哈工大 2006 年秋季学期

《集合论与图论》试题

本试题满分 90，平时作业分满分 10 分。

一、（10 分，每小题 1 分）判断下列各命题真伪（真命题打“√”号，假命题打“×”号）：

1．从{1，2，3}到{4，5}共有 9 个不同的映射。（　　）

2．从{1，2，3}到{4，5}共有 5 个不同的满射。（　　）

3．从{4，5}到{1，2，3}共 3 个不同的单射。（　　）

4．集合{1，2，…，10}上共有 2^{100} 个不同的二元关系。（　　）

5．如果 A 为可数集，则 2^A 也是可数集合。（　　）

6．欧拉图中没有割点。（　　）

7．有向图的每一条弧必在某个强支中。（　　）

8．P 为正整数，Kp 的顶点连通度为 P－1。（　　）

9．（P，P）连通图至少有 2 个生成树。（　　）

10．每个有 2 个支的不连通图，若每个顶点的度均大于或等于 2，则该图至少有 2 个圈。（　　）

二、（20 分，每小题 2 分）计算题。对每一小题给出计算结果：

1．{1，2，⋯，n}上有多少个反自反且对称的二元关系？（　　）

2．把置换$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 5\,7\,9\,4\,1\,3\,8\,2\,6 \end{pmatrix}$分解成循环置换的乘积。（　　）

3．计算下面两个图 G_1 和 G_2 的色数。（　　）

G1：　　　　G2：

（答：G_1 的色数为________，G_2 的色数为________）

4．设 X 为集合，R 为 X 上的偏序关系，计算 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 等于什么。（　　）

5．求下面的有向图 D 的邻接矩阵和可达矩阵。

D=-------------------：（　　）

6．一个有向图 D=(V，A)满足什么条件是 V 到 V 的一个映射的图？（　　）

7．P 个顶点的无向连通图 G 的邻接矩阵中至少有多少个 1？（　　）

8．设 X 为 n 个元素的集合，X 上有多少个二元运算？（　　）

9．9 个学生，每个学生向其他学生中的 3 个学生各送一张贺年卡。确定能否使每个学

生收到的卡均来自其送过卡的相同人？为什么？ （　　　　）

10．某次会议有 100 人参加，每人可以是诚实的，也可能是虚伪的。已经知道下面两项事实：（1）这 100 人中至少有一人是诚实的；（2）任两人中至少有一人是虚伪的。问这 100 人中有多少人是诚实的？ （　　　　）

三、（12 分，每小题 6 分）

1．设 A、B、C 和 D 都为非空集合。证明：

$$(A\times C)\setminus(B\times D)=[(A\cap B)\times(C\setminus D)]\cup[(A\setminus B)\times C]$$

2. 设 X 为有穷集合，$g,f:X\to X$，$g\circ f=I_x$。证明：f 和 g 都为一一对应且 $g=f^{-1}$。举例说明，当 X 为无穷集时，上述结论不成立。

四、（12 分，每小题 6 分）

1．证明：每个平面图 $G=(V,E)$，如果 G 是偶图，则 $\exists\upsilon\in V$，使得 $\deg\upsilon\le 3$。

2．设 $T=(V,A)$ 为具有 P 个顶点的二元树，T 有 n_2 个出度为 2 的顶点。求 T 的叶子数 n_0。

五、（12 分，每小题 6 分）

1．下图是否是一个哈密顿图？证明你的结论。

2．设 $G=(V,E)$ 为一个连通图，e 为 G 的一条边。证明：e 是 G 的桥当且仅当 e 在 G 的每个生成树中。

六、（12 分，每小题 6 分）

1．设 $X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$，求 R^+。

2．给出等价关系、等价类的定义。等价关系与集合的划分之间有何联系？

七、（12 分，每小题 6 分）

1．设 $N=\{1,2,3,\cdots\}$。用对角线法证明 $\left\{f\mid f:N\to\{0,1\}\right\}$ 是不可数集合。

2．证明：平面图的欧拉公式。

哈工大 2006 年科季学期

《集合论与图论》试题参考答案

一、1、5、6、7、9 为假；4、8、10 题为真。

二、1. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$；2. (15) (2 7 8)(3 9 6)；3. 3、2；4. R；

5.邻接矩阵 A $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$，可达矩阵 R $R=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$

6. $\forall \upsilon \in V$，$od(\upsilon)=1$；　7. $2(P-1)$；　8. n^{n^2}；　9. 否，因为不存在 9（奇数）个顶点的 3－正则图；10.　1 人诚实

