系统的性质

线性系统：$y_1(n)=T[x_1(n)]$ $y_2(n)=T[x_2(n)]$ $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$

移不变系统：$y(n)=T[x(n)]$ $T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$ 无移变增益函数，无时间放缩

因果系统：$h(n)=0$ $n<0$ ，Z收敛域包括无穷远

稳定系统：$\sum|h(n)|$ 有界 Z收敛域包括单位圆

卷积和

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \qquad r_{xy}(n)=x(n)*y(-n)$$

$$N_1+N_3 \le n \le N_2+N_4 \qquad M=N_1+N_2-1$$

Z变换 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

$x(n)\longrightarrow X(z)$ $|z|>|a|$ $x(-n-1)\longrightarrow -X(z)$ $|z|<|a|$

$a^n u(n)\rightarrow\frac{z}{z-a}$ $na^n u(n)\longrightarrow\frac{az}{(z-a)^2}$

$\sin(nw)u(n)\longrightarrow\frac{z\sin w}{z^2-2z\cos w+1}$ $\cos(nw)u(n)\longrightarrow\frac{z^2-z\cos w}{z^2-2z\cos w+1}$

$x(n-m)\longrightarrow z^{-m}X(z)$ S $a^n x(n)\longrightarrow X(\frac{z}{a})$ $|a|S$

$x(-n)\longrightarrow X(\frac{1}{z})$ $\frac{1}{S}$ $x(n)*h(n)\rightarrow X(z)H(z)$ $S_x\cap S_h$

$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$ 因果！ $x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$ 因果！

DTFT 傅里叶变换 $X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}=X(z)|_{z=e^{jw}}$ $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(e^{jw})e^{jwn}dw$

002089

第三章

FT	FS	DTFT	DFS
$s=j\Omega$		$z=e^{j\omega}$	$W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$
$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$	$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$	$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$	$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$
$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}X(s)e^{st}ds$	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$
连续，非周期 ↕ 非周期，连续	连续 ↕ 非周期，周期(T_0) ↕ 离散($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$)	离散(T)，非周期 ↕ 周期($\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$)，连续	离散(T)，周期(T_0) ↕ 周期($\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$)，离散($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$)

DFT　$0\sim N-1$ 主值区域的 DFS　$0\le n\le N-1$　$0\le k\le N-1$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}\qquad W=e^{-j2\pi}\quad \text{or}\quad w=\frac{2\pi k}{N}$$

$$x((n+m))_N R_N(n)\Longleftrightarrow W_N^{-mk}X(k)\qquad x_1(n)\circledast x_2(n)=X_1(k)X_2(k)$$

$$W_N^{nl}x(n)\Longleftrightarrow X((k+l))_N R_N(k)\qquad x_1(n)x_2(n)=\frac{1}{N}X_1(k)\circledast X_2(k)$$

$$\mathrm{Re}[x(n)]+j\,\mathrm{Im}[x(n)]\Longleftrightarrow X_{ep}(k)+X_{op}(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]+\frac{1}{2}[X(k)-X^*(N-k)]$$

$$x_{ep}(n)+x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]+\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]\Longleftrightarrow \mathrm{Re}[X(k)]+j\,\mathrm{Im}[X(k)]$$

