哈工大 2010 年 春季学期

集合论与图论 试题

题号	一	二	三	四	总分
分数					

学号	
姓名	

本试卷满分 90 分

（计算机科学与技术学院 09 级各专业）

注意行为规范 遵守考场纪律

一、填空(本题满分 10 分，每空各 1 分)

1．设 A,B 为集合，则 $(A\setminus B)\cup B=A$ 成立的充分必要条件是什么？（ $B\subseteq A$ ）

2．设 $X=\{1,2,\cdots,n\},Y=\{1,2\}$，则从 X 到 Y 的满射的个数为多少？（ 2^n-2 ）

3．在集合 $A=\{2,3,4,8,9,10,11\}$ 上定义的整除关系“$|$”是 A 上的偏序关系，则最大元是什么？（ 无 ）

4．设 $A=\{a,b,c\}$，给出 A 上的一个二元关系，使其同时不满足自反性、反自反性、对称性、反对称和传递性的二元关系。（ $R=\{(a,a),(b,c),(c,b),(a,c)\}$ ）

5．设 Σ 为一个有限字母表，Σ 上所有字（包括空字）之集记为 Σ^*，则 Σ^* 是否是可数集？（ 是 ）

6．含 5 个顶点、3 条边的不同构的无向图个数为多少？（ 4 ）

7．若 G 是一个 (p,p) 连通图，则 G 至少有多少个生成树?（ 3 ）

8．如图所示图 G，回答下列问题：

（1）图 G 是否是偶图?（ 不是 ）

（2）图 G 是否是欧拉图?（ 不是 ）

（3）图 G 的色数为多少?（ 4 ）

二、简答下列各题（本题满分 40 分）

1. 设 A,B,C,D 为任意集合，判断下列等式是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）

（1）$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$；

（2）$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

解：（1）不成立。例如 $A=D=\phi,B=c=\{a\}$ 即可。

（2）成立。$\forall(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，有 $x\in A\cap B,y\in C\cap D$，即 $x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。所以 $(x,y)\in A\times C,(x,y)\in B\times D$，因此 $(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，从而 $(A\cap B)\times(C\cap D)\subseteq(A\times C)\cap(B\times D)$。

反之，$\forall(x,y)\in(A\times C)\cap(B\times D)$，有 $x\in A,x\in B,y\in C,y\in D$。即

主管领导审核签字

$(x,y)\in(A\cap B)\times(C\cap D)$，从而$(A\times C)\cap(B\times D)\subseteq(A\cap B)\times(C\cap D)$。

因此，$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$。

2. 设G是无向图，判断下列命题是否成立？若成立给出证明，若不成立举出反例。（6分）

（1）若图G是连通图，则G的补图G^C也是连通图。

（2）若图G是不连通图，则G的补图G^C是连通图。

解：（1）G^C不一定是连通图。

（2）G^C一定连通图。

因为G不连通，故G至少有两个分支，一个是G_1，另外一些支构成的子图是G_2。

对于G^c中任意两个顶点u和v：

（1）若$u\in V_1, v\in V_2$，则u与v不在G中邻接。由补图的定义可知：u与v必在G^c中邻接；

（2）若$u,v\in V_1$(或V_2)，取$w\in V_2$ (或V_2)，则u与w，w与v在G都不邻接，故u与w，w与v在G^c必邻接，于是uwv就是G^c中的一条路。

综上可知，对G^c中任两个顶点u和v之间都有路连接，故G^c是连通的。

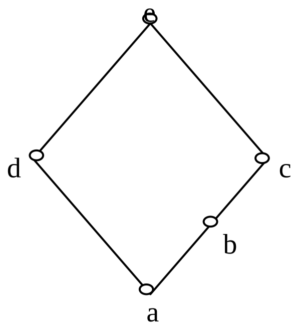
3．设集合$A=\{a,b,c,d,e\}$，A上的关系定义如下：（6 分）

$$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),(c,c),(c,e),(d,d),(d,e),(e,e)\}$$ **则**

（1）写出R的关系矩阵； （2）验证(A,R)是偏序集； （3）画出$Hasse$图。

解：（1）R所对应的关系矩阵为M_R为：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$



（2）由关系矩阵可知：

对角线上的所有元素全为 1，故R是自反的；$r_{ij}+r_{ji}\le 1$，故R是反对称的；

R^2对应的关系矩阵M_{R^2}为：$M_{R^2}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=M_R$。

因此 R 是传递的。

综上可知：故 R 是 A 上的偏序关系，从而 (A,R) 是偏序集。

（3）(A,R) 对应的 $Hasse$ 图如图所示。

4．设 A 是有限集合，$f:A\to A$。则（3 分）

（1）若 f 是单射，则 f 必是满射吗？反之如何？

（2）若 A 是无限集合，结论又如何？

解：（1） f 是单射，则 f 必是满射；反之也成立；

（2）若 A 是无限集合，结论不成立。

举例：令 N＝{1，2，3，…}，则

（1）设 $s:N\to N$，$\forall n\in N, S(n)=n+1$。显然，S 是单射，但不是满射。

（2）设 $t:N\to N$，$\forall n\in N, t(1)=1, t(n)=n-1, n\geq 2$。显然，$T$ 是满射，但不是单射。

5．（4 分）

（1）根据你的理解给出关系的传递闭包的定义；

（2）设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系 $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，求关系 R 的传递闭包 R^{+}。

