第一章 习 题

1．画出具有 4 个顶点的所有无向图(同构的只算一个)。

2．画出具有 3 个顶点的所有有向图(同构的只算一个)。

3．画出具有 4 个、6 个、8 个顶点的三次图。

4．某次宴会上，许多人互相握手。证明：握过奇数次手的人数为偶数(注意，0 是偶数)。

5．证明：哥尼斯堡七桥问题无解。

6．设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。若 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有回路？

7．证明：一个连通的(p，q)图中 $q \geqslant p-1$。

8．设 G 是一个(p，q)图，$\delta(G) \geqslant [p/2]$，试证 G 是连通的。

9．证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

10．在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友($2 \leqslant m \leqslant n$)。试证：有不少于 m+1 个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左、右均是他的朋友。

11．一个图 G 是连通的，当且仅当将 V 划分成两个非空子集 V1 和 V2 时，G 总有一条联结 V1 的一个顶点与 V2 的一个顶点的边。

12．设 G 是图。证明：若 $\delta(G) \geqslant 2$，则 G 包含长至少是 $\delta(G)+1$ 的回路。

13．设 G 是一个(p，q)图，证明：

(a)$q \geqslant p$，则 G 中有回路；

(b)若 $q \geqslant p+4$，则 G 包含两个边不重的回路。

14．证明：若图 G 不是连通图，则 G^c 是连通图。

15．设 G 是个(p，q)图，试证：

(a) $\delta(G) \cdot \delta(G^C) \leqslant [(p-1)/2]([(p+1)/2]+1)$，若 $p \equiv 0，1，2 \pmod 4$

(b) $\delta(G) \cdot \delta(G^C) \leqslant [(p-3)/2] \cdot [(p+1)/2]$，若 $p \equiv 3 \pmod 4$

16．证明：每一个自补图有 4n 或 4n+1 个顶点。

17．构造一个有 2n 个顶点而没有三角形的三次图，其中 $n \geqslant 3$。

18.给出一个 10 个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点 u 和 v，均有

$$\deg u+\deg v \geqslant 9$$

19．试求 Kp 中不同的哈密顿回路的个数。

20．试证：图四中的图不是哈密顿图。

21．完全偶图 Km，n 为哈密顿图的充分必要条件是什么？

22．菱形 12 面体的表面上有无哈密顿回路？

23．设 G 是一个 $p(p \geqslant 3)$ 个顶点的图。u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点，并且 $\deg u+\deg v \geqslant p$。证明：G 是哈密顿图当且仅当 G+uv 是哈密顿图。

24．设 G 是一个有 p 个顶点的图。证明：若 $p>2\delta(G)$，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

25．证明具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图。

26．证明：若 p 为奇数，则 Kp 中有(p-1)/2 个两两无公共边的哈密顿回路。

28．中国邮路问题：一个邮递员从邮局出发投递信件，然后返回邮局。若他必须至少一次走过他所管辖范围内的每条街道，那么如何选择投递路线，以便走尽可能少的路程。这个问题是我国数学家管梅谷于 1962 年首先提出的，国外称之为中国邮路问题。

(1)试将中国邮路问题用图论述语描述出来。

(2)中国邮路问题、欧拉图问题及最短路问题之间有何联系。

第二章 习题

1．画出具有 4 个顶点的所有无向图(同构的只算一个)。

2．画出具有 3 个顶点的所有有向图(同构的只算一个)。

3．画出具有 4 个、6 个、8 个顶点的三次图。

4．某次宴会上，许多人互相握手。证明：握过奇数次手的人数为偶数(注意，0 是偶数)。

5．证明：哥尼斯堡七桥问题无解。

6．设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点。若 u 与 v 间有两条不同的通道(迹)，则 G 中是否有回路？

7．证明：一个连通的(p，q)图中 $q \geqslant p-1$。

8．设 G 是一个(p，q)图，$\delta(G) \geqslant [p/2]$，试证 G 是连通的。

9．证明：在一个连通图中，两条最长的路有一个公共的顶点。

10．在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友($2 \leqslant m \leqslant n$)。试证：有不少于 m+1 个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左、右均是他的朋友。

