Automata
week12
5/15/2014

清華大學

(b) 证明:

$\forall m$

取 $z = a^m b^m c^m$, $|w| \geq m$

$z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$, $|vwx| \leq m$,

则此时 vwx 可能:
- 全为a ~①
- $= a^i b^j$ ~②
- 全 $= b$ ~③
- $= b^j c^k$ ~④
- 全 $= c$ ~⑤

① 若 $vwx = a^i a^j a^k$, 则 取 $k=0$,
$uv^k wx^k y = a^{m-i-k} b^m c^m$
$\because i+k \neq 0$
$\therefore$ 不成立

② 若 $vwx = a^i b^j$
~~若 v, x 中 a 与 b~~
不妨设 $v = a^{iv} b^{jv}$
$x = a^{ix} b^{jx}$
若 $iv + ix \neq jv + jx$
取 $k=0$, $\therefore uv^k wx^k y$ 中 a与b数不同,
不成立

若相同, 设 $iv+ix = q$
取 $k=0$
则 $uv^k wx^k y = a^{m-q} b^{m-q} c^m$
$\because vx \neq \varepsilon$
$\therefore q > 0$,
$m-q < m$,
不成立

③ 若 $vwx = b^t$,
令 vwx 分别为 $b^i b^j b^k$
则 取 $k=0$,
$uv^k wx^k y = a^m b^{m-i-k} c^m$,
$\because vx \neq \varepsilon$
$\therefore m \neq m-i-k$,
不成立

④ 若 $vwx = b^t c^s$
① $v \neq \varepsilon$, 设v中有i个b
则v中必有b, $i > 0$
则取 $k=0$,
b个数必 $< m-i$, 不符a个数, 不成立

② $v = \varepsilon$,
则 $x \neq \varepsilon$, x中必有c,
设x有i个c, $i > 0$
则取 $k=2$,
c个数必 $\geq m+i > m$
不成立

⑤ 若 vwx 分别为 $c^i c^j c^k$
则 取 $k=2$,
$uv^k wx^k y = a^m b^m c^{m+i+k}$
$m+i+k > m$, 不成立

综上,
$\forall$情况,
$\exists k$ 使 $uv^k wx^k y$
使 不满足L,
$\therefore$ 非CFL

由 扫描全能王 扫描创建

(c) 0^p, p为素数:

证明: 对任意 p = 大于等于n的最小素数, $|0^p| \geq n$

设 $z = uvwxy$, 设分别为 $0^a 0^b 0^c 0^d 0^e$

$b+c+d \leq n$

$a+b+c+d+e = p$

$\because vx \neq \varepsilon$ 设 $b+d = t$, $k \geq 0$,

取k, $uv^kwx^ky = 0^{p+(k-1)t}$

当 $k=1$ 时, $0^{p+(k-1)t}$ 为素数

要证 $\exists k$ 使得 $\forall t$ 使 $p+(k-1)t$ 不为素数

① $\because t=1$, 则 $t\%2=1$,

若 $p\%2==1$,

则取 $k=2$,

$(p+(k-1)t)\%2==0$,

不为素数

若 $p=2$,

则取 $k=3$

$p+(k-1)t=4$,

不为素数

② $t \neq 1$,

则 $t \bmod (t-1) = 1$

设 $p \bmod (t-1) = m$,

且 $p \geq n > t-1$

则取 k 为 $= t-m$,

$(p+(k-1)t)\%(t-1)$

$=(m+t-m-1)\%t-1=0$

而 $p+(k-1)t > t-1$

$\therefore$ 为不为素数

$\therefore$ 必有k使 $uv^kwx^ky \notin L$

$\therefore$ 非CFL

(c) 不 $a^nb^nc^i$ $n \leq i \leq 2n$

证明: 任取 $m = n$

$a^mb^mc^m$

设 $z = uvwxy$

$\because |vwx| \leq m$

$\therefore$ 不可能既有a又有c

① 无c,

则设 $v = a^{x_1}b^{y_1}$,

$w = a^{x_2}b^{y_2}$

取 $k=2$,

变为 $a^{m+x_1+x_2}b^{m+y_1+y_2}c^m$

若 $x_1+x_2 \neq y_1+y_2$, 不正确

若二, $\because vw \neq \varepsilon$

$\therefore m+x_1+x_2 > m$,

与 i 小于 $2n$ 矛盾

不正确

② 无a 设 $v = b^{x_1}c^{y_1}$

$w = b^{x_2}c^{y_2}$

取 $k=2$,

变为 $a^mb^{m+x_1+x_2}c^{m+y_1+y_2}$

若 $x_1+x_2 \neq 0$, a与b个数不同, 不正确

否则 $v = c^{y_1}$, $w = c^{y_2}$,

取 $k = m+1$

变为 $a^mb^mc^{m(1+y_1+y_2)+(y_1+y_2)}$

$\because y_1+y_2 \geq 1$, $\therefore (m)(1+y_1+y_2)+(y_1+y_2) \geq 2m+1 > 2m$, 不正确

$\therefore$ 对于任意m,

$\exists a^mb^mc^m$,

对于 $z = uvwxy$,

有k使 $uv^kwx^ky \notin L$

不为CFL

7-3.1(6) ~~需构造一个同态映射 h(L)=L/a~~

需构造一个映射 $h(L)=L/a$

保证最右一串推导全是新式子

对于 L 的 Chomsky 范式 G:

① $A\to BC$:

若 $A\to BC$ 在某个串 w 中生成 V 为 w 后缀:

则添加 $A'\to BC'$

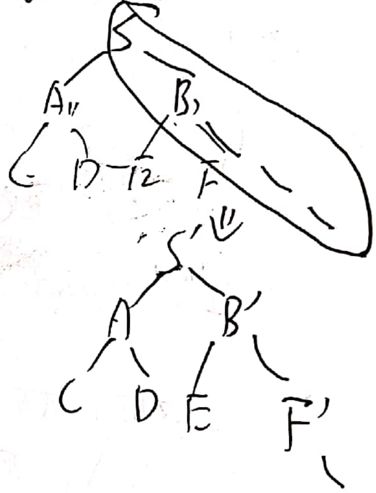
② $A\to x$: 若 $A\to x$ 在某串 w 生成最后一个,

且 $x=a$:

添加 $A'\to \varepsilon$

③ 产生式以 S' 开始

语法分析树



这样: ① 生成 L 中非结尾串:

用的是原 L 中产生式

(从前缀方向走了)

② 生成结尾: 因为 $A'\to BC'$

最后是为 A' 生成的

此时 G' 仍为 CFG 但 $L(G')=L/a$, 成立

7.3.2 (a) L_1:

$T \to \varepsilon \mid aTbb$

$P \to \varepsilon \mid cP$

$S \to TP$

L_2: $T \to \varepsilon \mid aT$

$P \to \varepsilon \mid bPcc$

$S \to TP$

b是2a c为2b

(b) $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^{4n} \mid n \geq 0\}$

不是:

证明, 任取 $m = n$,

$z = a^m b^{2m} c^{4m}$, $|z| \geq m$ $= uvwxy$

$\because |vwx| \leq m$, 则 vwx 不可能又有a又有c

若无c

设 $v = a^{x_1} b^{y_1}$

$w = a^{x_2} b^{y_2}$

$x = a^{x_3} b^{y_3}$

$\because vx \neq \varepsilon$,

取 $k = 2$,

uv^2wx^2y

$= a^{m+x_1+x_3} b^{2m+y_1+y_3} c^{4m}$

$\because vx \neq \varepsilon$

$\therefore (x_1+x_3)(y_1+y_3)$ 不为0

$\therefore$ 此时c个数 $\neq$ a 4倍 or $\neq$ b 2倍

$\therefore$ 不正确

若无a, 设 $v = b^{x_1} c^{y_1}$

$w = b^{x_2} c^{y_2}$

$x = b^{x_3} c^{y_3}$

$\because vx \neq \varepsilon$

$\therefore$ 取 $k = 2$, uv^2wx^2y

$= a^m b^{2m+x_1+x_3} c^{4m+y_1+y_3}$

$\because vx \neq \varepsilon$,

x_1+x_3, y_1+y_3 至少一个为

b $\neq 2m$ 或 c $\neq 4m$

不成立

$\therefore \forall m$, $\exists z$, 对 $\forall uvwxy$, $\exists k$ 使 $uv^kwx^ky \notin L$

$\therefore$ 不为CFG

以己为师 自求自得

7.5.6:

证明：只需证明若L为CFL，则L^R也为CFL

设L的文法为G，

对$\forall w \in L$，设其一个最右推导为$S \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \cdots A_n \Rightarrow w$，第$i$步用$i$产生式

则将G的产生式做如下转换：

做数学归纳：

①：第1次最右推导：应用i_1^R产生式有$S \Rightarrow A_1^R$

② 若第k次最右推导，用了$i_1^R, i_2^R \cdots i_k^R$，得到$A_k^R$，

则第$k+1$次最右推导：

设原先第$k+1$次最右推导为

$A_k = W_{k_1} T W_{k_2} \Rightarrow W_{k_1} W_{k_3} W_{k_2} = A_{k+1}$

无变元 有变元 （$W_{k_1}, W_{k_2}, W_{k_3}$ 变元和终结符串）

原先

则A_k^R第$k+1$次最右推导

$A_k^R = W_{k_2}^R \, T \, W_{k_1}^R \Rightarrow W_{k_2}^R W_{k_3}^R W_{k_1}^R = A_{k+1}^R$

原先有变元 无变元

∴ 综上，将G产生式体做反转后的G^R为L^R的CFG，$L^R \in CFL$

7.3.1 (b)

证明：构造G'使$L(G') = L/a$

设G为Chomsky范式，

①：对于G中的$A \to BC$，

(1)：这个产生式在某一个串w的最右推导中用过，且A生成的串不在w最后

有$A \to BC$

(2) 这个产生式在某一个串w最右推导中用过，且A生成串在w最后

则增加变量A'，有$A' \to BC'$

② 对于G中的$A \to p$（p为任一终结符）

(1) 此产生式在非最后一次用过：保留原有的

(2) 在最后一次用过：若$p = a$，有$A' \to \varepsilon$

否则无

$S_{new} \to S \mid S'$

∴ 最后产生式：$A \to BC$（原有的所有$A \to BC$）

$A' \to BC'$