第一章　习题

1.写出方程$x^2+2x+1=0$的根所构成的集合。

2.下列命题中哪些是真的，哪些为假

3 设有 n 个集合$A_1,A_2,\cdots,A_n$且$A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq A_1$，试证：

$$A_1=A_2=\cdots=A_n$$

4.设$S=\{\phi,\{\phi\}\}$，试求2^S？

5.设 S 恰有 n 个元素，证明2^S有2^n个元素。

6.设 A、B 是集合，证明:

$$(A\setminus B)\cup B=(A\cup B)\setminus B\Leftrightarrow B=\phi$$

7.设 A、B 是集合，试证$A=\phi\Leftrightarrow B=A\Delta B$

8. 设 A、B、C 是集合，证明：

$$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$$

9.设 A、B、C 为集合，证明$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$

10.设 A，B，C 为集合，证明：

$$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$$

11.设 A,B,C 为集合，证明：

$$(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$$

12.设 A,B,C 都是集合，若$A\cup B=A\cup C$且$A\cap B=B\cap C$，试证 B=C。

13.设 A,B,C 为集合，试证：

$$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus B)\setminus(C\setminus B)$$

14.设$X\subseteq Y\subseteq Z$，证明$Z\setminus(Y\setminus X)=X\cup(Z\setminus Y)$

15.下列命题是否成立？

（1）$(A\setminus B)\cup C=A\setminus(B\setminus C)$

（2）$A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$

（3）$A\setminus(B\cup C)=(A\cup B)\setminus B$

16．下列命题哪个为真？

a)对任何集合 A,B,C，若$A\cap B=B\cap C$，则 A=C。

b)设 A,B,C 为任何集合，若$A\cup B=A\cup C$，则 B=C。

c)对任何集合 A,B，$2^{A\cup B}=2^A\cup 2^B$。

d)对任何集合 A,B，$2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$。

e)对任何集合 A,B，$2^{A\setminus B}=2^A\setminus 2^B$。

f)对任何集合 A,B，$2^{A\Delta B}=2^A\Delta 2^B$。

17．设 R,S,T 是任何三个集合，试证：

（1）$S\Delta T=(S\cup T)\Delta(S\cap T)$；

（2）$R\Delta(S\cap T)\supseteq(R\Delta S)\cap(R\Delta T)$；

（3）$(R\Delta S)\cap(R\Delta T)\subseteq R\Delta(S\cup T)\subseteq(R\Delta S)\cup(R\Delta T)$；

（4）$R\cup(S\Delta T)\supseteq(R\cup S)\Delta(R\cup T)$

18．设 A 为任一集，$\{B_\xi\}_{\xi\in I}$为任一集族（$I\neq\phi$），证明：

$$A\cup(\bigcap_{\xi\in I}B_\xi)=\bigcap_{\xi\in I}(A\cup B_\xi)$$

19．填空：设 A,B 是两个集合。

(a) $x\in A\cup B\Leftrightarrow$ __________________；

(b) $x\in A\cap B\Leftrightarrow$ __________________；

(c) $x\in A\setminus B\Leftrightarrow$ __________________；

(d) $x\in A\Delta B\Leftrightarrow$ __________________；

20．设 A，B，C 为三个集合，下列集合表达式哪一个等于 $A\setminus(B\cap C)$？

（a）$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$；（b）$(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

（c）$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$；（d）$(A\cup B)\setminus(A\cup C)$

（e）$(A\cup B)\cap(A\cup C)$

21.．设 A,B,C 为集合，并且 $A\cup B=A\cup C$，则下列断言哪个成立？

（1）$B=C$ （2）$A\cap B=A\cap C$

（3）$A\cap B^C=A\cap C^C$ （4）$A^C\cap B=A^C\cap C$）

22．设 A,B,C 为任意集合，化简

$$(A\cap B\cap C)\cup(A^C\cap B\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B\cap C^C)\cup$$
$$(A^C\cap B^C\cap C)\cup(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)$$

23．证明：（1）$A\Delta B=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C)$；（2）$(A\Delta B)^C=(A\cap B)\cup(A^C\cap B^C)$；

（3）$(A\Delta B)^C=(A^C\cup B)\cap(A\cup B^C)$

24．设 $M_1,M_2,\cdots$ 和 $N_1,N_2,\cdots$ 是集合 S 的子集的两个序列，对 $i\ne j,i,j=1,2,\cdots$，有 $N_i\cap N_j=\phi$。令 $Q_1=M_1,Q_n=M_n\cap(\bigcup_{k=1}^{n-1}M_k)^C,n=2,3,\cdots$。试证：

$$N_n\Delta Q_n\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(N_i\Delta M_i)$$。

