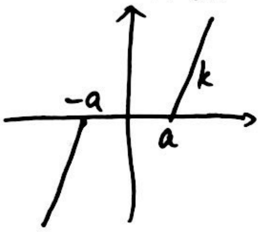
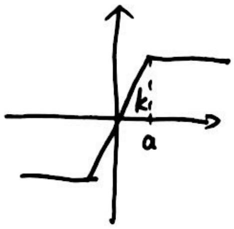
非线性系统

种类

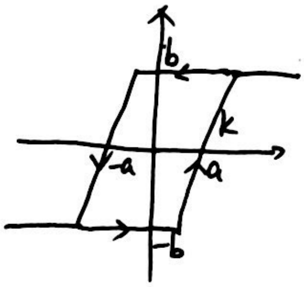
死区特性



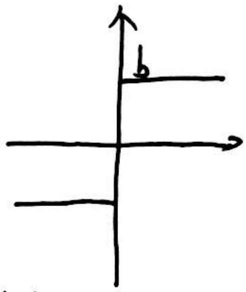
饱和特性



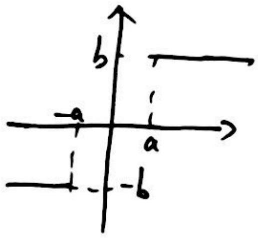
间隙特性



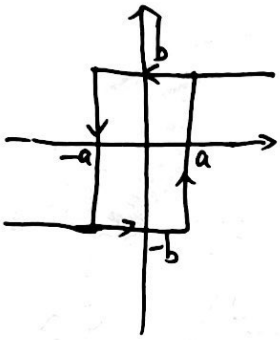
继电器



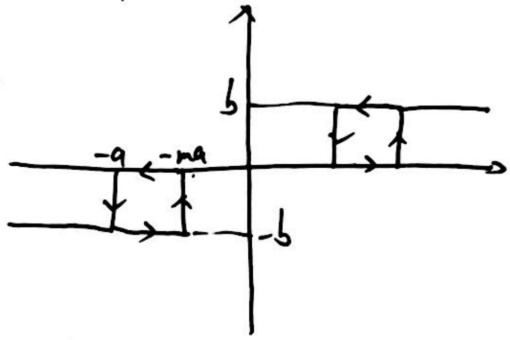
带死区的继电器



带磁滞的继电器



带磁滞死区的继电器



特性

不满足叠加定理

平衡点：线性：孤立的平衡点只有一个，稳定性只与系统结构参数有关，与初值无关。

非线性：往往有多个孤立的平衡点，稳定性不仅依赖于结构参数，还依赖于初值

自激振荡：系统在没有外界激励的情况下，表现出固定振幅，固定周期的振动。

频率响应：线性：幅值增益，相位偏差对于同频输入为定值，输出为同频波。

非线性：幅值增益，相位偏差与输入幅值有关，存在非线性畸变导致的高频谐

002089

描述函数法分析

简化系统框图 ⟶ 非线性系统 + 线性系统 + 单位负反馈

外环任意化：不看输入输出支路，仅在最外环上的所有元素可任意移动

支路简化：N支路元素不动，变换反馈支路，利用串、并、反馈公式化简。

内环降阶：直至N支路不含内环，即N在最外环上，则再次外环任意化，达成目标。

求非线性环节描述函数

输入 $e(t)=A\sin\omega t$　输出 $x(t)$　$N(A)=\frac{B_1}{A}+j\frac{A_1}{A}$

$A_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos\omega t\,d\omega t$　$B_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin\omega t\,d\omega t$

若非线性系统不含滞回环，且 $x(t)$ 前/后半部分分别关于 $\omega t=\frac{\pi}{2}/\frac{3\pi}{2}$ 轴对称，二者关于 $\omega t=\pi$ 中心对称 $\Rightarrow A_1=0$