11．一个图 G 是连通的，当且仅当将 V 划分成两个非空子集 V1 和 V2 时，G 总有一条联结 V1 的一个顶点与 V2 的一个顶点的边。

12．设 G 是图。证明：若 $\delta(G) \geqslant 2$，则 G 包含长至少是 $\delta(G)+1$ 的回路。

13．设 G 是一个(p，q)图，证明：

(a)$q \geqslant p$，则 G 中有回路；

(b)若 $q \geqslant p+4$，则 G 包含两个边不重的回路。

14．证明：若图 G 不是连通图，则 G^c 是连通图。

15．设 G 是个(p，q)图，试证：

(a) $\delta(G) \cdot \delta(G^C) \leqslant [(p-1)/2]([(p+1)/2]+1)$，若 $p \equiv 0，1，2 \pmod 4$

(b) $\delta(G) \cdot \delta(G^C) \leqslant [(p-3)/2] \cdot [(p+1)/2]$，若 $p \equiv 3 \pmod 4$

16．证明：每一个自补图有 4n 或 4n+1 个顶点。

17．构造一个有 2n 个顶点而没有三角形的三次图，其中 $n \geqslant 3$。

18．在图 1.4.5 中，一只车从位置 A 出发，在半张棋盘上走，每步走一格，走了若干步后到了位置 B。证明：至少有一个格点，没有车走过，或被走过不至一次。

19.给出一个 10 个顶点的非哈密顿图的例子，使得每一对不邻接的顶点 u 和 v，均有

$$\deg u+\deg v \geqslant 9$$

20．试求 Kp 中不同的哈密顿回路的个数。

21．完全偶图 Km，n 为哈密顿图的充分必要条件是什么？

22．菱形 12 面体的表面上有无哈密顿回路？

23．设 G 是一个 p($p \geqslant 3$)个顶点的图。u 和 v 是 G 的两个不邻接的顶点，并且 $\deg u+\deg v \geqslant p$

证明：G 是哈密顿图当且仅当 G+uv 是哈密顿图。

24．设 G 是一个有 p 个顶点的图。证明：若 $p>2\delta(G)$，则有长至少为 $2\delta(G)$的路。

25．证明具有奇数顶点的偶图不是哈密顿图。

26．证明：若 p 为奇数，则 Kp 中有(p-1)/2 个两两无公共边的哈密顿回路。

27．中国邮路问题：一个邮递员从邮局出发投递信件，然后返回邮局。若他必须至少一次走过他所管辖范围内的每条街道，那么如何选择投递路线，以便走尽可能少的路程。这个问题是我国数学家管梅谷于 1962 年首先提出的，国外称之为中国邮路问题。

(1)试将中国邮路问题用图论述语描述出来。

(2)中国邮路问题、欧拉图问题及最短路问题之间有何联系。

第三章 习 题

1．分别画出具有 4、5、6 个顶点的所有树(同构的只算一个)。

2．证明：每个非平凡树是偶图。

3．设 G 是一棵树且$\Delta(G)\geqslant k$，证明：G 中至少有 k 个度为 1 的顶点。

4．令 G 是一个有 p 个顶点，k 个支的森林，证明：G 有 p-k 条边。

5．设 T 是一个 k+1 个顶点的树。证明：若图 G 的最小度$\delta(G)\geqslant k$，则 G 有一个同构于 T 的子图。

6．一棵树 T 有n_2个度为 2 的顶点，n_3个度为 3 的顶点，…，n_k个度为 k 的顶点，则 T 有多少个度为 1 的顶点？

7.设 G 是一个连通图。试证：G 的子图G_1是 G 的某个生成树的子图，当且仅当 G1 没有回路。

8．证明：连通图的任一条边必是它的某个生成树的一条边。

9．设 G 是一个边带权连通图，G 的每条边均在 G 的某个回路上。试证：若 G 的边 e 的权大于 G 的任一其他边的权，则 e 不在 G 的任一最小生成树中。

10． 设 G=(V，E，w)是一个边带权连通图，对任意 x∈E，w(x)≥0。试证：G 的一个生成树 T 是 G 的最小生成树，当且仅当时 G 的任一与 T 的距离为 1 的生成树 T′′满足条件：在 T 中而不在 T′′中的边 e 的权 w(e)不大于在 T′′中而不在 T 中的边 e′的权 w(e′)。

