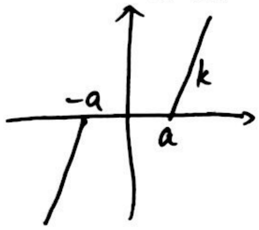
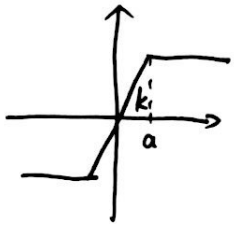
非线性系统

种类

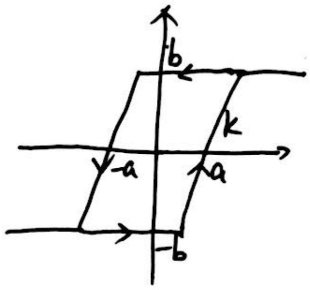
①死区特性



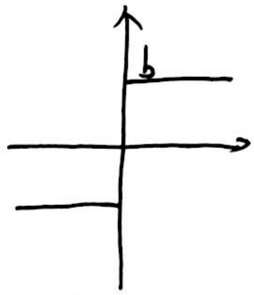
②饱和特性



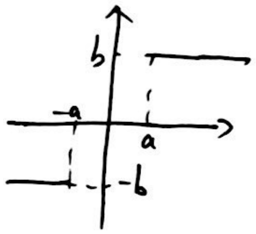
③间隙特性



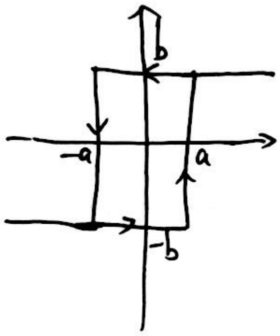
④继电器



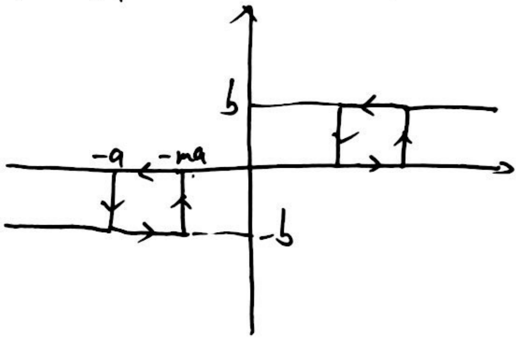
⑤带死区的继电器



⑥带磁滞的继电器



⑦带磁滞死区的继电器



特性

不满足叠加定理

平衡点：线性：孤立的平衡点只有一个，稳定性只与系统结构参数有关，与初值无关。

非线性：往往有多个孤立的平衡点，稳定性不仅依赖于结构参数，还依赖于初值。

自激振荡：系统在没有外界激励的情况下，表现出固定振幅，固定周期的振动。

频率响应：线性：幅值增益，相位偏差对于同频输入为定值，输出为同频波。

非线性：幅值增益，相位偏差与输入幅值有关，存在非线性畸变导致的高频输出

描述函数

① $A_1=0\quad B_1=\frac{2Ak}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{A}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]$

② $A_1=0\quad B_1=\frac{2Ak}{\pi}\left[\arcsin\frac{a}{A}-\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]+\frac{4ak}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$

③ $A_1=-\frac{4ab}{\pi A}\quad B_1=\frac{Ak}{\pi}\left(\arcsin\frac{ak+b}{Ak}-\arcsin\frac{ak-b}{Ak}\right)+\frac{2b-2Ak}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{a-\frac{b}{k}}{A}\right)^2}+\frac{2b+2Ak}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{a+\frac{b}{k}}{A}\right)^2}$

④ $A_1=0\quad B_1=\frac{4b}{\pi}$

$a=0$

⑤ $A_1=0\quad B_1=\frac{4b}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$

$k=\infty$

⑥ $A_1=-\frac{4ab}{\pi A}\quad B_1=\frac{4b}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$

$m=1$

⑦ $A_1=\frac{2ab}{\pi A}(m-1)\quad B_1=\frac{2b}{\pi}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{ma}{A}\right)^2}\right]$

描述函数法分析

简化系统框图 ⟶ 非线性系统 + 线性系统 + 单位负反馈

外环任意化：不看输入输出支路，仅在最外环上的所有元素可任意移动

支路简化：N支路元素不动，交换反馈支路，利用串并反馈公式化简。

内环移除：直至N支路不含内环，即N在最外环上，则再次外环任意化，达成目标，

求非线性环节描述函数

输入 $e(t)=A\sin\omega t$ 输出 $x(t)$ $N(A)=\frac{B_1}{A}+j\frac{A_1}{A}$

$A_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos\omega t\,d\omega t$ $B_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin\omega t\,d\omega t$

若非线性系统不含滞回环 $\begin{cases} x(t)\text{ 关于 }\omega t=\pi\text{ 中心对称} \longrightarrow A_1=0 \\ x(t)\text{ 前/后半部分关于 }\omega t=\frac{\pi}{2}/\frac{3\pi}{2}\text{ 轴对称} \end{cases} \longrightarrow B_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(t)\sin\omega t\,d\omega t$

