BAB 1

Pendahuluan

(Sistem Bilangan Riil)

Estimasi Waktu

3 Kali Pertemuan

(1,5 Minggu)

Oleh

Bowo Nurhadiyono, S.Si., M.Kom

Daftar Isi

Tujuan Instruksional Khusu

Setelah mempelajari bab 1 ini, diharapkan mahasiswa :

1. Dapat memahami dan mengetahui system bilangan riil
2. Dapat memahami arti pertidaksamaan dan dapat menyelsaikan pertidaksamaan tersebut dengan baik dan benar
3. dapat memahami system koordinat kartesius dan dapat menuliskan sebuah titik pada system koordinat kartesius

1.1. Sistem Bilangan Riil

Materi kalkulus didasarkan pada system bilangan riil beserta sifat-sifatnya, untuk masuk kedalam system bilangan riil, perlu kita ketahui terlebih dahulu system bilangan yang lebih sederhana.

1.1.1. Bilangan Bulat

Bilangan Asli N merupakan bilangan yang paling sederhana, yaitu bilangan yang dimulai dari angka 1

$$N = \{1, 2, 3, ...\}$$

Dengan adanya bilangan asli ini kita dapat *menghitung* temen-temen kita satu kelas, atau kita dapat *menghitung* uang kita yang berada didompet, coba bayangkan jika tidak ada bilangan asli....

Jika bilangan asli kita gabungkan dengan angka nol, maka kita sering menyebutnya dengan bilangan Cacah C, yaitu

$$C = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Angka nol sering kita gunakan untuk mengartikan tidak ada, misalkan kita punya uang Rp.1000, uang itu untuk membeli kue seharga Rp.1000, maka dikatakan uang kita habis atau nol.

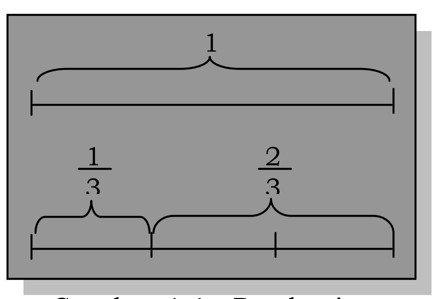
Jika bilangan asli digandengkan dengan negatifnya, beserta nol diikutkan, maka akan diperoleh bilangan bulat Z, yaitu

$$Z = \{. . . -3, -2, -1, 0 , 1, 2, 3, . . . \}$$

Jika kita akan melakukan pengukuran panjang, berat, tegamham listrik yang memerlukan angka-angka yang tidak bulat, maka bilangan bulat tidak memadai untuk hal seperti itu, bilangan bulat masih terlalu kurang untuk memberikan ketelitian yang baik.
Kita juga dituntut untuk mempertimbangkan hasil bagi (rasio) dari bilangan-bilangan bulat, misalkan seperti bilangan berikut :

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{-7}{8}, \frac{16}{2}, dan \frac{-17}{1}$$

Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 1.1



Gambar 1.1 : Pembagian

Kita juga dapat menyatakan bahwa 16/2 dan (-17/1) walaupun secara mudah kita dapat menuliskan 16/2 dengan angka 8 dan angka (-17/1) dengan angka -17.

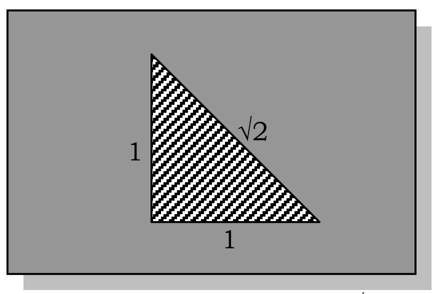
1.1.2.Bilangan Rasional

Bilangan rasional adalah bilangan yang merupakan hasil bagi bilangan bulat dan bilangan asli. Himpunan semua bilangan rasional ditulis dengan notasi *Q*,

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z \text{ dan } b \in N \right\}$$

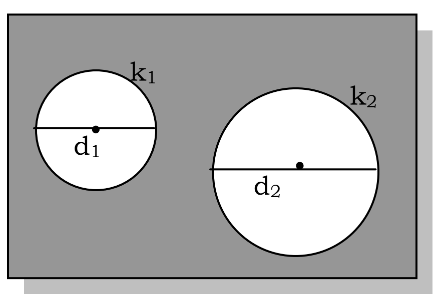
Dalam kehidupan nyata seringkali dijumpai bilangan-bilangan yang tidak rasional. Bilangan yang tidak rasional disebut *bilangan irasional.*

Contoh-contoh bilangan irasional antara lain adalah $\sqrt{2}$ dan π. Bilangan $\sqrt{2}$ adalah panjang sisi miring segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi tegaknya masing-masing adalah 1 seperti pada Gambar 1.2



Gambar 1.2 : Bilangan √2

Sedangkan bilangan π merupakan hasil bagi keliling sebarang lingkaran (k) terhadap diameternya (d) seperti Gambar 1.3



Gambar 1.3 : Bilangan π

Dari Gambar 1.3 diperoleh k1/d1 = k2/d2 = π

Bukti 1 :
Sebuah lingkaran dengan jari-jari 7, maka

- Kell = $2\pi r = 14\pi$
- Diameter = $2r = 14$

Sehingga perbandingan antara Kell dan Diameter = $14\pi/14 = \pi$

Bukti 2 :
Sebuah lingkaran dengan Luas 49

- Luas = πr^2 sehingga $49 = \pi r^2$ diperoleh $r = 7/\sqrt{\pi}$

Jika $r = 7/\sqrt{\pi}$, maka akan diperoleh Keliling Lingkaran (Kell) dan Diameter Lingkaran (d), yaitu :

- Kell = $2\pi r = 14\pi/\sqrt{\pi} = 14\sqrt{\pi}$
- Diameter = $2r = 2(7/\sqrt{\pi}) = 14/\sqrt{\pi}$

Sehingga diperoleh perbandingan antara Kell dan Diameter = $14\sqrt{\pi}/(14/\sqrt{\pi}) = \pi$

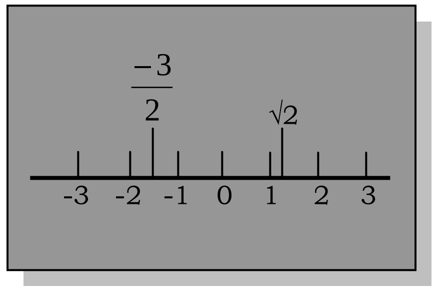
Himpunan semua bilangan irasional bersama-sama dengan bilangan rasional (*Q*) membentuk himpunan semua bilangan riil *R*.
Seperti telah diketahui, untuk menyatakan sebarang bilangan riil seringkali digunakan cara *desimal*. Sebagai contoh, bilangan-bilangan $\frac{3}{4}, \frac{5}{3}$, dan $\frac{7}{66}$ masing-masing dapat dinyatakan dalam desimal sebagai $(0{,}75)$, $(1{,}666...)$, dan $0{,}1060606....$ disini dapat ditunjukkan bahwa bentuk desimal bilangan-bilangan rasional adalah salah satu dari 2 tipe berikut:

1. jika dijadikan bentuk desimal, maka angka-angka dibelakang koma berhenti, misalnya :
   $$(\frac{3}{4} = 0{,}75,\ \frac{5}{2} = 2{,}5, \frac{1}{8} = 0{,}125)$$
2. jika dijadikan bentuk desimal, maka angka-angka dibelakang koma berulang secara beraturan, misalnya :
   $$(\frac{5}{3} = 1{,}666......,\ \frac{7}{66} = 0{,}1060606........).$$
   Apabila bentuk desimal suatu bilangan tidak termasuk salah satu tipe di atas, maka bilangan tersebut adalah irasional, misalnya :
   $\sqrt{2} = 1{,}414213...$ $\pi = 3{,}14159...$
   $\sqrt{3} = 1{,}732050...$ $\sqrt{5} = 2{,}236067...$

Bilangan Riil (R) karena merupakan gabungan dari bilangan rasional dan irrasional, maka kita sulit untuk dapat menyebutkan satu demi satu, karena itu bilangan riil digambarkan sebagai garis bilangan mendatar.

Dalam garis bilangan dengan titik 0 sebagai titik tetap, maka bilangan ini dapat mengukur jaraknya ke kanan atau ke kiri, jika ke kanan merupakan riil positif dank e kiri merupakan riil negative.

Karena kita tidak bias menyebut satu per satu bilangan riil dalam garis bilangan, maka kita cukup mewakilkan pada beberapa bilangan tertentu dalam garis bilangan.

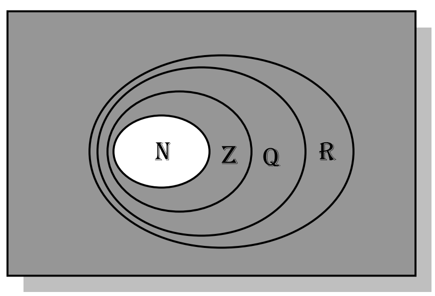


Gambar 1.4: Garis Bilangan

Secara jelas system bilangan-bilangan yang telah kita sebutkan adalah merupakan himpunan yang masing-masing mempunyai lambing, yaitu :

- Himpunan Bilangan Asli dilambangkan dengan $\mathbb{N}$
- Himpunan Bilangan Bulat dilambangkan dengan $\mathbb{Z}$
- Himpunan Bilangan Rasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$
- Himpunan Bilangan Riil dilambangkan dengan $\mathbb{R}$

Keempat himpunan tersebut memenuhi hubungan $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ jika digambar dalam diagram venn seperti Gambar 1.5.



Gambar 1.5: Diagram Venn

Sembarang bilangan rasional dapat ditulis dalam suatu decimal, karena berdasarkan definisi bilangan ini dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat dengan pembagi tidak sama dengan nol, maka jika bilangan tersebut kita bagi dengan penyebutnya dengan cara pembagian biasa, maka akan diperoleh suatu decimal, seperti Gambar 1.6

```
   0,375              1,181...
8 / 3000          11/ 13
   24                  11
     60                  20
     56                  11
       40                  90
       40                  88
         0                   2
Jadi 3/8 = 0,375   Jadi 13/11 = 1,181....
```

Gambar 1.6: Cara Memperoleh Desimal

Contoh :

- $\dfrac{4}{7} = 0{,}571428571428....$
- $\dfrac{11}{8} = 1{,}833333.....$
- $\dfrac{269}{990} = 0{,}2717171...$

sekarang, bagaimana jika yang diketahui adalah bilangan rasional dalam bentuk decimal berulang, dan bagaimana menjadikan bilangan decimal tersebut kedalam bentuk hasil bagi dua bilangan rasional.