11.某镇有 1000 人，每天他们中的每个人把昨天听到的消息告诉他认识的人。已知任何消息，只要镇上有人知道，都会经这种方式逐渐地为全镇上所有人知道。试证：可选出 90 个居民代表使得只要同时向他们传达某一消息，经 10 天就会为全镇居民知道。

12.P 个顶点的图中，最多有多少个割点？

13．证明：恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

14．证明：有一座桥的三次图中至少有 10 个顶点。

15．设 v 是图 G 的一个割点，证明 v 不是 G 的补图G^c的割点。

16．设 v 是图 G 的一个顶点。证明：v 是 G 的割点当且仅当有邻接 v 的两个不同的顶点 u 和 w，使得 v 在 u 与 w 间的每一条路上。

17.割点的连通图是否一定不是欧拉图？是否一定不是哈密顿图？有桥的连通图是否一定不欧拉图和哈密顿图。

18.L 是连通图 G 的一个回路，x 和 y 是 L 上的两条边。证明：G 有个割集 S 使得 x 与 y 恰好是 L 与 S 的公共边。

第四章 习 题

1．设 G 是一个有 p 个顶点的图，$\delta(G)\geqslant((p+k)-1)/2$，试证：G 是 k-连通的。

2．若(p，q)图 G 是 k-边连通的，试证：$q\geqslant kp/2$。

3．设 G 是 k-边连通的，k>0，E′是 G 的 k 条边的集合。证明：G-E′的支数小于或等于 2。

4．构造一个(p，q)图 G 使得$\delta(G)=[p/2-1]$，$\lambda(G)<\delta(G)$.

5．设 k>0。构造一个 k-连通图 G，以及 G 的 k 个顶点之集 V′，使得 G-V′的支数大于 2。

6．G 是一个三次正则图，试证：$\chi(G)=\lambda(G)$。

7．设 r≥2，G 是 r 正则图。证明：$\lambda(G)\geqslant[r/2]$。

8．构造一个图 G，使得$\chi(G)=3$，$\lambda(G)=4$，$\delta(G)=5$。

9．证明：图 G 是 2-边连通的当且仅当任两个不同顶点间至少有两条边不重路。

10．设 G=(V，E)是 2-边连通图，X 和 Y 是 V 的子集，|X|≥2，|Y|≥2 且 X∩Y=Φ。在 G

中加入两个新的顶点 s 和 t，s 与 X 的每个顶点之间联成一条边，t 与 Y 的每个顶点间加一条边，这样得到的图记为 G'。试证：G' 是 2-连通的。

11. 若 G 是顶点数 $p\geqslant 11$ 的平面图，试证 G^c 不是平面图。

12 设 $S=\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ 是平面上 n 个顶点的集合，$n\geqslant 3$，其中任两顶点的距离至少是 1。证明：S 中至多有 3n-6 对顶点，其距离为 1。

13. 证明：不存在 7 条棱的凸多面体。

14. 图 G 的最短回路的长度称为 G 的围长；若 G 中无回路，则定义 G 的围长为无穷大。

(ⅰ)证明：围长为 r 的平面连通图 G 中有

$$q\leqslant r(p-2)/(r-2),\ r\geqslant 3$$

(ⅱ)利用(ⅰ)证明 Petersen 图(见图 3.6.4)不是平面图。

15. 设 G 是一个没有三角形的平面图。应用欧拉公式证明 G 中有一个顶点 v 使得 $\deg v\leqslant 3$。

16. 设 G 是一个平面图。证明：G^{**} 同构于 G 当且仅当 G 是连通的。

17. 证明：若 G 是自对偶的，则 q=2p-2.

