集合论与图论

计算机学院 08 年秋季

- 一、解答下列问题,要求只给出答案(每题2分,共16分)
 - 1. 设A、B为集合, 试求一个集合X, 合得 $A\Delta X = B$ 。

 $(A\Delta B)$

2. 设 $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2\}$, 试求从 $A \to B$ 的满射的个数。

 $(2^4 - 2 = 14)$

3. 设 $A = \{1, 2, L, 10\}$, 试求A上反自反二无关系的个数。

 $(_{2}n^{2}-n=2^{90})$

4. 设 $A = \{u_1, u_2, L, u_p\}$, $q \le \frac{1}{2} p(p-1)$ 。 试求以V 为顶点集具有条边的无向

图的个数。

$$\left(\begin{pmatrix} q \\ p(p-1)/2 \end{pmatrix} \right)$$

5. 设T是一个有P个顶点的正则二元树,试求下的叶子数,其中P是奇数。

$$(\frac{P+1}{2})$$

6. 正整数m和n为什么值时Km,n为欧拉图?

(m和n为偶数)

- 7. 设G = (V, E)为无向图,|V| = P, |E| = P。如果G是边通图,那么G至少有几个生成树? (3个)
 - 8. 具有p个顶点q条边的平面连通图中,p和q应满足什么样的关系式?

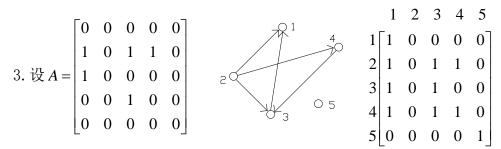
$$(q \le 3p-6)$$

- 二、以下各题要求只给出答案(每题2分,共14分)
 - 1. 设 $X = \{a,b,c,d\}, R = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$, 试求R的传递闭包。

$$((a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(c,a),(a,c),(b,a),(c,b))$$

2. 将置换 (1 2 3 4 5 6 7 8 9) 分解为循环置换的乘积, 然后分解

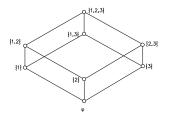
成对换的乘积(173)(29846)(5)=(17)(13)(29)(28)(24)(26)。



如果 A 是某有向图的邻接矩阵,那么画出这个有向图并写出它的可达矩阵。

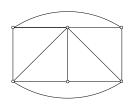
4. 设 $B = \{0,1\}, E = \{a,b,c,L,x,y,z\}$ 。字母表B上所有字符串之集记为 B^* ,字母表E上所有字符串之集记为 E^* 。试求 B^* 和 E^* 的基数有什么关系。(相等)

- 5. 集合 $X = \{1, 2\}$, 上可以定义多少个不相同的等价关系? (5个)
- 6. 画出偏序集 $\left(2^{\{1,2,3\}},\subseteq\right)$ 的哈斯图。



7. 求下图的顶点连通度和边连通度。

$$(x = 3, \lambda = 3)$$



三、

1. 设 A,B和C 为任意集合,试证 $A\times \big(B \cup C\big) = \big(A\times B\big) \cup \big(A\times C\big)$ 。

[证] 设 $(x,y) \in A \times (B \cup C)$, 则 $x \in A \perp y \in B$, 或 $x \in A \perp y \in C$ 从 而 $(x,y) \in A \times$ 或 $(x,y) \in A \times C$ 即 $(x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ 因 此 , $A \times (UB)$ (\underline{C}) $U(\times A)$ 。

反之,设 $(x, y) \in (A \times B)$ U $(A \times C)$,则 $(x, y) \in A \times B$ 或 $(x, y) \in A \times C$ 。如果 $(x, y) \in A \times B$,则 $x \in A$, $y \in B$,从而 $y \in B$ UC,故 $(x, y) \in A \times (B$ UC);如果 $(x, y) \in A \times C$,则 $x \in A$ 且 $y \in C$ 从而 $y \in B$ UC,故 $(x, y) \in A \times (B$ UC)。因此, $(A \times B)$ U $(A \times C) \subseteq A \times (B \times C)$ 。所以, $A \times (B$ U $C) = (A \times B)$ U $(A \times C)$ 。

2. 设 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ 。如果 $g \circ f$ 是满射,试证 g 是满射。

[证]因g of 是满射,所以 $\forall \Sigma \in Z$, $\exists x \in X$ 使得 $g(f(x)) = \Sigma$ 。令y = f(x),则 $y \in Y$ 且 $g(y) = g(f(x)) = \Sigma$ 。因此,g是一个满射。

四、

1. 设 $X = \{1,2,3\}$, $y = \{1,2\}$, $Y^X = \{f \mid f: X \to Y\}$ 在 Y^X 上定义二元关系 \cong : $\forall f,g \in Y^X$, $f \cong g$ 当且仅当 f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)。则

- (1) 证明≅是等价关系。
- (2) 求等价类的个数。

[证] I (1) Q
$$f(1)+f(2)+f(3)=f(1)+f(2)+f(3)$$
, 故 \cong 是自反的。

(2) 若
$$f \cong g$$
 , 则 $f(1) + f(2 + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$, 即
$$g(1) + g(2) + g(3) = f(1) + f(2 + f(3)), \quad \text{故 } g \cong f \text{ o } \cong \text{是对称的}.$$

(3) 设
$$f \cong g \boxtimes g \cong h$$
,则 $\sum_{i=1}^{3} f(i) = \sum_{i=1}^{3} g(i) = \sum_{i=1}^{3} h$,从而 $\sum_{i=1}^{3} f(i) = \sum_{i=1}^{3} h(i)$,故 $f \cong h$, \cong 是传递的。