Contoh :
Diketahui bilangan 0,136136136.... Nyatakan dalam bentuk pembagian dua bilangan rasional

⇒ Misalkan x = 0,136136136...., karena yang berulang tiga angka, maka kita kalikan 1000

⇒ x = 0,136136136.... * 1000
⇒ 1000x = 136,136136....
⇒ 1000x – x = 136,136136.... – 0,136136....
⇒ 999x = 136
⇒ x = 137/999

Contoh :
Diketahui bilangan 0,2717171.... Nyatakan dalam bentuk pembagian dua bilangan rasional

⇒ Misalkan x = 0,2717171...., karena yang berulang adalah 171717, maka kita kalikan dengan 100

⇒ x = 0,2717171....,* 100
⇒ 100x = 27,17171....
⇒ 100x – x = 27,17171.... – 0,2717171....

$\Rightarrow$ 99x = 26,9
$\Rightarrow$ 990x = 269
$\Rightarrow$ x = 269/990

secara umum dapat dikatakan bahwa :

- Mengalikan suatu decimal berulang z dengan 10^m jika decimal tersebut berulang dalam suatu daur yang memuat m angka

1.1.3.Sifat Bilangan Rill

Misalkan a, b, c dan d empat bilangan riil terhadap bilangan itu kita dapat menambahkan, mengalikan untuk mendapatkan bilangan riil yang baru, Penambahan dan Perkalian dua bilangan riil ini disebut sifat medan, yaitu :

1. Sifat komutatif
   (i). $a+b=b+a$ (ii). $a.b=b.a$
2. Sifat asosiatif
   (i). $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$
   (ii). $a.(b.c)=(a.b).c=a.b.c$
3. Sifat distibutif
   $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$
4. (i). $\frac{a}{b}=a.\frac{1}{b}, \quad b\neq 0$
   (ii). $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a.d)+(b.c)}{b.d}, \quad b\neq 0,\ d\neq 0$
   (iii). $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}, \quad b\neq 0,\ d\neq 0$
5. (i). $a.(-b)=(-a).b=-(a.b)$
   (ii). $(-a).(-b)=a.b$
   (iii). $-(-a)=a$
6. (i). $\frac{0}{a}=0$, untuk setiap bilangan $a\neq 0$.
   (ii). $\frac{a}{0}$ tak terdefinisikan.
   (iii). $\frac{a}{a}=1$, untuk setiap bilangan $a\neq 0$.
7. Hukum kanselasi
   (i). Jika $a.c=b.c$ dan $c\neq 0$ maka $a=b$.
   (ii). Jika $b,c\neq 0$ maka $\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b}$.
8. Sifat pembagi nol

Jika $a.b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$.

1.1.4.Relasi Urutan

Himpunan semua bilangan riil dapat dibagi menjadi 3 himpunan bagian tak kosong yang saling asing:
1. Himpunan semua bilangan riil positif
2. Himpunan dengan bilangan 0 (nol) sebagai anggota
3. Himpunan semua bilangan riil negative.

Untuk sebarang bilangan riil *a* dan *b*, misalkan bilangan *a* dikatakan *kurang dari* b (ditulis $a < b$) jika $b - a$ positif.

Contoh :
- misalkan 2 < 5, maka 5 – 2 = 3, yaitu bilangan positif
- misalkan – 3 < 2, maka 2 – (–3) = 5, yaitu bilangan positif

Untuk sebarang bilangan riil *a* dan *b*, misalkan bilangan *a* dikatakan *lebih dari b* (ditulis $a > b$ atau $b < a$] jika a – b positif

Contoh :
- misalkan 6 > 5, maka 6 – 5 = 1, yaitu bilangan positif
- misalkan 4 > – 3, maka 4 – (–3) = 7, yaitu bilangan positif

Untuk sebarang bilangan riil *a* dan *b*, misalkan bilangan *a* dikatakan *kurang dari atau sama dengan* b (ditulis a ≤ b jika $b - a$ positif atau nol.

Contoh :
- misalkan 5 ≤ 5, maka 5 – 5 = 0, yaitu bilangan nol

  Suatu bilangan riil a, b dan c sembarang dikatakan :
- a positif jika dan hanya jika a > 0
- a negative jika dan hanya jika a < 0
- a kurang dari atau sama dengan b, maka a ≤ b
- a lebih dari atau sama dengan b, maka ditulis a ≥ b
- a kurang dari b dan b kurang dari c atau b diantara a dan c ditulis a < b < c

Berikut ini adalah beberapa sifat yang sangat penting untuk diketahui. untuk sebarang bilangan riil *a*, *b*, dan *c*
1. Jika $a \le b$ maka $a + c \le b + c$ untuk setiap bilangan riil *c*.
2. Jika $a \le b$ dan $b \le c$ maka $a \le c$.
3. a. Jika $a \le b$ dan $c > 0$ maka $a.c \le b.c$.
   b. Jika $a \le b$ dan $c < 0$ maka $a.c \ge b.c$.
4. a. Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$.
   b. Jika $0 < a \le b$ maka $\frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$.
5. Untuk sebarang bilangan riil *a* dan *b* berlaku tepat satu:

$a < b,\ a = b,$ atau $a > b$

6. Jika $a,b \geq 0$ maka: $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

1.1.5.Soal-Soal Latihan 1.1

Tentu anda sudah dapat mengerjakan dengan baik, untuk lebih mengingatkan kembali, coba kerjakan soal-soal di bawah ini

1. Hilangkan tanda kurung yang ada
   a. $4 - 3(8 - 12) - 6 =$
   b. $-4[3(-6 + 13) - 2(5 - 2)] =$
   c. $\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{12} - \frac{2}{9}\right) =$
   d. $2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) - \frac{1}{16} =$

2. Sederhanakan bentuk-bentuk di bawah ini
   a. $(2x - 3)(x + 4) =$
   b. $(2x - 3)^2 =$
   c. $\frac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x} =$
   d. $\frac{18}{x^2 + 3x} - \frac{4}{x} + \frac{6}{x + 3} =$
   e. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} \times \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} =$

3. Manakah diantara bilangan berikut yang termasuk bilangan rasional dan mana yang irasional
   a. $\sqrt{4}$
   b. 0,375
   c. $1 + \sqrt{2}$
   d. $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$
   e. $\sqrt{6} + \sqrt{3}$

4. Ubahlah bilangan rasional berikut menjadi decimal dengan melakukan pembagian panjang
   a. $\frac{5}{11} =$ b. $\frac{3}{20} =$
   c. $\frac{7}{8} =$ d. $\frac{3}{7} =$ e. $\frac{11}{3} =$

5. Ubahlah masing-masing decimal berulang menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat
   a. 0,123123123….
   b. 2,56565656….
   c. 0,199999…..
   d. 3,92929292….

1.2. Pertidaksamaan

Perubah (*variabel*) adalah lambang *(symbol)* yang digunakan untuk menyatakan sebarang anggota suatu himpunan. Jika himpunannya *R* maka perubahnya disebut *perubah riil.* Selanjutnya, yang dimaksudkan dengan perubah adalah perubah riil.

Persamaan (*equality*) adalah kalimat matematika yang memuat variabel dan belum diketahui benar atau salahnya serta memuat tanda sama dengan (=)

Contoh 1.1:

a. $3x - 17 = 6$
b. $x^2 - 2x - 3 = 0$

Pertidaksamaan (*inequality*) adalah kalimat matematika yang memuat variabel dan belum diketahui benar atau salahnya serta memuat salah satu tanda ketidaksamaan antara lain kurang dari (<), lebih dari (>), kurang dari atau sama dengan (≤), lebih dari atau sama dengan (≥)

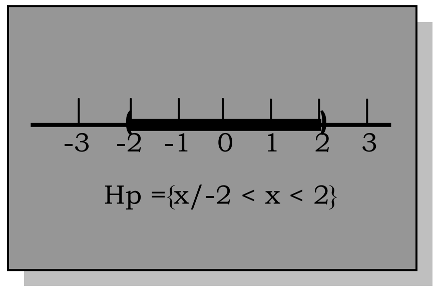
Contoh 1.2:

a. $2x - 7 \leq x + 1$
b. $\dfrac{2x-1}{x+3} > 1$
c. $x^2 - x - 12 < 0$

Jika kita menghadapi persamaan ataupun pertidaksamaan, maka keduanya mempunyai penyelesaian, yaitu bilangan riil yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan yang diketahui.

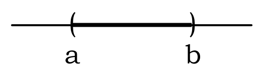
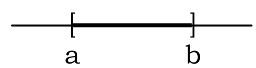
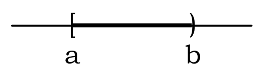
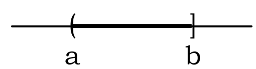
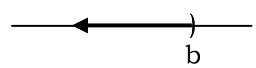
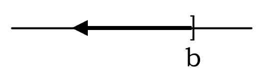
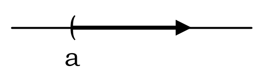
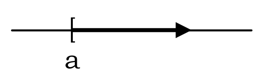
Menyelesaikan suatu pertidaksamaan adalah mencari semuah himpunan bilangan riil yang membuat pertidaksamaan menjadi berlaku, himpunan penyelesaianya tidak bias disebutkan satu per satu dan biasanya hanya dituliskan dalam bentuk selang interval.

Selang interval dituliskan dalam bentuk garis bilangan, misalnya himpunan penyelesaian suatu pertidaksamaan dapat dilihat seperti pada Gambar 1.7



Gambar 1.7: Himpunan Penyelesaian

Selang pada Gambar 1.7 disebut selang terbuka karena untuk x = -2 dan x = 2 tidak termasuk dalam himpunan penyelesaian, secara rinci ada beberapa macam selang seperti berikut.

