

作业 4

吴佳龙 班级：软件 83 学号：2018013418

March 18, 2020

4.1. (CLRS Problems 7-2)

- (a) 若所有元素都相同，那么 Partition 的返回值 $q = r$ ，算法的时间复杂度

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

- (b) 修改后的 PARTITION' 伪代码如下：

```

1 PARTITION'(A, p, r)
2   q = p-1
3   t = p-1
4   x = A[r] // pivot
5   for j = p to r
6     if A[j] < x
7       t = t+1
8       q = q+1
9       exchange A[t], A[q]
10      exchange A[q], A[j]
11     else if A[j] == x
12       t = t+1
13       exchange A[t], A[j]
14   return q, t

```

- (c) 修改后的 RANDOMIZED-PARTITION' 和 QUICKSORT' 的伪代码如下：

```

1 RANDOMIZED-PARTITION'(A, p, r)
2   i = RANDOM(p, r)
3   exchange A[r], A[i]
4   return PARTITION'(A, p, r)
5
6 QUICKSORT'(A, p, r)
7   if p < r
8     q, t = RANDOMIZED-PARTITION'(A, p, r)
9     QUICKSORT'(A, p, q-1)
10    QUICKSORT'(A, t+1, r)

```

- (d) 在 QUICKSORT' 中，

$\Pr\{z_i \text{ 与 } z_j \text{ 进行比较}\} = \Pr\{z_i \text{ 是集合 } Z_{ij} \text{ 中选取的第一个主元} \wedge \text{其余与 } z_i \text{ 相同的元素之前没有被选取为主元}\} + \Pr\{z_j \text{ 是集合 } Z_{ij} \text{ 中选取的第一个主元} \wedge \text{其余与 } z_j \text{ 相同的元素之前没有被选取为主元}\} < \Pr\{z_i \text{ 是集合 } Z_{ij} \text{ 中选取的第一个主元}\} + \Pr\{z_j \text{ 是集合 } Z_{ij} \text{ 中选取的第一个主元}\} = \frac{2}{j-i+1}$

因此

$$E(X) = E \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij} \right] < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} = O(n \lg n)$$

4.2. (CLRS Exercises 8.4-4)

由于在单位圆的任意区域内找到定点的概率与区域面积成正比，因此概率

$$Pr\{d_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq r\} = r^2$$

即

$$Pr\{x_i^2 + y_i^2 \leq r\} = r$$

因此 $x_i^2 + y_i^2$ 在 $(0, 1]$ 上均匀分布。

将 $A[i] = (x_i, y_i)$ 放入桶 $B[\lceil n(x_i^2 + y_i^2) \rceil - 1]$ ，对桶 $B[0], B[1], \dots, B[n-1]$ 分别进行插入排序即可。

伪代码如下：

```

1 POINT-BUCKET-SORT(P)
2   n = P.length
3   let B[0..n-1] be a new array
4   for i = 0 to n-1
5       make B[i] an empty list
6   for i = 1 to n
7       insert P[i] into list B[ceil( n(P[i].x^2+P[i].y^2) )-1]
8   for i = 0 to n-1
9       sort list B[i] with insertion sort
10  concatenate lists B[0] , .. , B[n-1]
```

4.3. 比较 insertion sort, shell sort, quick sort, merge sort, radix sort 对 32 位无符号整数的排序效果。

参见实验报告及源码。