# 集合论与图论

## 计算机学院 05 年秋季

**一、　解答下列问题，要求只给出答案（每题 2 分，共 16 分）**

1. 设 $A$、$B$ 为集合，试求一个集合 $X$ ，合得 $A\Delta X = B$。

（　$A\Delta B$　）

2. 设 $A=\{1,2,3,4\}$， $B=\{1,2\}$，试求从 $A$ 到 $B$ 的满射的个数。

（ $2^4-2=14$ ）

3. 设 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，试求 $A$ 上反自反二无关系的个数。

（ ${}_2 n^2-n=2^{90}$ ）

4. 设 $A=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$， $q\le\frac{1}{2}p(p-1)$。试求以 $V$ 为顶点集具有条边的无向图的个数。

（ $(\frac{1}{2}p_q(p-1))$ ）

5. 设 $T$ 是一个有 $P$ 个顶点的正则二元树，试求下的叶子数，其中 $P$ 是奇数。

（ $\frac{P+1}{2}$ ）

6. 正整数 $m$ 和 $n$ 为什么值时 $Km,n$ 为欧拉图？

（ $m$和$n$为偶数 ）

7. 设 $G=(V,E)$ 为无向图，$|V|=P,|E|=P$。如果 $G$ 是边通图，那么 $G$ 至少有几个生成树？

（ 3个 ）

8. 具有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的平面连通图中， $p$ 和 $q$ 应满足什么样的关系式？

（$q\le 3p-6$）

**二、以下各题要求只给出答案（每题 2 分，共 14 分）**

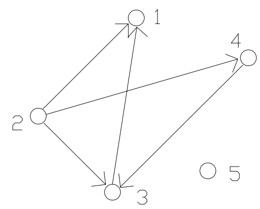
1 . 设 $X=\{a,b,c,d\},R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，试求 $R$ 的传递闭包。

（$(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(c,a),(a,c),(b,a),(c,b)$）

2. 将置换（$\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&9&1&6&5&2&3&4&8\end{matrix}$）分解为循环置换的乘积，然后分解

成对换的乘积$(173)(29846)(5)=(17)(13)(29)(28)(24)(26)$。

3. 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$



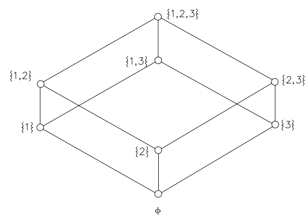

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}$$

如果 $A$ 是某有向图的邻接矩阵，那么画出这个有向图并写出它的可达矩阵。

4. 设 $B=\{0,1\}, E=\{a,b,c,\cdots,x,y,z\}$。字母表 $B$ 上所有字符串之集记为 $B^*$，字母表 $E$ 上所有字符串之集记为 $E^*$。试求 $B^*$ 和 $E^*$ 的基数有什么关系。（相等）

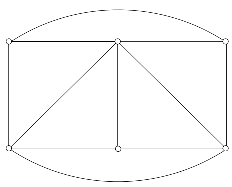
5. 集合 $X=\{1,2,3\}$ 上可以定义多少个不相同的等价关系？（5 个）

6. 画出偏序集 $\left(2^{\{1,2,3\}},\subseteq\right)$ 的哈斯图。




7. 求下图的顶点连通度和边连通度。

（$x=3,\lambda=3$）



三、

1. 设 $A,B$ 和 $C$ 为任意集合，试证 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

[证] 设 $(x,y)\in A\times(B\cup C)$，则 $x\in A$ 且 $y\in B$，或 $x\in A$ 且 $y\in C$ 从而 $(x,y)\in A\times B$ 或 $(x,y)\in A\times C$ 即 $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ 因此，$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$。

反之，设 $(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$，则 $(x,y)\in A\times B$ 或 $(x,y)\in A\times C$ 。如果 $(x,y)\in A\times B$，则 $x\in A$，$y\in B$，从而 $y\in B\cup C$，故 $(x,y)\in A\times(B\cup C)$；如果 $(x,y)\in A\times C$，则 $x\in A$ 且 $y\in C$ 从而 $y\in B\cup C$，故 $(x,y)\in A\times(B\cup C)$。因此，$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\times C)$。所以，$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