25．设 X 是一个非空集合，$A_n\subseteq X,A_{n+1}\subseteq A_n,n=1,2,3,\cdots$ 试证：$\forall n$，有

$$A_n=\bigcup_{m=n}^{\infty}(A_m\cap A_{m+1}^c)\cup\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$$。

6．设 V 是任一集合，证明：$\forall S,T,W\in 2^V$ 有 $S\subseteq T\subseteq W$ 当且仅且 $S\Delta T\subseteq S\Delta W$ 且 $S\subseteq W$。

27．设 $A_1,A_2,\cdots$ 为一集序列，记 $\overline{A}$ 为这样的元素的全体形成的集合：$x\in\overline{A}$ 当且仅当在序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中有无穷多项 A_n 含有 x。集合 $\overline{A}$ 称为集序列 $A_1,A_2,\cdots$ 的上极限，记为 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$，即 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{A}$。又记 $\underline{A}$ 为这样的元素全体形成的集合；序列 $A_1,A_2,\cdots$ 中只有有限项不含有这样的元素。称 $\underline{A}$ 为序列 $A_1,A_2,\cdots$ 的下极限，并记 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{A}$。证明；

（1）$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$；（2）$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$。

28．证明：$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subseteq\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subseteq\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$。

29．设 $A=\{a,b,c\},B=\{e,f,g,h\},C=\{x,y,z\}$。求 $A\times B,B\times A,A\times C,A^2\times B$。

30．设 A,B 为集合，试证：A×B＝B×A 的充要条件是下列三个条件至少一个成立：

（1）$A=\phi$；（2）$B=\phi$；（3）$A=B$。

31．设 A,B,C,D 为任四个集合，证明：

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$$

32．设 E_1,E_2,E_3,E_4 为任意集合，试证：

$$(E_1\times E_2)\setminus(E_3\times E_4)=((E_1\setminus E_3)\times E_2)\cup(E_1\times(E_2\setminus E_4))$$

33．设 $A\subseteq X,B\subseteq Y$，试证：$(A\times B)^C=(A^C\times B)\cup(A\times B^C)\cup(A^C\times B^C)$

34．设 A,B,C 为集合，证明：

$$A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$$

35．设 A,B 为集合，下列命题哪些为真？

（1）$(x,y)\in A\times B\Leftrightarrow x\in A$ 且 $y\in B$

（2）$(x,y)\in A\times B\Leftrightarrow x\in A$ 或 $y\in B$

（3）$2^{A\times B}=2^A\times 2^B$

（4）若 $A\times C=B\times C$，则 $A=B$。

（5）若 $A\times C=B\times C,C\neq\phi$，则 $A=B$。

36．设 A 有 m 个元素，B 有 n 个元素，则 A×B 是多少个序对组成的？A×B 有多少个不同的子集？

37．设 A,B 为集合，$B\neq\phi$，试证：若 A×B＝B×B，则 A=B。

38.某班学生中有 45％正在学德文，65％正在学法文。问此班中至少有百分之几的学生正同时学德文和法文？

39．求 1 到 250 之间不能被 2，3，5，7 中任一数整除的数的个数。

40．设 A,B 是两个有限集，试求 $\left|2^{2^{A\times B}}\right|=?$

41．马大哈写 n 封信，n 个信封，把 n 封信放入到 n 个信封中，求全部装错的概率是多少？

42．毕业舞会上，小伙子与姑娘跳舞，已知每个小伙子至少与一个姑娘跳过舞，但未能与所有姑娘跳过。同样地，每个姑娘也至少与一个小伙子跳舞，但也未能与所有的小伙子跳过舞。证明：在所有参加舞会的小伙与姑娘中，必可找到两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只与这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个也只与这两个小伙中的一个跳过舞。

第二章 习 题

1.设 A，B 是有穷集，$|A|=m,|B|=n$

（1）计算$|A^B|$

（2）从 A 到 A 有多少个双射？

2.设 X 是一个有穷集合，证明：从 X 到 X 的部分映射共有$(|X|+1)^{|X|}$个。

3..证明：从一个边长为 1 的等边三角形中任意选 5 个点，那么这 5 个点中必有 2 个点，它们之间的距离至多为 1/2，而任意 10 个点中必有 2 个点其距离至多是 1/3。