$$x(N-n)\Longleftrightarrow X(N-k)\qquad x^*(n)\Longleftrightarrow X^*(N-k)$$

圆周卷积

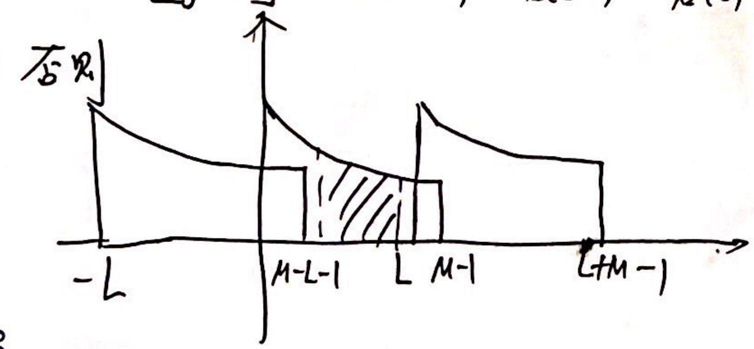
$$\begin{bmatrix}y(0)\\y(1)\\\vdots\\y(L)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(0)&x_2(L-1)&\cdots&x_2(1)\\x_2(1)&x_2(0)&\cdots&x_2(2)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2(L-1)&x_2(L-2)&\cdots&x_2(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_1(1)\\\vdots\\x_1(L-1)\end{bmatrix}$$

必须等长为 L（N_1,N_2 补0到 L）

结果长也为 L

若 $L\ge M=N_1+N_2-1$　圆周卷积=线性卷积

否则



线性卷积 $x(n)$ 仅在 $[M-L, L-1]$ = 圆周卷积

若非零起始，将线性卷积结果向左/向右移 L，不重叠部分为圆周卷积结果

第五章

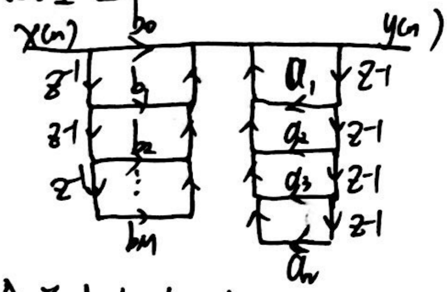
差分方程

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)+\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i) \qquad H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

