

第十一次课后作业参考答案

May 22, 2019

必做题

1 Ex.7.2.1

1.1 b)

$$\{a^n b^n c^i | i \leq n\}$$

证明:

假设 $L = \{a^n b^n c^i | i \leq n\}$ 是上下文无关的, 选任意的 n , 取 $z = a^n b^n c^n$, 任选满足条件: $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$ 的 u, v, w, x, y , 由于长度所限, vwx 不可能同时包含 a 和 c ,

1. 若 vwx 中没有 a , 则 vwx 中只含有 b 和 c , 并至少有其中一个符号。据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它有 n 个 a 而含有多于 n 个 b 或多于 n 个 c 或者二者都满足, 因而可知它不属于 L ;
2. 若 vwx 中没有 c , 则 vwx 中只含有 a 和 b , 并至少有其中一个符号。据泵引理知 uwy 一定属于 L , 但它有 n 个 c 而含有少于 n 个 a 或多于 n 个 b 或者二者都满足, 因而可知它不属于 L 。

无论以上哪种情况成立, 我们都可以得出 L 中有不属于 L 的串的结论。因此 L 不是上下文无关语言。

1.2 c)

$$\{0^p | p \text{ 是素数}\}$$

证明: 假设 $L = \{0^p | p \text{ 是素数}\}$ 是上下文无关的, 那么存在满足泵引理的条件常数 n , 考虑某个素数 $p \geq n + 2$ (这样的素数必定存在, 因为有无穷多个素数), 设 $z = 0^p$ 。根据泵引理, 可以把 z 打断为 $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$ 。设 $|v| + |x| = m$, 则 $|u| + |w| + |y| = p - m$ 。考虑串 $uv^{p-m}wx^{p-m}y$, 据泵引理知该串一定属于 L 。但是 $|uv^{p-m}wx^{p-m}y| = |u| + |w| + |y| + (p - m)|v| + (p - m)|x| = p - m + (p - m)m = (m + 1)(p - m)$ 。由 $vx \neq \varepsilon$ 可知 $m \geq 1$, 因此 $m + 1 > 1$ 。由 $|v| + |x| \leq |vwx| \leq n$ 可知 $m \leq n$, 又由 $p \geq n + 2$ 可知 $p - m \geq 2$ 。从而得知 $|uv^{p-m}wx^{p-m}y|$ 有两个大于 1 的因子, 因此 $|uv^{p-m}wx^{p-m}y|$ 不是素数, 不属于 L , 所以 L 不是上下文无关语言。

1.3 e)

$$\{a^n b^n c^i | n \leq i \leq 2n\}$$

证明: 假设 $L = \{a^n b^n c^i | n \leq i \leq 2n\}$ 是上下文无关的, 选任意的 n , 取 $a^n b^n c^n$, 任选满足条件: $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$ 的 u, v, w, x, y , 由于长度所限, vwx 不可能同时包含 a 和 c ,

1. 若 vwx 中没有 a , 则 vwx 中只可能含有 b 和 c 。若 v 和 x 中含有 b , 据泵引理知 uwy 一定属于 L , 但它有 n 个 a 而含有少于 n 个 b , 因而可知它不属于 L ; 若 v 和 x 中不含有 b , 则只能含有 c , 据泵引理知 uwy 一定属于 L , 但它有 n 个 a 和 n 个 b 而含有少于 n 个 c , 因而可知它不属于 L ;
2. 若 vwx 中没有 c , 则 vwx 中只可能含有 a 和 b 。据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它有 n 个 c 而含有多于 n 个 a 或多于 n 个 b 或者二者都满足, 因而可知它不属于 L 。

无论以上哪种情况成立, 我们都可以得出 L 中有不属于 L 的串的结论。因此 L 不是上下文无关语言。

2 Ex.7.3.1(b)

证明:

由于 L 是上下文无关语言, 所以存在 L 的CNF文法, 该文法只包含 $A \rightarrow BC$ 和 $A \rightarrow x$ 两种形式的产生式。从 L 的文法来构造 L/a 的文法时, 对于 L 中的任何一个变量 X , 在 L/a 中都对应一个变量 X' , 但要满足如下的条件: 如果 X 能生成串 wa , X' 能产生串 w (其中 a 为商 L/a 中的 a)。 L/a 的文法的初始变量为 S' 。

1. 考虑 L 中的任意一个形如 $A \rightarrow BC$ 的产生式, 此产生式只有两种使用环境:

- (a) 在从初始变量到某个串 v 的推导过程中, 其中某一步使用了 $A \rightarrow BC$, 而由这个 A 生成的子串处在 v 的非结尾部分, 即不包含 v 的最后一个终结符;
- (b) 或者在从初始变量到串 v 的推导过程中, 其中某一步使用了 $A \rightarrow BC$, 而这个 A 生成的子串处于 v 的结尾部分, 即包含了 v 的最后一个终结符号。

