作业 2

吴佳龙　班级：软件 83　学号：2018013418　March 1, 2020

2.1. 解递归式

a. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

解. 令 $m = \lg n, S(m) = T(2^m)$，有

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + 1 \Rightarrow S(m) = 2S(m/2) + 1$$

其中 $f(n) = 1 = O(n^{\log_b a-\varepsilon}) = O(n^{1-\varepsilon})$，$\varepsilon \in (0, 1)$

根据主定理 Case 2，$S(m) = \Theta(m) \Rightarrow T(n) = \Theta(\lg n)$

b. $nT(n) = (n-2)T(n-1) + 2$

解. 观察递归式，猜测 $T(n) = \Theta(1)$，证明如下：

i. $T(1) = \Theta(1)$，即 $\exists c_1, c_2$ s.t. $c_1 \le T(1) \le c_2$

ii. 假设 $T(n) \le c_2, \forall k < n$，则

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{n-2}{n}T(n-2) + \frac{2}{n} \\ &\le \frac{n-2}{n}c_2 + \frac{2}{n} \\ &= c_2 + \frac{2-2c_2}{n} \\ &\le c_2, \text{ for } c_2 > 1 \end{aligned}$$

iii. 假设 $T(n) \ge c_1, \forall k < n$，则

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{n-2}{n}T(n-2) + \frac{2}{n} \\ &\ge \frac{n-2}{n}c_1 + \frac{2}{n} \\ &= c_1 + \frac{2-2c_1}{n} \\ &\ge c_1, \text{ for } c_1 < 1 \end{aligned}$$

综合 i. ii. iii. 归纳可得，$T(n) = \Theta(1)$

2.2. 比较计算斐波那契数列的多种方法。

参见源码和实验报告。