若 $a_i=0 \longrightarrow FIR$ 否则 $\longrightarrow IIR$

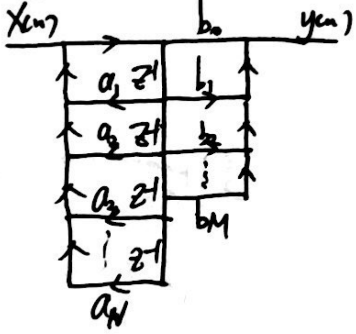
IIR

直接Ⅰ型

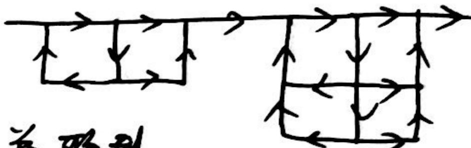


合并中央为z^{-1}，转置型

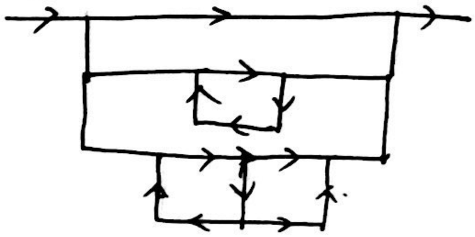
直接Ⅱ型



级联型

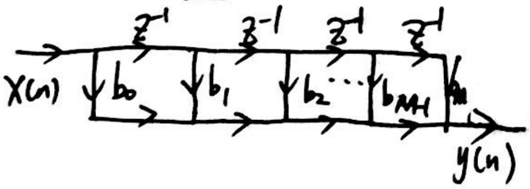


并联型

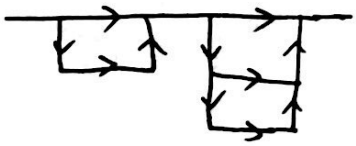


FIR

直接型



级联型

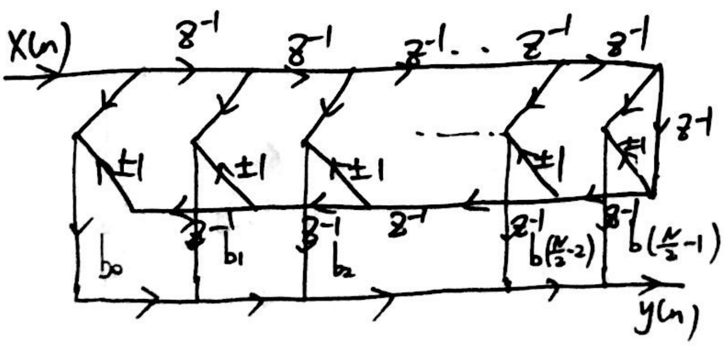


全通系统

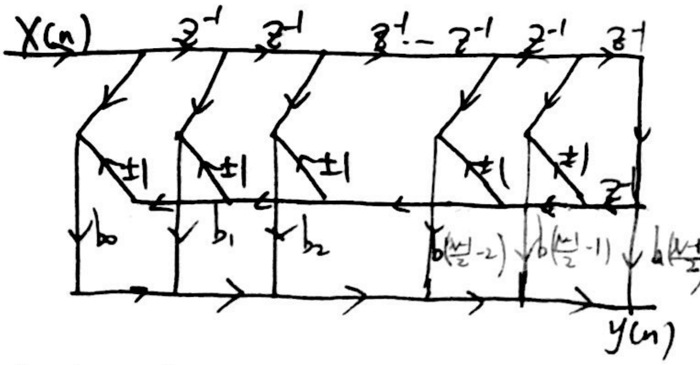
$$H(z)=K\frac{d_N+d_{N-1}z^{-1}\cdots+z^{-N}}{1+d_1z^{-1}+\cdots d_Nz^{-N}}=Kz^{-N}\frac{D(z^{-1})}{D(z)}$$