解：（1）设 R 是集合 A 上的二元关系，则 A 上包含 R 的所有传递关系的交称为关系 R 的传递闭包。

（2） $R^{+}=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$

6．由 6 个顶点，12 条边构成的平面连通图 G 中，每个面由几条边围成？说明理由。（4 分）

解：每个面由 3 条边围成。

在图 G 中，$p=6$，$q=12$，根据欧拉公式 $p-q+f=2$，得 $f=8$。

因为简单平面连通图的每个面至少由 3 条边围成，所以假设存在某个面由大于 3 条边围成，则有：$3f<2q$，即 $24<24$，矛盾。

故每个面至多由 3 条面围成，于是 G 中每个面由 3 条边围成的。

7．设 $G=(V,E)$ 是至少有一个顶点不是孤立点的图。若 $\forall v\in V, \deg v$ 为偶数，则 G 中是否必有圈？说明理由。（4 分）

解： G 中必有圈。

令 P 是 G 中的一条最长的路，$P:v_1v_2\cdots v_n$，则由 $\deg v_1\geq 2$ 知，必有某个顶点 u 与 v_i 邻接。由于 P 是最长路，所以 u 必是 $v_3,v_4,\cdots,v_n$ 中的某个 $v_i, i\geq 3$。于是，$v_1v_2\cdots v_iv_1$ 是 G 的一个回路。

8．设 T 是一个有 n_0 个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为 n_2，则 n_0 与 n_2 有何关系？说明理由。（4 分）

解：n_0 与 n_2 的关系为：$n_0=n_2+1$

由 $\sum\limits_{v\in V} id(v_i)=\sum\limits_{v\in V} od(v_i)=q$ 且 $q=p-1$，得 $2\times n_2+1\times(p-n_2-n_0)=p-1$，

得 $n_0=n_2+1$。

9．已知有向图 D 的邻接矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$，则（3 分）

（1）画出邻接矩阵为 A 的有向图 D 的图解；

（2）写出 D 的可达矩阵 R；

（3）写出计算两顶点之间长为 k 的有向通道条数的计算方法。

解： （1） （2）$\begin{pmatrix}11111\\11111\\00111\\00111\\00111\end{pmatrix}$； （3）$(A^k)_{ij}$。

三、证明下列各题（本题满分 40 分，每小题各 5 分）

1．设 G 是一个 (p,q) 图，证明：G 是树 $\Leftrightarrow$ G 无圈且 $p=q+1$。

证： $\Rightarrow$ 因为 G 是树，所以 G 是无圈；

其次对 G 的顶点数 p 进行归纳证明 p=q+1。

当 p 为 1 或 2 时，连通图 G 中显然有 p=q+1。

假设对一切少于 p 个顶点的树结论成立；

今设 G 是有 p 个顶点树，从 G 中去掉任一条边 x，则 G-x 恰有两个支。由归纳假设，每个支中顶点数与边数之间有关系式：$p_1=q_1+1$，$p_2=q_2+1$。

所以，$p=p_1+p_2=q_1+q_2+2=(q_1+q_2+1)+1=q+1$。

$\Leftarrow$ 只须证明 G 连通即可。

假设 G 不连通，则必有 k 个支且 k≥2。由于每个支都是连通的且无回路，故每个支都是树。于是，对每个支都有 $p_i=q_i+1, i=1,2,\Lambda,k$。于是，$p=\sum\limits_{i=1}^{k} p_i=\sum\limits_{i=1}^{k} q_i+k=q+k$。

由假设 k≥2，这与 p=q+1 相矛盾。因此，G 是连通的。即 G 是树。

2．设 $f:X\to Y$，证明：f 是单射 $\Leftrightarrow \forall F\in 2^X, f^{-1}(f(F))=F$。

证：（1）$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(f(F))$，则 $f(x) \in f(F)$，于是 F 中必存在 x_1，使得 $f(x) = f(x_1)$。因为 f 是单射，故必有 $x = x_1$。即 $x \in F$，所以 $f^{-1}(f(F)) \subseteq F$。

反过来， $\forall x \in F, f(x) \in f(F)$，从而有 $x \in f^{-1}(f(F))$，所以 $F \subseteq f^{-1}(f(F))$。

因此 $f^{-1}(f(F)) = F$。

$\Leftarrow$假设 f 不是单射，则$\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$，但 $f(x_1) = f(x_2) = y$。令 $F = \{x_1\}$，于是 $f^{-1}(f(F)) = f^{-1}(f(\{x_1\}) = f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\}$，故有$\{x_1, x_2\} = F = \{x_1\}$，矛盾。

