第一次书面作业讲解

谢兴宇

清华大学

2020 年 4 月

Contents

Contents

命题逻辑

语法（well-formed formula）：

$$\phi ::= \top \mid \bot \mid P \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \phi \rightarrow \phi \mid \phi \leftrightarrow \phi$$

逻辑连接词：

- 零元： $\bot, \top$
- 非零元： $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$（按优先级从大到小）

命题逻辑

语法（well-formed formula）:

$$\phi ::= \top \mid \bot \mid P \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \phi \to \phi \mid \phi \leftrightarrow \phi$$

逻辑连接词:

- 零元： $\bot, \top$
- 非零元： $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$（按优先级从大到小）

语义:

- 命题变元： 解释
- 逻辑连接词； 归纳定义

元语言与对象语言

1. $I: \{P \to \text{True}\}$
2. $\varphi := P \vee Q$ 在 I 下真值为 True
3. 上述判断为 True

上面的三个 “True” 是一样的吗？

元语言与对象语言

1. $I : \{P \to \text{True}\}$
2. $\varphi := P \vee Q$ 在 I 下真值为 True
3. 上述判断为 True

上面的三个 “True” 是一样的吗？
一对会帮助我们厘清的概念：

- 元语言： 用来研究其他语言的语言。
- 对象语言： 被研究的语言。

元语言与对象语言

1. $I : \{P \to \text{True}\}$
2. $\varphi := P \vee Q$ 在 I 下真值为 True
3. 上述判断为 True

上面的三个“True”是一样的吗？
一对会帮助我们厘清的概念：

- 元语言： 用来研究其他语言的语言。
- 对象语言： 被研究的语言。

在命题逻辑中：

- 元语言： 自然语言
- 对象语言： 命题逻辑

Contents

第一题

Problem

Given an arbitrary propositional logic formula, the problem of deciding its validity is decidable.

题目

中文翻译：任给一个命题逻辑公式，其有效性是可判定的。

第一题

Problem

Given an arbitrary propositional logic formula, the problem of deciding its validity is decidable.

题目

中文翻译：任给一个命题逻辑公式，其有效性是可判定的。

答案：正确
证明：假设长为 m 的逻辑公式中有 n 个命题变元，每种命题变元可能为真或假，那么所有可能的解释便有 2^n 种，枚举每一种情况，通过语义计算出整个公式的真值——这便给出了一个在 $O(2^n m)$ 的有限时间内会终止的算法。

第二题

Problem

If a propositional logic formula is not valid, then it is unsatisfiable.

题目

如果一个命题逻辑公式不是有效的，那它是不可满足的。

第二题

Problem

If a propositional logic formula is not valid, then it is unsatisfiable.

题目

如果一个命题逻辑公式不是有效的，那它是不可满足的。

答案：错误
反例：取公式 $\varphi = P \vee Q$。
在 $\{P \mapsto \text{true}, Q \mapsto \text{false}\}$ 下为真。
在 $\{P \mapsto \text{false}, Q \mapsto \text{false}\}$ 下为假。

第三题

Problem

Every NNF is also a CNF.

题目

每一个 NNF 都是一个合取范式。

第三题

Problem

Every NNF is also a CNF.

题目

每一个 NNF 都是一个合取范式。

答案：错误
反例：

$$P \vee (\neg Q \wedge R)$$

第四题

Problem

A propositional logic formula φ is satisfiable if and only if for every interpretation I, $I \models \varphi$.

题目

对于一个命题逻辑公式 φ，（φ 可满足）当且仅当（对于任意解释 I，$I \models \varphi$）。

第四题

Problem

A propositional logic formula φ is satisfiable if and only if for every interpretation I, $I \models \varphi$.

题目

对于一个命题逻辑公式 φ，（φ 可满足）当且仅当（对于任意解释 I，$I \models \varphi$）。

答案：错误
解释：（φ 可满足）的定义是（存在解释 I，$I \models \varphi$）。

第五题

Problem

If clause C is a unit under an interpretation I, then $I \not\models C$.

题目

如果子句 C 在解释 I 下是一个单元，那么 $I \not\models C$。

第五题

Problem

If clause C is a unit under an interpretation I, then $I \not\models C$.

题目

如果子句 C 在解释 I 下是一个单元，那么 $I \not\models C$。

答案：错误

单元（unit）：$C = C' \vee \ell, I \not\models C'$，$\ell$ 在 I 中未定义。

Contents

第一题

题目

将下列公式变形为 NNF 和 DNF:

$$\neg(\neg(P \wedge Q) \to \neg R)$$

第一题

题目

将下列公式变形为 NNF 和 DNF:

$$\neg(\neg(P \land Q) \rightarrow \neg R)$$

将任一公式变形为 NNF 的算法:

1. $F_1 \rightarrow F_2 \Leftrightarrow \neg F_1 \lor F_2$
2. $F_1 \leftrightarrow F_2 \Leftrightarrow F_1 \land F_2 \lor \neg F_1 \land \neg F_2$
3. $\neg(F_1 \land F_2) \Leftrightarrow \neg F_1 \lor \neg F_2 (*)$
4. $\neg(F_1 \lor F_2) \Leftrightarrow \neg F_1 \land \neg F_2 (*)$
5. $\neg\neg F \Leftrightarrow F (*)$
6. $\neg\top \Leftrightarrow \bot$
7. $\neg\bot \Leftrightarrow \top$