根在单位圆内

N为偶数

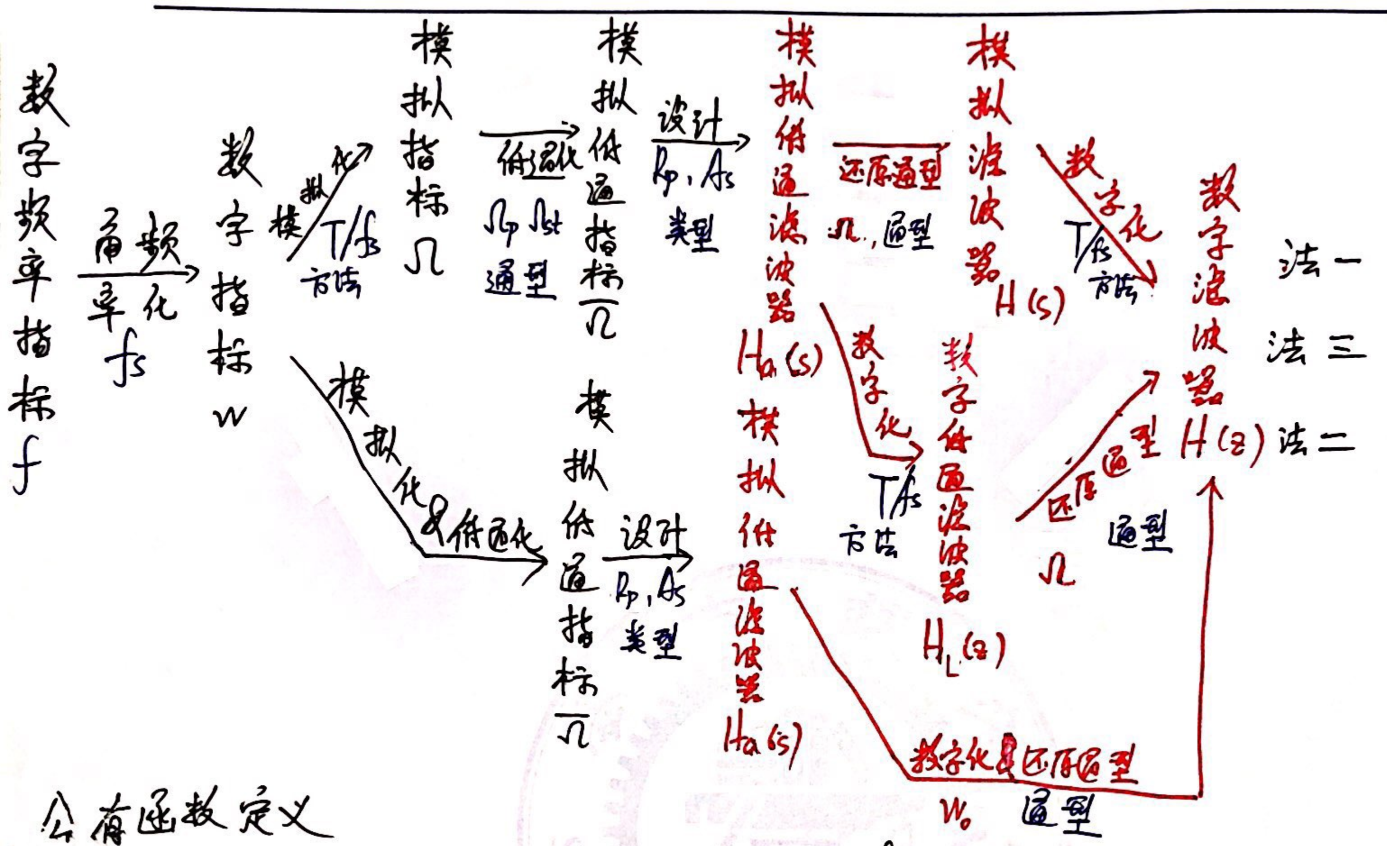


N为奇数



002089

线性相位特征 +1 偶对称 $h(n)=h(N-1-n)$ −1 奇对称 $h(n)=-h(N-1-n)$



公有函数定义

def 角频率化(f:list, fs): return $w=\frac{2\pi f}{f_s}$

def 模拟化(w, T/fs, 方法):

冲激响应法: return $\Omega=\frac{w}{T_s}=wf_s$

双线性变换法: return $\Omega=\frac{2}{T}\tan(\frac{w}{2})$

def 数字化(H(s), T/fs, 方法):

冲激响应法: $H(s)\xrightarrow{L^{-1}} h(t) \xrightarrow{T_s=\frac{1}{f_s}} H(z)$

双线性变换法: $H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

return H(z)

def 模拟低通滤波器设计(Ωp, Ωst, Rp, As, 类型):

$\lambda_s=\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}$ $\quad g=\sqrt{\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}}$

类型	巴特沃斯	切比雪夫I	切比雪夫II
N(向上取)	$\frac{\lg g}{\lg \lambda_s}$	$\frac{\lg(g+\sqrt{g^2-1})}{\lg(\lambda_s+\sqrt{\lambda_s^2-1})}$	
ε	None	$\sqrt{10^{0.1R_p}-1}$	$\frac{1}{\sqrt{10^{0.1A_s}-1}}$
归一化 Han(s) 查表得结果	$\frac{1}{\prod f_i(s)}$	$\frac{1}{2^{N-1}\varepsilon\prod f_i(s)}$	
Ω_c	$\Omega_p(10^{0.1R_p}-1)^{-\frac{1}{2N}}$	Ω_p	

002080

去归一化 return $H_a(s)=H_{an}(\frac{s}{\Omega_c})$

私有函数定义

def IIR一、三→低通化(Ω_p, Ω_{st}, 通型):

$\Omega_p=1$

通型	Ω_{st}
低通	$\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}$
高通	$\frac{\Omega_p}{\Omega_{st}}$