方法假设：非线性环节无直流分量，线性系统具有低通滤波特性

画线性环节 Nyquist 曲线

令 $s=j\omega$，将 $G(j\omega)$ 的实部虚部画在复平面上

对开环无不稳定极零点与延时环节的最小相位系统，

$\omega=0^+$：0型从 $(K,0)$ 向上或向下，ν型从 $-90^\circ\cdot\nu$ 方向进入

$\omega=\infty$：从 $-90^\circ\cdot(n-m)$ 方向终止于原点

求出曲线与实轴的交点与对应的 ω

画负倒描述函数 $F(A)=-\frac{1}{N(A)}$ 的曲线于同一复平面

对 $F(A)$ 实虚部分别求导，算出其范围

在图中标出极值点，与实轴交点

根据二者交点，判定系统稳定性

G包围F的区域为不稳定区域U，G不包围F的区域为稳定区域S

G与F交点为特定振幅与周期的自激振荡，F从 $S\to U$，不稳定自激，F从 $U\to S$，稳定自激。

002089

上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

相平面法基础

定义

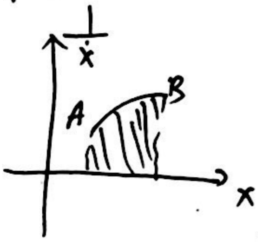
系统: $\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0$　令 $\begin{cases} x_1=x \\ x_2=\dot{x} \end{cases}$　得 $\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-f(x_1,x_2) \end{cases}$　最多分析二阶系统

奇点: $\begin{cases} x_2=0 \\ f(x_1,x_2)=0 \end{cases}$　相轨线仅在奇点相交汇集

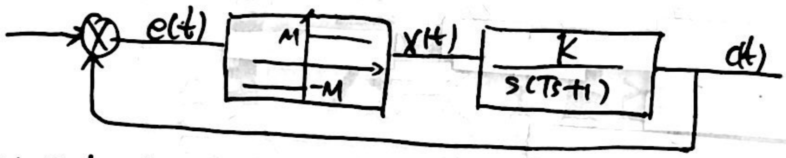
极限环: 孤立的闭轨线 $\begin{cases} \text{稳定} \\ \text{不稳定} \\ \text{半稳定} \end{cases}$　若二阶自治系统一条闭轨线驻留在有限区域 (1)趋于奇点 (2)趋于极限环 (3)是极限环

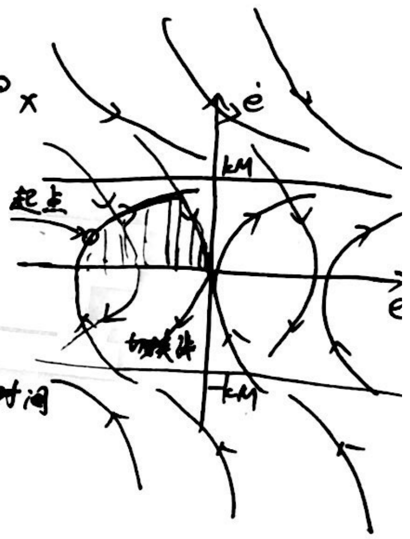
时域分析

从A到B点的响应时间　$t_{AB}=\int_A^B \frac{1}{\dot{x}}dx$



最优时间控制:





要使误差尽快为零, 仅在切换线处一步切换到位, 最省时间

画法

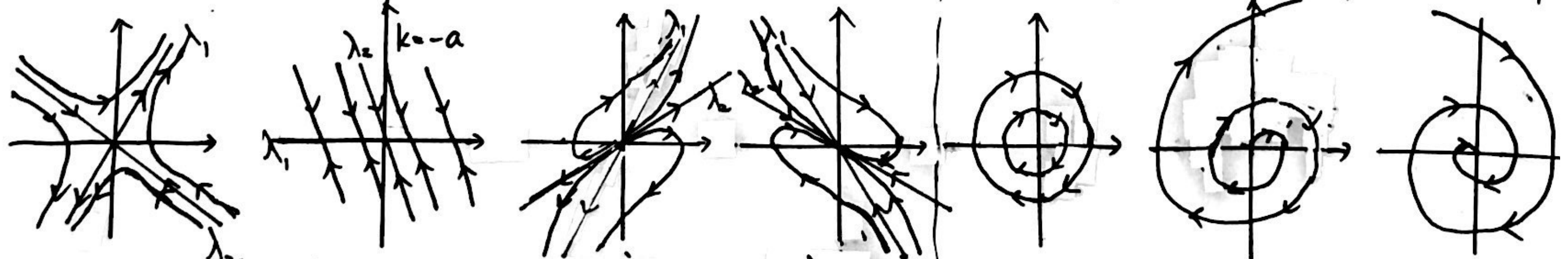
等倾线法: $\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{f_2(x_1,x_2)}{f_1(x_1,x_2)}=\frac{-f(x_1,x_2)}{x_2}=\alpha \Rightarrow x_2=K(\alpha,x_1) \overset{\text{一般情况}}{=\!=\!=} k(\alpha)x_1$