方法假设：非线性环节无直流分量，线性系统具有低通滤波特性

画线性环节 Nyquist 曲线

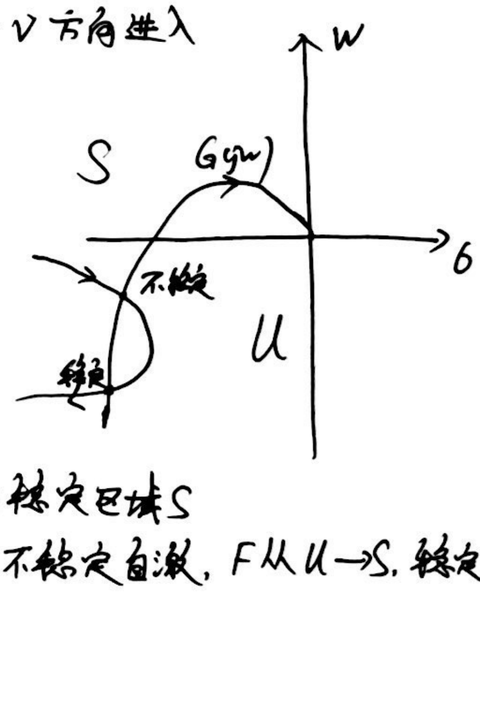
令 $s=j\omega$，将 $G(j\omega)$ 的实部虚部画在复平面上

对开环无不稳定极零点与延时环节的最小相位系统，

$\omega=0^+$：0型从 $(K,0)$ 向上或向下，v型从 $-90°\cdot v$ 方向进入

$\omega=\infty$：从 $-90°\cdot(n-m)$ 方向终止于原点

求出曲线与实轴的交点与对应的 ω



画负倒描述函数 $F(A)=-\frac{1}{N(A)}$ 的曲线于同一复平面

对 $F(A)$ 实虚部分别求导，算出其范围

在图中标出极值点，与实轴交点

根据二者交点，判定系统稳定性

G包围F的区域为不稳定区域U，G不包围F的区域为稳定区域S

G与F交点为特定振幅与周期的自激振荡，F从 $S\to U$，不稳定自激，F从 $U\to S$，稳定自激

相平面法基础

定义

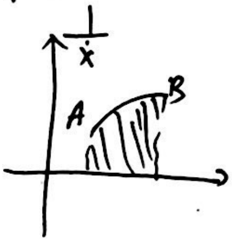
系统: $\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0$ 令 $\begin{cases} x_1=x \\ x_2=\dot{x} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-f(x_1,x_2) \end{cases}$ 最多分析二阶系统

奇点: $\begin{cases} x_2=0 \\ f(x_1,x_2)=0 \end{cases}$ 相轨迹仅在奇点相交汇集

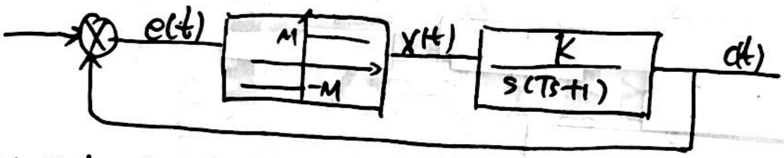
极限环: 孤立的闭轨线 $\begin{cases} \text{稳定} \\ \text{不稳定} \\ \text{半稳定} \end{cases}$ 若二阶自治系统一条闭轨迹驻留在有限区域 (1)趋于奇点 (2)趋于极限环 (3)是极限环

时域分析

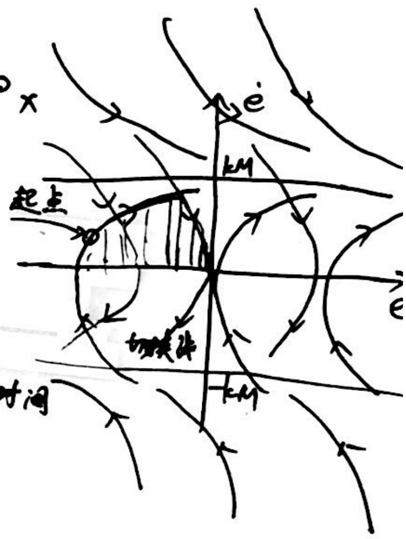
从A到B点的响应时间 $t_{AB}=\int_A^B \frac{1}{\dot{x}}dx$



最优时间控制:



要使误差尽快为零，仅在切换线处一步切换到位，最省时间



画法

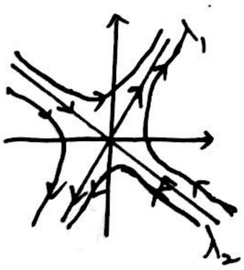
等倾线法: $\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}=\frac{-f(x_1,x_2)}{x_2}=\alpha \Rightarrow x_2=K(\alpha,x_1) \xlongequal{\text{一般情况}} k(\alpha)x_1$

