清华大学

Automata
Week 8
4/17/2019

5.3.3:

① 证明 $\forall$ 以e开始的串 $\notin L$

证明：想生成e，必须有 $S \Rightarrow iSeS$

则e前至少有1个i，

∴ 以e开始的串 $\notin L$

② ~~设 $w = i^k e w_1$~~

证明 $\forall$ 不含e的串 $\in L$:

~~设~~ ① $w = \varepsilon$, $S \Rightarrow \varepsilon$, $\varepsilon \in L$

② $w = i^k \ (k \geq 1)$

$S \Rightarrow iS \Rightarrow iiS \Rightarrow i^{k-1}S \Rightarrow i^k S \Rightarrow i^k$, $w \in L$

③ 设 $w = i^k e w_1 \ (k \geq 1)$

证明 $w \in L \Leftrightarrow w_1 \in L$

① $k=1$:

$w = iew_1$

$S \Rightarrow iSeS \Rightarrow ieS$

② $k > 1$:

$w = i^k e w_1$

$S \Rightarrow iSeS \Rightarrow i^2 eS \Rightarrow \cdots i^k SeS \Rightarrow i^k eS$

总有 S可推出w $\Leftrightarrow$ S可推出w_1

∴ 该归纳证正确

5.3.4

5.3.4 (b) Element → <UL> List </UL>

(c) Element → <TABLE> Table <TABLE>

Table → Title Title Content

Title → <TR> Title_Inside </TR>

Title_Inside → Range_T | Range_T Title_Inside

Range_T → <TH> doc

~~Title~~ Content → <TR> Content_Inside </TR>

| ~~<TR> Content~~ Inside </TR> Content

<TR> Content

Content_Inside → Range_C | Range_C Content_Inside

Range_C → <TD> doc

5.3.5: COURSES → COURSE COSRSES | COURSE

COURSE → CNAME PROF COURSE_STUDENT COURSE_TA

COURSE_STUDENT → ε | STUDENT COURSE_STUDENT

COURSE_TA → TA | ε

CNAME → #PCDATA

PROF → #PCDATA

STUDENT → #PCDATA

TA → #PCDATA

5.4.2 证明：

① 只能生成　归纳：① ε 的前缀仅 ε，a 与 b 均 0 个，符合

② 若 $w \in L$，则 $aS \in L$：

任取 S-前缀 v，v 中 a 个数 ≥ b 个数

aS 的前缀仅两种情况：ε、av

ε 中 a 与 b 均 0 个 ✓

av 中 a 个数 > b 个数 ✓

③ 若 $w \in L$，则 $aSbS \in L$

任取 S-前缀 v，v 中 a 个数 ≥ b 个数（对 S 均成立）

aSbS 前缀：ε、av、aSb、aSbv　4 种情况

ε：均 0 个 ✓

av：a 个数 > b 个数

aSb：a 个数 ≥ b 个数

aSbv：a 个数 ≥ b 个数

a ≥ b　a ≥ b

∴ 只能生成满足上面条件的

∴ 只能生成满足上列条件的

② 能生成所有: 归纳: (1): 长为0: $S \Rightarrow \varepsilon$

(2) 长为1: 仅有 a $S \Rightarrow aS \Rightarrow a$

有 $w \in L \Leftrightarrow S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$

(3): 设 $\forall$ 长为n的串 w, ~~若 $w \in L$, 均有 $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$, 若 ... 均有 $S \stackrel{*}{\Rightarrow} w$~~

则 $\forall$ 长为n+1的串 w', 均可表示为 aw 或 bw

若 $w' = bw$, 则 $w' \notin L$

若 $w' = aw$, 若 $w \in L$, 则 w' 前缀有 $\begin{cases} \varepsilon \\ av\ (v\text{为}w\text{前缀}) \end{cases}$ 两种情况

均满足条件, $w' \in L$

此时有 $S \Rightarrow aS \stackrel{*}{\Rightarrow} aw = w'$

若 $w \notin L$

则若 $w' \in L$, 则对于 $\forall v$ 为 w 前缀

必有 v 中 a 个数最多比 b 少一个

在 aw 上

定义函数 $f(x)$, $a \le x \le |av|$

$f(0)=0$, $f(i+1) = \begin{cases} f(i)+1 & (av\text{第}i+1\text{位为}a) \\ f(i)-1 & (av\text{第}i+1\text{位为}b) \end{cases}$

要求: $\begin{cases} \exists i \text{ 使 } f(i) = 0 \\ \forall i,\ f(i) \ge 0 \end{cases}$

则: 使 $f(i)=0$ 的情况必有 av 第 i 位为 b

(否则 $f(i-1)=-1$ 矛盾) $\Rightarrow$ 下一页

此时：设 i_0 为第一个 使 $f(i_0)=0$ 的 i

则：$\forall i\in[1,i_0-1]$，$f(i)>0$，$f(i)-1\geq 0$，

v 的第1至 i_0-1 位构成的串 $\in L$

则 aw 可表示为 $aw=av_1bv_2$，其中 $v_1\in L$，av_1b 中 a，b 数目相等

~~对 v_2 进行讨论：若 $v_2\in L$，则有 $S\Rightarrow aSbS\Rightarrow av_1bS\Rightarrow av_1bv_2$~~

则 aw 任一前缀 u，要么 $|u|\leq|av_1b|$，

要么 $u=av_1bu'$，

若 av_1bu' 的 a 数目 $\geq b$ 的数目

则 u' 中 a 数目 $\geq b$ 数目

$v_2\in L$

$\therefore$ 有 $S\Rightarrow aSbS\Rightarrow av_1bS\Rightarrow av_1bv_2$，即 aw，即 w

综上，$w\in L$ 可被表示出来，得证

5.4.3

aab

a→i

b→e

S→ε|aS|aMbS

M→ε|aMbM

5.4.7 (a)

$E \xRightarrow{lm} +EE \xRightarrow{lm} +*EEE \xRightarrow{lm} +*-EEEE \xRightarrow{lm} +*-xEEE \xRightarrow{lm} +*-xyEE \xRightarrow{lm} +*-xyxE \xRightarrow{lm} +*-xyxy$

$E \xRightarrow{rm} +EE \xRightarrow{rm} +Ey \xRightarrow{rm} +*EEy \xRightarrow{rm} +*Exy \xRightarrow{rm} +*-EExy \xRightarrow{rm} +*-Eyxy \xRightarrow{rm} +*-xyxy$