

Homework3

软件13 杨楠

2

证明：数组P中，每个元素都有 n^3 种取法，则整个数组的可能情况有 $(n^3)^n$ 种。

而要使得这n个元素都唯一，相当于从这 n^3 个数中取 n 排列，即有 $A_{n^3}^n$ 种情况，从而所有元素都唯一的概率为

$$\frac{A_{n^3}^n}{(n^3)^n} = \frac{n^3(n^3-1)(n^3-2)\dots(n^3-n+1)}{n^{3n}} = (1-\frac{1}{n^3})(1-\frac{2}{n^3})\dots(1-\frac{n-1}{n^3}) \quad (1)$$

先证

$$(1-\frac{x}{n^3})(1-\frac{y}{n^3}) > 1-\frac{x+y}{n^3} \quad (2)$$

对于任意的 $x, y > 0$ 成立。

只需将左边展开，得

$$LHS = 1 - \frac{x+y}{n^3} + \frac{xy}{n^6} > RHS$$

从而(2)式成立，将其代入(1)式，有

$$\begin{aligned} (1-\frac{1}{n^3})(1-\frac{2}{n^3})\dots(1-\frac{n-1}{n^3}) &> 1 - \frac{1+2+\dots+n-1}{n^3} \\ &> 1 - \frac{n(n-1)}{2n^3} = 1 - \frac{n-1}{2n^2} = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} \\ &> 1 - \frac{1}{2n} \\ &> 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$