4.证明在 52 个整数中，必有两个整数，使这两个整数之和或差能被 100 整除。

5.设 $f:X\to Y$，$C,D\subseteq Y$，证明 $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(D)$

6. 设 $f:X\to Y$, $\mathrm{A,B}\subseteq \mathrm{X}$，证明

（1）$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

（2）$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

（3）$f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$

7.设 $f:X\to Y,A\subseteq X,B\subseteq Y$。以下四个小题中，每个小题均有四个命题，这四个命题有且仅有一个正确，请找出正确的那个。

（1）（a）若 $f(x)\in f(A)$，则 x 未必在 A 中

（b）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A$

（c）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\notin A$

（d）若 $f(x)\in f(A)$，则 $x\in A^c$

（2）（a）$f(f^{-1}(B))=B$　　（b）$f(f^{-1}(B))\subseteq B$

（c）$f(f^{-1}(B))\supseteq B$　　（d）$f(f^{-1}(B))=B^c$

（3）（a）$f^{-1}(f(A))=A$　　（b）$f^{-1}(f(A))\subseteq A$

（c）$f^{-1}(f(A))\supseteq A$　　（d）上面三个均不对

（4）（a）$f(A)\neq\varnothing$　　（b）$f(B)\neq\varnothing$

（c）若 $y\in Y,$ 则$f^{-1}(y)\in x$

（d）若 $y\in Y,$ 则$f^{-1}(y)\subseteq x$

8.设 $f:X\to Y,A\subseteq X,$ 则$(f(A))^c\subseteq f(A^c)$成立吗？

9.设 X 是一个无穷集合，$f:X\to Y$。证明：存在 X 的一个真子集 E 使得 $f(E)=E$。

10.设 $f:A\to B$，证明 $\forall T\in 2^B$，都有 $f(f^{-1}(T))=T\cap f(A)$

11..设 $X=\{a,b,c\},Y=\{0,1\},Z=\{2,3\},f:X\to Y,f(a)=f(b)=0$，$f(c)=1;g:Y\to Z$，$g(0)=2,g(1)=3$，试求 $g\circ f$。

12.设 $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}$，$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$，求 $\sigma_1\sigma_2,\sigma_2\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2^{-1}$。

13.将置换$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\7&9&1&6&5&2&3&4&8\end{pmatrix}$分解成对换的乘积。

14.设σ是任一 n 次置换，试证：σ与σ^{-1}的奇偶性相同。

第三章 习 题

1.给出一个既不是自反的又不是反自反的二元关系？

2.是否存在一个同时不满足自反性，对称性，反对称性，传递性和反自反性的二元关系？

3.设 R，S 是 X 上的二元关系，下列命题哪些成立：

a)若 R 与 S 是自反的，则$R\cup S, R\cap S$分别也是自反的。

b) 若 R 与 S 是对称的，则$R\cup S, R\cap S$分别对称的

c) 若 R 与 S 是传递的，则$R\cap S$也是传递的

d) 若 R 与 S 不是自反的，则$R\cup S$也不是自反的

e) 若 R 与 S 是反自反的，则$R\cup S, R\cap S$也是反自反的

f) 若 R 是自反的，则R^c也是反自反的。

g) 若 R 与 S 是传递的，则 R\S 是传递的

答案：真真真假真真假

4.设 R、S 是 X 上的二元关系。证明：

（1）$(R^{-1})^{-1}=R$；（2）$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

（3）$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$；（4）若$R\subseteq S$，则$R^{-1}\subseteq S^{-1}$

5.设 R 是 X 上的二元关系，证明：$R\cup R^{-1}$是对称的二元关系。

6.有人说：“若 R 是 X 上的二元关系，只要 R 是对称的和传递的，则 R 必是自反的。”他的证明如下：若 *xRy*，则由 R 的对称性便知有 *yRx*。于是由 *xRy* 和 *yRx* 以及 R 的传递性即得 *xRx*。所以，R 是自反的。他的推论错在什么地方？这个结论是否对呢？