II 因为 $\forall f \in Y^x$, $\sum_{i=1}^{3} f(i) = 3$ 或 4 或 5 或 6 且每种情况均存在这样的映射,故有四个等价类。

2. 设R为X上的二元关系,试证: R是传递的当且仅当RoR \subset R 。

[证]设R是传递的,则 $\forall (x,z) \in R \circ R$,有 $y \in X$ 使得 $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R$ 。由R的传递性知 $(x,z) \in R$,故 $R \circ R \subseteq R$ 。反之,设 $R \circ R \subseteq R$,往证R是传递的。为此,设 $(x,y),(y,z) \in R$,则由合成的定义有 $(x,z) \in R \circ R$ 。再由 $R \circ R \subseteq R$ 得

(x,z) ∈ R 。因此, R 是传递的。

五、

1.设A为可数集,利用康托对角线法证明 2^{A} 是不可数集。

[证]因为 $2^A \sim Ch(A) = \{f | f : A \rightarrow \{0,1\}\}$,所以只须证明Ch(A)不可数即可。 $\forall f \in Ch(A)$, f可表为0, 1 的无穷序列。若Ch(A)可数,则Ch(A)的元素可排列成无重复项的无穷序列 f_1, f_2, f_3, L 。每个 f_i 可表成 0, 1 的无穷序列 $f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, L$ 。用对角线法构造一个0,1 序列 g_1, g_2, g_3, L : 若 $f_{11} = 0$,则 $g_1 = 1$;若 $f_{11} = 1$ 则 $g_1 = 0$ 。一般地,若 $f_{ii} = 0$,则 $g_i = 1$;如果 $f_{ii} = 1$,则 $g_i = 0$,i = 1, 2, 3, L,则 g_1, g_2, L 确定的函数 $g \in Ch(A)$,但 $g \neq f_i, i = 1, 2, L$,矛盾。所以, 2^A 不可数。

$$2.$$
设 $f: X \to Y, C$ 、 $D \subseteq Y$ 。 试证 $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$

$$[i] f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C \mid D^{C}) = f^{-1}(C) \mid f^{-1}(D^{C}) = f^{-1}(C) \mid f^{-1}(D)^{C} = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)^{C}$$

六、一个K一维立体 Q_K 是这样的无向图: 顶点集为长为K的所有 0, 1 字符串之集, 两个顶点邻接当且仅当相应的两个字符串仅有一个相应位不同, 其他各位均相同。

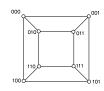
- 1. Q_{κ} 有多少个顶点? ()
- $3.证明 Q_{K}$ 是偶图。 ()
- 4.证明 Q_{κ} 是 $K2^{\kappa-1}$ 条边。 ()
- 5. Q_3 是否为哈密顿图? ()

[M] (1) Q_K 有 2^K 个顶点。

- (2)按 Q_K 中边的定义知每个顶点的度为K,所以 Q_K 是K-正则图;(4)由(1)和(2)知K $\mathcal{Q}^K = 2q$,故边数 $q = K\mathcal{Q}^{K-1}$
- (3) 根据 Q_{κ} 中边的定义知每条边的两个端点名中 1 的个数的奇偶性不同。于是,顶点名为偶数个 1 的那些顶点互相之间无边,其余顶点间也无边。所以,

 Q_{κ} 为偶图。

(5) Q_3 的图解为下:



是哈密顿图,例如000,010,011,001,011,111,110,100,000为一个哈密顿图。

七、

1.设G=(V,E)是一个(p,q)图。如果G是一个K-正则图且每个回路圈的长度至少为 4,试证: $p \ge 2K$

[证]因为G中无三角形且G为K-正则图,所以 $Kp=2q\leq 2g\left(\frac{p}{2}\right)^2=p\frac{2}{2}$ 。 因此, $p\geq 2K$ 。

2.设 G=(V, E) 是一个平面图 $|V|=p\ge 11$,试证 G 的补图 G^c 不是平面图。 $[\overline{u}]$ 平面图中边数 q 满足 $q\le 3p-6$ 。 G^c 边数 $q_c\ge \frac{1}{2}p(p-1)-(3p-6)$,若要 $g_c>3p-6$,则要它大于 P(p-1)-12p+24>0, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+24>0$, $P^2-13p+2$

$$p > \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2} = 6.5 + \frac{\sqrt{73}}{2} > 10.77$$

故当 $p \ge 11$ 时 $q_c > 3p - 6$, G^c 不是平面图。

八、1.用数学归纳法证明每个比赛图中必有有向哈密顿路。

[证]设D是p个顶点的比赛图。施归纳于p:当p=1,2时结论显然成立。假设当p≥2时结论成立,往证对p+1个顶点的比赛图D也成立。从D中去掉一个顶点 u ,则得到一个具有p个顶点的比赛图D-u。由归纳假设D-u有哈密顿路 u_1 , u_2 L , u_3 。在D中,如 uu_1 或 u_p u为D的弧,则结论成立。今设 u_1 u及 uu_p 为D的弧。由于D比赛图,所以u与 u_k (k=2,L ,p-1)之间有且仅有一条弧,于是必有一个最大 i 使 u_i u为弧,从而 uu_{i+1} 为D的弧。于是, u_i L u_i u u_{i+1} L u_a 为D的哈

密顿路。由归纳法原理知对任何p本题结论成立。[证毕]

- 2.列出无向树的特征性质(至少5个)
- (1) G是树当且仅当G是连通的且无圈。
- (2) G的任两不同顶点间仅有一条路。
- (3) G是连通的且边数q等于顶点数p减1。
- (4) G中无圈且q=p-1, 其中p, q同(3)中所言。
- (5) G中无圈且任两不相邻接顶点间加一条边得到一个有唯一圈的图。
- (6) G是极小连通图。