上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

第一章 第二章

系统的性质

线性系统： $y_1(n)=T[x_1(n)]$ $y_2(n)=T[x_2(n)]$ $T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$

移不变系统： $y(n)=T[x(n)]$ $T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$ 无移变增益函数，无时间放缩

因果系统： $h(n)=0 \quad n<0$ ，ROC 包括无穷远

稳定系统： $\sum|h(n)|$ 有界，ROC 包括单位圆

卷积和

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \qquad r_{xy}(n)=x(n)*y(-n)$$

$$N_1+N_3 \le n \le N_2+N_4 \qquad M=M_1+M_2-1$$

Z 变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$x(n) \to X(z)$ $|z|>|a|$ $\qquad x(-n-1) \to -X(z)$ $|z|<|a|$

$a^n u(n) \to \frac{z}{z-a}$ $\qquad na^n u(n) \to \frac{az}{(z-a)^2}$

$\sin(nw)u(n) \to \frac{z\sin w}{z^2-2z\cos w+1}$ $\qquad \cos(nw)u(n) \to \frac{z^2-z\cos w}{z^2-2z\cos w+1}$

$x(n-m) \to z^{-m}X(z)$ S $\qquad a^n x(n) \to X(\frac{z}{a})$ $|a|S$

$x(-n) \to X(\frac{1}{z})$ $\frac{1}{S}$ $\qquad x(n)*h(n) \to X(z)H(z)$ $S_x \cap S_h$

$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$ 因果！ $\qquad x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$ 因果！

DTFT 傅里叶变换

$$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}=X(z)\big|_{z=e^{jw}} \qquad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(e^{jw})e^{jwn}dw$$

002089

第三章

FT

$s=j\Omega$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}X(s)e^{st}ds$$

连续，非周期 ↕ 非周期，连续

FS

$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

连续，周期(T_0) ↕ 非周期　↑ 离散($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$)

DTFT

$z=e^{j\omega}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

离散(T)，非周期 ↕ 周期($\Omega_0=2\pi$)，连续

DFS

$W_N^{nk}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

离散(T)，周期(T_0) ↕ 周期($\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$)，离散($\Omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$)

DFT

$0\sim N-1$ 主值区域的 DFS　$0\le n\le N-1$　$0\le k\le N-1$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}$$

$W=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ or $\omega=\frac{2\pi k}{N}$

$$x((n+m))_N R_N(n)\longleftrightarrow W_N^{-mk}X(k)$$

$$W_N^{nl}x(n)\longleftrightarrow X((k+l))_N R_N(k)$$

$$x_1(n)\circledast x_2(n)=X_1(k)X_2(k)$$

$$x_1(n)x_2(n)=\frac{1}{N}X_1(k)\circledast X_2(k)$$

$$Re[x(n)]+jIm[x(n)]\longleftrightarrow X_{ep}(k)+X_{op}(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]+\frac{1}{2}[X(k)-X^*(N-k)]$$

$$x_{ep}(n)+x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]+\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]\longleftrightarrow Re[X(k)]+jIm[X(k)]$$

$$x(N-n)\longleftrightarrow X(N-k)\qquad x^*(n)\longleftrightarrow X^*(N-k)$$

圆周卷积

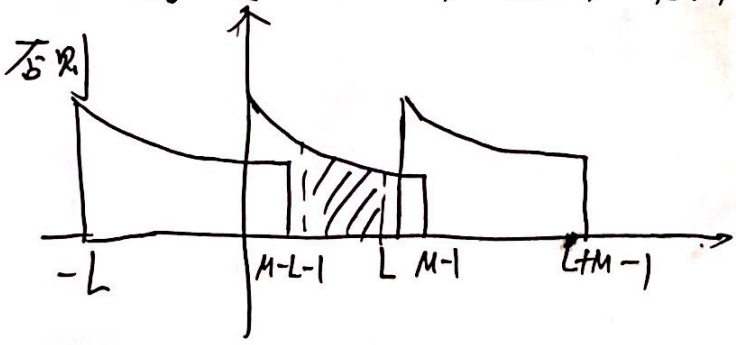
$$\begin{bmatrix}y(0)\\y(1)\\\vdots\\y(L)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(0) & x_2(L-1) & \cdots & x_2(1)\\ x_2(1) & x_2(0) & \cdots & x_2(2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2(L-1) & x_2(L-2) & & x_2(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_1(1)\\\vdots\\x_1(L-1)\end{bmatrix}$$

必须等长为 L (N_1,N_2 补0到L)