Penulisan Himpunan	Penulisan Selang	Grafik
• $\{x/a < x < b\}$	(a,b)	
• $\{x/a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$	
• $\{x/a \leq x < b\}$	$[a,b)$	
• $\{x/a < x \leq b\}$	$(a,b]$	
• $\{x/x < b\}$	$(-\infty,b)$	
• $\{x/x \leq b\}$	$(-\infty,b]$	
• $\{x/x > a\}$	(a,∞)	
• $\{x/x \geq a\}$	$[a,\infty)$	

Secara umum pertidaksamaan terdapat tiga bentuk, yaitu pertidaksamaan linier, pertidaksamaan pangkat n dimana $n \geq 2$ dan pertidaksamaan pecahan, untuk lebih jelasnya mari kita perhatikan pembahasan satu per satu :

1.2.1.Pertidaksamaan Linier

Seperti halnya menyelesaikan suatu persamaan, maka untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan juga mempunyai beberapa prosedur, antara lain :

♦. Kita dapat menambahkan atau mengurangkan bilangan yang sama pada kedua ruas suatu pertidaksamaan

♦. Kita dapat mengalikan kedua ruas suatu pertidaksamaan dengan suatu bilangan positif

♦. Kita dapat mengalikan kedua ruas suatu pertidaksamaan dengan bilangan negative, tetapi tanda pertidaksamaanya harus dibalik

♦. Jika dalam pertidaksamaan terdapat penyebut yang mengandung variabel, maka penyebut tersebut tidak boleh dihilangkan dengan cara memindahkan ke salah satu ruas

Contoh 1.3 :
Selesaiakan pertidaksamaan berikut $2x - 6 < 3 - x$

Penyelesaian 1.3:

•. tambahkan kedua ruas dengan x

$\Rightarrow 2x - 6 + x \quad < 3 - x + x$

$\Rightarrow \quad 3x - 6 \quad < 3$

•. tambahkan kedua ruas itu dengan 6

$\Rightarrow 3x - 6 + 6 \quad < 3 + 6$

$\Rightarrow \quad 3x \quad < 9$

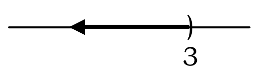
•. kalikan kedua ruas itu dengan (1/3)

$\Rightarrow \quad 3x\,(1/3) \quad < 9\,(1/3)$

$\Rightarrow \quad x \quad < 3$

•. jadi himpunan penyelesaiannya Hp = $\{x / x < 3\}$

•. Grafiknya :



Contoh 1.4:
Selesaiakan pertidaksamaan berikut $3x - 5 \leq 3 + 5x$

Penyelesaian 1.4:

•. kurangkan kedua ruas dengan 5x

$\Rightarrow 3x - 5 - 5x \;\leq 3 + 5x - 5x$

$\Rightarrow \quad -2x - 5 \leq 3$

•. tambahkan kedua ruas itu dengan 5

$\Rightarrow -2x - 5 + 5 \leq 3 + 5$

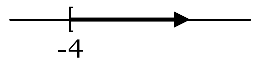
$\Rightarrow \quad -2x \leq 8$

•. kalikan kedua ruas itu dengan (–1/2) sehingga tandanya dibalik

$\Rightarrow -2x\,(-1/2) \geq 8(-1/2)$

$\Rightarrow \quad x \geq -4$

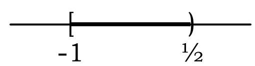
•. jadi himpunan penyelesaiannya Hp = {x/ x $\geq$ –4}
•. Grafiknya :



Contoh 1.5:
Selesaiakan pertidaksamaan berikut $1 \leq 2x + 3 < 4$

Penyelesaian 1.5:
•. kedua ruas kita kurangkan dengan 3
 $\Rightarrow$ $1 - 3 \leq 2x + 3 - 3 < 4 - 3$
 $\Rightarrow$ $-2 \leq 2x < 1$
•. kedua kita kalikan dengan (1/2)
 $\Rightarrow$ $-2\ (1/2) \leq 2x\ (1/2) < 1\ (1/2)$
 $\Rightarrow$ $-1 \leq x < 1/2$

•. jadi himpunan penyelesaiannya Hp = {x/$-1 \leq x < 1/2$}
•. grafiknya

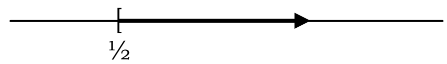


Contoh 1.6:
Selesaiakan pertidaksamaan berikut $2 + 3x \leq 5x + 1 < 16$

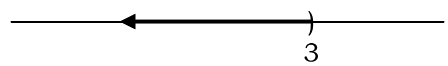
Penyelesaian 1.6:
•. Karena bentuknya setiap ruas terdapat variabel, maka pertidaksamaan di atas dipecah menjadi dua, pertidaksamaan (1) yaitu $2 + 3x \leq 5x + 1$ dan pertidaksamaan (2) yaitu $5x + 1 < 16$ yang masing-masing harus dicari himpunan penyelesaiannya kemudian ditentukan irisanya jika ada

•. Menyelesaikan pertidaksamaan (1) dan pertidaksamaan (2), yaitu :
 $\Rightarrow$ $2 + 3x \leq 5x + 1$
  ♦. Menambahkan kedua ruas dengan –2
 $\Rightarrow$ $2 + 3x - 2 \leq 5x + 1 - 2$
 $\Rightarrow$ $3x \leq 5x - 1$
  ♦. Menambahkan kedua ruas dengan –5x
 $\Rightarrow$ $3x - 5x \leq 5x - 1 - 5x$
 $\Rightarrow$ $-2x \leq -1$
  ♦. Mengalikan kedua ruas dengan –1/2
 $\Rightarrow$ $-2x\ (-1/2) \geq -1(-1/2)$
 $\Rightarrow$ $x \geq 1/2$
  ♦. Himpunan penyelesaian 1 adalah Hp = {x/ x $\geq$ 1/2}
 $\Rightarrow$ $5x + 1 < 16$
  ♦. Menambahkan kedua ruas dengan –1
 $\Rightarrow$ $5x + 1 < 16$

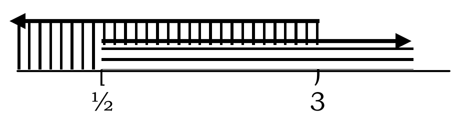
⇒ $5x + 1 - 1 < 16 - 1$
⇒ $5x < 15$
♦. Mengalikan kedua ruas dengan 1/5
⇒ $5x\,(1/5) < 15(1/5)$
⇒ $x < 3$
♦. Himpunan penyelesaian 2 adalah Hp = $\{x/\ x < 3\}$
⇒ garis bilangan untuk Hp1 dan Hp 2 adalah sebagai berikut
♦. Hp1= $\{x/\ x \geq 1/2\}$



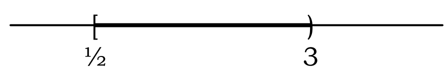
♦. Hp2= $\{x/\ x < 3\}$



- . jadi himpunan penyelesaiannya adalah irisan dari Hp1 dan Hp2 yaitu Hp = $\{x/ 1/2 \leq x < 3\}$



- . grafiknya



1.2.2.Pertidaksamaan Pangkat n dimana n ≥ 2

Yang dimaksud dengan pertidaksamaan pangkat n dimana n ≥ 2 adalah pertidaksamaan kuadrat, pangkat tiga, pangkat empat dan seterusnya, misalnya :

- . $x^2 - x < 6$
- . $(x + 2)(2x - 1)(x - 2) \geq 0$

pertidaksamaan ini akan mengalami pemfaktoran yaitu dijadikan sebagai faktor linier x – a, faktor linier x – a bernilai positif untuk x > a dan bernilai negative untuk x < a, sehingga jika terdapat perkalian antara beberapa faktor linier misalnya (x – a)(x – b) dapat berubah dari positif menjadi negative atau sebaliknya dari negatif menjadi positif.

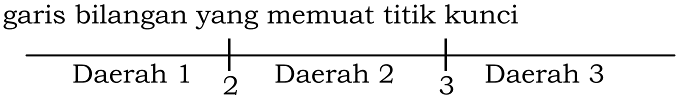
Ada beberapa langkah untuk menyelesaikan pertidaksamaan ini yaitu :

♦. Lihat tanda pertidaksamaan, jika tandanya < atau ≤, maka berarti daerah himpunan penyelesaianya daerah negative, jika tandanya ≥ atau >, maka daerah himpunan penyelesaiannya daerah positif

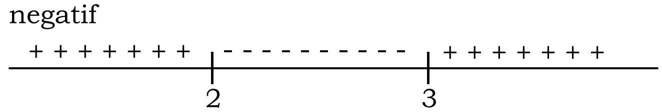
- ♦. Jadikan ruas kanan sama dengan nol
- ♦. Jadikan ruas kiri menjadi beberapa faktor linier
- ♦. Tentukan titik kunci yang diperoleh dari faktor linier dengan cara mengganti tanda pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan
- ♦. Buat garis bilangan beserta titik kunci yang diperoleh
- ♦. Ambil sembarang bilangan dan substitusikan ke dalam pertidaksamaan yang diketahui tapi hanya ruas kiri saja, jika menghasilkan bilangan negative, maka daerah yang mengandung bilangan tadi adalah daerah negative dan sebaliknya
- ♦. Tentukan hp-nya

Contoh 1.7:
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut yaitu $x^2 - 5x > -6$

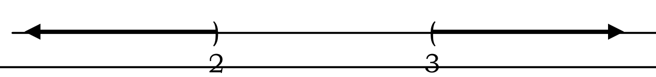
Penyelesaian 1.7:
- ♦. Tanda pertidaksamaan adalah >, artinya daerah yang akan kita cari himpunan penyelesaiannya adalah daerah positif
- ♦. Jadikan ruas kanan sama dengan nol
  - $\Rightarrow x^2 - 5x > -6$
  - $\Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$
- ♦. Jadikan ruas kiri menjadi beberapa factor linier
  - $\Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$
  - $\Rightarrow (x - 2)(x - 3) > 0$
- ♦. Tentukan titik kunci dengan mengganti tanda > menjadi =
  - $\Rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$
  - $\Rightarrow (x - 2) = 0$ diperoleh titik kunci $x = 2$
  - $\Rightarrow (x - 3) = 0$ diperoleh titik kunci $x = 3$
- ♦. Buat garis bilangan yang memuat titik kunci



