Homework3

软件13 杨楠

2

证明：数组P中，每个元素都有 n^3 种取法，则整个数组的可能情况有 $(n^3)^n$ 种。

而要使得这n个元素都唯一，相当于从这 n^3 个数中取 n 排列，即有 $A_{n^3}^n$ 种情况，从而所有元素都唯一的概率为

$$\frac{A_{n^3}^n}{(n^3)^n}=\frac{n^3(n^3-1)(n^3-2)...(n^3-n+1)}{n^{3n}}=(1-\frac{1}{n^3})(1-\frac{2}{n^3})...(1-\frac{n-1}{n^3}) \tag{1}$$

先证

$$(1-\frac{x}{n^3})(1-\frac{y}{n^3})>1-\frac{x+y}{n^3} \tag{2}$$

对于任意的 $x,y>0$ 成立。

只需将左边展开，得

$$LHS=1-\frac{x+y}{n^3}+\frac{xy}{n^6}>RHS$$

从而(2)式成立，将其代入(1)式，有

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{n^3})(1-\frac{2}{n^3})...(1-\frac{n-1}{n^3}) &> 1-\frac{1+2+...+n-1}{n^3}\\ &> 1-\frac{n(n-1)}{2n^3}=1-\frac{n-1}{2n^2}=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}\\ &> 1-\frac{1}{2n}\\ &> 1-\frac{1}{n}\end{aligned}$$