清华大学软件学院
算法分析与设计基础
2020 年春季学期

作业 **1**

吴佳龙　班级：软件 83　学号：2018013418　　February 23, 2020

1.1. **证明**.　**a.** $\forall f(n) \in \Theta(n^2), \exists c_1, c_2, N_1 \in \mathbb{R}^+$ s.t.

$$c_1 n^2 \le f(n) \le c_2 n^2, \forall n > N_1$$

又有 $\exists c_3, N_2$ s.t.

$$0 \le 2n \le c_3 n^2, \forall n > N_2$$

则

$$c_1 n^2 \le 2n + f(n) \le (c_2 + c_3) n^2, \forall n > \max(N_1, N_2)$$

故 $2n + \Theta(n^2) = \Theta(n^2)$

b. $\forall f(n) \in \Theta(g(n))$，$\exists c_1, c_2, N_1 > 0$ s.t.

$$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \forall n > N_1 \tag{1}$$

若 $f(n) \in o(g(n))$，给定 c_1, $\exists N_2 > 0$ s.t.

$$f(n) < c_1 g(n), \forall n > N_2 \tag{2}$$

(1) 与 (2) 当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时矛盾，故 $\Theta(g(n)) \cap o(g(n)) = \phi$

c. 对于任意渐进非负函数 $g(n)$ 满足 n 足够大时，$g(n)$ 不恒为 0, 取

$$f(n) = g(n) \max(\sin n, 0)$$

满足

$$f(n) \le g(n), \forall n > 0$$

且

$$\forall N, \exists n_1, n_2 > N, f(n_1) = 0, f(n_2) = g(n_2)$$

因此

$$f(n) \in O(n), f(n) \notin o(n), f(n) \notin \Theta(n)$$

故 $\Theta(g(n)) \cup o(g(n)) \ne O(g(n))$

d. 对 $f(n) \ge 0, g(n) \ge 0, \forall n$足够大，有

$$\frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \le \max(f(n), g(n)) \le f(n) + g(n), \forall n\text{足够大}$$

故 $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$

□

1.2. (CLRS 3-3)

解. **a.** 排序如下：

$$2^{2^{n+1}}, 2^{2^n}, (n+1)!, n!, e^n, n\cdot 2^n, 2^n, (\frac{3}{2})^n,$$
$$\{(\lg n)^{\lg n}, n^{\lg\lg n}\}, (\lg n)!,$$
$$n^3, \{n^2, 4^{\lg n}\}, \{n\lg n, \lg(n!)\}, \{2^{\lg n}, n\}, (\sqrt{2})^{\lg n}, 2^{\sqrt{2\lg n}}, \lg^2 n, \ln n, \sqrt{\lg n}, \ln\ln n,$$
$$2^{\lg^* n}, \{\lg^* n, \lg^*(\lg n)\}, \lg(\lg^* n), \{1, n^{1/\lg n}\},$$

在同一等价类中的函数通过大括号 {} 包括起来。

b.

$$f(n) = 2^{2^{n+2}} \max(\sin n, 0)$$