第二题

题目

将下列公式变形为 NNF 和 DNF:

$$\neg(\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg R)$$

将 NNF 变形为 DNF 的算法:

1. $F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \wedge F_3)$
2. $(F_1 \vee F_2) \wedge F_3 \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_3) \vee (F_2 \wedge F_3)$

应用分配律后，$\wedge$ 连接的两支的至少有一支长度会减少，所以这是一个会终止（eventually halt）的算法。

第二题

题目

将下列公式变形为 CNF，请分别写出使用 Tseitin's Transformation 和直接变形得到的结果。

$$(P \to (\neg Q \wedge R)) \wedge (P \to \neg Q)$$

第二题

题目

将下列公式变形为 CNF，请分别写出使用 Tseitin's Transformation 和直接变形得到的结果。

$$(P \to (\neg Q \land R)) \land (P \to \neg Q)$$

直接作 CNF 转换会导致公式的长度指数级增长，Tseitin's Transformation 可以有效地解决这一问题。

第二题

Step 1

$$T_1 \leftrightarrow T_2 \wedge T_5$$
$$T_2 \leftrightarrow P \rightarrow T_3$$
$$\cdots$$

Step 2

$$(\neg T_2 \vee \neg T_5 \vee T_1) \wedge (\neg T_1 \vee T_2) \wedge (\neg T_1 \vee T_5)$$
$$\cdots$$

Step 3

$$T_1 \wedge \bigwedge \text{CNF}(T_i \leftrightarrow T_j \circ T_k)$$

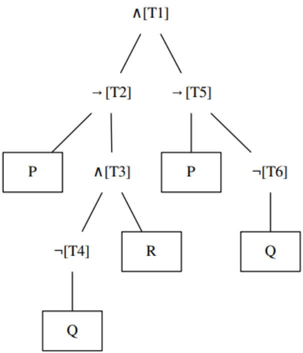

图: Tseitin's Transformation

Contents

第一题

题目

公式

$$(P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \to \neg P))$$

是有效的嘛？如果不是，给出一个 falsifying interpretation。
它是可满足的嘛？如果是，给出一个 satisfying interpretation。

第一题

题目

公式

$$(P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \to \neg P))$$

是有效的嘛？如果不是，给出一个 falsifying interpretation。
它是可满足的嘛？如果是，给出一个 satisfying interpretation。

答案：不是有效的。是可满足的。

例

Falsifying Interpretation: $\{P \mapsto \text{true}, Q \mapsto \text{false}, R \mapsto \text{false}\}$
Satisfying Interpretation: 除了上面那个解释的任意一个解释

第一题

题目

公式

$$(P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \to \neg P))$$

是有效的嘛？如果不是，给出一个 falsifying interpretation。
它是可满足的嘛？如果是，给出一个 satisfying interpretation。

答案：不是有效的。是可满足的。

例

Falsifying Interpretation: $\{P \mapsto \text{true}, Q \mapsto \text{false}, R \mapsto \text{false}\}$
Satisfying Interpretation: 除了上面那个解释的任意一个解释

$$\models (P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \vee \neg P))$$

第二题

题目

用 semantic argument 证明

$$\neg(P \land Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$$

的有效性。

第二题

题目

用 semantic argument 证明

$$\neg(P \land Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$$

的有效性。

答案：太长不看

第三题

题目

使用归结原理证明公式

$$(\neg P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor R) \land (Q \lor \neg R)$$

的可满足性，并给出一个所有 satisfying interpretation 的一般形式。

第三题

题目

使用归结原理证明公式

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$$

的可满足性，并给出一个所有 satisfying interpretation 的一般形式。

1	$\neg P \vee \neg Q$	base	
2	$\neg P \vee R$	base	
3	$Q \vee \neg R$	base	
4	$\neg P \vee \neg R$	1, 3	
5	$\neg P$	2, 4	
6	$\neg P \vee Q$	2, 3	

$P \mapsto$ true and $((Q \mapsto$ true$)$ or $(R \mapsto$ true$))$

Contents

第一题

题目

给出一个 NFA M 和输入串 w，描述怎样构造一个命题逻辑公式 Φ 使得：（Φ 可满足）当且仅当（M 可接受 w）。

第一题

题目

给出一个 NFA M 和输入串 w，描述怎样构造一个命题逻辑公式 Φ 使得：（Φ 可满足）当且仅当（M 可接受 w）。

开放型题目，多种解法都可行，以下是一个参考解法。
命题变元：$P_{q,i}(q \in Q, 0 \le i \le n)$ 表示在读入 $c_1, \cdots, c_i$ 之后，M 是否能够到达状态 q。
公式：

$$\Phi := (\bigwedge_{q \in Q} P_{q,0} \leftrightarrow [q \in I]) \wedge (\bigwedge_{q \in Q, 1 \le i \le n} G_{q,i}) \wedge (\bigvee_{q \in F} P_{q,n})$$

其中，

$$G_{q,i} := P_{q,i} \leftrightarrow \bigvee_{q' \in Q} (P_{q',i-1} \wedge [q \in \delta(q', c_i)])$$

Contents

答疑环节

欢迎提问！