2. 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 。如果 $g\circ f$ 是满射，试证 $g$ 是满射。

[证]因 $g\circ f$ 是满射，所以 $\forall\Sigma\in Z$，$\exists x\in X$ 使得 $g(f(x))=\Sigma$。令 $y=f(x)$，则 $y\in Y$ 且 $g(y)=g(f(x))=\Sigma$。因此，$g$ 是一个满射。

四、

1. 设 $X=\{1,2,3\}$，$y\{1,2\}$，$Y^X=\{f \mid f:X\to Y\}$ 在 $Y^X$ 上害义二无关系 $\cong$：$\forall f,g\in Y^X$，$f\cong g$ 当且仅当 $f(1)+f(2)+f(3)=g(1)+g(2)+g(3)$

（1）证明 $\cong$ 是等价关系。

（2）求等价类的个数。

[证] Ⅰ（1）$\because f(1)+f(2)+f(3)=f(1)+f(2)+f(3)$，故 $\cong$ 是自反的。

（2）若 $f\cong g$，则 $\sum_{i=1}^{3} f(i)=\sum_{i=1}^{3} g(i)$，但 $\sum_{i=1}^{3} g(i)=\sum_{i=1}^{3} f(i)$，故 $g\cong f$ 。$\cong$ 是对轩的。

（3）设 $f\cong g$ 旦 $g\cong h$，则 $\sum_{i=1}^{3}\mathrm{f}(i)=\sum_{i=1}^{3} g(i)=\sum_{i=1}^{3} h$，从而 $\sum_{i=1}^{3} f(i)=\sum_{i=1}^{3} h(i)$，

故 $f\cong h$，$\cong$ 是传递的。

Ⅱ因为 $\forall f\in Y^X,\sum_{i=1}^{3} f(i)=3$ 或 4 或 5 或 6 且每种情况均存在这样的快射，故有四个等价类。

2. 设 $R$ 为 $X$ 上的二元关系，试证：$R$ 是传递的当且仅当 $R\circ R\subseteq R$ 。

[证]设 $R$ 是传递的，则 $\forall(x,\Sigma)\in R\circ R$，有 $y\in X$ 使得 $(x,y)\in R$，$(y,\Sigma)\in R$ 。由 $R$ 的传递性知 $(x,\Sigma)\in R$，故 $R\circ R\subseteq R$ 。反之，设 $R\circ R\subseteq R$，往证 $R$ 是传递的。为此，设 $(x,y)$、$(y,\Sigma)\in R$ 则由合成的定义有 $(x,\Sigma)\in R\circ R$．再由 $R\circ R\subseteq R$ 得

$(x,\Sigma)\in R$。因此，$R$ 是传递的。

五、

1.设 $A$ 为可数集，利用康托对角线法证明 $2^A$ 是不可数集。

$[$证$]$ 因为 $2^A \sim Ch(A)=\{f \mid f:A\to\{0,1\}\}$，所以只须证明 $Ch(A)$ 不可数即可。$\forall f\in Ch(A)$，$f$ 可表为 0，1 的无穷序列。若 $Ch(A)$ 可数，则 $Ch(A)$ 的元素可排列成无重复项的无穷序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$。每个 $f_i$ 可表成 0，1 的无穷序列 $f_{i1},f_{i2},f_{i3},\cdots$。用对角线法构造一个 0，1 序列 $g_1,g_2,g_3,\cdots$：若 $f_{11}=0$，则 $g_1=1$；若 $f_{11}=1$ 则 $g_1=0$。一般地，若 $f_{ii}=0$，则 $g_i=1$；如果 $f_{ii}=1$，则 $g_i=0$，$i=1,2,3,\cdots$，则 $g_1,g_2,\cdots$ 确定的函数 $g\in Ch(A)$，但 $g\neq f_i, i=1,2,\cdots$，矛盾。所以，$2^A$ 不可数。

2.设 $f:X\to Y, C$、$D\subseteq Y$。试证 $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

$[$证$]$ $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C\cap D^C)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D^C)=f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)^C=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

