第六次课后作业参考答案

April 4th, 2019

必做题

1 Ex.4.1.1

证明下列语言都不是正则的：

1.1 d)

$\{0^n1^m2^n|m$和n是任意正整数$\}$

证明：

假设该语言是正则语言，则设n是由泵引理得到的它的常数，考虑串$w = 0^n1^n2^n$，w属于该语言。可以把w打断为$w = xyz$，且满足$y \neq \varepsilon$和$|xy| \leq n$。因此x和y都只包含0，设$|y| = i, i > 0$，根据泵引理，xy^kz属于该语言。取$k = 2$，则有$xy^2z = 0^{n+i}1^n2^n, i > 0$。所以$xy^2z$不属于该语言，与假设矛盾。

因此该语言不是正则语言。

1.2 e)

$\{0^n1^m|n \leq m\}$

证明：

假设该语言是正则语言，则设n是由泵引理得到的它的常数，考虑串$w = 0^n1^n$，w属于该语言。可以把w打断为$w = xyz$，且满足$y \neq \varepsilon$和$|xy| \leq n$。因此x和y都只包含0，设$|y| = i, i > 0$，根据泵引理，xy^kz属于该语言。取$k = 2$，则有$xy^2z = 0^{n+i}1^n, i > 0$。所以$xy^2z$不属于该语言，与假设矛盾。

因此该语言不是正则语言。

2 Ex.4.1.2

证明下列语言都不是正则的：

2.1 e)

由0和1构成的ww形式的串的集合，也就是某个串重复的串的集合。

证明：

假设该语言是正则语言，则设n是由泵引理得到的它的常数，考虑串$w = 0^n1^n0^n1^n$，w属于该语言。可以把w打断为$w = xyz$，且满足$y \neq \varepsilon$和$|xy| \leq n$。因此x和y都只包含0，设$|y| = i, i > 0$，根据泵引理，xy^kz属于该语言。取$k = 2$，则有$xy^2z = 0^{n+i}1^n0^n1^n, i > 0$。所以$xy^2z$不属于该语言，与假设矛盾。

因此该语言不是正则语言。

2.2 f)

由0和1构成的ww^R形式的串的集合，也就是由某个串后面跟着它的反转所构成的串的集合。

证明：

假设该语言是正则语言，则设n是由泵引理得到的它的常数，考虑串$w=0^n1^n1^n0^n$，w属于该语言。可以把w打断为$w=xyz$，且满足$y\neq\varepsilon$和$|xy|\leq n$。因此x和y都只包含0，设$|y|=i, i>0$，根据泵引理，xy^kz属于该语言。取$k=2$，则有$xy^2z=0^{n+i}1^n1^n0^n, i>0$。所以$xy^2z$不属于该语言，与假设矛盾。

因此该语言不是正则语言。

2.3 g)

由0和1构成的$w\bar{w}$形式的串的集合。

证明：假设该语言是正则语言，则因$\{0^x1^y|x\geqslant 1, y\geqslant 1\}$ 是正则语言，考虑正则语言的交同样为正则语言，则$\{0^n1^n|n\geqslant 1\}$同样应为正则语言，根据泵引理可简单证明$\{0^n1^n|n\geqslant 1\}$非正则，与假设矛盾。

因此该语言不是正则语言。

思考题

---

3 Ex.4.1.2

证明下列语言都不是正则的：

3.1 c)

$\{0^n|n$是2的幂$\}$

证明：

假设该语言是正则语言，则设n是由泵引理得到的它的常数，考虑串$w=0^{2^n}$，w属于该语言。可以把w打断为$w=xyz$，且满足$y\neq\varepsilon$和$|xy|\leq n$。因此x和y都只包含0，设$y=0^i, i>0$且$i\leq n$，根据泵引理，xy^kz属于该语言。取$k=2$，则有$xy^2z=0^{2^n+i}, i>0$，且有$0^{2^n}<0^{2^n+i}<0^{2^n+2^n}=0^{2^{n+1}}, i>0$。所以$xy^2z$ 不属于该语言，与假设矛盾。

因此该语言不是正则语言。

4 Ex.4.1.3

证明下列语言都不是正则的：

4.1 a)

所有满足一下条件的串的集合：由0和1构成，开头是1，并且当我们把该串看作是一个整数时该整数是一个素数。

证明：

假设该语言是正则语言，则设n是由泵引理得到的它的常数。由初等数论易知存在任意大的素数，所以存在素数q使得其二进制串长度大于n。设素数q的串是w，可以把w打断为$w=xyz$，且满足$y\neq\varepsilon$和$|xy|\leq n$。假设，$|y|=i, |z|=j$，则q可以表示为$q=x\cdot 2^{i+j}+y\cdot 2^j+z$。根据泵引理，$xy^kz$属于该语言。取$k=q$，则$xy^qz$表示的整数$p$也属于该语言，即$p$是素数。$p=x\cdot 2^{qi+j}+y\cdot 2^j(1+2^i+2^{2i}+\ldots+2^{(q-1)i})+z$。由**费马小定理**知$2^{(q-1)i}\equiv 1 \pmod q$，所以$2^{qi}\equiv 2^i \pmod q$，$2^{qi}-1\equiv 2^i-1 \pmod q$，又$2^i-1<q$，所以$\frac{2^{qi}-1}{2^i-1}=1+2^i+\ldots+2^{(q-1)i}\equiv 1 \pmod q$。因此$p\equiv x\cdot 2^{i+j}+y\cdot 2^j+z\equiv q\equiv 0 \pmod q$，$p$能被$q$整除，与$p$是素数矛盾。

因此该语言不是正则语言。