- ♦. Ambil sembarang bilangan pada salah satu daerah, misalkan pada daerah 1 kita ambil $x = 0$, dan $x = 0$ kita substitusikan ke dalam pertidaksamaan
  $x = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0^2 - 5(0) + 6 = 6$, bilangan positif artinya daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah positif dan daerah 2 adalah daerah negatif



- ♦. Karena daerah yang dicari adalah daerah positif, maka himpunan penyelesaiannya adalah $x < 2$ dan $x > 3$ atau dapat ditulis Hp = $\{x \mid x < 2 \text{ atau } x > 3\}$



Contoh 1.8:
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut yaitu $x^3 - 3x^2 + 2x \leq 0$

Penyelesaian 1.8:

♦. Tanda pertidaksamaan adalah $\leq$, artinya daerah yang akan kita cari himpunan penyelesaiannya adalah daerah negatif

♦. Ruas kanan sudah sama dengan nol

♦. Jadikan ruas kiri menjadi beberapa factor linier

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x \leq 0$

$\Rightarrow x(x - 1)(x - 2) \leq 0$

♦. Tentukan titik kunci dengan mengganti tanda > menjadi =

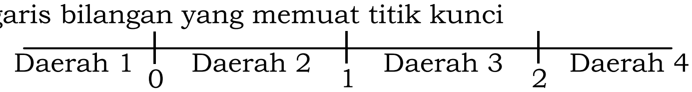
$\Rightarrow x(x - 1)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ diperoleh titik kunci $x = 0$

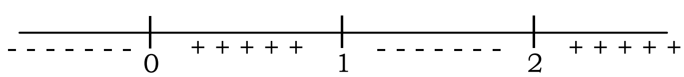
$\Rightarrow (x - 1) = 0$ diperoleh titik kunci $x = 1$

$\Rightarrow (x - 2) = 0$ diperoleh titik kunci $x = 2$

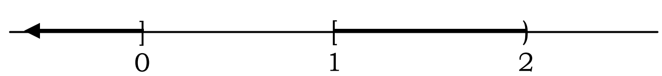
♦. Buat garis bilangan yang memuat titik kunci



♦. Ambil sembarang bilangan pada salah satu daerah, misalkan pada daerah 4 kita ambil $x = 3$, dan $x = 3$ kita substitusikan ke dalam pertidaksamaan
$x = 3 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 3^3 - 3(3)^2 + 2(3) = 6$, bilangan positif artinya daerah 4 dan daerah 2 adalah daerah positif dan daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah negatif



♦. Karena daerah yang dicari adalah daerah negatif, maka himpunan penyelesaiannya adalah $x \leq 0$ dan $1 \leq x \leq 2$ atau dapat ditulis Hp = $\{x \,/\, x \leq 0 \text{ atau } 1 \leq x \leq 2\}$



1.2.3.Pertidaksamaan Rasional

Pertidaksamaan pecahan adalah pertidaksamaan yang mengandung pecahan yaitu pembilang dan penyebut, dimana penyebutnya terdapat suatu variabel.

- ♦. $\frac{2x+8}{x-2} \le x+1$
- ♦. $\frac{2x+1}{x-3} > 1$
- ♦. $\frac{2x-3}{x+1} \ge 0$

perhatikan contoh pertidaksamaan pecahan dia atas, masing-masing mempunyai penyebut yaitu (x − 2), (x − 3) dan (x + 1) penyebut-penyebut ini tidak boleh dipindahkan ke ruas kanan sehingga pertidaksamaan tersebut tidak lagi mempunyai penyebut.
Ada beberapa langkah untuk menyelesaikan pertidaksamaan ini yaitu :

- ♦. Lihat tanda pertidaksamaan, jika tandanya < atau ≤, maka berarti daerah himpunan penyelesaianya daerah negative, jika tandanya ≥ atau >, maka daerah himpunan penyelesaiannya daerah positif
- ♦. Jadikan ruas kanan sama dengan nol
- ♦. Jika di ruas kiri ada yang belum sama penyebutnya, maka samakan penyebutnya dan jumlahkan yang bisa dijumlahkan dan jadikan menjadi factor linier
- ♦. Tentukan titik kunci yang diperoleh dari faktor linier pembilang dan factor linier penyebut dengan cara mengganti tanda pertidaksamaan menjadi tanda sama dengan
- ♦. Buat garis bilangan beserta titik kunci yang diperoleh
- ♦. Ambil sembarang bilangan dan substitusikan ke dalam pertidaksamaan yang diketahui tapi hanya ruas kiri saja, jika menghasilkan bilangan negative, maka daerah yang mengandung bilangan tadi adalah daerah negative dan sebaliknya
- ♦. Tentukan hp-nya

Contoh 1.9:
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut yaitu
$\frac{2x+1}{x-3} > 1$

Penyelesaian 1.9:

- ♦. Tanda pertidaksamaannya adalah > artinya daerah yang akan kita cari adalah daerah positif
- ♦. Jadikan ruas kanan sama dengan nol

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-3} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-3} - 1 > 0$$

- ♦. Ruas kiri disamakan penyebutnya

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x-x+1+3}{x-3} > 0$$

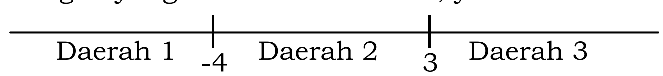
$$\Rightarrow \frac{x+4}{x-3} > 0$$

♦. Tentukan titik kunci dengan mengganti tanda > menjadi =

$$\Rightarrow \frac{x+4}{x-3} = 0$$

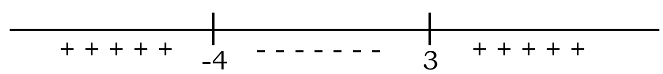
$\Rightarrow$ titik kunci dari pembilang x+4 = 0, diperoleh x = –4
$\Rightarrow$ titik kunci dari penyebut x – 3 = 0, diperoleh x = 3

♦. Garis bilangan yang memuat titik kunci, yaitu :

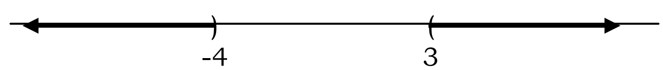


♦. Ambil sembarang bilangan di daerah 2, misalnya diambil x = 0 dan kita substitusikan kedalam

$\Rightarrow \frac{x+4}{x-3} = \frac{0+4}{0-3} = -\frac{4}{3}$ bilangan negative, artinya daerah 2 adalah daerah negative, daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah positif, karena yang diminta daerah positif.



♦. Himpunan penyelesaiannya adalah Hp = {x/ x < –4 atau x > 3}



Contoh 1.10:
Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut yaitu

$$\frac{2x+8}{x-2} \le x+1$$

Penyelesaian 1.10:

♦. Tanda pertidaksamaannya adalah $\le$ artinya daerah yang akan kita cari adalah daerah negatif

♦. Jadikan ruas kanan sama dengan nol

$$\Rightarrow \frac{2x+8}{x-2} \le x+1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+8}{x-2} - (x+1) \leq 0$$

♦. Ruas kiri disamakan penyebutnya

$$\Rightarrow \frac{2x+8}{x-2} - (x+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+8}{x-2} - \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+8}{x-2} - \frac{(x^2-x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+8-x^2+x+2}{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+3x+10}{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(5-x)(x+2)}{x-2} \leq 0$$

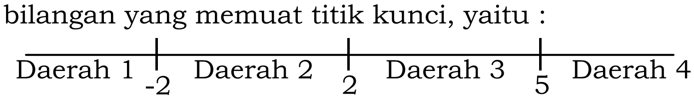
♦. Tentukan titik kunci dengan mengganti tanda > menjadi =

$$\Rightarrow \frac{(5-x)(x+2)}{x-2} = 0$$

$\Rightarrow$ titik kunci dari pembilang $(5 - x)(x + 2) = 0$, diperoleh $x = 5$ dan $x = -2$

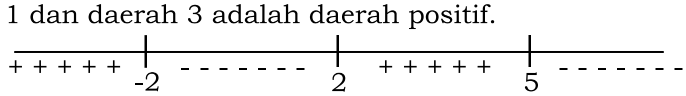
$\Rightarrow$ titik kunci dari penyebut $x - 2 = 0$, diperoleh $x = 2$

♦. Garis bilangan yang memuat titik kunci, yaitu :

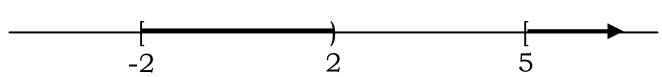


♦. Ambil sembarang bilangan di daerah 2, misalnya diambil $x = 0$ dan kita substitusikan kedalam

$\Rightarrow \frac{(5-x)(x+2)}{x-2} = \frac{(5-0)(0+2)}{0-2} = \frac{(5)(2)}{(-2)} = -5$,bilangan negatif, artinya daerah 2 dan daerah 4 adalah daerah negatif, sedangkan daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah positif.



♦. Himpunan penyelesaiannya adalah Hp=$\{x / -2 \leq x < 2 \text{ atau } x \geq 5\}$



1.2.4.Soal-Soal Latihan 1.2

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut ini dan gambarkan garis bilangannya

1. $4x - 7 < 3x + 5$
2. $4 < 5 - 3x < 3$
3. $1 + 2x < 3x + 3 \leq x + 5$
4. $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$
5. $(x + 5)(x + 2)^2(2x - 1) < 0$
6. $\dfrac{2x+6}{x-2} \leq x+1$
7. $\dfrac{2x-8}{x-1} \geq 2-x$
8. $x^3 - 5x^2 < 6x$
9. $6x - 10 \geq 5x - 16$
10. $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
11. $x^2 + x - 12 < 0$
12. $(x + 2)(2x - 1)(3x + 7) \geq 0$
13. $\dfrac{2x-3}{x+1} > 0$
14. $\dfrac{2x}{x-5} \geq -x$
15. $\dfrac{x-2}{x-1} > \dfrac{x+3}{x+1}$
16. $x^3 - x^2 > x - 1$

1.3. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Sebelum kita belajar mengenai cara menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak, maka ada tiga hal penting dalam kalkulus yang berkaitan dengan nilai mutlak.

1.3.1.Nilai Mutlak *(Absolute Value)*

Dalam kalkulus nilai mutlak sangat berguna, oleh karena itu kita harus terampil dalam bekerja dengan nilai mutlak, untuk dapat menggunakan nilai mutlak dengan baik, kita perlu mengetahui apa itu nilai mutlak.