在曲线 $K(\alpha,x_1)$ 上, 相轨线斜率均为 α。 $\alpha=k(\alpha)$ 等倾线为相轨线。

线性系统: $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=0$　$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$　对λ分类　奇点$(0,0)$

有实根　|　无实根

符号互异　有0　全正　全负　|　0实部　正实部　负实部



鞍点　|　同根平行x轴　|　$0:\lambda_2$ $\infty:\lambda_1$ 同根合并 不稳定节点　|　$0:\lambda_2$ $\infty:\lambda_1$ 同根合并 稳定节点　|　中心点　|　不稳定焦点　|　稳定焦点

相平面法基础与分析

画法

非线性系统(奇点附近)

$\ddot{x}+f(x,\dot{x})=0$ $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-f(x_1,x_2)\end{cases}$

求奇点. $(x_{10},x_{20})=(\arg_x[f(x,0)=0],0)$

奇点处线性化: $\ddot{x}+\left.\frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial x}\right|_{x=x_{10}}(x-x_{10})+\left.\frac{\partial f(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}\right|_{\dot{x}=x_{20}}(\dot{x}-x_{20})=0$

忽略常数项, 利用线性系统结论, 判定奇点类型

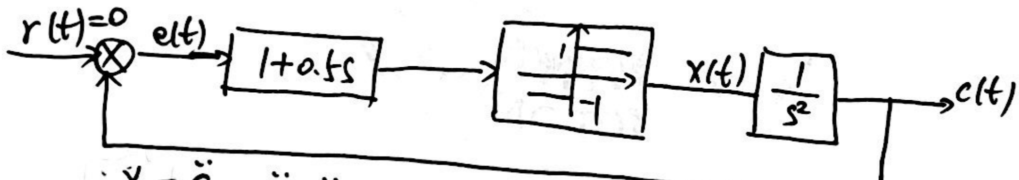
特点.

奇点在x轴上, 轨线仅在奇点处相交

x轴上方, 轨线向x轴正向延展, x轴下方, 轨线沿x轴负向延展, x轴上, 轨线垂直穿越

分析

分段写e表达式(非线性分段, 相平面分区)



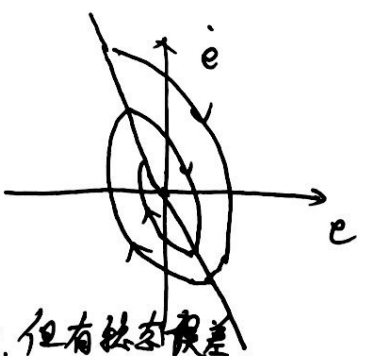
$x=\ddot{c}=\ddot{r}-\ddot{e}=-\ddot{e}$

$\begin{cases}\ddot{e}+x=\ddot{e}+1=0 & e+0.5\dot{e}>0 & \text{I区}\\ \ddot{e}+x=\ddot{e}-1=0 & e+0.5\dot{e}<0 & \text{II区}\end{cases}$

在每个分区内分别画相轨迹

I区 无奇点, 等倾线 $-\frac{1}{\dot{e}}=\alpha$

II区 无奇点, 等倾线 $\frac{1}{\dot{e}}=\alpha$



连接各区相轨线

若轨线发散, 则系统不稳定

若轨线收敛到非原点, 则系统稳定, 但有稳态误差

若轨线收敛到原点, 则系统稳定, 且无稳定误差

002089