在曲线 $K(\alpha,x_1)$ 上，相轨迹斜率均为 α。$\alpha=k(\alpha)$ 等倾线为相轨迹。

线性系统: $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$ $\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ 对λ分类 奇点 $(0,0)$

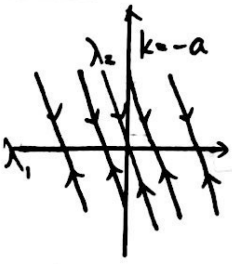
有实根 | 无实根

符号互异



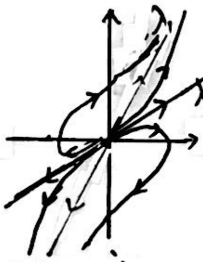
鞍点

有0



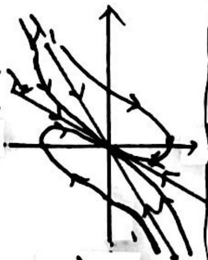
同根平行x轴

全正



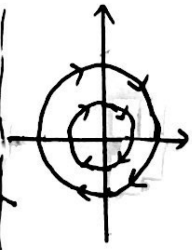
$0:\lambda_2$ $\infty:\lambda_1$
同根合并
不稳定节点

全负



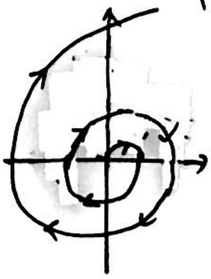
$0:\lambda_2$ $\infty:\lambda_1$
同根合并
稳定节点

0实部



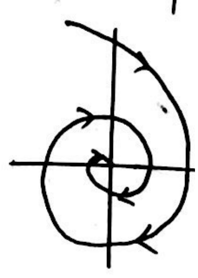
中心点

正实部



不稳定焦点

负实部



稳定焦点

画法

非线性系统（奇点附近）

$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) = 0$ $\quad\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f(x_1,x_2)\end{cases}$

求奇点 $(x_{10}, x_{20}) = (\underset{x}{\arg}[f(x,0)=0], 0)$

奇点处线性化：$\ddot{x} + \left.\frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial x}\right|_{x=x_{10}}(x-x_{10}) + \left.\frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\right|_{\dot{x}=x_{20}}(\dot{x}-x_{20}) = 0$

忽略常数项，利用线性系统结论，判定奇点类型

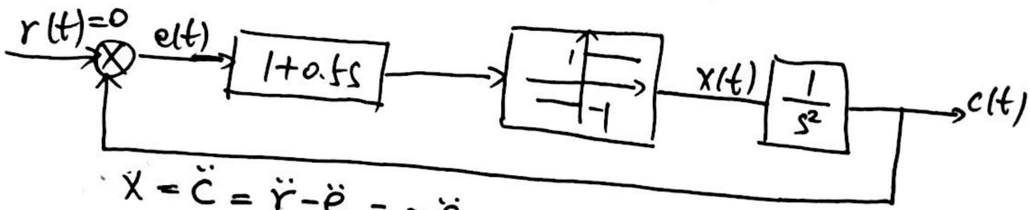
特点

奇点在x轴上，轨迹仅在奇点处相交

x轴上方，轨迹向x轴正向延展，x轴下方，轨迹沿x轴负向延展，x轴上，轨迹垂直穿过

分析

分段写e表达式（非线性分段，相平面分区）



$x = \ddot{c} = \ddot{r} - \ddot{e} = -\ddot{e}$

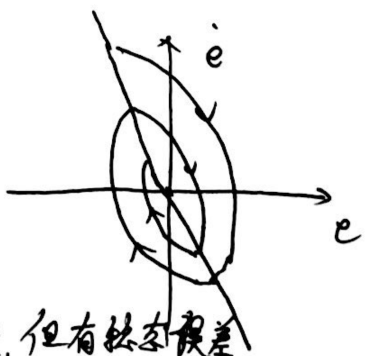
$\begin{cases}\ddot{e} + x = \ddot{e} + 1 = 0 & e + 0.5\dot{e} > 0 \quad \text{I区} \\ \ddot{e} + x = \ddot{e} - 1 = 0 & e + 0.5\dot{e} < 0 \quad \text{II区}\end{cases}$

拆分非线性环节后微分项
防止其导数不存在，已交界轨迹不[illegible]

在每个分区内分别画相轨迹

I区 无奇点，等倾线 $-\frac{1}{\dot{e}} = \alpha$

II区 无奇点，等倾线 $\frac{1}{\dot{e}} = \alpha$



连接各区相轨迹

若轨迹发散，则系统不稳定

若轨迹收敛到非原点，则系统稳定，但有稳态误差

若轨迹收敛到原点，则系统稳定，且无稳态误差