni normali che con la SVD (vedi A.1 e A.2).

iii. Valutare graficamente i polinomi di approssimazione e confrontare gli errori commessi dai due metodi sul set di punti.

## Esercizio 2

Ripetere l'esercizio precedente su un dataset scaricabile al seguente indirizzo:

<https://www.kaggle.com/sakshamjn/heightvsweight-for-linear-polynomial-regression> contenente i dati riguardanti il peso e l'altezza di 71 individui.

Una volta scaricato, per caricarlo su Spyder utilizzare la libreria **pandas**, nello specifico la funzione **pandas.read\_csv** che fornisce come output il dataset. Questo dovrà essere poi convertito in un numpy array.

### Esercizio 3

Per ognuna delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x \exp(x) \quad x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25 * x} \quad x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin(5x) + 3x \quad x \in [1, 5]$$

Assegnati  $m$  punti equispaziati, con  $m$  fissato,

- i. Per ciascun valore di  $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$ , creare una figura con il grafico della funzione esatta  $f(x)$  insieme a quello del polinomio di approssimazione  $p(x)$ . Evidenziare gli  $N$  punti noti.
- ii. Per ciascun valore di  $n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}$ , riportare il valore dell'errore in norma 2 commesso nel punto  $x = 0$ .
- iii. Calcolare la norma 2 dell'errore di approssimazione, commesso sugli  $N$  nodi, per ciascun valore di  $n \in \{1, 5, 7\}$ .

## B Compressione di una immagine tramite SVD

### Esercizio 4

Utilizzando la libreria `skimage`, nello specifico il modulo `data`, caricare e visualizzare un'immagine  $A$  in scala di grigio di dimensione  $m \times n$ .

- i. Calcolare la matrice

$$A_p = \sum_{i=1}^p u_i * v_i^T * \sigma_i$$

, dove  $p \leq \text{rango}(A)$

- ii. Visualizzare l'immagine  $A_p$ .
- iii. Calcolare l'errore relativo:

$$\frac{\|A - A_p\|_2}{\|A\|_2}.$$

- iv. Calcolare il fattore di compressione

$$c_p = \frac{1}{p} \min(m, n) - 1.$$

- v. Calcolare e plottare l'errore relativo e il fattore di compressione al variare di  $p$ .

## Esercizio 5

- i. Ripetere l'esercizio precedente con  $2/3$  immagini con differenti caratteristiche.