三、1.[证] 设 $(x,y)\in(A\times C)\setminus(B\times D)$，则 $(x,y)\in A\times C$，且 $(x,y)\notin B\times D$，于是，$x\in A$、$y\in C$、$x\in B$ 但 $y\notin D$ 或 $x\notin B$ 或 $y\notin D$。if $x\notin B$，则 $x\in A\setminus B$，$y\in C$，故 $(x,y)\in(A\setminus B)\times C\subseteq$ 右边；if $y\notin D$，则 $y\in C\setminus D$。若 $x\in B$，则 $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\setminus D)\subseteq$ 右边。因此，左 $\subseteq$ 右。

反之，设 $(x,y)\in$ 右。if $(x,y)\in(A\cap B)\times(C\setminus D)$，则 $x\in A$，$x\in B$，$y\in C$，$y\notin D$，$(x,y)\in A\times C$，$(x,y)\notin B\times D$，$(x,y)\in$ 左；if $(x,y)\in(A\setminus B)\times C$，则 $x\in A$，$x\notin B$，$y\in C$，故 $(x,y)\in A\times C$，且 $(x,y)\notin B\times D$，$(x,y)\in$ 左。

2．[证] 恒等映射 I_x 是一一对应，也是单射，也是满射。由 $gof=I_x$，故 f 是单射，g 是满射。又 $|X|<\infty$，故 f 和 g 均为一一对应，从而 $g=f^{-1}$。

令 $X=\{1,2,3,\cdots\}, f,g:N\to N$。定义如下：$f(n)=n+1$，$\forall n\in N$；$g(1)=1$，$g(n)=n-1, n>1$。于是，$gof(1)=1$，$gof(n)=g(n+1)=n$，$n>1$。所以 $gof=I_x$，但 f 与 g 均不是一一对应，$g\neq f^{-1}$。

四、1.[证] 如果结论不成立，那么 $\forall \upsilon\in V$，$\deg\upsilon\geq 4$，从而 $4p\leq 2q$。又偶图中无三角形，故每个面上至少 4 条边。于是 $4f\leq 2q$，从而 $p+f\leq q$，矛盾。

2.[证] 设出度为 1 的顶点数为n_1，则 $p=n_2+n_1+n_0$入度之和为 $p-1$，出度之和为 $2n_2+n_1$，于是$n_2+n_1+n_0-1=2n_2+n_1$，从而$n_0=n_2+1$。

五、1. 该图不是哈密顿图。如果是哈氏图，则有哈圈 C。于是，边 28 在 C 上，否则$6\to7\to8\to9\to10\to6$为 C 的边构成的圈，不可能；但 28 在 C 上，则 23、89 不在 C 上，从而 43、39 在 C 上。411 不在 C 上，119 在 C 上，9 有三边在 C 上矛盾。

或如下证明：去掉点 2，4，6，9 四个点，有 5 个分支，故不是哈氏图。

2．$\Rightarrow$否则 G 有一生成树不含边 e，但$G-e$不连通，矛盾。$\Leftarrow$设边 e 在 G 的每个生成树中，则$G-e$无生成树，从而不连通。

六、1. $R^+=\{(a,b),(b,c),(c,c),(a,c),(b,a)(c,b),(a,a),(b,b),(c,c)\}$

2．X 上二元关系$\cong$如果是自反的，对称且传递的，则称$\cong$为 X 上等价关系。$\forall x\in X$，集合$[x]=\{y\mid y\in X, x\cong y\}$称$\cong$的一个等价类。X 上每个等价关系的所有等价类之集是 X 的一个划分，X 的每个划分确定 X 上一个等价关系，其等价类之集为该划分。

七、1.[证]如果从 N 到{0, 1}的所有映射之集可数，则可排成无重复项的无穷序列$f_1, f_2, f_3,\cdots$。每个函数f_i确定了一个 0,1 序列$a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots$。构造序列$b_1,b_2,b_3,\cdots,b_i=1$，if$a_{ii}=0$；否则$b_i=0$。该序列对应的函数$f(i)=b_i$，$i\in N$，不为$f_1,f_2,\cdots$任一个，矛盾。

2．[证] if $f=1$，则为树，结论成立。if 对 $f\geq1$时结论成立，则设 G 有 *f*+1 个面。从 G 中去掉一个内部面上一条边得 G'。在 G'中有 $p-(q-1)+(f-1)=2$， $p-q+f=2$。

五、2.的简单证明：if 存在哈密顿圈，则(a)28 不在 C 上，那么 6、7、8、9、10、6 是 C 上的圈，不可能；(b)28 在 C 上，则$23\in C$，$89\in C$，$611\in C$，∴119、39、109$\in C$矛盾。