《集合论与图论》

计算机学院 03 年秋季

参考答案

一、（10 分，每小题 1 分）计算：

1．设 X 和 Y 是集合且$\left|X\right|=m$，$\left|Y\right|=n$。试计算从 X 到 Y 的映射的个数。（答案：n^m）

2．设 X 和 Y 是集合且$\left|X\right|=m$，$\left|Y\right|=n$。若 m≤n，试计算从 X 到 Y 的单射的个数。（答案：$C_n^m m!=p_n^m$）

3. 设 X 为集合且$\left|X\right|=n$。计算 X 到 X 的双射的个数。（答案：n!）

4. 设 X 为集合且$\left|X\right|=n$。计算 X 上有多少个不同的自反的二元关系。（答案：2^{n^2-n}）

5. 设 X 为集合且$\left|X\right|=n$。计算 X 上有多少个二元运算。（答案：n^{n^2}）

6. 设 V＝$\left\{u_1,u_2\cdots u_p\right\}$。计算以 V 为顶点集无向图的个数。（答案：$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$）

7. 设V＝$\left\{u_1,u_2\cdots u_p\right\}$。计算以V为顶点集的有向图的个数。（答案：$2^{n(n-1)}$）

8. 设 V＝$\left\{u_1,u_2\cdots u_p\right\}$。计算以 V 为顶点集的比赛图的个数。（答案：$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$）

9.（P，P）连通图中有多少个圈？（答案：1）

10. n 个叶子的正则二元树中有多少条有向弧？（答案：2（P-1））

二、（10 分，每小题 1 分）以下每小题中给出了四个答案，其中仅有一个是正确的。请找出正确的答案并将其号码添在括号中。

11. Km,n 是哈密顿图当且仅当。（c）

（a）m≤n　　（b）m≥n　　（c）m＝n　　（d）（m<n 或 m>n）

12. 下面哪个条件是 Km,n 有哈密顿路的充要条件？（d）

（a）m<n　　（b）m>n　　（c）m＝n　　（d）m＝n 或 m＝n+1

13. 设 r≥2，G 是 r-正则图且$\chi(G)=1$，则（c）

（a）x(G)＝r　　（b）x(G)<r　　（c）x（G）≤〔$\frac{r}{2}$〕　　（d）x(G)＝〔$\frac{r}{2}$〕

14. 把平面分为α个区域，使任两个区域相邻，则α的最大值为（d）

（a）5　　（b）3　　（c）2　　（d）4

15. 4 个顶点的二元树（顶点无标号）共有（a　）

（a）3 个　　（b）4　　（c）5　　（d）6

16. 设 f：$X\rightarrow Y, A\subseteq X$，则（c）

（a） $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

（b） $f^{-1}(f(A)) = A$

（c） $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

（d）（a）或（b）

17. $f: X \to Y, B \subseteq Y$，则（c）

（a） $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$

（b） $f(f^{-1}(B)) = B$

（c） $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

（d）（b）或（c）

18. 设 $R \subseteq X \times X, X$ 为集合。若 R 是偏序关系，则（b）

（a） $R \subset R^{+}$　　（b） $R = R^{+}$　　（c） $R \neq R^{+}$　　（d） $R^{+} \subset R$

19. 下列集合表达式哪一个等于 A＼(B∩C)？(d)

（a）（A\B）∩（A\C）

（b）（A⋂B）＼（A⋂C）

（c）（A⋃B）＼（A⋃C）

（d）（A\B）⋃（A\C）

20. 置换 $\begin{pmatrix} 123456789 \\ 791652348 \end{pmatrix}$ 分解成对换的乘积为（a）

（a）（17）（73）（29）（28）（24）（26）

（b）（17）（73）（29）（98）（84）（46）

（c）（73）（71）（29）（98）（84）（46）

（d）（73）（71）（62）（69）（68）（64）

三、（10 分）

1. 设 G 是图 1 所示的有向图，写出 G 的邻接矩阵。画出 G 的邻接表表示的示意图。

2. 求 v_1 到 v_2 间长为 10 的有向通道的条数的方法是什么？（不必算出具体的数。）

3. 写出 G 的关联矩阵。

4. 画出对应于表达式（A＋B*C）/（A-C）的二元树表示。

四、（10 分，每小题 5 分）证明以下结论：

1.　若 G 是一个恰有两个奇度顶点 u 和 υ 的图，则

G 是连通的当且仅当 G+uv 是连通的。

⇨　G+uv 连通显然

<=假设 G 不连通，不妨设 G 有两个分支，G1,G2，则 u 在 G1 中，v 在 G2 中；对于 G1,G2 每个子图中只有一个奇度数顶点，与握手定理的推论矛盾。故 G 连通。

2. 设 G 是一个（p，q）连通图，则 G 中至少有 q-p+1 个圈。

证明：G 有一棵生成树 T；令 T＝（p,q’）则 q’＝p-1

去掉边为：q-q’＝q-p+1。对于生成树 T，每加一条边至少有一个回路，

故 G 中至少有 q-p+1 个回路。

五、（15 分，每小题 5 分）

1.证明：没有三角形的平面图中必有一个顶点v，deg$v$≤3。

证明：$\forall \upsilon \in V$,假设 $\deg v \geq 4$ 则由握手定理，有 4p≤2q 而 q≤2p-4，

故 4p≤4P-8 矛盾

2.应用数学归纳法证明比赛图中必有有向生成路。

书上定理

3.证明：没有三角形的平面图是 4-可着色的。

当 p＝1，2，3，4 时，显然

设当 p＝k 时图 G 是 4 可着色的。

往证：p＝k+1 时也成立。由第 1 题可知，存在υ，使得 degυ≤3。于是 G-u 就是 k 个顶点的，没有三角形的平面图。它是 4-可着色的。连上 V，因 deg υ≤3，所以υ最多只有 3 个顶点与之邻接，用不与υ邻接的其它颜之一给υ着色，便得到 p＝k+1 个顶点的图也是 4-可着色的。

六、（10 分）

1.给出等价关系、等价类概念的定义。（4 分）

2.设 D＝（V,A）是一个有向图。在 V 上定义二元关系≌：$\forall u, u \in V, u \cong \upsilon$ 当且仅当 u 与υ互达。证明≌是等价关系；求≌的等价类；每个等价类导出的子图是什么子图？

1．书上

2．证明：≌是自反、对称、传递是显然的，故≌是等价关系。

每个等价类导出的子图是一个强连通子图（分支）。

七、（7 分）设 A，B，C 为集合，试证 A×（B\C）＝（A×B）\（A×C）

书上定理

八、（8 分）给出关系的传递闭包的定义，并根据你的定义证明传递闭包是传递的。

书上定理。