习题课

谢兴宇

回顾

判断题

范式

有效性和可满 足性

建模

# 第一次书面作业讲解

谢兴宇

清华大学

2020 年 4 月

### Contents

习题课

谢兴宇

回顾

判断器

范式

有效性和可能

走性

廷(天

1 回顾

2 判断题

3 范式

4 有效性和可满足性

5 建模

6 答疑

### Contents

习题课

#### 回顾

1 回顾

2 判断题

3 范式

4 有效性和可满足性

5 建模

6 答疑

# 命题逻辑

习题课

回顾

范式

有效性和可混 足性

建模

处证

语法 (well-formed formula):

 $\phi ::= \top |\bot| P |\neg \phi| \phi \land \phi | \phi \lor \phi | \phi \rightarrow \phi | \phi \leftrightarrow \phi$ 

逻辑连接词:

- 零元: ⊥, ⊤
- 非零元: ¬, ∧, ∨, →, ↔ (按优先级从大到小)

# 命题逻辑

习题课

回顾

判断题

有效性和可能

足性

语法 (well-formed formula):

 $\phi ::= \top \mid \bot \mid P \mid \neg \phi \mid \phi \land \phi \mid \phi \lor \phi \mid \phi \rightarrow \phi \mid \phi \leftrightarrow \phi$ 

### 逻辑连接词:

■ 零元: ⊥, ⊤

非零元: ¬, ∧, ∨, →, ↔ (按优先级从大到小)

#### 语义:

■ 命题变元:解释

■ 逻辑连接词; 归纳定义

## 元语言与对象语言

习题课

谢兴

回顾

判断影

范式

有效性和可涉

建模

1  $I: \{P \rightarrow \mathsf{True}\}$ 

2  $\varphi \coloneqq P \lor Q$  在 I 下真值为 True

3 上述判断为 True

上面的三个 "True" 是一样的吗?

## 元语言与对象语言

习题课

同顾

判點

范式

有效性和可混 足性

ないとマ

1  $I: \{P \rightarrow \mathsf{True}\}$ 

2  $\varphi := P \lor Q$  在 I 下真值为 True

3 上述判断为 True

上面的三个 "True" 是一样的吗?

一对会帮助我们厘清的概念:

■ 元语言: 用来研究其他语言的语言。

■ 对象语言:被研究的语言。

## 元语言与对象语言

习题课 谢兴宇

判断题

回顾

有效性和可》 足性

答疑

- 1  $I: \{P \rightarrow \mathsf{True}\}$
- $2 \varphi := P \lor Q$  在 I 下真值为 True
- 3 上述判断为 True

上面的三个 "True" 是一样的吗?

- 一对会帮助我们厘清的概念:
  - 元语言: 用来研究其他语言的语言。
  - 对象语言:被研究的语言。

#### 在命题逻辑中:

- 元语言: 自然语言
- 对象语言: 命题逻辑

### Contents

习题课

判断题

- 1 回顾
- 2 判断题
- 3 范式
- 4 有效性和可满足性
- 5 建模
- 6 答疑

## 第一题

习题课

判断题

#### Problem

Given an arbitrary propositional logic formula, the problem of deciding its validity is decidable.

### 题目

中文翻译:任给一个命题逻辑公式,其有效性是可判定的。

## 第一题

**习题课** 谢兴宇

判断题

有效性和可满 足性

答疑

#### Problem

Given an arbitrary propositional logic formula, the problem of deciding its validity is decidable.

#### 题目

中文翻译:任给一个命题逻辑公式,其有效性是可判定的。

答案: 正确

证明: 假设长为 m 的逻辑公式中有 n 个命题变元,每种命题变元可能为真或假,那么所有可能的解释便有  $2^n$  种,枚举每一种情况,通过语义计算出整个公式的真值——这便给出了

一个在  $O(2^n m)$  的有限时间内会终止的算法。

习题课

判断题

范式

有效性和可混 足性

**建**齿

At ho

#### Problem

If a propositional logic formula is not valid, then it is unsatisfiable.

#### 题目

如果一个命题逻辑公式不是有效的,那它是不可满足的。

习题课

回顾

判断题

氾礼

有效性和可混 足性

建模

Problem

If a propositional logic formula is not valid, then it is unsatisfiable.

### 题目

如果一个命题逻辑公式不是有效的,那它是不可满足的。

答案:错误

反例: 取公式  $\varphi = P \lor Q$ 。

在  $\{P \mapsto \mathsf{true}, Q \mapsto \mathsf{false}\}$  下为真。 在  $\{P \mapsto \mathsf{false}, Q \mapsto \mathsf{false}\}$  下为假。

# 第三题

习题课

谢兴宇

回顾

判断题

. . . . . . .