Definisi :

Nilai mutlak suatu bilangan riil, dinyatakan dengan $|x|$ didefinisikan sebagai berikut :

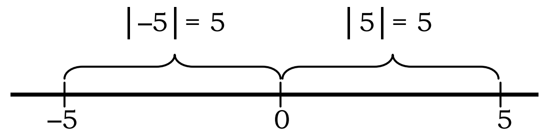
$$|x| = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$

Contoh :

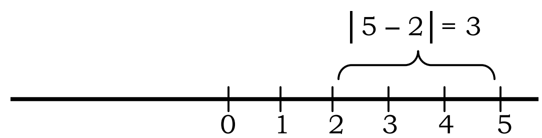
- $|3| = 3$
- $|0| = 0$
- $|-4| = -(-4) = 4$

Nilai mutlak suatu bilangan adalah panjang atau jarak bilangan tersebut dari bilangan 0, sehingga jika kita mengatakan nilai mutlak

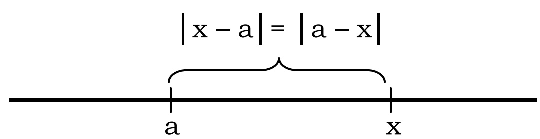
5 adalah 5 yang artinya jarak titik 5 dari titik 0, nilai mutlak –7 adalah 7, nilai mutlak 0 adalah 0, dan seterusnya, hal ini akan membantu kita dalam mengartikan nilai mutlak, yaitu :



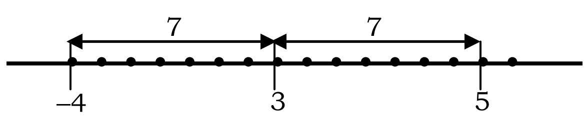
Diartikan bahwa $|5|$ adalah jarak titik 5 dari angka nol, yaitu 5 dan $|-5|$ adalah jarak titik (–5) dari angka nol, yaitu 5
Jika $|x|$ menyatakan jarak titik x dari titik nol, maka $|x - a|$ menyatakan jarak titik x dari titik a, sehingga jika kita mengatakan jarak titik 5 dari titik 2, maka ditulis $|5 - 2| = 3$



Secara umum dapat digambarkan sebagai berikut :



Sebagai contoh, jika $|x-3| = 7$ maka artinya *x* berjarak 7 satuan di sebelah kanan atau di sebelah kiri 3 seperti di lukiskan di bawah ini



Secara aljabar, jika disajikan pernyataan $|x-3| = 7$ maka kita dapat menentukan nilai x, yaitu :

•. $|x - 3| = 7 \Rightarrow x - 3 = 7$ atau $x - 3 = -7$
$\Rightarrow x = 10$ atau $x = -4$

arti $|x-3| = 7$ adalah jarak suatu bilangan (x) dari titik 3 adalah 7 satuan, sehingga bilangan tersebut adalah 10 atau –4

1.3.2.Sifat Nilai Mutlak

Untuk membantu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai mutlak, maka ada beberapa sifat nilai mutlak yang sangat membantu, antara lain :

a. $|x| \geq 0$ $\quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b. $|x.y| = |x|.|y|$ $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \; asal \; y \neq 0$

c. $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (Ketaksamaan segitiga)

d. $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ atau $x = -a$ jika a ≥ 0

e. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ jika a ≥ 0

f. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ atau $x \geq a$

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan dengan nilai mutlak sebenarnya sam halnya kita menyelesaikan pertidaksamaan tanpa nilai mutlak, hanya saja pertama kali kita kerjakan adalah menghilangkan tanda nilai mutlak, untuk menghilangkan tanda nilai mutlak harus berdasarkan sifat-sifat nilai mutlak.

Secara tegas ada dua langkah dalam menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak, yaitu
1. Hilangkan tanda nilai mutlak menurut sifat nilai mutlak
2. Selesaikan pertidaksamaan yang sudah tidak mengandung nilai mutlak sesuai dengan langkah-langkah untuk menyelesian pertidaksamaan tanpa nilai mutlak

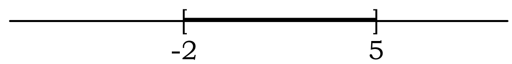
Contoh 1.11:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $|2x - 3| \leq 7$

Penyelesaian 1.11:
1. menghilangkan tanda nilai mutlak yaitu sesuai dengan sifat e, maka pertidaksamaan menjadi :
   $\Rightarrow |2x - 3| \leq 7$
   $\Rightarrow$ –7 ≤ 2x – 3 ≤ 7 sudah menjadi pertidaksamaan tanpa nilai mutlak

2. menyelesaikan pertidaksamaan tanpa nilai mutlak yang diperoleh :
   $\Rightarrow$ –7 ≤ 2x – 3 ≤ 7
   •. Menambahkan 3 untuk setiap ruas
   $\Rightarrow$ –7 + 3 ≤ 2x – 3 + 3 ≤ 7 + 3
   $\Rightarrow$ –4 ≤ 2x ≤ 10
   •. Mengalikan (1/2) untuk setiap ruas
   $\Rightarrow$ –4 ≤ 2x ≤ 10
   $\Rightarrow$ –4 (1/2) ≤ 2x (1/2) ≤ 10 (1/2)
   $\Rightarrow$ –2 ≤ x ≤ 5
   •. Himpunan penyelesaianya Hp = {x/–2 ≤ x ≤ 5 }

•. Garis bilangannya



Contoh 1.12:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $|3x-5| \geq 1$

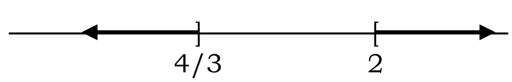
Penyelesaian 1.12:

1. menghilangkan tanda nilai mutlak yaitu sesuai dengan sifat f, maka pertidaksamaan menjadi :
   $\Rightarrow$ $|3x-5| \geq 1$
   $\Rightarrow$ $3x-5 \leq -1$ atau $3x-5 \geq 1$, terlihat bahwa menjadi dua buah pertidaksamaan yang tidak mengandung nilai mutlak dan kedua pertidaksamaan ini harus kita tentukan himpunan penyelesaian masing-masing yang nantinya kita gabungkan atau unionkan ($\cup$)

2. menyelesaikan pertidaksamaan tanpa nilai mutlak yaitu :
   $\Rightarrow$ pertidaksamaan 1 : $3x-5 \leq -1$
   •. Menambahkan 5 untuk kedua ruas
   $\Rightarrow$ $3x - 5 + 5 \leq - 1 + 5$
   $\Rightarrow$ $3x \leq 4$
   •. Mengalikan (1/3) untuk kedua ruas
   $\Rightarrow$ $3x \leq 4$
   $\Rightarrow$ $3x\ (1/3) \leq 4\ (1/3)$
   $\Rightarrow$ $x \leq 4/3$
   •. Himpunan penyelesaianya Hp1 = {x/ x ≤ 4/3 }
   $\Rightarrow$ pertidaksamaan 2 : $3x-5 \geq 1$
   •. Menambahkan 5 untuk kedua ruas
   $\Rightarrow$ $3x - 5 + 5 \geq 1 + 5$
   $\Rightarrow$ $3x \geq 6$
   •. Mengalikan (1/3) untuk kedua ruas
   $\Rightarrow$ $3x \geq 6$
   $\Rightarrow$ $3x\ (1/3) \geq 6\ (1/3)$
   $\Rightarrow$ $x \geq 2$
   •. Himpunan penyelesaianya Hp2 = {x/ x ≥ 2 }

3. himpunan penyelesaianya adalah Hp = {Hp1 ∪ Hp2} yaitu Hp = { x/ x ≤ 4/3 ∪ x ≥ 2 }

4. garis bilangannya



Contoh 1.13:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $\left|\frac{2x}{x-2}\right| \le 3$

Penyelesaian 1.13:

1. menghilangkan tanda nilai mutlak yaitu sesuai dengan sifat e, maka pertidaksamaan menjadi :

   $\Rightarrow \quad \left|\frac{2x}{x-2}\right| \le 3$

   $\Rightarrow \quad -3 \le \frac{2x}{x-2} \le 3$, terlihat bahwa tanda nilai mutlak sudah tidak ada lagi dan menjadi pertidaksamaan biasa, karena bentuk pertidaksamaan tidak dapat diselesaikan secara serentak, maka pertidaksamaan tersebut kita pecah menjadi dua, yaitu pertidaksamaan (1) yaitu $-3 \le \frac{2x}{x-2}$ atau $\frac{2x}{x-2} \ge -3$ dan pertidaksamaan (2) yaitu $\frac{2x}{x-2} \le 3$ dan kedua pertidaksamaan ini harus kita tentukan himpunan penyelesaian masing-masing yang nantinya kita gabungkan atau unionkan ($\cup$)

2. menyelesaikan pertidaksamaan tanpa nilai mutlak yaitu :

   $\Rightarrow$ pertidaksamaan 1 : $\frac{2x}{x-2} \ge -3$

   - Daerah yang diminta adalah daerah positif ($\ge$)
   - Menambahkan 3 untuk kedua ruas

   $\Rightarrow \quad \frac{2x}{x-2} + 3 \ge -3 + 3$

   $\Rightarrow \quad \frac{2x}{x-2} + 3 \ge 0$

   - Menyamakan penyebut di ruas kiri

   $\Rightarrow \quad \frac{2x}{x-2} + 3 \ge 0$

   $\Rightarrow \quad \frac{2x}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} \ge 0$

   $\Rightarrow \quad \frac{2x + 3x - 6}{x-2} \ge 0$

   $\Rightarrow \quad \frac{5x-6}{x-2} \ge 0$

- Menentukan titik kunci dengan mengganti tanda ≥ dengan tanda =

$\Rightarrow \quad \dfrac{5x-6}{x-2}=0$

$\Rightarrow$ Dari pembilang 5x – 6 = 0 maka didapat titik kunci x = 6/5

$\Rightarrow$ Dari penyebut x – 2 = 0 maka didapat titik kunci x = 2

- Garis bilangan

Daerah 1 | 6/5 | Daerah 2 | 2 | Daerah 3

- Ambil nilai x sembarang pada daerah 1, misalnya kita ambil x = 0, jika kita substitusikan ke

  $\dfrac{5x-6}{x-2}=$ akan diperoleh :

