第一次课后作业参考答案

储超群 黄正跃 杨柳

March 7, 2019

1

解答：
属于L^*的字符串有：abaabaaabaa、aaaabaaaa和baaaaabaa，即第1、2和4个串。

2

证明：

1. 定义函数$f: S \to T$，其中$f(a) = y, f(b) = x, f(c) = z$，显然$Dom(f) = S$。
2. 因为$\forall m, n \in S$，如果$f(m) = f(n)$，则$m = n$，所以f是一一的。又因$Ran(f) = T$，f是映上的。
3. 因为

$$
\begin{aligned}
f(a*a) = f(a) = y = f(a) \circ f(a) \\
f(b*b) = f(c) = z = f(b) \circ f(b) \\
f(c*c) = f(b) = x = f(c) \circ f(c) \\
f(a*b) = f(b) = x = f(a) \circ f(b) \\
f(a*c) = f(c) = z = f(a) \circ f(c) \\
f(b*a) = f(b) = x = f(b) \circ f(a) \\
f(b*c) = f(a) = y = f(b) \circ f(c) \\
f(c*a) = f(c) = z = f(c) \circ f(a) \\
f(c*b) = f(a) = y = f(c) \circ f(b)
\end{aligned}
$$

所以$\forall m, n \in S$，有$f(m*n) = f(m) \circ f(n)$，得证两个半群同构。

3

证明：
$\forall a, b \in A^*$，

1. 若a和b都包含奇数个1，则$f(a) = f(b) = 1$，且$a \cdot b$包含偶数个1，则$f(a \cdot b) = 0$，满足$f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$。
2. 若a和b都包含偶数个1，则$f(a) = f(b) = 0$，且$a \cdot b$包含偶数个1，则$f(a \cdot b) = 0$，满足$f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$。
3. 若a包含奇数个1，b包含偶数个1，则$f(a) = 1$，$f(b) = 0$，且$a \cdot b$包含奇数个1，则$f(a \cdot b) = 1$，满足$f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$。
4. 若a包含偶数个1，b包含奇数个1，则$f(a) = 0$，$f(b) = 1$，且$a \cdot b$包含奇数个1，则$f(a \cdot b) = 1$，满足$f(a) + f(b) = f(a \cdot b)$。

所以f是同态映射。
因为$f(01) = f(10) = 1$，所以f不是单射，因此f不是同构。