7.“父子“关系的平方是什么关系？

8.设 X={1,2,3,4},R={(1,2),(2,2),(3,4)},S={(2,3),(3,1),(4,2)}

试求：$R\circ S, S\circ R, R^2, S^2, R\circ(S\circ R), (R\circ S)\circ R$。

9.设 R 与 S 为 X 上的任两个集合，下列命题哪些为真？

a）若 R,S 都是自反的，则$R\circ S$也是自反的。

b）若 R,S 都是对称的，则$R\circ S$也是对称的。

c）若 R,S 都是反自反的，则$R\circ S$也是反自反的。

d）若 R,S 都是反对称的，则$R\circ S$也是反对称的。

e）若 R,S 都是传递的，则$R\circ S$也是传递的。

10.设 R_1 是 A 到 B，R_2 和 R_3 是 B 到 C 的二元关系，则一般情况下 $R_1\circ(R_2\setminus R_3)\neq(R_1\circ R_2)\setminus(R_1\circ R_3)$。但有人声称等号成立，他的证明如下：设$(a,c)\in R_1\circ(R_2\setminus R_3)$，则$\exists b\in X$，使得$(a,b)\in R_1$且$(b,c)\in R_2\setminus R_3$。于是$(b,c)\in R_2$且$(b,c)\notin R_3$。从而$(a,c)\in R_1\circ R_2$且$(b,c)\notin R_1\circ R_3$，所以$(a,c)\in(R_1\circ R_2)\setminus(R_1\circ R_3)$，即$R_1\circ(R_2\setminus R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\setminus(R_1\circ R_3$。同理可证相反的包含关系成立，故等式成立，这个证

明错在什么地方？

11.设 R，S 是 X 上的满足 $R\circ S\subseteq S\circ R$ 的对称关系，证明 $R\circ S=S\circ R$.

12.设 R 为 X 上的对称关系，证明：$\forall n\in N, R^n$ 是对称关系。

13.设 $R_1,R_2,R_3,\cdots$ 是 X 上的二元关系的一个无穷序列，则当每个 R_i 是对称关系时，$\bigcup_{i=1}^{\infty} Ri$ 还是对称的吗？

14.设 R 是 X 上的二元关系，试证（1）$(R^+)^+=R^+,(2)(R^*)^*=R^*,(3)R\circ R^*=R^*\circ R=R^+,(4)(R^+)^*=(R^*)^+=R^+$。

15.设 X＝（a,b,c,d,e），R＝｛（a,b），（b,c），（c,d），（d,e）｝试求 R^+ 和 R^*。

16.设 R,S 为 X 上的二元关系，试证：（1）$(R\cup S)^+\supseteq R^+\cup S^+$

（2）$(R\cup S)^*\supseteq R^*\cup S^*$

17.举例说明 $s(t(R))$ 与 $t(s(R))$ 确定不相等。

18.是否可以定义二元关系的反自反闭包与二元关系的反对称闭包？为什么？

19.是否存在 X（X=n）上的一个二元关系 R 使得 $R,R^2,\cdots,R^n$ 两两不相等。

20.证明：若 R 是对称的，则 R^+ 也是对称的。

21.设 R_1,R_2 是 X 上的二元关系，证明：

（1）$r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$

（2）$S(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$

（3）$t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$

22.由置换 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&6&5&8&1&2&7&4\end{pmatrix}$ 确定了 $X=\{1,2,\cdots,8\}$ 上的一个关系 $\cong: i,j\in X, i\cong j$ 当且仅当 i 与 j 在 σ 的循环分解式中的同一循环置换中，证明：$\cong$ 是 X 上的等价关系，求 $X/\cong$。

23.给出 X＝｛1，2，3，4｝上两个等价关系 R 与 S，使得 $R\circ S$ 不是等价关系。

24.设 X 是一个集合，$|X|=n$，试求：

（1）X 上自反二元关系的个数；

（2）X 上反自反二元关系的个数；

（3）X 上对称二元关系的个数；

（4）X 上自反或对称关系的个数；

25.设〔a,b〕是一个有限区间。令 S 是区间〔a,b〕上的有限划分（注意，这里的划分与等价关系中的划分不同）的集合。〔a,b〕的一个划分 π 是形如 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b, n\in N$ 的点的集合。在 S 上定义二元关系 R 如下：$\forall\pi_1,\pi_2\in S, \pi_1 R\pi_2\Leftrightarrow\pi_2$ 的每个分点也是 π_1 的分点。证明：R 是 S 上的偏序关系。

26.是否存在一个偏序关系≤，使（X，≤）中有唯一极大元素，但没有最大元素？若有请给出一个具体例子；若没有，请证明之。

27.令 S＝｛1，2，…，12｝，画出偏序集（S,|）的 Hass 图，其中“|”是整除关系，它有几个极大（小）元素？列出这些极大（小）元素