  $\dfrac{5x-6}{x-2}=\dfrac{5(0)-6}{0-2}=\dfrac{0-6}{0-2}=3$ diperoleh bilangan positif, sehingga daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah positif dan daerah 2 adalah daerah negatif

+ + + + + | 6/5 | - - - - - - - | 2 | + + + + + +

- Himpunan penyelesaian pertidaksamaan 1 adalah Hp1= {x/ x ≤ 6/5 atau x > 2 }

$\Rightarrow$ pertidaksamaan 2 : $\dfrac{2x}{x-2}\le 3$

- Daerah yang diminta adalah daerah negatif (≤)
- Menambahkan (–3) untuk kedua ruas

$\Rightarrow \quad \dfrac{2x}{x-2}-3\le 3-3$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2x}{x-2}-3\le 0$

- Menyamakan penyebut di ruas kiri

$\Rightarrow \quad \dfrac{2x}{x-2}-3\le 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{3(x-2)}{x-2}\le 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{2x-3x+6}{x-2}\le 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-x+6}{x-2}\le 0$

- Menentukan titik kunci dengan mengganti tanda $\leq$ dengan tanda =

$\Rightarrow \dfrac{-x+6}{x-2} = 0$

$\Rightarrow$ Dari pembilang – x + 6 = 0 maka didapat titik kunci x = 6

$\Rightarrow$ Dari penyebut x – 2 = 0 maka didapat titik kunci x = 2

- Garis bilangan

Daerah 1 | 2 | Daerah 2 | 6 | Daerah 3

- Ambil nilai x sembarang pada daerah 1, misalnya kita ambil x = 0, jika kita substitusikan ke

  $\dfrac{-x+6}{x-2} =$ akan diperoleh :

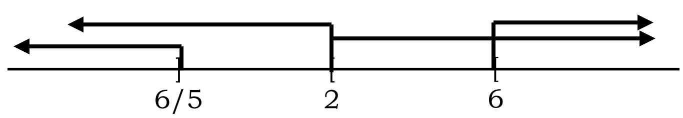
  $\dfrac{-x+6}{x-2} = \dfrac{-0+6}{0-2} = \dfrac{6}{-2} = -3$ diperoleh bilangan negatif, sehingga daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah negatif dan daerah 2 adalah daerah positif

  - - - - - - - | 2 | + + + + + | 6 | - - - - - -

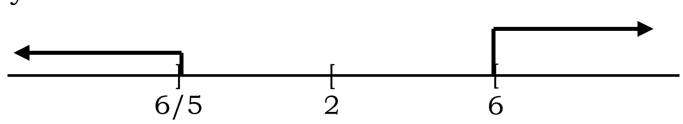
- Himpunan penyelesaian pertidaksamaan 2 adalah Hp1= {x/ x < 2 atau x $\geq$ 6 }

3. himpunan penyelesaianya adalah Hp = {Hp1 $\cup$ Hp2} yaitu Hp = { x/ x $\leq$ 6/5 atau x $\geq$ 6 }

4. garis bilangannya



Irisanya adalah :



1.3.3.Akar Kuadrat

Seperti yang telah kita ketahui bahwa setiap bilangan positif mempunyai dua akar kuadrat, misalnya dua akar kuadrat dari 9 adalah –3 dan 3, dua akar kuadrat dari 100 adalah –10 dan 10.

Untuk $a \geq 0$, maka lambing $\sqrt{a}$ disebut ***akar kuadrat utama*** dari a yang menunjukan akar kuadrat tak negative dari a , sehingga $\sqrt{9} = 3$ dan $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$, jadi kita dapat mengatakan dua akar kuadrat dari 5 adalah $\pm\sqrt{5}$, sehingga jangan kita menuliskan $\sqrt{16} = \pm 4$ tapi cukup kita tulis $\sqrt{16} = 4$.
Secara jelas dapat kita tuliskan bahwa :

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Hal ini dapat diperlihatkan pada rumus abc untuk menentukan akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

1.3.4.Kuadrat

Kuadrat yang menyatakan $|x|^2 = x^2$ ini berasal dari salah satu sifat yaitu $|a||b| = |ab|$.

Namun pada pertidaksamaa tidak selalu benar, misalnya pada $-4 < 3$, jika kita kuadratkan maka akan menjadi $(-4)^2 < 3^2$ atau $16 < 9$ ini mengakibatkan tidak berlaku, tetapi pada $3 < 5$ dan kita kuadratkan akan menjadi $3^2 < 5^2$ atau $9 < 25$ menunjukan hal yang benar.
Jika kita bekerja pada bilangan tak negated, maka $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ salah satu variannya adalah pada nilai mutlak yaitu :

$$\boxed{|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2}$$

Contoh 1.14:
Selesaikan pertidaksamaan $|3x + 1| < 2|x - 6|$

Penyelesaian 1.14:
Sesuai dengan definisi di atas, maka kita kuadratkan untuk setiap ruas, yaitu :

$|3x + 1| < 2|x - 6| \quad \Rightarrow |3x + 1| < |2x - 12|$
$\Rightarrow (3x + 1)^2 < (2x - 12)^2$
$\Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 < 4x^2 - 48x + 144$
$\Rightarrow 9x^2 - 4x^2 + 6x + 48x + 1 - 144 < 0$
$\Rightarrow 5x^2 + 56x - 143 < 0$

Ini adalah pertidaksamaan biasa yang tidak mengandung nilai mutlak, sehingga kita selesaikan dengan cara penyelesaian pertidaksamaan tanpa nilai mutlak, yaitu :

•. Daerah yang diminta adalah negative (<)
•. Difaktorkan untuk menentukan titik kunci
$\Rightarrow 5x^2 + 56x - 143 < 0$
$\Rightarrow (5x - 11)(x + 13) < 0$
•. Memperoleh titk kunci dengan mengganti tanda < dengan =
$\Rightarrow (5x - 11)(x + 13) = 0$
$\Rightarrow 5x - 11 = 0$ diperoleh $x = 11/5$
$\Rightarrow x + 13 = 0$ diperoleh $x = -13$
•. Garis bilangan

Daerah 1 $\quad -13 \quad$ Daerah 2 $\quad 11/5 \quad$ Daerah 3

Ambil nilai x sembarang pada salah satu daerah, misalnya diambil x = 0 yaitu pada daerah 2, jika x = 0 kita substitusikan ke $5x^2 + 56x - 143 = 5(0)^2 + 56(0) - 143 = -143$ menghasilkan bilangan negative, artinya pada daerah 2 adalah daerah negative, dan pada daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah positif.

+ + + + + $\quad -13 \quad$ - - - - - - - $\quad 11/5 \quad$ + + + + +

•. Himpunan penyelesaiannya Hp = $\{x \,/ -13 < x < 11/5\}$

Contoh 1.15:
Selesaikan pertidaksamaan $\left|\dfrac{2x}{x-2}\right| > 3$

Penyelesaian 1.15:
Pertidaksamaan diatas juga dapat diselesaikan dengan mengacu pada sifat f yaitu $|x| > a$ maka $x < -a$ atau $x > a$ atau menggunakan sifat kuadrat.
Sekarang kita mencoba menggunakan sifat kuadrat, yaitu :

•. $\left|\dfrac{2x}{x-2}\right| > 3 \quad \Rightarrow |2x| > 3|x-2|$

$$\Rightarrow |2x| > |3x-6|$$
$$\Rightarrow (2x)^2 > (3x-6)^2$$
$$\Rightarrow 4x^2 > 9x^2 - 36x + 36$$
$$\Rightarrow 0 > 5x^2 - 36x + 36$$
$$\Rightarrow (5x-6)(x-6) < 0$$
$$\Rightarrow (5x-6)(x-6) < 0$$

•. Daerah yang diminta adalah daerah negative (<)

•. Memperoleh titik kunci dengan mengganti tanda < dengan =

$\Rightarrow 5x - 6 = 0$ diperoleh titik kunci x = 6/5

$\Rightarrow x - 6 = 0$ diperoleh titik kunci x = 6

$\Rightarrow x \neq 2$

•. Garis bilangan

Daerah 1 | 6/5 | Daerah 2 | 6 | Daerah 3

Ambil nilai x pada salah satu daerah, misalkan daerah 1 yaitu x = 0, kita substitusikan ke dalam $5x^2 - 36x + 36 = 5(0)^2 - 36(0) + 36 = 36$ bilangan positif, artinya daerah 1 dan daerah 3 adalah daerah positif dan daerah 2 adalah daerah negative.

+ + + + + | 6/5 | - - - - - - - | 6 | + + + + +

•. Himpunan penyelesaianya Hp = {x/6/5 < x < 6, x ≠ 2}

1.3.5.Sifat Tambahan

Ada bentuk soal pertidaksamaan yang harus memenuhi sifat tambahan, yaitu bentuk soal yang memenuhi $|ax-b| < cx + d$ atau $|ax-b| > cx + d$, soal tersebut mempunyai ciri :

1. nilai mutlak hanya pada salah satu ruas
2. kedua ruas mengandung variabel

jika terdapat soal seperti $|ax-b| < cx + d$, maka langkah-langkah untuk menyelesaikannya adalah :

•. Untuk ax – b > 0 maka ax – b < cx + d, dari kedua pertidaksamaan diperoleh himpunan penyelesaianya, yaitu :
(1). ax – b > 0 diperoleh x > b/a disebut Hp(1)={x/x > b/a}
(2). ax – b < cx + d diperoleh x < (b+d)/(a–c) disebut Hp(2)={x/ x < (b+d)/(a–c) } dan HpA = {x/Hp(1) ∩ Hp(2) }

- . Untuk $ax - b < 0$ maka $-(ax - b) < cx + d$, dari kedua pertidaksamaan diperoleh himpunan penyelesaianya, yaitu :
  (3). $ax - b < 0$ diperoleh $x < b/a$ disebut $Hp(3)=\{x/x < b/a\}$
  (4). $-(ax - b) < cx + d$ diperoleh $x > (b-d)/(a+c)$ disebut $Hp(4)=\{x/ x > (b-d)/(a+c) \}$ dan $HpB = \{x/Hp(3) \cap Hp(4) \}$
- . Hp terakhirnya adalah $Hp = \{x/ HpA \vee HpB \}$

Contoh 1.16:

