哈工大 2008 年 秋季学期

集合论与图论 试题

题号	一	二	三	四	五	六	总分
分数							

班号	
姓名	

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字

本试卷满分 90 分

（计算机科学与技术学院 07 级）

一、填空（本题满分 10 分，每小题各 1 分）

1. 设 A, B 是集合，若 $A\Delta B = B$，则 A 等于什么？

（ $A=\Phi$ ）

2．设 X 为集合，R 为 X 上的偏序关系，计算 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 等于什么？

（ R ）

3．把置换 $\begin{pmatrix} 123456789 \\ 436987251 \end{pmatrix}$ 分解成循环置换的乘积。

（(149)(2367)(58)）

4．什么是无穷集合？

（凡能与自身的一个真子集对等的集称为无穷集合）

5．设 T 是一棵树，$p \geq 2$，则 p 个顶点的树 T 至多有多少个割点？

（ $p-2$ ）

6．设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图，若 D 是连通的，则 q 至少是多大？（ $p-1$ ）

7．设 $V = \{1,2,\Lambda, n\}$，则以 V 为顶点集的无向图共有多少个？

（ $2^{p(p-1)/2}$ ）

8．设 $V = \{1,2,\Lambda, n\}$，则以 V 为顶点集的有向图共有多少个？ $2^{p(p-1)}$ ）

9．每个有 3 个支的不连通图，若每个顶点的度均大于或等于 2，则该图至少有多少个圈？ （ 3 ）

10. 设 T 是一个正则二元树，它有 n_0 个叶子，则 T 有多少条弧？（2(n_0 -1)）

二、判断对错（本题满分 10 分，每小题各 1 分）

1. 设 A,B 是两个集合，则 $A\subseteq B$ 且 $A\in B$ 不可能同时成立。 （ 错 ）

2．在集合 $\{1,2,\Lambda,10\}$ 上可以定义 2^{10} 个二元运算。 （ 错 ）

3. 设 $f:X\to Y$，若存在唯一一个映射 $g:Y\to X$，使得 $gf=I_X$，则 f 一定是可逆的。

（ 错 ）

4．设 X 是一个集合，则 X 上的自反和反自反的二元关系个数相同。

（ 对 ）

5. 设 Σ 为一个有限字母表，Σ 上所有字（包括空字）之集记为 Σ^*。则 Σ^* 不是可数集。 （ 错 ）

6. 设 G 是一个 (p,q) 图，若 $q\geq p$，则 G 中必有圈。 （ 对 ）

7. 若 G 是一个 (p,p) 连通图，则 G 至多有 p 个生成树。 （ 对 ）

8. 设 $r\geq 2$， G 是 $r-$ 正则图且顶点连通度为 1，则 $\lambda(G)\leq r$。（ 对 ）

9．把平面分成 p 个区域，每两个区域都相邻，则 p 最大为 5。（ 错 ）

10. 有向图的每一条弧必在某个强支中。 （ 错 ）

三、证明下列各题(本题满分 18 分，每小题各 6 分)

1．设 A,B,C 是三个任意的集合，则

（1）证明：$(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$；（2） 举例说明 $(A\setminus B)\setminus C\neq A\setminus(B\setminus C)$。

证：（1）证明：$\forall\ x\in(A\setminus B)\setminus C$，有 $x\in(A\setminus B), x\notin C$，即 $x\in A$ 但 $x\notin B, x\notin C$，从而 $x\notin B\setminus C$，于是 $x\in A\setminus(B\setminus C)$，即 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

（2）若 $A=\{1,2,3\}, B=C=\{2\}$，则 $(A\setminus B)\setminus C\subseteq A\setminus(B\setminus C)$。

2．设 A,B,C 是三个任意的集合，证明：$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

证明：设 $(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，则 $x\in A$，$y\in B\setminus C$，从而 $x\in A$，$y\in B$，$y\notin C$。于是 $(x,y)\in A\times B$，$(x,y)\notin A\times C$，因此 $(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，即

$$A\times(B\setminus C)\subseteq(A\times B)\setminus(A\times C)。$$

反之，设 $(x,y)\in(A\times B)\setminus(A\times C)$，有 $(x,y)\in(A\times B)$，$(x,y)\notin(A\times C)$，从而 $x\in A$，

$y\in B$，$y\notin C$，故 $x\in A$ 且 $y\in B\setminus C$。于是 $(x,y)\in A\times(B\setminus C)$，

即 $(A\times B)\setminus(A\times C)\subseteq A\times(B\setminus C)$。

因此，$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

3．设 S,T 是两个任意的集合，证明：$S\Delta T=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

证：$\forall x\in S\Delta T$，则

若 $x\in S$，则 $x\notin T$。因而 $x\in(S\cup T)$ 且 $x\notin(S\cap T)$，故

$x\in(S\cup T)\setminus(S\cap T)=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$；

若 $x\notin S$，则 $x\in T$，同理可得 $x\in(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

因此 $S\Delta T\subseteq(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

反之，因为 $(S\cap T)\subseteq(S\cup T)$，故 $(S\cup T)\Delta(S\cap T)=(S\cup T)\setminus(S\cap T)$。于是

$\forall x\in(S\cup T)\Delta(S\cap T)=(S\cup T)\setminus(S\cap T)$，有 $x\in(S\cup T), x\notin(S\cap T)$。

若 $x\in S$，则 $x\notin T$，故 $x\in S\Delta T$；

若 $x\notin S$，则 $x\in T$，故 $x\in S\Delta T$。

因此 $(S\cup T)\Delta(S\cap T)\subseteq S\Delta T$。

从而 $S\Delta T=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$。

四、回答下列各题(本题满分 14 分)