即 f 一定为单射。

3．设 G 是一个 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点，并且

$$\deg u + \deg v \geq p\text{。}$$

证明：G 是哈密顿图$\Leftrightarrow G + uv$ 是哈密顿图。

证明：$\Rightarrow$显然成立。

$\Leftarrow$假设 G 不是哈密顿图，则有题意知在 G 中必有一条从 u 到 v 的哈密顿路。不妨设此路为$uv_2v_3\Lambda\ v_{p-1}v$，令 $\deg v_1$=k，$\deg v_p$ =l，则在 G 中与 u 邻接的顶点为 u_{i1} ，u_{i2}，…，u_{ik}，其中 2=i_1<i_2<…<i_k≤p-1。这时顶点 u_{ir-1}(r=2，3…，k)不能与顶点 vp 邻接。因为此时 G 有哈密顿回路 $uv_2\cdots v_{ir-1}vv_{p-1}\cdots v_{ir}u$，因此 v_p 至少与 u，v_2，…，v_{p-1} 中的 k 个顶点不邻接。于是，l≤p-1-k，从而 k+1≤p-1，与题设矛盾，故 G 是哈密顿图。

4．设 R 是 A 上的一个二元关系，证明：R 是对称的$\Leftrightarrow R = R^{-1}$。

证：$\Rightarrow \forall(x, y) \in R$，**由 R 的对称性有**$(y, x) \in R$，**即**$(x, y) \in R^{-1}$，**从而** $R \subseteq R^{-1}$

反之，$\forall(y, x) \in R^{-1}$，**则**$(x, y) \in R$。**由 R 的对称性有：**$(y, x) \in R$，**从而** $R^{-1} \subseteq R$

故 $R = R^{-1}$

$\Leftarrow \forall x$，$y \in X$，**若**$(x, y) \in R$，**由** $R = R^{-1}$，**得**$(x, y) \in R^{-1}$，**即**$(y, x) \in R$，**故 R 是对称的。**

5．设 R 是 A 上的一个二元关系，令 $S = \{(a,b) \mid \exists c \in A$，使得$(a,c) \in R$ 且$(c,b) \in R\}$。

证明：若 R 是 A 上的等价关系，则 S 也是 A 上的等价关系；

证：因为 R 是自反的，所以$\forall a \in A$，有$(a,a) \in R$。根据 S 的定义，有$(a,a) \in S$，所以 S 是自反的；

若$(a,b) \in S$，则$\exists c \in A$，使得$(a,c) \in R$ 且$(c,b) \in R$。因为 R 是对称的，所以$(b,c) \in R$ 且$(c,a) \in R$，根据 S 的定义有$(b,a) \in S$，所以 S 是对称的；

若$(a,b) \in S$，$(b,c) \in S$，则$\exists d \in A$，使得$(a,d) \in R$ 且$(d,b) \in R$。因为 R 是传递的，所以$(a,b) \in R$。

则$\exists e \in A$，使得$(b,e) \in R$ 且$(e,c) \in R$。因为 R 是传递的，所以$(b,c) \in R$。

根据 S 的定义有$(a,c) \in S$。所以 S 是传递的。

综上可知：S 是等价关系。

6. 利用康托对角线法证明：若 A 可数，则 2^A 不可数。

证： 因为 $2^A \sim Ch(A)=\{f \mid f: A\to\{0,1\}\}$，所以只须证明 $Ch(A)$ 不可数即可。$\forall f\in Ch(A)$，f 可表为0，1 的无穷序列。若 $Ch(A)$ 可数，则 $Ch(A)$ 的元素可排列成无重复项的无穷序列 $f_1, f_2, f_3, \cdots$。每个 f_i 可表成 0，1 的无穷序列 $f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, \cdots$。用对角线法构造一个 0，1 序列 $g_1, g_2, g_3, \cdots$：若 $f_{11}=0$，则 $g_1=1$；若 $f_{11}=1$ 则 $g_1=0$。一般地，若 $f_{ii}=0$，则 $g_i=1$；如果 $f_{ii}=1$，则 $g_i=0$，$i=1,2,3,\cdots$，则 $g_1, g_2, \cdots$ 确定的函数 $g\in Ch(A)$，但 $g\neq f_i, i=1,2,\cdots$，矛盾。所以，2^A 不可数。

7. 设 $G=(V,E)$ 是一个 (p,q) 图，若 G 是一个 $K-$ 正则偶图，证明：$p\geq 2K$。

证： 因为 G 中无三角形且 G 为 $K-$ 正则图，所以 $Kp=2q\leq 2(p/2)^2=p^2/2$，

因此，$p\geq 2K$。

8．设 G 是顶点 $p\geq 11$ 的平面图，证明：G 的补图 G^c 是非平面图。

证： 反证法：假设图 G 的补图 G^c 也是平面图，令 $G=(p,q)$，$G^c=(p_1,q_1)$，则 $p=p_1$，而 $q+q_1=p(p-1)/2$ ………… （1）

又因为 G 和 G^c 都是平面图，故 $q\leq 3p-6$，$q_1\leq 3p-6$。相加得：

$$q+q_1\leq 6p-12 \qquad （2）$$

由（1），（2）的得：$q+q_1=p(p-1)/2\leq 6p-12$，展开有：$p^2-13p+24\leq 0$，于是 $p<11$。与题设矛盾，所以 G^c 不是平面图。