Selesaikan pertidaksamaan $2x+3<|4x-5|$

Penyelesaian 1.16:

- . Untuk $4x - 5 > 0$, maka $2x + 3 < 4x - 5$

$\Rightarrow 4x - 5 > 0$	$\Rightarrow 2x + 3 < 4x - 5$
$\Rightarrow x > 5/4$	$\Rightarrow 2x - 4x < -5 - 3$
	$\Rightarrow -2x < -8$
	$\Rightarrow x > 4$
$\Rightarrow Hp(1) = \{x / x > 5/4 \}$	$\Rightarrow Hp(2) = \{x / x > 4 \}$

  $HpA = \{ Hp(1) \cap Hp(2) \}$
  $HpA = \{ x / x > 5/4 \ \cap x > 4 \}$
  $HpA = \{ x / x > 4 \}$
- . Untuk $4x - 5 < 0$, maka $2x + 3 < -(4x - 5)$

$\Rightarrow 4x - 5 < 0$	$\Rightarrow 2x + 3 < -(4x - 5)$
$\Rightarrow x < 5/4$	$\Rightarrow 2x + 3 < -4x + 5)$
$\Rightarrow Hp(3) = \{x / x < 5/4 \}$	$\Rightarrow 2x + 4x < 5 - 3$
	$\Rightarrow 6x < 2$
	$\Rightarrow x < 1/3$
	$\Rightarrow Hp(4) = \{x / x < 1/3 \}$

  $HpB = \{ Hp(3) \cap Hp(4) \}$
  $HpB = \{ x / x < 5/4 \ \cap x < 1/3 \}$
  $HpB = \{ x / x < 1/3 \}$

- . Himpunan penyelesaiannya adalah HpA atau HpB yaitu
  $Hp = \{ x / x < 1/3$ atau $x > 4 \}$

Contoh 1.17:

Selesaikan pertidaksamaan $|x-4|>x-2$

Penyelesaian 1.17:

- . Untuk $x - 4 > 0$, maka $x - 4 > x - 2$

$\Rightarrow x - 4 > 0$	$\Rightarrow x - 4 > x - 2$
$\Rightarrow x > 4$	$\Rightarrow x - x > -2 + 4$
$\Rightarrow Hp(1) = \{x / x > 4 \}$	$\Rightarrow 0 > 2$
	$\Rightarrow Hp(2) = \{x/\varnothing \}$

  $HpA = \{ Hp(1) \cap Hp(2) \}$

HpA = { x / x > 4 $\cap \varnothing$ }
HpA = $\varnothing$

•. Untuk x – 4 < 0, maka –(x – 4) > x – 2

$\Rightarrow$ x – 4 < 0	$\Rightarrow$ –(x – 4) > x – 2
$\Rightarrow$ x < 4	$\Rightarrow$ –x + 4 > x – 2
$\Rightarrow$ Hp(3) = {x / x < 4 }	$\Rightarrow$ –x – x > –2 – 4
	$\Rightarrow$ –2x > –6
	$\Rightarrow$ x < 3
	$\Rightarrow$ Hp(4) = {x / x < 3 }

HpB = { Hp(3) $\cap$ Hp(4) }
HpB = { x / x < 4 $\cap$ x < 3 }
HpB = { x / x < 3 }

•. Himpunan penyelesaiannya adalah HpA atau HpB yaitu
Hp = { x / x < 3 }

1.3.6.Soal-Soal Latihan 1.3

Kerjakan pertidaksamaan nilai mutlak berikut ini :

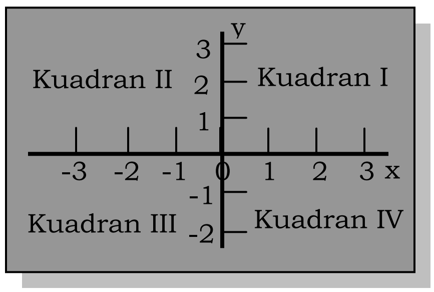
1. $|x-2| < 3|x+7|$
2. $|2x-5| < |x+4|$
3. $2|2x-3| < |x+10|$
4. $|3x-1| < 2|x+6|$
5. $|2x-3| \leq x+2$
6. $\dfrac{2}{x+1} \leq |x|$
7. $\dfrac{|x|+2}{x} \leq 3$
8. $x+|x-3| \leq 3$
9. $|x| \leq 3x-2$
10. $x-|2x+1| \leq 4$

1.4. Sistem Koordinat

Orang yang berjasa dalam hal system koordinat adalah Pierre de Fermat yang pada awalnya menggunakan koordinat untuk memberikan titik-titik dalam kurva. Rene Descrates hanya memberikan petunjuk tentang koordinat dalam sebuah bukunya yang menyebutnya sebagai koordinat Caetesius.

Koordinat Cartesius digambarkan dua garis yang saling tegak lurus, kedua garis berpotongan di titik nol, dua garis tersebut dinamakan **sumbu-sumbu koordinat**, dan garis yang mendatar disebut sumbu-x dan garis yang tegak disebut sumbu-y.

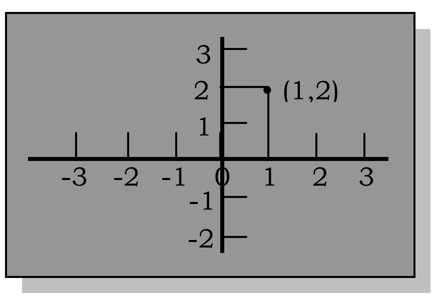
Sumbu-sumbu koordinat membagi menjadi empat daerah yang disebut kuadran, yaitu kuadrat I, kuadran II, kuadran III dan kuadran IV, seperti pada Gambar 1.8



Gambar 1.8: Koordinat Cartesius

Setiap titik pada bidang koordinat cartesius dinyatakan dengan sepasang bilangan (x,y), x disebut absis yaitu menunjukan jarak mendatar dari titik nol, dan y disebut ordinat yaitu menunjukan jarak vertical dari titik nol.

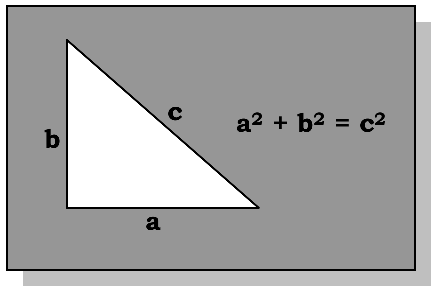
Misalkan ada titik yang berjarak mendatar dari titik nol adalah 1 dan mempunyai jarak vertical dari titik nol adalah 2, maka koordinat titik dinyatakan (1,2) dan terletak seperti pada Gambar 1.9.



Gambar 1.9: Letak Titik Koordinat

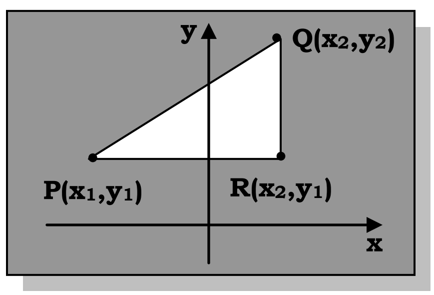
1.4.1.Jarak Dua Titik

Dengan menggunakan koordinat, kita dapat mengetahui jarak antara dua titik yang menggunakan teorema Pythagoras seperti pada Gambar 1.10.



Gambar 1.10: Rumus Pythagoras

Sekarang misalkan diketahui dua titik sembarang dengan koordinat $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ bersama dengan titik R yang mempunyai titik koordinat $R(x_2,y_1)$ sehingga jika kita gambarkan menjadi sebuah segitiga siku-siku seperti pada Gambar 1.11



Gambar 1.11: Tiga Titik Koordinat P, Q dan R

Pada Gambar 1.11 terlihat bahwa panjang PR = $|x_2 - x_1|$ dan panjang RQ = $|y_2 - y_1|$, jika teorema Pythagoras kita terapkan, maka panjang PQ dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

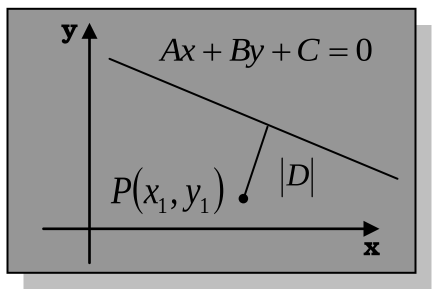
Contoh 1.18:
Tentukan jarak antara titik P(–2, 3) dan Q(4,–1)

Penyelesaian 1.18:
Diketahui titik P(–2, 3) berarti $x_1 = -2$ dan $y_1 = 3$ serta Q(4,–1) maka $x_2 = 4$ dan $y_2 = -1$, sehingga jarak PQ adalah :

$$\Rightarrow PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\Rightarrow PQ = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-3)^2}$$
$$\Rightarrow PQ = \sqrt{(4+2)^2 + (-4)^2}$$
$$\Rightarrow PQ = \sqrt{36+16}$$
$$\Rightarrow PQ = \sqrt{52}$$
$\Rightarrow PQ \approx 7{,}21$ Jadi jarak titik P ke titik Q adalah 7,21

1.4.2.Jarak Titik dengan Garis

Misalkan diketahui persamaan garis yaitu $Ax + By + C = 0$ dan sebuah titik yaitu $P(x_1, y_1)$ seperti pada Gambar 1.12



Gambar 1.12. Garis dan Titik

Dimana $|D|$ adalah jarak titik $P(x_1, y_1)$ ke garis $Ax + By + C = 0$ yang dirumuskan sebagai berikut :

$$|D| = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Contoh 1.19:
Tentukan jarak antara titik $P(-2{,}3)$ dengan garis $2x + 3y + 4 = 0$

Penyelesaian 1.19:
Diketahui titik $P(-2{,}3)$ berarti $x_1 = -2$ dan $y_1 = 3$ serta $A = 2$, $B = 3$ dan $C = 4$ sehingga jarak titik $P(-2{,}3)$ ke garis $2x + 3y + 4 = 0$ adalah :

$$\Rightarrow |D| = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

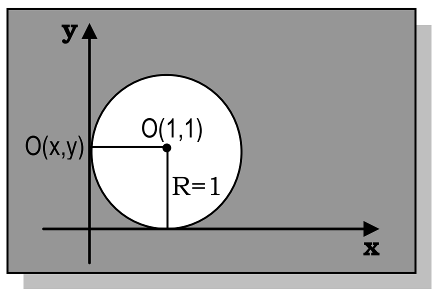
$$\Rightarrow |D| = \frac{(2)(-2)+(3)(3)+(4)}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$\Rightarrow |D| = \frac{-4+9+4}{\sqrt{4+9}}$$

$\Rightarrow |D| = \frac{9}{\sqrt{13}}$ sehingga jarak titik $P(-2,3)$ ke garis $2x+3y+4=0$ adalah $\frac{9}{\sqrt{13}}$

1.4.3.Persamaan Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang terletak pada suatu jarak tetap dari suatu titik tetap yaitu titik pusat lingkaran, sehingga jika kita mengatakan lingkaran dengan jari-jari 1 dan pusat lingkaran di titik (1,1), maka lingkaran itu merupakan himpunan titik-titik yang berjarak 1 dari titik (1,1) seperti pada Gambar 1.13.



