

离散时间信号抽取之后，频域有幅度变化吗？内插呢？（数学公式用latex格式）

是的，离散时间信号在抽取（Decimation）和内插（Interpolation）之后，其频域表示的幅度通常会发生变化。

1. 抽取 (Decimation / Downsampling)

抽取是指降低信号的采样率。如果原始信号为 $x[n]$ ，以因子 M 进行抽取，得到信号 $x_d[n] = x[nM]$ 。

其离散时间傅里叶变换 (DTFT) 关系为：

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$$

这里：

- $X(e^{j\omega})$ 是原始信号 $x[n]$ 的DTFT。
- $X_d(e^{j\omega})$ 是抽取后信号 $x_d[n]$ 的DTFT。
- ω 是抽取后信号的归一化角频率，范围为 $[-\pi, \pi]$ 。

从这个公式可以看出：

- 幅度变化：** 频谱的幅度被缩放为 $\frac{1}{M}$ 倍。所以，是的，抽取会导致频域幅度降低为原来的 $\frac{1}{M}$ 。
- 频谱延拓与混叠：** 原始频谱 $X(e^{j\omega/M})$ 在频率轴上被 "拉伸" (或者说，抽取后信号的频谱对应原始信号频谱的 $\frac{1}{M}$ 频率范围)，并且产生了 $M - 1$ 个混叠分量。为了避免混叠，通常在抽取之前需要使用一个抗混叠滤波器（低通滤波器），其截止频率为 π/M 。如果理想抗混叠滤波器存在，那么求和项中只有 $k = 0$ 的项有贡献（在 $[-\pi, \pi]$ 区间内），此时：
$$X_d(e^{j\omega}) \approx \frac{1}{M} X(e^{j\omega/M})$$
 (假设理想抗混叠滤波后)

结论： 抽取操作本身会使频谱幅度变为原来的 $\frac{1}{M}$ 。

2. 内插 (Interpolation / Upsampling)

内插是指提高信号的采样率。如果原始信号为 $x[n]$ ，以因子 L 进行内插，通常分为两步：

- 补零 (Upsampling by L)：** 在原始信号的样本之间插入 $L - 1$ 个零，得到信号 $x_u[n]$ 。
$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/L] & \text{if } n \text{ is a multiple of } L \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
- 低通滤波 (Anti-imaging filter)：** 通过一个低通滤波器（内插滤波器）去除由于补零产生的频谱镜像。

我们先看补零操作对频谱的影响：

$$X_u(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] e^{-j\omega n}$$

由于 $x_u[n]$ 只在 n 是 L 的倍数时才可能非零，令 $n = mL$ ：

$$X_u(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega(mL)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(L\omega)m} = X(e^{jL\omega})$$

这里：

- $X(e^{j\omega})$ 是原始信号 $x[n]$ 的DTFT。
- $X_u(e^{j\omega})$ 是补零后信号 $x_u[n]$ 的DTFT。
- ω 是补零后信号的归一化角频率，范围为 $[-\pi, \pi]$ 。

从这个公式可以看出：

1. **幅度变化 (补零阶段)：补零操作本身** $X_u(e^{j\omega}) = X(e^{jL\omega})$ **并不直接改变频谱的幅度形状**。它只是将原始频谱在频率轴上 "压缩" L 倍，并在 $[-\pi, \pi]$ 区间内产生 $L - 1$ 个镜像（images）。这些镜像具有与原始压缩频谱相同的幅度。
2. **内插滤波器：**为了得到真正的内插信号 $x_i[n]$ ，需要用 一个低通内插滤波器 $H(e^{j\omega})$ 滤除这些镜像。该滤波器的理想截止频率是 π/L 。
 $X_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_u(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{jL\omega})$
为了恢复原始信号的幅度（或者说，使得内插后的信号如果进行D/A转换，其模拟信号幅度与原始信号D/A转换后的幅度相当），这个内插滤波器 $H(e^{j\omega})$ 在其通带 $[-\pi/L, \pi/L]$ 内的增益通常设计为 L 。
如果滤波器的通带增益为 G ，则内插后信号的频谱幅度（在基带内）为 $G \cdot |X(e^{jL\omega})|$ 。
如果 $G = L$ ，则 $X_i(e^{j\omega}) = L \cdot X(e^{jL\omega})$ (在通带内)。

结论：

- 单纯的补零操作（Upsampling）不改变频谱的幅度值，但会产生镜像。
- 完整的内插过程（补零 + 低通滤波）通常会包含一个增益为 L 的低通滤波器，以补偿能量在主瓣和镜像中的分配，从而使得内插信号的频谱幅度（在基带部分）相比原始信号的频谱幅度（压缩后）被放大了 L 倍（或者说，恢复了应有的幅度水平）。如果不考虑这个滤波器的增益（即滤波器增益为1），那么补零后的镜像能量会使得基带信号看起来幅度没有变化，但总能量分布在更宽的频谱上（包括镜像）。实践中，内插滤波器增益为 L 是常见的。

总结：

- **抽取：**频谱幅度变为 $\frac{1}{M}$ 。
- **内插（补零+滤波）：**
 - 补零本身不改变幅度，但产生镜像。
 - 后续的内插滤波器通常有增益 L ，使得最终内插信号的基带频谱幅度相比原始频谱幅度（压缩后）放大了 L 倍。

所以，两者都会影响频域幅度。