《集合论与图论》试题

哈工大 2004/2005 年秋季学期

参考答案

一、1．{2，5，6}　2．2^{16}　3．２４　4．２４　5．６　6．５　7．2^{6}　8．2^{12}　9．4^{16}　１０．４

二、１．C_q^r　２．$2^{\frac{n^2+n}{2}}$　３．$\{(a,c),(a,b)\}$　４．P＝2n－1　５．q－p＋1

６．m＝n　７．４　８．$\left((1)\forall a,b\in N, a-b\in N \quad (2)\forall r\in R, n\in N, rn\in N, nr\in N\right)$

９．不存在　１０．没有零因子，若有零因子 $a\neq 0$，则存在 b≠0，使得 $ab=0=ob$，由消去律有 $a=0$ 矛盾

三、(1)　p＝6，q＝9

（2）不一定是平面图。如$K_{3,3}$就不是平面图.

（3）G 一定是哈密顿图。因为对任一对不相邻的顶点 $u,v\in V$，degu＋degv≥p＝6

G 不是平面图。因为 G 的顶点度数不全是偶数。

四、1.解 1：a与a^{-1}，b与b^{-1}同阶，故ab与a^{-1} b^{-1}＝（ba）$^{-1}$同阶。而（ba）$^{-1}$与ab同阶，故ab与ba同阶。

解 2：设 a 的阶为 n，则有 $(bab^{-1})^n=(bab^{-1})(bab^{-1})\cdots(bab^{-1})=ba^nb^{-1}=beb^{-1}=e$；

反之，设 bab^{-1} 的阶为 n，即 $(bab^{-1})^n=e$，得 $ba^nb^{-1}=e$，而 $a^n=b^{-1}eb=e$，所以 a 与 bab^{-1}

同阶，而 ab 与 $bab^{-1}b=ba$ 同阶。

2．设 $G=\{e,a,b\}$，则由 3 个元素构成的群如表所示

x	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

3．因为 R 为环，故乘法满足分配律

左边＝$(na)b=\underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{n个}b=\underbrace{ab+ab+\cdots ab}_{n}=a\underbrace{(b+b+\cdots+b}_{n})=a(nb)$＝右边

五、1.因为 F 有四个元支，所以（F，＋）群的阶为 4，由 Lagrange 定理知，F 中每个元素对加法的阶只能为 1，2，4，又因为元素的特征数只能是素数，所以特殊数只能为 2。

2.设 F＝｛o，e，a，b｝，因为 F 是一个域，因此（{e，a，b}，・）构成一个 Abal 群，

其中：$a^2\neq a$（否则 $a=e$），$a^2\neq e$（否则 a 的阶不能整除群的阶了），故 $a^2\neq b$

而$a+e\neq o$（否则$a=-e,a^2=e$，与上同样矛盾）

$a+e\neq e$（否则$a=0$），$a+e\neq a$（否则$e=0$），故 a+e=b，

所以$a^2=a+e$

由 a 与 b 是对称的，因此 F 中的任意非零元和非单位元均满足方程$x^2=x+e$

6、证：$\forall(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，有$x\in A$且$y\in(B\setminus C)$，即$x\in A$且$y\in B$ 但$x\overline{\in}C$。于是$x\in A\times B$，但$x\overline{\in}A\times C$，从而有$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$,故$A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)$，反之设$(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，有$x\in A\times B$，$y\in A\times C$，于是有：$x\in A$且$x\in B$但 $x\overline{\in}C$ ，从而 $x\in A$ 且 $x\in(B\setminus C)$ 即 $(x,y)\in A\times(B\setminus C)$ ，于是$(A\times B)(A\setminus C)\subseteq A\times(B\setminus C)$。由集合相等定义有：

$A\times(B\setminus C)=A\times B\setminus(A\times C)$

七、证：1.树的度为 1 的顶点（叶子）不是割点，而树至少有 2 个顶点的度为 1，故树至多有 P－2 个顶点为割点。P 个顶点的树有 P－1 个桥。

2.归纳法：当 P＝1，2，3，4 时显然证明成立。

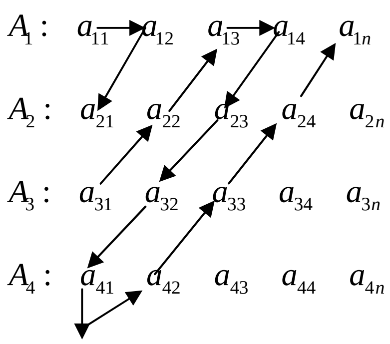
假设 P＝K 时，G 是 4－可着色的，当 P＝K＋1 时，由于 G 是一个没有三角形的平面图，故$\exists v$，使得$\deg v$≤3。于是 G\{ v}便是一个 K 个顶点的平面图，由归纳假设知 G 是 4－可着色的。对于 G＋v，由于 deg$v$≤3，故用不与 v 相邻接的顶点的其它颜色给 v 着色，便得到了图 G 的 4－可着色。