结果长也为 L

若 $L\ge M=N_1+N_2-1$　圆周卷积=线性卷积

否则



线性卷积 $z(n)$ 仅在 $[M-L,L-1]$ = 圆周卷积

若非零起始，将线性卷积结果

向左/向右移 L，不重叠部分为圆周卷积结果

第五章

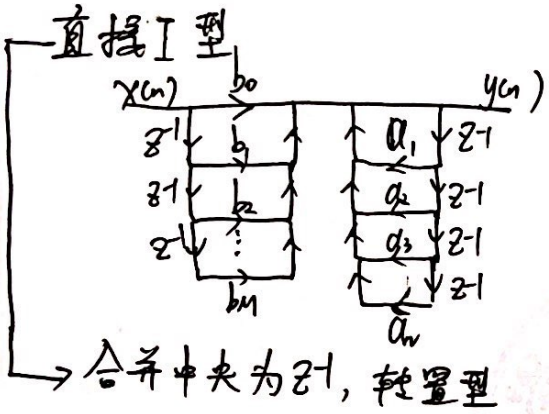
差分方程

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)+\sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) \qquad H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-1}}$$

若 $a_i=0$ → FIR　　否则 → IIR

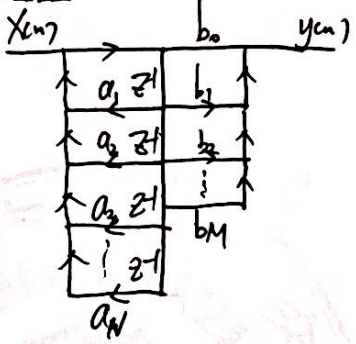
IIR

直接I型

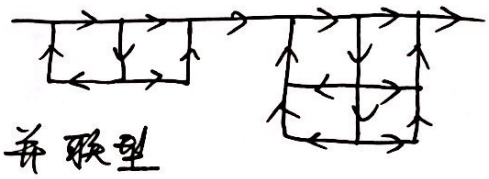


→ 合并中央为 z^{-1}，转置型

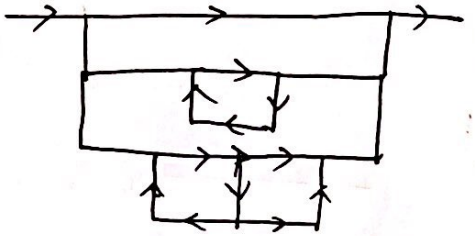
直接II型



级联型

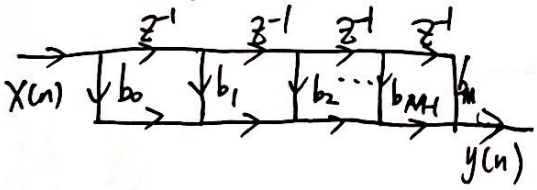


并联型

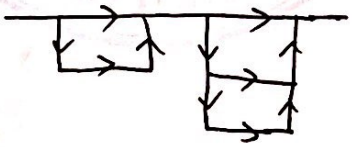


FIR

直接型



级联型

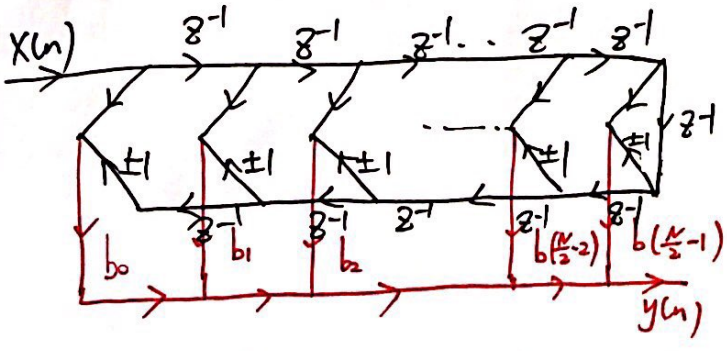


全通系统

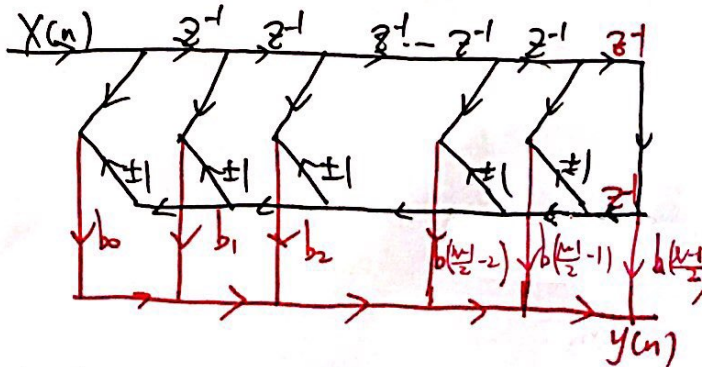
$$H(z)=K\frac{d_N+d_{N-1}z^{-1}\cdots+z^{-N}}{1+d_1z^{-1}+\cdots d_Nz^{-N}}=Kz^{-N}\frac{D(z^{-1})}{D(z)}$$

