

哈工大 2009 年 秋季学期  
集合论与图论试题

题号	一	二	三	四	五	总分
分数						

学号	
姓名	

## 本试卷满分 90 分-参考答案

(计算机科学与技术学院 08 级)

### 一、填空 (本题满分 20 分, 每空各 1 分)

1. 设  $A, B$  为集合, 若  $(A \setminus B) \cup B = (A \cup B) \setminus B$ , 则  $B$  等于什么? ( $B = \emptyset$ )

2. 设  $f: X \rightarrow Y, A \subseteq X$ , 则  $f^{-1}(f(A))$  与  $A$  有何关系? ( $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ )

3. 给定集合  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 找出  $S$  上的等价的关系  $R$ , 此关系  $R$  能产生划分

$\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ 。 ( $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4)\}$ )

4. 设  $R, I, N$  分别表示实数, 整数, 自然数集 (包括 0), 定义映射  $f_1, f_2, f_3$ , 试确定它们的性质 (单射、满射、双射)。

(1)  $f_1: R \rightarrow R, f_1(x) = 2^x$ ; ( $f_1$  是单射)

(2)  $f_2: I \rightarrow N, f_2(x) = |x|$ ; ( $f_2$  是满射)

(3)  $f_3: R \rightarrow R, f_3(x) = x + 2$ 。 ( $f_3$  是双射)

5. 在集合  $A = \{1, 2, \wedge, 11, 12\}$  上定义的整除关系 “ $|$ ” 是  $A$  上的偏序关系, 则极大元有几个? (6 个)

6. 设  $X$  是一个集合,  $|X| = n$ , 求  $X$  上对称的二元关系有多少? ( $2^{\frac{n^2+n}{2}}$ )

7. 设  $R$  是集合  $X$  上的一个二元关系, 则

(1)  $R$  是传递的充分必要条件是什么? ( $R^2 \subseteq R$ )

(2)  $R$  是对称的充分必要条件是什么? ( $R = R^{-1}$ )

8. 设  $G$  是有  $p$  个顶点的  $K$ -正则偶图, 则  $p$  至少是多少? ( $p \geq 2K$ )

注意  
行为  
规范

遵守  
考场  
纪律

主管  
领导  
审核  
签字

9. 有  $n$  个药箱, 若每两个药箱里有一种相同的药, 而每种药恰好放在两个药箱中, 则

(1) 每个药箱里有多少种药? (  $n-1$  )

(2)  $n$  个药箱里共有多少种药? (  $n(n-1)/2$  )

10. 设  $G$  是无向图, 有 12 条边, 6 个 3 度顶点, 其余顶点的度数均小于 3, 则  $G$  至少有多少个顶点? ( 9 )

11. 设  $T$  是有  $p$  ( $p \geq 3$ ) 个顶点的无向树且  $T$  的最大度为  $\Delta(T)$ , 则

(1)  $\Delta(T)$  的范围为多少? ( $2 \leq \Delta(T) \leq p-1$ )

(2) 若  $\Delta(T) = 2$ , 则  $T$  中最长路的长度为多少? (  $p-1$  )

12. 设  $G$  是有 8 个顶点的极大平面图, 则  $G$  的面数  $f$  为多少? ( 12 )

13. 设  $G$  是  $(p, q)$  图, 若  $q < p-1$ , 则  $G$  的顶点连通度  $k(G)$  为多少? ( 0 )

14. 设  $T$  为任一棵正则二元树,  $q$  为边数,  $t$  ( $t \geq 2$ ) 为树叶数, 则  $q$  等于什么?