1．如图 1 所示是彼德森图 G，回答下列问题：（6 分）

（1）G 是否是偶图？　　　（不是 ）

（2）G 是否是欧拉图？　　（不是 ）

（3）G 是否是平面图？　　（不是 ）

（4）G 是否是哈密顿图？　（不是 ）

（5）G 的色数为多少？　　（ 3 ）

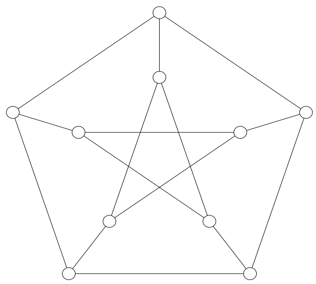

图 1

2．设 G 是如图 2 所示的有向图，则（8 分）

（1）写出 G 的邻接矩阵。

（2）求顶点 v_1 到 v_4 间长为 10 的有向通道的条数的方法是什么？

（不必算出具体的数）

（3）写出 G 的可达矩阵。

（4）画出对应于表达式（A+B*C）/（A-C）的二元树表示。

解：（1）$B=\begin{pmatrix}0101\\0011\\0100\\0110\end{pmatrix}$；（2）$(B^{10})_{14}$ 元素的值；（3）$\begin{pmatrix}1111\\0111\\0111\\0111\end{pmatrix}$　（4）

五、证明下列各题(本题满分 18 分，每小题各 6 分)

1．设 f：$X\to Y$，g：$Y\to Z$。若 $g\circ f$ 是单射，则 f 与 g 哪个是单射？请证明之。

解： f 是单射。

因为 $g\circ f$ 是单射，所以 $\forall x_1,x_2\in X$，若 $x_1\neq x_2$，则 $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))$。

因此，$f(x_1)\neq f(x_2)$，故 f 是单射。

2．设 $X=\{1,2,\Lambda,n\}, S=X\times X$。“$\cong$”是 S 上如下的二元关系：$\forall(i,j),(k,l)\in S$，

$(i,j)\cong(k,l)$ 当且仅当 $i+j=k+l$。

则(1) 证明：$\cong$ 是等价关系；(2)求等价类数。

证： (1)等价关系显然；

(2)等价类数为：$2n-1$。

3．令 $N=\{1,2,3,\text{L}\}$，$S=\{f\mid f:N\to\{0,1\}\}$，利用康托对角线法证明 S 是不可数集。

证: 假设从 N 到{0, 1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列 f_1,f_2,f_3,L。每个函数 f_i 确定了一个 0, 1 序列 $a_{i1},a_{i2},a_{i3},\text{L}$。构造序列 $b_1,b_2,b_3,\text{L},b_i=1$，若 $a_{ii}=0$；否则 $b_i=0$。该序列对应的函数 $f(i)=b_i$，$i\in N$，不为 f_1,f_2,L 任一个，矛盾。

六、证明下列各题（本题满分 20 分，每小题各 5 分）

1. 设 G 是一个恰有两个不邻接的奇度顶点 u 和 v 的无向图，证明：

G 连通 $\Leftrightarrow G+uv$ 连通。

证： $\Rightarrow$ 显然成立。

$\Leftarrow$ 假设G不连通，则G恰有 2 个分支：G_1,G_2。由题意u与v不在一个分支上，于是含有u(或v)的顶点的分支只有一个奇度数顶点与握手定理的推论矛盾。于是假设不成立，即G是连通的。

2．证明：任意一棵非平凡树至少有两个树叶。

证明：设T为一棵非平凡的无向树，T中最长的路为$L=v_1v_2\cdots v_k$。若端点v_1和v_k中至少有

一个不是树叶，不妨设v_k不是树叶，即有$\deg(v_k)\geq 2$，则v_k除与L上的顶点v_{k-1}相邻外，

必存在v_{k+1}与v_k相邻，而v_{k+1}不在L上，否则将产生回路。于是$v_1\cdots v_kv_{k+1}$仍为T的一条比

L更长的路，这与L为最长的路矛盾。故v_k必为树叶。

同理，v_1也是树叶。

3．证明：若每个顶点的度数大于或等于 3，则不存在有 7 条边的平面连通图。

证明：假设存在这样的平面图，则由$p-q+f=2$，有

$$p+f=2+q=9\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而由$\sum_{v\in V}\deg v=2q,3p\leq 2q,p\leq\frac{2}{3}q=\frac{14}{3}$；由$nf=2q,3f\leq 2q,f\leq\frac{2}{3}q=\frac{14}{3}$；

p,f为整数，故$p,f\leq 4$，于是$p+f\leq 8$与(1)矛盾。

4．证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。（用数学归纳法证明）

证： 设D是p个顶点的比赛图。施归纳于p：

当p=1，2时，结论显然成立。

假设当p≥2时结论成立，往证对p+1个顶点的比赛图D也成立。从D中

去掉一个顶点u，则得到一个具有p个顶点的比赛图D-u。由归纳假设D-u有哈密顿路u_1, u_2, L, u_p。

在D中，若uu_1或u_pu为D的弧，则结论成立。今设u_1u及uu_p为D的弧，由于D比赛图，所以u与u_k（k=2,L，p-1）之间有且仅有一条弧，于是必有一个最大i使u_iu为弧，从而uu_{i+1}为D的弧。于是，$u_1 L u_i u u_{i+1} L u_p$为D的哈密顿路。由归纳法原理知对任何p本题结论成立。