通型	Ω_{st}
带通	$\boxed{\min}\left(\left\lvert\frac{\Omega_{st_1}^2-\Omega_{p_1}\Omega_{p_2}}{(\Omega_{p_2}-\Omega_{p_1})\Omega_{st_1}}\right\rvert, \left\lvert\frac{\Omega_{st_2}^2-\Omega_{p_1}\Omega_{p_2}}{(\Omega_{p_2}-\Omega_{p_1})\Omega_{st_2}}\right\rvert\right)$
带阻	$\boxed{\underset{\Omega_{st}}{\arg\max}}\left(\left\lvert\frac{\Omega_{st}(\Omega_{st_2}-\Omega_{st_1})\Omega_{p_1}}{\Omega_{st_1}\Omega_{st_2}-\Omega_{p_1}^2}\right\rvert, \left\lvert\frac{\Omega_{st}(\Omega_{st_2}-\Omega_{st_1})\Omega_{p_2}}{\Omega_{st_1}\Omega_{st_2}-\Omega_{p_2}^2}\right\rvert\right)=1$

return Ω_p, Ω_{st}

def IIR三→得θ_p(T, f_s, 方法)

冲激响应法: return $\theta_p=T_s=\frac{1}{f_s}$

双线性变换法: return $\theta_p=2\arctan(\frac{T}{2})$

def IIR一→还原通型($H(s)$, Ω, 通型):

通型	低通	高通	带通	带阻
return $H(s)$	$H(\frac{s}{\Omega_p})$	$H(\frac{\Omega_p}{s})$	$H\left(\frac{s^2+\Omega_{p_1}\Omega_{p_2}}{(\Omega_{p_2}-\Omega_{p_1})s}\right)$	$H\left(\frac{\Omega_{st}(\Omega_{st_2}-\Omega_{st_1})s}{s^2+\Omega_{st_1}\Omega_{st_2}}\right)$

def IIR三→还原通型($H(z)$, w, $\boxed{\theta_p}$, 通型):

通型	α	k	return $H_d(z)=H(z)\rvert_{z^{-1}=G(z^{-1})}$
低通	$\frac{\sin(\frac{\theta_p-w_p}{2})}{\sin(\frac{\theta_p+w_p}{2})}$	None	$\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
高通	$-\frac{\cos(\frac{\theta_p+w_p}{2})}{\cos(\frac{\theta_p-w_p}{2})}$	None	$-\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$
带通	$\frac{\cos(\frac{w_{p_2}+w_{p_1}}{2})}{\cos(\frac{w_{p_2}-w_{p_1}}{2})}$	$\cot(\frac{w_{p_2}-w_{p_1}}{2})\tan\frac{\theta_p}{2}$	$-\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$
带阻	$\frac{\cos(\frac{w_{p_2}+w_{p_1}}{2})}{\cos(\frac{w_{p_2}-w_{p_1}}{2})}$	$\tan(\frac{w_{p_2}-w_{p_1}}{2})\tan\frac{\theta_p}{2}$	$\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$

def IIR二→模拟化&低通化(w, 通型):

通型	Ω_p	Ω_{st}
低通	$\tan(\frac{w_p}{2})$	$\tan(\frac{w_{st}}{2})$
高通	$\cot(\frac{w_p}{2})$	$\cot(\frac{w_{st}}{2})$

return Ω_p, Ω_{st}

通型	α	$F(w)$	Ω_p	Ω_{st}
带通	$\cos(\frac{w_{p_2}+w_{p_1}}{2})/\cos(\frac{w_{p_2}-w_{p_1}}{2})$	$\frac{\alpha-\cos w}{\sin w}$	$F(w_{p_2})$	$\min(F(w_{st_1}), F(w_{st_2}))$
带阻	$\cos(\frac{w_{st_2}+w_{st_1}}{2})/\cos(\frac{w_{st_2}-w_{st_1}}{2})$	$\frac{\sin w}{\cos w-\alpha}$	$\max(F(w_{p_1}), F(w_{p_2}))$	$F(w_{st_1})$

def IIR二→数字化&还原通型($H(s)$, $\boxed{\alpha}$, 通型)

通型	低通	高通	带通	带阻
return $H(z)$	$s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$	$s=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$	$s=\frac{1-2\alpha z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$	$s=\frac{1-z^{-2}}{1-2\alpha z^{-1}+z^{-2}}$