3.设 D＝（V,A）是一个有向图，若$\forall u,v\in V$，u与V互达，则 D 是强连通的有向图；

有向图 D 的极大强连通子图称为 D 的一个强支。

八、1．证明：设R是X上的二元关系，aR^+b且bR^+c，由定义可知，对每个包含R的传递关系R'，必有$aR'b$且$bR'C$，由R'的传递性得到$aR'C$，从而aR^+C，因此R$^+$是传递的。

2.证，不妨设$A_1,A_2\cdots,A_n\cdots$是两面不相交的，由于每个A_i都是可数集，故可设$A_1,A_2\cdots$的全部元素可排成如下无限阵的形式。



按表中箭头所指的方向对这些元素进行排列就就得到了$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$的全部元素的一个序列，由定理可知：$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$是可数的。

九、1.（1） $\forall a,b\in G$，因为 G 且群是 H 是 G 的子群故$e\in H$（$e\in G$），使约$ab^{-1}=e\in H$故$a\cong a$而$\cong$是自反的。

（2）$\forall a,b\in G$，若$a\cong b$，则$\ni h\in H$，使约$ab^{-1}=h$，因为 H 为子群，$h\in H$ 且$ba^{-1}=h_1$而$b\cong a$，所以$\cong$是自反的。

（3） $\forall a,b\in G$， 若$a\cong b$， $b\cong c$则$h_1\in H$， $h_2\in H$， 使约$ab^{-1}=h_1$且$be^{+}=h_2$， 而$ac^{-1}bb^{-1}h_2=h_1 h_2\in H$，而$a\cong c$，所以$\cong$是自反的。

由（1）（2）（3）知，所以$\cong$是传递的。

2.证：由φ是从群（G，O）到群（$\overline{G},\overline{O}$）的满向志可知$\varphi(e)=\overline{e}$，而$e\in\varphi^{-1}(\overline{e})$似$\varphi^{-1}(\overline{e})\neq\phi$，于 是 ， $\forall x,y\in\varphi^{-1}(\overline{e})$ ， 有 $\varphi(x)=\varphi(y)\in\overline{e}$ ， $\varphi(x,y)=\varphi(x)\bar{\circ}\varphi(y)=\overline{e}\circ\overline{e}=e$ 故$x\circ y\in\varphi^{-1}(\overline{e})$，而 G 中的乘法在$\varphi(\overline{e})$中封闭

其次， $\forall x\in\varphi^{-1}(\overline{e})$有$\varphi(e)=\varphi(x^{-1}\circ x)=\varphi(x^{-1})\bar{\circ}\varphi(x)=\overline{e}$

故$\varphi(x^{-1})=\left(\varphi(x)\right)^{-1}=\overline{e}$，从而$x^{-1}\in\varphi^{-1}(\overline{e})$，因此$\varphi^{-1}(\overline{e})$是的 G 子群。

最后，证明$\varphi^{-1}(\overline{e})$是 G 的子正则子群，为此$Ux\in G$， $a\in\varphi^{-1}(\overline{e})$有

$$\varphi(x\circ a\circ x^{1})=\varphi(x)\,\overline{\circ}\,\varphi(a)\,\overline{\circ}\,\varphi(x^{-1})=\varphi(x)\,\overline{\circ}\,\overline{e}\,\overline{\circ}\,\varphi(x^{-1})$$
$$=\varphi(x)\,\overline{\circ}\,\varphi(x^{-1})=\varphi(x\circ x^{-1})=\varphi(e)=e$$

故$x\circ a\circ x^{-1}\in\varphi^{-1}(e)$，故$\forall x\in G,x^{-1}(\overline{e})x^{-1}\leqslant\varphi^{-1}(\overline{e})$，所以$\varphi^{-1}(e)$是 G 的正则子群