对于(a)的情况, 由于 A 并未生成 v 的最后一个终结符, 所以 L/a 的文法中应包含原有的产生式 $A \rightarrow BC$, 否则可能无法生成串 w ; 对于(b)的情况, 添加新的产生式 $A' \rightarrow BC'$, 引入 C' 是因为 C' 最终也会生成串 v 的最后一个终结符。

2. 考虑 L 中的任意一个形如 $A \rightarrow x$ 的产生式, 此产生式与前面的 $A \rightarrow BC$ 类似, 也分两种使用情况。对于类似(a)的情况, L/a 中要保留产生式 $A \rightarrow x$ 。对于类似(b)的情况, 如果 $A \rightarrow x$ 中的 x 与 L/a 中的 a 不同, 则保留 $A \rightarrow x$, 否则可能导致无法生成串 w ; 如果 $x = a$, 则需要在 L/a 中添加 $A' \rightarrow \varepsilon$, 这样可以确保 L/a 产生的串比 L 的串只相差一个结尾的终结符 a 。

按照上述的方法构造的每一个产生式都是 $A \rightarrow BC$ 或 $A \rightarrow x$ 的形式, 因此是上下文无关的。

3 Ex.7.3.2

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \geq 0\}$$

3.1 a

解答:

G1:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AC \\ A &\rightarrow aAbb \mid \varepsilon \\ C &\rightarrow cC \mid \varepsilon \end{aligned}$$

G2:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow aA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow bBcc \mid \varepsilon \end{aligned}$$

3.2 b

$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^{4n} \mid n \geq 0\}$ 不是CFG。

证明:

假设 $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^{4n} \mid n \geq 0\}$ 是上下文无关的, 选任意的 n , 取 $z = a^n b^{2n} c^{4n}$, 任选满足条件: $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq n$ 的 u, v, w, x, y , 由于长度所限, vwx 不可能同时包含 a 、 b 和 c ,

- 1. 若 vwx 只包含 a , 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它有 $2n$ 个 b 和 $4n$ 个 c 而含有多于 n 个 a , 因而可知它不属于 L ;
- 2. 若 vwx 只包含 b , 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它有 n 个 a 和 $4n$ 个 c 而含有多于 $2n$ 个 b , 因而可知它不属于 L ;

3. 若 $vw x$ 只包含 c , 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它有 n 个 a 和 $2n$ 个 b 而含有多于 $4n$ 个 c , 因而可知它不属于 L ;
4. 若 $vw x$ 只包含 a 和 b , 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它有 $4n$ 个 c 而含有多于 n 个 a 或多于 $2n$ 个 b 或者二者都满足, 因而可知它不属于 L ;
5. 若 $vw x$ 只包含 b 和 c , 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它有 n 个 a 而含有多于 $2n$ 个 b 或多于 $4n$ 个 c 或者二者都满足, 因而可知它不属于 L 。

无论以上哪种情况成立, 我们都可以得出 L 中有不属于 L 的串的结论。因此 L 不是上下文无关语言。

4 Ex.7.3.6

证明:

设 $G = (V, \Sigma, R, S)$ 是语言 L 的CFG, 构造一个CFG $G^R = (V, \Sigma, R', S)$ 。其中 R 中的每一条规则 $A \rightarrow \alpha$ 都被替换成 R' 中的 $A \rightarrow \alpha^R$ 。

可以看出 G^R 的每一棵语法分析树都是 G 中相应的语法分析树的镜像, 因此有 $L(G) = (L(G^R))^R$ 。

思考题

5 Ex.7.2.1(f)

证明:

假设 $L = \{ww^Rw\}$ 是上下文无关的, 选任意的 n , 取 $z = 0^n1^n1^n0^n0^n1^n$, 任选满足条件: $z = uvwx$ 且 $|vwx| \leq n$ 的 u, v, w, x, y ,

1. 若 $vw x$ 只包含 0 , 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它不是 ww^Rw 的形式, 因而可知它不属于 L ;
2. 若 $vw x$ 只包含 1 , 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它不是 ww^Rw 的形式, 因而可知它不属于 L ;
3. 若 $vw x$ 在第一个 0 和 1 之间, 则 $vw x$ 是 0^p1^q 的形式, 据泵引理知 uv^2wx^2y 一定属于 L , 但它不是 ww^Rw 的形式, 因而可知它不属于 L ; 其它情况可以用类似的方法证明。

无论以上哪种情况成立, 我们都可以得出 L 中有不属于 L 的串的结论。因此 L 不是上下文无关语言。

6 Ex.7.3.3

6.1 b)

证明: 设 $L = \{a^n b^n c^m | m \leq n\}$ 是上下文无关语言, 则 $\max(L) = \{a^n b^n c^n\}$, 因为 $\max(L)$ 不是上下文无关语言, 所以上下文无关语言对运算 $\max(L)$ 不封闭。

6.2 c)

证明: 设 $L = \{a^n b^n c^n a^n b^n c^n\}$ 是上下文无关语言, 则 $\text{half}(L) = \{a^n b^n c^n\}$, 因为 $\text{half}(L)$ 不是上下文无关语言, 所以上下文无关语言对运算 $\text{half}(L)$ 不封闭。