↑ 根在单位圆内

N为偶数



N为奇数

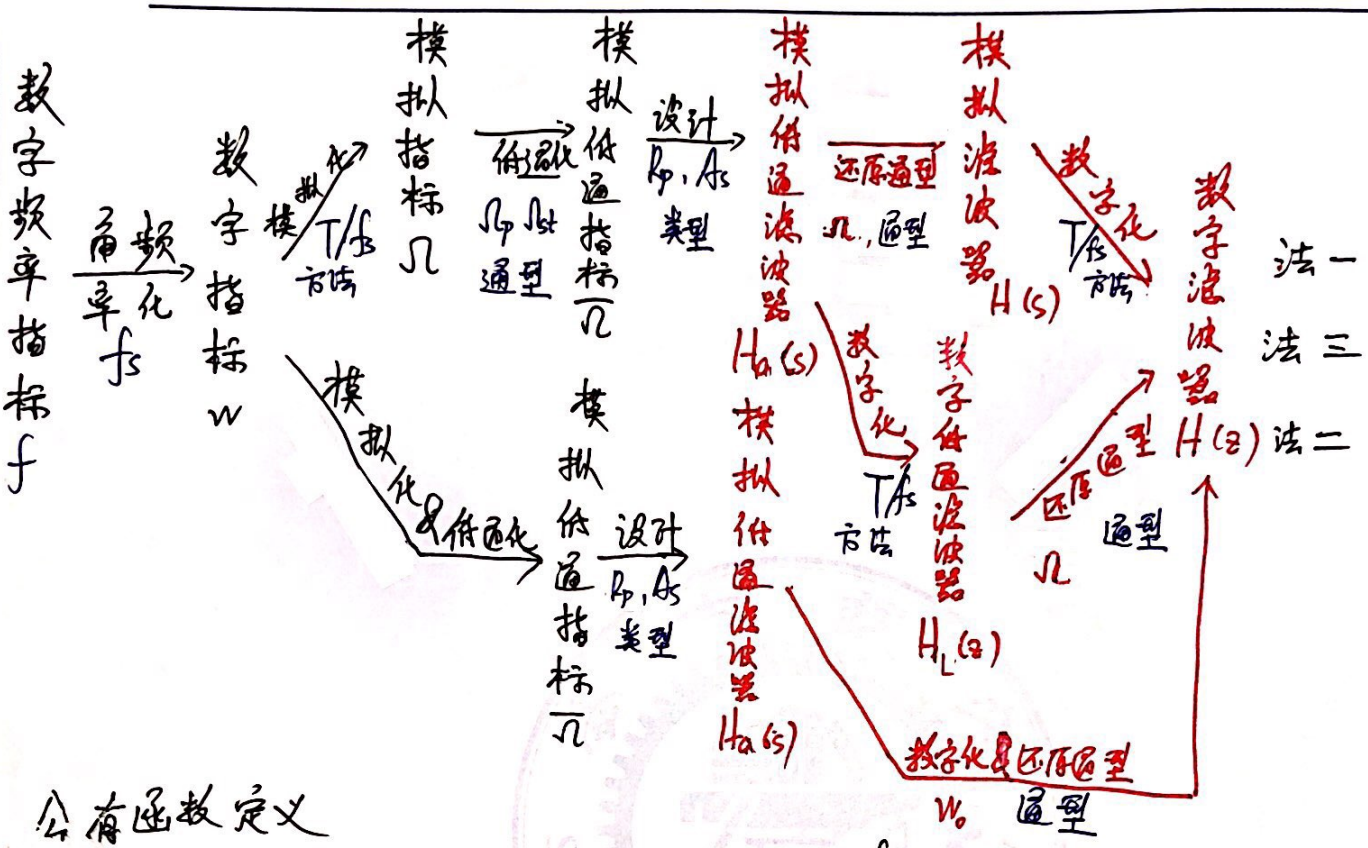


偶对称相位特征　+1 偶对称　$h(n)=h(N-1-n)$

-1 奇对称　$h(n)=-h(N-1-n)$

002089

第六章



公有函数定义

def 角频率化 (f: list, f_s): return $\omega = \frac{2\pi f}{f_s}$

def 模拟化 (ω, T/f_s, 方法):

冲激响应法: return $\Omega = \frac{\omega}{T_s} = \omega f_s$

双线性变换法: return $\Omega = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})$

def 数字化 ($H(s)$, T, f_s, 方法):