(  $q = 2(t-1)$  )

15. 设  $p, q$  为正整数, 则  $p, q$  为何值时  $K_{p,q}$  为欧拉图? (  $p, q$  为偶数 )

## 二、简答下列各题 (本题满分 10 分)

1. 设  $A, B, C$  是三个任意集合, 且  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ , 则  $A$  与  $C$  应满足什么关系? 说明理由。(3 分)

解:  $C \subseteq A$ 。

两边同并上  $A$  有:  $A \cup ((A \cap B) \cup C) = A \cup [A \cap (B \cup C)] = A$ ,

$[A \cup (A \cap B)] \cup C = A \cup C = A$ ; 即  $C \subseteq A$ 。

2. 设  $R$  为  $X$  上的二元关系, 若  $R \neq \emptyset$  且  $R$  是反自反的和传递的, 则  $R$  是

反对称的吗? 说明理由。(3 分)

证: 若  $R$  不是反对称的, 则  $\exists x, y \in X$ , 使得  $(x, y), (y, x) \in R$ , 由  $R$  的传递性有:

$(x, x) \in R$ , 与  $R$  是反自反的矛盾。于是  $R$  是反对称的二元关系。

3. 设  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ , 试构造两个映射  $f$  和  $g: N \rightarrow N$ , 使得  $f \circ g = I_N$ ,

但  $g \circ f \neq I_N$ 。(4 分)

解:  $fg = I_N$  但  $gf \neq I_N$ , 故  $f$  是满射, 但  $f$  不是单射。于是令:

$f: N \rightarrow N, f(1) = 1, f(n) = n - 1, n \geq 2, g: N \rightarrow N, \forall n \in N, g(n) = n + 1$ , 则

$fg = I_N$  但  $gf \neq I_N$ 。

### 三、简答下列各题 (本题满分 15 分)

1. 何谓强连通有向图? 何谓有向图的强支? (2 分)

解: 设  $D = (V, A)$  是有向图, 若  $\forall u, v \in V$ ,  $u$  与  $v$  互达, 则称  $D$  是强连通的有向图;

有向图  $D$  的极大强连通子图称为  $D$  的一个强支。

2. 至少要删除多少条边, 才能使  $K_p (p > 2)$  不连通且其中有一个连通分支恰有  $k$

个顶点  $(0 < k < p)$ ? (3 分)

证: 要使删除边后的图边数最多, 则删除的边最少。则至少应该删除的边数为:

$$\frac{p(p-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(p-k)(p-k-1)}{2} = k(p-k)。$$

3. 具有奇数顶点的偶图是否是哈密顿图? 说明理由。(3 分)

证: 设  $G$  是一个具有奇数顶点的偶图, 则  $G$  的顶点集  $V$  有一个二划分,

即  $V = \{V_1, V_2\}$  且有  $|V_1| \neq |V_2|$ 。

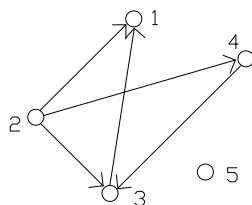
不妨设  $|V_1| < |V_2|$ , 则有  $W(G - V_1) = |V_2| > |V_1|$ 。

由哈密顿图的必要条件可知:  $G$  不是哈密顿图。

4. 设  $D = (V, A)$  是一个有向图, 如图所示。写出有向图  $D$  邻接矩阵、可达矩阵

以及顶点 2 到 4 长度为 2 的有向通道的条数。(3 分)

解: (1)  $\begin{pmatrix} 00000 \\ 10110 \\ 10000 \\ 00100 \\ 00000 \end{pmatrix}$ ; (2)  $\begin{pmatrix} 10000 \\ 11110 \\ 10100 \\ 10110 \\ 00001 \end{pmatrix}$ ; 0。



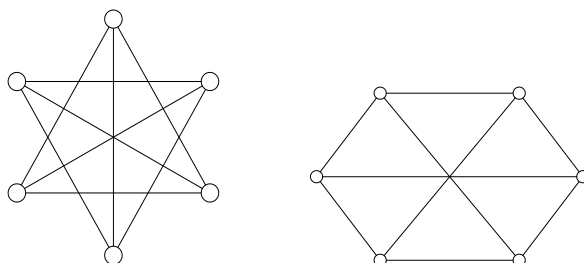
5. 设  $G=(V,E)$  是一个  $(p,q)$  图, 每个顶点的度为 3。则 (4 分)

(1) 若  $q=3p-6$ , 则  $G$  在同构意义下是否唯一?

