Homework1

软件13 杨楠

1 证明题

a

证明:

要证明，对任意的 $f(n) \in \Theta(n^2)$ ，存在某个 $g(n) \in \Theta(n^2)$ ，使得对任意的 $n > n_0$ ，有

$$2n + f(n) = g(n)$$

由

$$\Theta(n^2) = \{f(n) : \exists c_1, c_2, n_0 > 0, s.t. \forall n \geq n_0, c_1 n^2 \leq f(n) \leq c_2 n^2\}$$

对于 $f(n)$，其相应的 c_1, c_2, n_0 ，要证明存在 c_1', c_2', n_0' 使得

$$c_1' n^2 \leq 2n + f(n) \leq c_2' n^2$$

那么有

$$c_1' n^2 \leq 2n + c_1 n^2$$

$$2n + c_2 n^2 \leq c_2' n^2$$

两式分别除以 n^2 ，有

$$c_1' \leq \frac{2}{n} + c_1$$

$$\frac{2}{n} + c_2 \leq c_2'$$

取 $c_1' = c_1, c_2' = \frac{2}{n_0} + c_2, n_0' = n_0$ 即可。

b

证明：假设原命题不成立，即两者存在交集 $f(n)$ ，那么

$$\exists c_1, c_2, n_0 > 0, s.t. \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \tag{1}$$

并且

$$\forall c > 0, \exists n_0' > 0, s.t. \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < c g(n) \tag{2}$$

但对于任何满足条件 (1) 的 $f(n)$ ，其相应的 c_1 ，由条件 (2) ，又会有 $f(n) < c_1 g(n)$ ，矛盾，因此不存在这样的交集 $f(n)$ ，即原命题成立

c

证明：令 $f(n)=g(n)^{\sin n}$，由

$$g(n)^{-1}\le g(n)^{\sin n}\le g(n)$$

可得

$$f(n)=\mathrm{O}(g(n))$$

但是

$$f(n)\ne\Omega(g(n))$$

否则，$\exists c,n_0>0,s.t.\forall n\ge n_0,cg(n)\le f(n)$

那么

$$cg(n)\le g(n)^{-1}\le g(n)^{\sin n}$$

即

$$\frac{1}{c}\ge g(n)^2$$

显然不恒存在这样的 c 满足条件，比如若 $g(n)\to\infty(n\to\infty)$ 时，c 不存在，所以 $f(n)\ne\Omega(g(n))$，从而 $f(n)\ne\Theta(g(n))$

另外，由于并非所有的 $c>0$ 都满足 $f(n)<cg(n)$，所以

$$f(n)\ne o(g(n))$$

综上，$f(n)\notin o(g(n))\cup\Theta(g(n))$ 且 $f(n)\in\mathrm{O}(g(n))$，从而原命题成立

d

证明：

$$\Theta(f(n)+g(n))=\{h(n):\exists c_1,c_2,n_0>0,s.t.\forall n\ge n_0,c_1(f(n)+g(n))\le h(n)\le c_2(f(n)+g(n))\}$$

对于 $n\ge n_0$，若 $f(n)\ge g(n)$，由

$$c_1(f(n)+g(n))\le f(n)\le c_2(f(n)+g(n))$$

有

$$c_1(f(n)+g(n))\le 2c_1f(n)\le f(n)\le c_2(f(n)+g(n))$$

取 $c_1=\frac{1}{2},c_2=1$ 即可。

若 $f(n)\le g(n)$，由

$$c_1(f(n)+g(n))\le g(n)\le c_2(f(n)+g(n))$$

有

$$c_1(f(n)+g(n))\le 2c_1g(n)\le g(n)\le c_2(f(n)+g(n))$$

取 $c_1=\frac{1}{2},c_2=1$ 即可。

综上，$max\{f(n),g(n)\}\in\Theta(f(n)+g(n))$，即 $max\{f(n),g(n)\}=\Theta(f(n)+g(n))$

2

a. 是 是 否 否 否

b. 是 是 否 否 否

c. 否 否 否 否 否

d. 否 否 是 是 否

e. 是 否 是 否 是

f. 是 否 是 否 是

3

a.

$$2^{2^{n+1}}, 2^{2^n}, (n+1)!, n!, e^n, n2^n, 2^n, (\frac{3}{2})^n, \underline{(\lg n)^{\lg n}, n^{\lg\lg n}},$$

$$(\lg x)!, n^3, \underline{n^2, 4^{\lg n}}, \underline{\lg(n!), n\lg n}, \underline{n, 2^{\lg n}}, (\sqrt{2})^{\lg n}, 2^{\sqrt{2\lg n}},$$

$$\lg^2 n, \ln n, \sqrt{\lg n}, \ln\ln n, 2^{\lg^* n}, \lg^* n, \lg(\lg^* n), \lg^*(\lg n), \underline{n^{\frac{1}{\lg n}}, 1}$$

其中，同一条划线部分的函数即在相同类中。

b.

可以取 $f(n) = (2^{2^{n+2}})^{\sin n}$