有效性和可能 足性

建模

Problem

Every NNF is also a CNF.

题目

每一个 NNF 都是一个合取范式。

# 第三题

习题课

谢兴宇

回顾

判断题

7676

有效性和可能 足性

建模

Problem

Every NNF is also a CNF.

题目

每一个 NNF 都是一个合取范式。

答案: 错误

反例:

 $P \lor (\neg Q \land R)$ 

# 第四题

习题课

谢兴宇

凹顺

判断题

范式

有效性和可注 足性

建模

Problem

A propositional logic formula  $\varphi$  is satisfiable if and only if for every interpretation I,  $I \models \varphi$ .

#### 题目

对于一个命题逻辑公式  $\varphi$ ,  $(\varphi$  可满足) 当且仅当(对于任意解释 I,  $I \models \varphi$ )。

# 第四题

习题课

判断题

有效性和可能 足性

建模

Problem

A propositional logic formula  $\varphi$  is satisfiable if and only if for every interpretation I,  $I \models \varphi$ .

#### 题目

对于一个命题逻辑公式  $\varphi$ , ( $\varphi$  可满足) 当且仅当(对于任意解释 I,  $I \models \varphi$ )。

答案: 错误

解释:  $(\varphi$  可满足) 的定义是(存在解释  $I, I \models \varphi$ )。

# 第五题

习题课

谢兴与

回顾

判断题

范式

有效性和可流足性

定性 \*\*\*

**姓**恢

#### Problem

If clause C is a unit under an interpretation I, then  $I \not\models C$ .

#### 题目

如果子句 C 在解释 I 下是一个单元,那么  $I \not\models C$ 。

# 第五题

习题课

判断题

#### **Problem**

If clause C is a unit under an interpretation I, then  $I \not\models C$ .

#### 题目

如果子句 C 在解释 I 下是一个单元,那么  $I \not\models C$ 。

答案:错误

单元 (unit):  $C = C \lor \ell, I \not\models C, \ell$  在 I 中未定义。

### Contents

习题课

范式

- 1 回顾
- 2 判断题
- 3 范式
- 4 有效性和可满足性
- 5 建模
- 6 答疑

## 第一题

习题课

谢兴宇

回顾

判断题

范式

有效性和可满 足性

建模

AA KIY

### 题目

将下列公式变形为 NNF 和 DNF:

$$\neg(\neg(P \land Q) \to \neg R)$$

### 题目

#### 将下列公式变形为 NNF 和 DNF:

$$\neg(\neg(P \land Q) \to \neg R)$$

### 将任一公式变形为 NNF 的算法:

- $F_1 \rightarrow F_2 \Leftrightarrow \neg F_1 \vee F_2$
- 2  $F_1 \leftrightarrow F_2 \Leftrightarrow F_1 \land F_2 \lor \neg F_1 \land \neg F_2$
- $\neg (F_1 \land F_2) \Leftrightarrow \neg F_1 \lor \neg F_2(*)$
- $\neg (F_1 \lor F_2) \Leftrightarrow \neg F_1 \land \neg F_2(*)$
- $\neg \neg F \Leftrightarrow F(*)$
- $6 \neg T \Leftrightarrow \bot$
- $7 \neg \bot \Leftrightarrow \top$

#### 题目

将下列公式变形为 NNF 和 DNF:

$$\neg(\neg(P \land Q) \to \neg R)$$

将 NNF 变形为 DNF 的算法:

- $(F_1 \vee F_2) \wedge F_3 \Leftrightarrow (F_1 \wedge F_3) \vee (F_2 \wedge F_3)$

应用分配律后, / 连接的两支的至少有一支长度会减少,所以这是一个会终止(eventually halt)的算法。

习题课

谢兴宇

回顾

判断题

范式

有效性和可 足性 足性

建模

....

#### 题目

将下列公式变形为 CNF,请分别写出使用 Tseitin's Transformation 和直接变形得到的结果。

$$(P \to (\neg Q \land R)) \land (P \to \neg Q)$$

习题课

谢兴宇

回顾 判断题 范式

有效性和可能

足性 建模

ないとマ

#### 题目

将下列公式变形为 CNF,请分别写出使用 Tseitin's Transformation 和直接变形得到的结果。

$$(P \to (\neg Q \land R)) \land (P \to \neg Q)$$

直接作 CNF 转换会导致公式的长度指数级增长,Tseitin's Transformation 可以有效地解决这一问题。

习题课

回顾

判断题

1516

有效性和可 足性

建保

Step 1

$$T_1 \leftrightarrow T_2 \wedge T_5 T_2 \leftrightarrow P \rightarrow T_3 \dots$$

Step 2

$$(\neg T_2 \lor \neg T_5 \lor T_1) \land (\neg T_1 \lor T_2) \land (\neg T_1 \lor T_5)$$
...