六、一个 $K$ 一维立体 $Q_K$ 是这样的无向图：顶点集为长为 $K$ 的所有 0，1 字符串之集，两个顶点邻接当且仅当相应的两个字符串仅有一个相应位不同，其他各位均相同。

1. $Q_K$ 有多少个顶点?　　　　　　　　(　　　　)

2.证明 $Q_K$ 是 $K-$ 正则图。　　　　　　(　　　　)

3.证明 $Q_K$ 是偶图。　　　　　　　　　(　　　　)

4.证明 $Q_K$ 是 $K2^{K-1}$ 条边。　　　　　(　　　　)

5. $Q_3$ 是否为哈密顿图？　　　　　　　(　　　　)

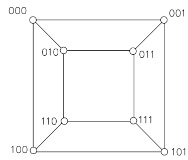
$[$解$]$（1）$Q_K$ 有 $2^K$ 个顶点。

（2）按 $Q_K$ 中边的定义知每个顶点的度为 $K$，所以 $Q_K$ 是 $K-$ 正则图；（4）由（1）和（2）知 $K\cdot 2^K=2q$，故边数 $q=K\cdot 2^{K-1}$

（3）根据 $Q_K$ 中边的定义知每条边的两个端点名中 1 的个数的奇偶性不同。于是，顶点名为偶数个 1 的那些顶点互相之间无边，其余顶点间也无边。所以，

$Q_K$ 为偶图。

（5）$Q_3$ 的图解为下：




是哈密顿图，例如 000，010，011，001，011，111，110，100，000 为一个哈密顿图。

七、

1.设 $G=(V,E)$ 是一个 $(p,q)$ 图。如果 $G$ 是一个 $K-$正则图且每个回路圈的长度至少为 4，试证：$p \ge 2K$

[证] 因为 $G$ 中无三角形且 $G$ 为 $K-$正则图，所以 $Kp = 2q \le 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^2 = p^2/2$。

因此，$p \ge 2K$。

2.设 G=（V，E）是一个平面图 $|V| = p \ge 11$，试证 G 的补图 $G^c$ 不是平面图。[证] 平面图中边数 q 满足 $q \le 3p-6$。$G^c$ 边数 $q_c \ge \frac{1}{2}p(p-1)-(3p-6)$，若要 $g_c > 3p-6$，则要它大于 p（p-1）-12p+24>0，$p^2-13p+24>0$，$(p-\frac{13}{2})^2 > \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 24 = \frac{73}{4}$，

$$p > \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} = 6.5 + \frac{\sqrt{73}}{2} > 10.77$$

故当 $p \ge 11$ 时 $q_c > 3p-6$，$G^c$ 不是平面图。

八、1.用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

[证]设 D 是 p 个顶点的比赛图。施归纳于 p：当 p=1，2 时结论显然成立。假设当 $p \ge 2$ 时结论成立，往证对 p+1 个顶点的比赛图 D 也成立。从 D 中去掉一个顶点 u，则得到一个具有 p 个顶点的比赛图 D-u。由归纳假设 D-u 有哈密顿路 $u_1$，$u_2$,…，$u_p$。在 D 中，如 $uu_1$ 或 $u_p u$ 为 D 的弧，则结论成立。今设 $u_1 u$ 及 $uu_p$ 为 D 的弧。由于 D 比赛图，所以 u 与 $u_k$（k=2,…，p-1）之间有且仅有一条弧，于是必有一个最大 i 使 $u_i u$ 为弧，从而 $uu_{i+1}$ 为 D 的弧。于是，$u_1 \cdots u_i u u_{i+1} \cdots u_p$ 为 D 的哈

密顿路。由归纳法原理知对任何p本题结论成立。[证毕]

2.列出无向树的特征性质（至少5个）

（1）G是树当且仅当G是连通的且无圈。

（2）G的任两不同顶点间仅有一条路。

（3）G是连通的且边数q等于顶点数p减1。

（4）G中无圈且q=p-1，其中p，q同（3）中所言。

（5）G中无圈且任两不相邻接顶点间加一条边得到一个有唯一圈的图。

（6）G是极小连通图。