Gambar 1.13. Lingkaran dengan R=1

Jika kita mengambil salah satu titik yang terletak pada lingkaran tersebut, misalnya titik A dengan koordinat (x,y), maka jarak antara titik A dengan titik O adalah 1 dan menurut rumus jarak di atas sebagai berikut :

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 1$$

Jika kedua ruas kita kuadratkan, maka akan kita peroleh :

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 1^2$$

Yang disebut persamaan lingkaran, secara umum jika terdapat lingkarang dengan jari-jari R dan titik pusat lingkaran (a,b), maka rumus persamaan lingkaran tersebut adalah :

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2}$$

Contoh 1.20:
Tentukan persamaan lingkaran dengan jari-jari 5 dan pusatnya di titik (1,–5)

Penyelesaian 1.20:

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-(-5))^2 = 5^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$ adalah persamaan lingkaran

Jika persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ kita bongkar kurungnya, maka akan diperoleh :

$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$

Jika kita misalkan A = 2a, B = 2b dan C = $a^2 + b^2 - R^2$, maka persamaan menjadi :

$\Rightarrow x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$

Sehingga kita dapat menentukan nilai-nilai a, b dan R dari persamaan A = 2a, B = 2b dan C = $a^2 + b^2 - R^2$.

Contoh 1.21:
Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan
$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$

Penyelesaian 1.21:
Persamaan secara umum adalah : $x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$ sehingga kita peroleh :
A = 2a $\Rightarrow$ 2 = 2a sehingga a = 1
B = 2b $\Rightarrow$ –6 = 2b sehingga b = –3
C = $a^2 + b^2 - R^2$ $\Rightarrow 6 = 1^2 + (-3)^2 - R^2$
$\Rightarrow 6 = 1 + 9 - R^2$
$\Rightarrow R^2 = 10 - 6$
$\Rightarrow R^2 = 4$
$\Rightarrow R = 2$
Sehingga diperoleh data bahwa lingkaran tersebut mempunyai jari-jari = 2 dan pusatnya dititik (1, –3), jika kita tulis dalam bentuk persamaan yang lain adalah $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2$

Contoh 1.22:
Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan
$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 25 = 0$

Penyelesaian 1.22:

Persamaan secara umum adalah : $x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$ sehingga kita peroleh :

A = 2a $\Rightarrow$ –2 = 2a sehingga a = –1

B = 2b $\Rightarrow$ 10 = 2b sehingga b = 5

C = $a^2 + b^2 - R^2$ $\Rightarrow$ 25 = $(-1)^2 + 5^2 - R^2$

$\Rightarrow 25 = 1 + 25 - R^2$

$\Rightarrow R^2 = 1 + 25 - 25$

$\Rightarrow R^2 = 1$

$\Rightarrow R = 1$

Sehingga diperoleh data bahwa lingkaran tersebut mempunyai jari-jari = 1 dan pusatnya dititik (–1,5), jika kita tulis dalam bentuk persamaan yang lain adalah $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 1$

Contoh 1.23:

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan

$4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$

Penyelesaian 1.23:

Persamaan secara umum adalah : $x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$ sehingga kita untuk memperoleh bentuk seperti bentuk umum, maka persamaan $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$ harus di bagi 4 terlebih dahulu, sehingga peroleh $x^2 + y^2 + x - 3y + 1/4 = 0$, maka

A = 2a $\Rightarrow$ –1 = 2a sehingga a = –1/2

B = 2b $\Rightarrow$ 3 = 2b sehingga b = 3/2

C = $a^2 + b^2 - R^2$ $\Rightarrow$ 1/4 = $(-1/2)^2 + (3/2)^2 - R^2$

$\Rightarrow 1/4 = 1/4 + 9/4 - R^2$

$\Rightarrow R^2 = 1/4 + 9/4 - 1/4$

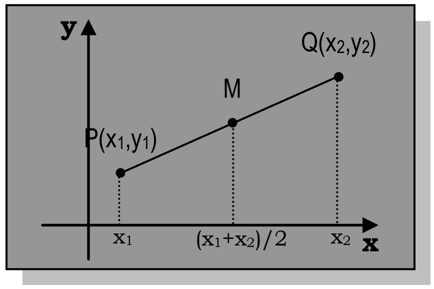
$\Rightarrow R^2 = 9/4$

$\Rightarrow R = 3/2$

Sehingga diperoleh data bahwa lingkaran tersebut mempunyai jari-jari = 3/2 dan pusatnya dititik (–1/2 , 3/2), jika kita tulis dalam bentuk persamaan yang lain adalah $(x+\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

1.4.4.Rumus Titik Tengah

Misalkan diketahui dua titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ dimana $x_1 \leq x_2$, perhatikan Gambar 1.13



Gambar 1.13. Titik Tengah antara dua Titik

Dapat dilihat bahwa :

$$\Rightarrow x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

Ini berarti titik $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ terletak ditengah antara titik x_1 dan x_2 pada sumbu x, dengan cara yang sama, untuk ordinat titik M juga ternyata berada ditengah titik antara y_1 dan y_2 pada sumbu y, hal ini juga dapat dilihat pada pembuktian di bawah ini :

$$\Rightarrow y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_1$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

Sehingga dapat kita simpulkan bahwa :

Koordinat titik tengah M dari potongan garis *PQ* dengan *P(x₁,y₁)* dan *Q(x₂,y₂)* adalah :

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Contoh 1.24:
Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai potongan garis dari (1,3) ke (7,11) sebagai titik tengahnya

Penyelesaian 1.24:
Garis yang melintang dari titik (1,3) ke (7,11) merupakan diameter, sehingga titik tengah dari diameter itu adalah titik pusat, sedangkan panjang dari titik (1,3) ke titik pusat merupakan jari-jarinya.

Diketahui titik (1,3) ke (7,11), maka titik tengahnya atau pusat lingkaran adalah ((1+7)/2 , (3+11)/2) = (4,7), jadi pusat lingkaran berada pada titik (4,7).

Jarak dari titik (4,7) dengan (1,3) merupakan jari-jari, sehingga diperoleh :
$\Rightarrow R^2 = (1 - 4)^2 + (3 - 7)^2$
$\Rightarrow R^2 = (-3)^2 + (-4)^2$
$\Rightarrow R^2 = 9 + 16$
$\Rightarrow R^2 = 25$
$\Rightarrow R = 5$
Diperoleh persamaan lingkarannya, yaitu pusat (4,7) dan jari-jari 5 persamaannya : $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 25$

1.4.5.Soal-Soal Latihan 1.4
Untuk lebih memahami penjelasan yang telah dibahas di atas, maka anda dimohon mengerjakan soal-soal di bawah ini agar anda lebih memahaminya.
1. Tentukan Jarak antara dua titik, Koordinat titik tengah, persamaan lingkaran dengan pusat di titik tengahnya
   a. (2, –1) dan (5,3)
   b. (–2,1) dan (7,13)
   c. (4,2) dan (2,4)
   d. (–2,0) dan (2,0)
   e. (0, –3) dan (0,3)

2. Tentukan pusat lingkaran dan jari-jari lingkaran
   a. $x^2 + y^2 - 6y = 16$
   b. $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$
   c. $x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$
   d. $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y = 20/3$
   e. $4x^2 + 4y^2 = 0$

3. Sebuah tali secara ketat mengelilingi dua lingkaran dengan persamaan $(x + 2)^2 + (y)^2 = 4$ dan $(x - 2)^2 + (y)^2 = 4$, berapakah panjang tali itu ?

4. Diketahui kota A, B dan C merupakan titik sudut sebuah segitiga siku-siku dengan sudut siku-siku di B, AB dan BC adalah jalan raya yang masing-masing berjarak 214 km dan 179 km, sebuah pesawat terbang dapat menerbangi rute AC (dari A ke C langsung tanpa melalui B), sedangkan sebuah truk dari A ke C harus melalui B, jika pengiriman barang dengan menggunakan pesawat biayanya Rp 4 juta /km dan menggunakan truk Rp. 3 juta/km, anda sebagai orang yang telah belajar kalkulus, tolong putuskan harus mengirim menggunakan pesawat atau truk agar biayanya seminimal mungkin

5. diketahui dua lingkaran yaitu $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ apakah kedua lingkaran itu berpotongan ?

1.5. Soal Evaluasi

Kerjakan soal-soal di bawah ini untuk mengingatkan kembali materi yang berada di bab ini

1. Sederhanakan

   a. $\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)^{-1}$

   b. $\dfrac{\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2-x-2}}{\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-2}}$

   c. $\dfrac{x-1}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan di bawah ini

   a. $3-2x \le 4x+1 \le 2x+7$

   b. $(x+4)(2x-1)^2(x-3) \le 0$

   c. $\dfrac{2x-1}{x-2} > 0$

   d. $|8-3x| \ge |2x|$

3. Tentukan persamaan lingkaran dengan garis tengah AB jika A(2,0) dan B(10,4)

4. Tentukan pusat lingkaran dan jari-jarinya dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

5. Tentukan persamaan linkaran dengan pusat lingkaran terletak pada garis y = x dan jari-jari 5

6. Apakah garis $4x-2y+2=0$ memotong lingkaran $(x-2)^2+(y+1) = 3$

7. Apakah garis $x-y+4=0$ akan melalui titik pusat lingkaran $x^2+y^2+8x-8y+28=0$?, jelaskan !