

Homework1

软件13 杨楠

1 证明题

a

证明:

要证明, 对任意的 $f(n) \in \Theta(n^2)$, 存在某个 $g(n) \in \Theta(n^2)$, 使得对任意的 $n > n_0$, 有

$$2n + f(n) = g(n)$$

由

$$\Theta(n^2) = \{f(n) : \exists c_1, c_2, n_0 > 0, s.t. \forall n \geq n_0, c_1 n^2 \leq f(n) \leq c_2 n^2\}$$

对于 $f(n)$, 其相应的 c_1, c_2, n_0 , 要证明存在 c'_1, c'_2, n'_0 使得

$$c'_1 n^2 \leq 2n + f(n) \leq c'_2 n^2$$

那么有

$$c'_1 n^2 \leq 2n + c_1 n^2$$

$$2n + c_2 n^2 \leq c'_2 n^2$$

两式分别除以 n^2 , 有

$$c'_1 \leq \frac{2}{n} + c_1$$

$$\frac{2}{n} + c_2 \leq c'_2$$

取 $c'_1 = c_1, c'_2 = \frac{2}{n_0} + c_2, n'_0 = n_0$ 即可。

b

证明: 假设原命题不成立, 即两者存在交集 $f(n)$, 那么

$$\exists c_1, c_2, n_0 > 0, s.t. \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \tag{1}$$

并且

$$\forall c > 0, \exists n'_0 > 0, s.t. \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < c g(n) \tag{2}$$

但对于任何满足条件 (1) 的 $f(n)$, 其相应的 c_1 , 由条件 (2), 又会有 $f(n) < c_1 g(n)$, 矛盾, 因此不存在这样的交集 $f(n)$, 即原命题成立

c

证明: 令 $f(n) = g(n)^{\sin n}$, 由

$$g(n)^{-1} \leq g(n)^{\sin n} \leq g(n)$$

可得

$$f(n) = O(g(n))$$

但是

$$f(n) \neq \Omega(g(n))$$

否则, $\exists c, n_0 > 0, s.t. \forall n \geq n_0, c g(n) \leq f(n)$

那么

$$c g(n) \leq g(n)^{-1} \leq g(n)^{\sin n}$$

即

$$\frac{1}{c} \geq g(n)^2$$

显然不恒存在这样的 c 满足条件, 比如若 $g(n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 时, c 不存在, 所以 $f(n) \neq \Omega(g(n))$, 从而 $f(n) \neq \Theta(g(n))$

另外, 由于并非所有的 $c > 0$ 都满足 $f(n) < cg(n)$, 所以

$$f(n) \neq o(g(n))$$

综上, $f(n) \notin o(g(n)) \cup \Theta(g(n))$ 且 $f(n) \in O(g(n))$, 从而原命题成立

d

证明:

$$\Theta(f(n) + g(n)) = \{h(n) : \exists c_1, c_2, n_0 > 0, s.t. \forall n \geq n_0, c_1(f(n) + g(n)) \leq h(n) \leq c_2(f(n) + g(n))\}$$

对于 $n \geq n_0$, 若 $f(n) \geq g(n)$, 由

$$c_1(f(n) + g(n)) \leq f(n) \leq c_2(f(n) + g(n))$$

有

$$c_1(f(n) + g(n)) \leq 2c_1f(n) \leq f(n) \leq c_2(f(n) + g(n))$$

取 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1$ 即可。

若 $f(n) \leq g(n)$, 由

$$c_1(f(n) + g(n)) \leq g(n) \leq c_2(f(n) + g(n))$$

有

$$c_1(f(n) + g(n)) \leq 2c_1g(n) \leq g(n) \leq c_2(f(n) + g(n))$$

取 $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1$ 即可。

综上, $\max\{f(n), g(n)\} \in \Theta(f(n) + g(n))$, 即 $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$

2

- a. 是是否否否
- b. 是是否否否
- c. 否否否否否
- d. 否否是是否
- e. 是否是否是否
- f. 是否是否是否

3

a.

$$2^{2^{n+1}}, 2^{2^n}, (n+1)!, n!, e^n, n2^n, 2^n, (\frac{3}{2})^n, \underline{(\lg n)^{\lg n}}, \underline{n^{\lg \lg n}}, \\ (\lg x)!, n^3, \underline{n^2}, \underline{4^{\lg n}}, \underline{\lg(n!)}, \underline{n \lg n}, \underline{n}, \underline{2^{\lg n}}, (\sqrt{2})^{\lg n}, 2^{\sqrt{2 \lg n}}, \\ \lg^2 n, \ln n, \sqrt{\lg n}, \ln \ln n, 2^{\lg^* n}, \lg^* n, \lg(\lg^* n), \lg^*(\lg n), \underline{n^{\frac{1}{\lg n}}}, 1$$

其中, 同一条划线部分的函数即在相同类中。

b.

可以取 $f(n) = (2^{2^{n+2}})^{\sin n}$