

Homework2

软件13 杨楠

1 解递归式

a

解: 令 $m = \lg n$, 即 $n = 2^m$, 则有

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + 1$$

令 $S(m) = T(2^m)$, 则有

$$S(m) = 2T(m/2) + 1$$

$$a = 2, b = 2, f(m) = 1$$

由于

$$m^{\log_a b} = m$$

从而 $f(m) = O(m^{\log_a b - \epsilon})$, 其中取 $\epsilon = 1$

由主定理, $S(m) = \Theta(m)$, 即 $T(n) = T(2^m) = \Theta(m) = \Theta(\lg n)$

b

解: 由

$$nT(n) = (n-2)T(n-1) + 2$$

两边同时乘 $(n-1)$, 得

$$(n-1)nT(n) = (n-2)(n-1)T(n-1) + 2(n-1)$$

令 $S(n) = (n-1)nT(n)$, 则有

$$S(n) = S(n-1) + 2(n-1)$$

$$S(n-1) = S(n-2) + 2(n-2)$$

...

$$S(2) = S(1) + 2$$

累加上述式子可得

$$S(n) = S(1) + n(n-1) = (n-1)nT(n)$$

从而有

$$T(n) = \frac{S(1)}{n(n-1)} + 1$$

由 $1 \leq \frac{S(1)}{n(n-1)} + 1 \leq 2$ 在 n 足够大时成立, 得 $T(n) = \Theta(1)$