(2) 若  $p=6$ , 则  $G$  在同构的意义下是否唯一? 说明理由。

解: (1)  $p=4, q=6$ ,  $K_4$  唯一。

(2)  $p=6, q=9$ ,  $G$  不唯一。如图所示。



#### 四、证明下列各题 (本题满分 25 分)

1. 设  $A, B, C, D$  都是非空集合, 若  $A \times B = C \times D$ , 证明:  $A = C, B = D$ 。(5 分)

证: 因为  $A, B, C, D$  非空, 所以  $\forall x \in A, y \in B$ , 有  $(x, y) \in A \times B = C \times D$ , 即

$x \in C, y \in D$ 。因此  $A \subseteq C, B \subseteq D$ 。

同理  $C \subseteq A, D \subseteq B$ 。由集合相等的定义有:  $A = C, B = D$ 。

2. 设  $f: X \rightarrow Y$ , 证明:  $f$  是满射  $\Leftrightarrow \forall E \in 2^Y, f(f^{-1}(E)) = E$ 。(5 分)

证明:  $\Rightarrow \forall y \in f(f^{-1}(E))$ , 则  $\exists x \in f^{-1}(E)$ , 使得  $f(x) = y$ , 于是,  $y = f(x) \in E$ , 所以

$f(f^{-1}(E)) \subseteq E$ 。

反过来,  $\forall y \in E$ , 因为  $f$  是满射, 故必有  $x \in f^{-1}(E)$ , 使得  $f(x) = y$ 。又  $x \in f^{-1}(E)$ , 故  $y \in f(f^{-1}(E))$ , 所以  $E \subseteq f(f^{-1}(E))$ 。

因此  $f(f^{-1}(E)) = E$ 。

$\Leftarrow$  假设  $f$  不是满射, 则  $\exists y_0 \in Y$ , 使得  $\forall x \in X, f(x) \neq y_0$ 。于是令  $E = \{y_0\} \in 2^Y$ , 有  $f(f^{-1}(E)) = f(f^{-1}(\{y_0\})) = f(\emptyset) = \emptyset$ , 由题意得  $\emptyset = E = \{y_0\}$ , 矛盾。

故  $f$  一定为满射。

### 3. 证明: 全体有理数之集 $\mathbb{Q}$ 是可数集。(5 分)

证: 因为  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ 。显然,  $\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{Q}_-$ 。因此只须证明  $\mathbb{Q}_+$  是可数集即可。

我们知道, 每个正有理数均可写成  $p/q$  的形式, 其中  $p$  与  $q$  为自然数。于是,

$\forall q \in \mathbb{N}$ , 令  $A_q = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{N}\}$ , 则  $A_q$  是可数集, 并且  $\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$ 。由定理可知,

$\mathbb{Q}_+$  是可数集。因此,  $\mathbb{Q}$  是可数集。

### 4. 设 $R, S$ 是集合 $X$ 上的等价关系, 且 $R \circ S = S \circ R$ , 则 (10 分)

(1) 证明:  $R \circ S$  是  $X$  上的等价关系;

(2) 证明:  $(R \cap S)^+ = R \circ S$ 。

证: (1) 由  $R, S$  是等价关系得到  $R \circ S$  自反的;

又由  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R = R \circ S$ , 故  $R \circ S$  是对称的;

而  $(R \circ S)^2 = (R \circ S) \circ (R \circ S) = R \circ (S \circ R) \circ S = R \circ (R \circ S) \circ S = R^2 S^2 \subseteq R \circ S$ 。

从而  $R \circ S$  是传递的, 因此,  $R \circ S$  是等价关系。

(2) 因为  $R \circ S$  是  $X$  上的等价关系, 所以  $R \circ S$  是  $X$  上的传递关系;

又  $\forall (x, y) \in R \cap S$ , 有  $(x, y) \in R$  或  $(x, y) \in S$ 。

若  $(x, y) \in R$ , 因为  $(y, y) \in S$ , 所以  $(x, y) \in R \circ S$ ;