18. 设 G 是一个没有三角形的图。应用教学归纲法证明 G 是 4－可着色的(事实上，可以证明 G 是 3－可着色的)。

19. 设 G 是一个有 p 个顶点的 d-正则图，证明：$k(G)\geqslant p/(p-d)$。

20. 试用 5-色定理的证明方法来证明 4 色定理，在哪一点证明会失败呢？

21. 设 G 是一个(p，q)图，证明：$k(G)\geqslant p^2/(p^2-2p)$。

22. 证明：若 G 的任两个奇数长的回路都有一个公共顶点，则 $k(G)\leqslant 5$。

23. 证明：每个哈密顿平面图都是 4-可着色的。

24. 设 G 是一个立方体哈密顿图，证明：$k'(G)=3$。

25. 若 r 是奇数且 G 是 r-正则图，证明：$k'(G)=r+1$。

26. 若 G 是彼德森图，证明：$k'(G)=4$。

第五章 习 题

1. 给出有向图的子图、生成子图、导出子图的定义。

2. 画出具有三个顶点的所有互不同构的有向图的图解。

3. 具有 p 个顶点的完全有向图中有多少条弧？

4. 设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的有向图。若 D 是连通的，证明

$$p-1\leqslant q\leqslant p(p-1)。$$

5. 设 D 是一个有 p 个顶点 q 条弧的强连通的有向图，则 q 至少是多大？

6. 在有向图中，含有所有顶点和所有弧的有向闭迹称为有向欧拉闭迹。一个有向图若含有有向欧闰闭迹，则称此有向图为有向欧拉图。证明：有向图 D=(V，A)是有向欧拉图当且仅当 D 是连通的且对任意的 $v\in V$，总有 $id(v)=od(v)$。

7. 证明：有向图 D 是单向连通的当且仅当 D 有一条生成通道。

8. 设 A 是一个 n×n 布尔矩阵，试证：

$$(I\vee A)^{(2)}=(I\vee A)(I\vee A)=I\vee A\vee A^{(2)}$$

其中 I 是 n×n 单位矩阵。其次，证明：对任意的正整数 r，有

$$(I\vee A)^{(r)}=I\vee A\ \vee A^{(2)}\vee\cdots\vee A^{(r)}$$

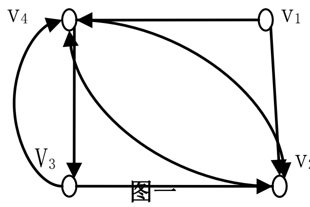
9. 设 B 是有向图 D=(V，A)的邻接矩阵，$|V|=p$。试证 D 的可达矩阵 R 为 $R=(I\vee B)^{(p)}$

10. 有向图 D 的图解如图一所示

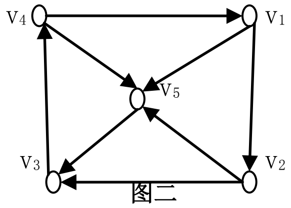
(1)写出 D 的邻接矩阵及可达矩阵。

(2)写出 D 关联矩阵。

D：



图一



图二

11.设 D 为图二中的有向图，试求 v_2 到其余每个顶点的长≤4 的所有通道的条数。

12.已知有向图 D 的邻接矩阵 B，如何从 B 求 D 的可达矩阵 R?

13.设 T 是一个正则 m 元有序树，它有 n_0 个叶子，T 有多有多少条弧？

14.令 T 是一个正则 m 元树，它有 i 个内顶点(出度为 m)。若 E 为所有内顶点深度之和，i 为所有叶顶点深度之和， 证明：$I=(m-1)I+mi$。

15.设 T 是一个有 n_0 个叶子的二元树，出度为 2 的顶点为 n2，试证：$n_0=n_2+1$。

16.具有三个顶点的有序树共有多少个？具有三个顶点的有根树有多个？注意，同构的只算一个。

17.一个有序树称为一个 2-3 树，若每个内顶点有 2 个或 3 个儿子，并且从根顶点到每个叶子的路长均相等。试证：若 T 是一个高为 h 的 2-3 树，则

(1)T 的顶点数 p 满足 $2^{h+1}-1\leqslant p\leqslant 3^{h+1}-1$。

(2)T 的叶子数在 2^h 与 3^h 之间。

18. T 是一个正则二元树，它有 i 个内顶点(出度为 2)。若 E 为所有内顶点深度之和，I 为所叶顶点的深度之和，证明：$I=E+2i$。