平面上最近点对实验报告

软件13 杨楠 2021010711

摘要：本实验分析了求平面上最近点对的两种算法，即暴力法和分治法的时间复杂度，并通过运行程序比较运行时间。

1 实验环境

使用C++语言，在Qt 5.15.2平台编写算法程序和图形界面，在Windows 10环境下运行。

2 算法分析

2.1 暴力法

从数组的第一个元素开始，依次往后进行两两组合，计算这两个点的距离，每次更新最短距离和最近点对，直至循环结束。时间复杂度为$\Theta(n^2)$

2.2 分治法

先将数组按照x坐标大小进行排序。以中间的点为基准，画条竖线，分为左右两部分，两边分别递归求解。设两部分所求得的最近点对之间的距离为d_1和d_2，令$d = \min\{d_1, d_2\}$
合并的时候需要检查是否存在这样的一对点，分别位于竖线两侧，且距离小于d，具体做法为，在中间竖线两侧各取宽度为d的区域，获取其中的这些点，按y坐标大小排序。可以证明，若存在这样的点，那么他们之间按排序后的距离之差不多于7。
处理中间区域所用的时间，由于之前已做了预排序，内层循环不多于7次，可做到线性复杂度$\Theta(n)$，从而递归式为

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

由主定理可以解得$T(n) = \Theta(nlgn)$，再加上预排序所用的时间$\mathrm{O}(lgn)$，总的时间复杂度为$T(n) + \mathrm{O}(nlgn) = \Theta(nlgn)$

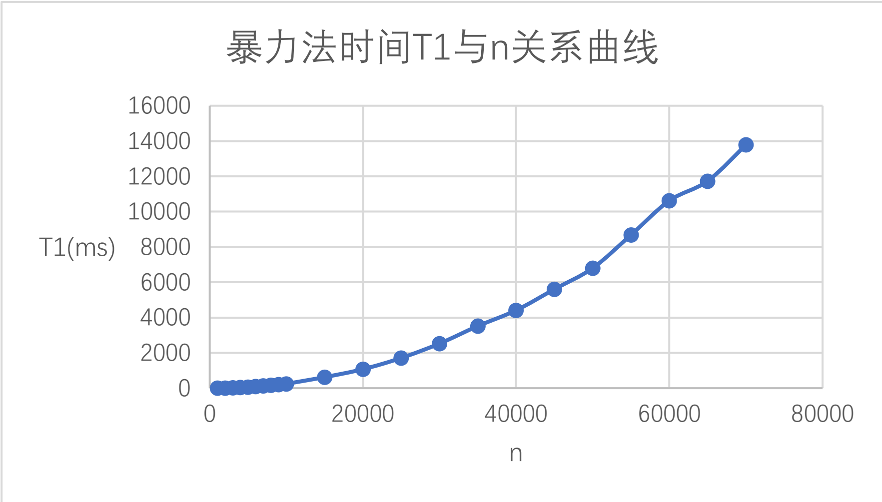
3 实验设计思路

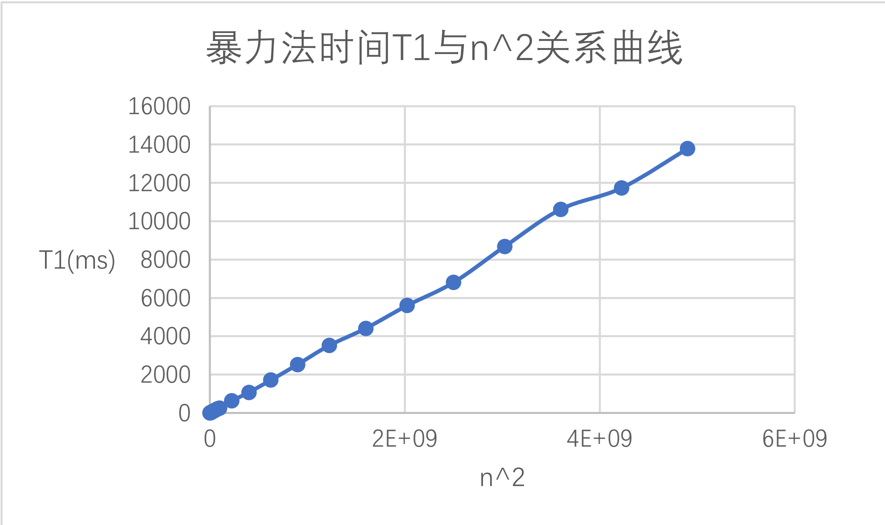
用Qt设计图形界面，可以通过鼠标键盘输入的方式添加点，并且求出最近点对，也可以随机生成若干点，求出最近点对。分别用两种算法计算，并获取算法运行时间。

4 结果分析

4.1 暴力法

分别设置不同的点数n，将运行时间整理成表，绘图如下。

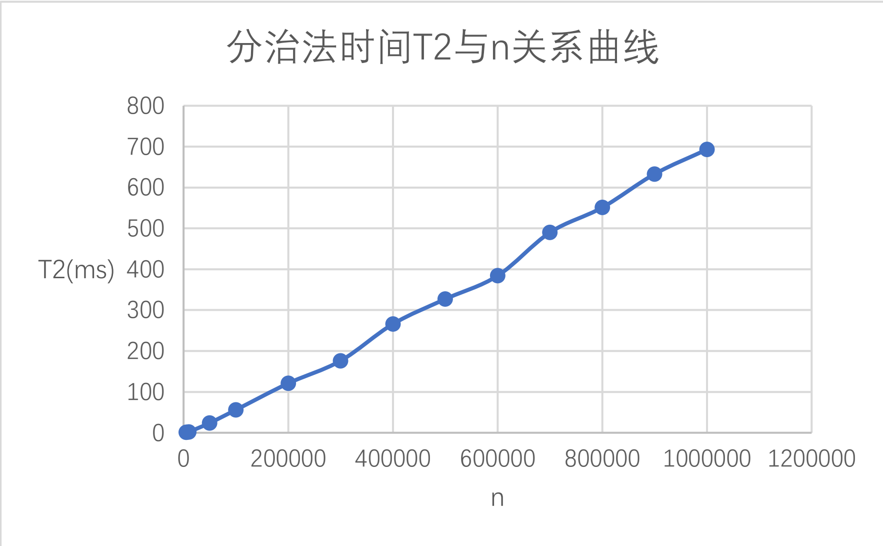




可以看到，暴力法时间 T1 与 n 的图象为下凹的曲线，与n^2的关系大致为线性，和其时间复杂度$T=\Theta(n^2)$相符合。当 n>30000 时，时间已经超过 2 秒，之后的时间增大更明显。

4.2 分治法

设置不同的点数 n，将运行时间整理成表，绘图如下。



可以看到，相比暴力法，分治法的运行时间明显更低，在 n 为几十万的情况下，时间仅为几百 ms，这与算法时间复杂度$O(nlgn)$相符。

5 结论

两种方法相比，暴力算法在 n 比较小的时候，运行时间不会很慢，而 n 较大时，运行时间迅速增加，效率降低。而分治法对于较大的 n 时有着明显的优势。

参考资料

CLRS, Introduction to Algorithms (3rd edition), (2009), The MIT Press