Step 3

$$T_1 \wedge \bigwedge \mathsf{CNF}(T_i \leftrightarrow T_j \circ T_k)$$

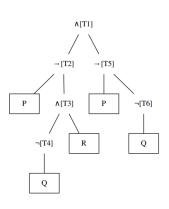


图: Tseitin's Transformation

### Contents

习题课

谢兴宇

回顾

判断

范式

有效性和可满 足性

足性 \*\*\*\*

建模

1 回顾

2 判断题

3 范式

4 有效性和可满足性

5 建模

6 答疑

## 第一题

习题课

谢兴宇

回顾

判断题

沱式

有效性和可满 足性

建模

题目

公式

$$(P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \to \neg P))$$

是有效的嘛?如果不是,给出一个 falsifying interpretation。它是可满足的嘛?如果是,给出一个 satisfying interpretation。

# 题目 公式

$$(P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \to \neg P))$$

是有效的嘛?如果不是,给出一个 falsifying interpretation。 它是可满足的嘛?如果是,给出一个 satisfying interpretation。

答案:不是有效的。是可满足的。

#### 例

Falsifying Interpretation:  $\{P \mapsto \text{true}, Q \mapsto \text{false}, R \mapsto \text{false}\}$ Satisfying Interpretation: 除了上面那个解释的任意一个解释

## 题目 公式

$$(P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \to \neg P))$$

是有效的嘛?如果不是,给出一个 falsifying interpretation。 它是可满足的嘛?如果是,给出一个 satisfying interpretation。

答案:不是有效的。是可满足的。

#### 例

Falsifying Interpretation:  $\{P \mapsto \text{true}, Q \mapsto \text{false}, R \mapsto \text{false}\}$ Satisfying Interpretation: 除了上面那个解释的任意一个解释

$$\models (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (\neg R \rightarrow (\neg Q \lor \neg P))$$

习题课

谢兴宇

四顺

判断是

氾玐

有效性和可满 足性

建模

题目

用 semantic argument 证明

$$\neg(P \land Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$$

的有效性。

习题课

谢兴宇

四顺

判断是

氾玐

有效性和可满 足性

建模

题目

用 semantic argument 证明

$$\neg(P \land Q) \leftrightarrow (\neg P \lor \neg Q)$$

的有效性。

答案:太长不看

# 第三题

习题课

有效性和可满 足性

#### 题目

使用归结原理证明公式

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (Q \vee \neg R)$$

的可满足性,并给出一个所有 satisfying interpretation 的一般 形式。

题目

使用归结原理证明公式

$$(\neg P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor R) \land (Q \lor \neg R)$$

的可满足性,并给出一个所有 satisfying interpretation 的一般 形式。

### Contents

习题课

建模

- 1 回顾
- 2 判断题
- 3 范式
- 4 有效性和可满足性
- 5 建模
- 6 答疑

### 第一题

习题课

建模

### 题目

给出一个 NFA M 和输入串 w, 描述怎样构造一个命题逻辑 公式  $\Phi$  使得: ( $\Phi$  可满足) 当且仅当 (M 可接受 w)。

### 题目

给出一个 NFA M 和輸入串 w, 描述怎样构造一个命题逻辑 公式  $\Phi$  使得: ( $\Phi$  可满足) 当且仅当 (M 可接受 w)。

开放型题目,多种解法都可行,以下是一个参考解法。 命题变元:  $P_{a,i}(q \in Q, 0 \le i \le n)$  表示在读入  $c_1, \dots, c_i$  之后, M 是否能够到达状态 a。

公式:

$$\Phi := (\bigwedge_{q \in Q} P_{q,0} \leftrightarrow [q \in I]) \land (\bigwedge_{q \in Q, 1 \le i \le n} G_{q,i}) \land (\bigvee_{q \in F} P_{q,n})$$

其中,

$$G_{q,i} := P_{q,i} \leftrightarrow \bigvee_{q' \in Q} (P_{q',i-1} \land [q \in \delta(q',c_i)])$$

### Contents

习题课

答疑

- 1 回顾
- 2 判断题
- 3 范式
- 4 有效性和可满足性
- 5 建模
- 6 答疑

# 答疑环节

习题课

谢兴与

回顾

判断器

范式

有效性和可消

た圧

建模

答疑

### 欢迎提问!