若  $(x, y) \in S$ ，因为  $(x, x) \in R$ ，所以  $(x, y) \in R \circ S$ 。

两种情况下都有  $(x, y) \in R \circ S$ ，故  $RY S \subseteq R \circ S$ 。

对于  $X$  上的任一等价关系  $R''$  且  $RY S \subseteq R''$ ，有

$\forall (x, y) \in R \circ S$ ， $\exists z \in X$ ，使得  $(x, z) \in R$  或  $(z, y) \in S$ 。

若  $(x, z) \in R$ ，有  $(x, z) \in RY S \subseteq R''$ ；

若  $(z, y) \in S$ ，有  $(z, y) \in RY S \subseteq R''$ 。

由  $R''$  的传递性，有  $(x, y) \in R''$ ，故  $R \circ S \subseteq R''$ 。

因此  $R \circ S$  是包含  $RY S$  的最小传递关系。

从而  $(RY S)^+ = R \circ S$ 。

## 五、证明下列各题（本题满分 20 分，每小题各 5 分）

1. 证明：恰有两个顶点度数为 1 的树必为一条通路。

证：设  $T$  是一棵具有两个顶点度数为 1 的  $(p, q)$  树，则

$$q = p - 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q = 2(p - 1)。$$

又  $T$  除两个顶点度数为 1 外，其他顶点度均大于等于 2，故

$$\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2 + \sum_{i=1}^{p-2} \deg(v_i) = 2(p - 1)，\text{ 即}$$

$$\sum_{i=1}^{p-2} \deg(v_i) = 2(p - 2)。$$

因此  $p - 2$  个分支点的度数都恰为 2，即  $T$  为一条通路。

2. 设  $G$  是一个  $(p, q)$  图， $p \geq 3$ ，证明：若  $q \geq p$ ，则  $G$  中必有圈。

证：（1）设  $G$  是连通的，若  $G$  无圈，则  $G$  是树，因此  $q = p - 1$  与  $q \geq p$  矛盾。

故  $G$  中必有圈。

(2) 设  $G$  不连通, 则  $G$  中有  $k(k \geq 2)$  个分支,  $G_1, G_2, \dots, G_k$ 。

若  $G$  中无圈, 则  $G$  的各个分支  $G_i(i=1, 2, \dots, k)$  中也无圈, 于是各个分支都

是树, 所以有:  $q_i = p_i - 1, i=1, 2, \dots, k$ 。相加得:

$q = p - k(k \geq 2)$  与  $q \geq p$  矛盾, 故  $G$  中必有圈。

综上所述, 图  $G$  中必有圈。

3. 设  $G$  是一个  $(p, q)$  图, 且  $q > (p-1)(p-2)/2$ , 证明:  $G$  是连通图。

证: 用反证法。假设图  $G$  是不连通的, 则图  $G$  至少存在两个连通分支, 一个支为  $G_1$  是  $(p_1, q_1)$  图, 另外一些支构成的子图为  $G_2$  是  $(p_2, q_2)$ 。而  $G$  的最大可能边数  $q = q_1 + q_2 \leq p_1(p_1-1)/2 + p_2(p_2-1)/2$ , 其中  $1 \leq p_1 \leq p-1, 1 \leq p_2 \leq p-1$ , 所以  $q \leq (p-1)(p-2)/2$ , 与题设矛盾。所以  $G$  是连通的。

4. 设  $G$  是边数  $q < 30$  的平面图, 证明:  $G$  中存在顶点  $v$ , 使得  $\deg v \leq 4$ 。

证: 不妨设  $G$  是连通的, 否则因为它的每个连通分支的边数都应小于 30, 因此可对它的每个连通分支进行讨论, 所以可设  $G$  是连通的。

若  $G$  中无圈, 则  $G$  必为树, 结论显然成立;

若  $G$  中有圈, 因而  $G$  中每个面至少由 3 条边围成, 于是

$$q \leq 3p - 6 \quad (1)$$

假设  $G$  中所有顶点的度数均大于等于 5, 由握手定理可知:

$$2q = \sum_{i=1}^p \deg v_i \geq 5p, \text{ 即 } p \leq 2q/5 \quad (2)$$

由 (1), (2) 得:  $q \geq 30$ 。

这与题设  $q < 30$  矛盾, 故一定存在顶点  $v$ , 使得  $\deg v \leq 4$ 。