冲激响应法: $H(s) \xrightarrow{L^{-1}} h(t) T_s = \frac{1}{f_s} H(z)$

双线性变换法: $H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

return $H(z)$

def 模拟低通滤波器设计 (Ω_p, Ω_{st}, R_p, A_s, 类型):

$\lambda_s = \frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}$ $\quad g = \sqrt{\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}}$

类型	巴特沃斯	切比雪夫 I	切比雪夫 II
N (向上取)	$\frac{\lg g}{\lg \lambda_s}$	$\frac{\lg(g+\sqrt{g^2-1})}{\lg(\lambda_s+\sqrt{\lambda_s^2-1})}$	None
ε	$\frac{1}{\sqrt{10^{0.1R_p}-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{10^{0.1A_s}-1}}$	
归一化 $H_{an}(s)$ 重要结果	$\frac{1}{\prod f_i(s)}$	$\frac{1}{2^{N-1}\varepsilon \prod f_i(s)}$	
Ω_c	$\Omega_p (10^{0.1R_p}-1)^{-\frac{1}{2N}}$	Ω_p	

去归一化 return $H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$

第六章

私有函数定义

def IIR一、三 → 低通化 (Ω_p, Ω_{st}, 通型):

$\Omega_p = 1$

通型	Ω_{st}
低通	$\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}$
高通	$\frac{\Omega_p}{\Omega_{st}}$
return	Ω_p, Ω_{st}

通型	Ω_{st}
带通	$\min\left(\left\lvert\frac{\Omega_{st1}^2-\Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})\Omega_{st1}}\right\rvert, \left\lvert\frac{\Omega_{st2}^2-\Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})\Omega_{st2}}\right\rvert\right)$
带阻	$\underset{\Omega_{st}}{\operatorname{argmax}}\left(\left\lvert\frac{\Omega_{st}(\Omega_{st2}-\Omega_{st1})\Omega_{p1}}{\Omega_{st1}\Omega_{st2}-\Omega_{p1}^2}\right\rvert, \left\lvert\frac{\Omega_{st}(\Omega_{st2}-\Omega_{st1})\Omega_{p2}}{\Omega_{st1}\Omega_{st2}-\Omega_{p2}^2}\right\rvert\right) = 1$

def IIR三 → 得 θ_p (T, f_s, 方法)

冲激响应法: return $\theta_p = T_s = \frac{1}{f_s}$

双线性变换法: return $\theta_p = 2\arctan\left(\frac{T}{2}\right)$

def IIR一 → 还原通型 ($H(s)$, Ω, 通型):

通型	低通	高通	带通	带阻
return $H(s)$	$H\left(\frac{s}{\Omega_p}\right)$	$H\left(\frac{\Omega_p}{s}\right)$	$H\left(\frac{s^2+\Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2}-\Omega_{p1})s}\right)$	$H\left(\frac{\Omega_{st}(\Omega_{st2}-\Omega_{st1})s}{s^2+\Omega_{st1}\Omega_{st2}}\right)$

def IIR三 → 还原通型 ($H(z)$, w, θ_p, 通型):

return $H_1(z) = H(z)\big|_{z^{-1}=G(z^{-1})}$

通型	α	k	
低通	$\frac{\sin\left(\frac{\theta_p-w_p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p+w_p}{2}\right)}$	None	$\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
高通	$-\frac{\cos\left(\frac{\theta_p+w_p}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_p-w_p}{2}\right)}$	None	$-\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$
带通	$\frac{\cos\left(\frac{w_{p2}+w_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2}\right)}$	$\cot\left(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2}\right)\tan\frac{\theta_p}{2}$	$-\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$
带阻	$\frac{\cos\left(\frac{w_{p2}+w_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2}\right)}$	$\tan\left(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2}\right)\tan\frac{\theta_p}{2}$	$\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$

def IIR三 → 模拟化及低通化 (w, 通型):

通型	Ω_p	Ω_{st}
低通	$\tan\left(\frac{w_p}{2}\right)$	$\tan\left(\frac{w_{st}}{2}\right)$
高通	$\cot\left(\frac{w_p}{2}\right)$	$\cot\left(\frac{w_{st}}{2}\right)$
return	Ω_p, Ω_{st},	

通型	α
带通	$\cos\left(\frac{w_{p2}+w_{p1}}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{w_{p2}-w_{p1}}{2}\right)$
带阻	$\cos\left(\frac{w_{st2}+w_{st1}}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{w_{st2}-w_{st1}}{2}\right)$

$F(w)$	Ω_p	Ω_{st}
$\frac{\alpha-\cos w}{\sin w}$	$F(w_{p2})$	$\min(F(w_{st1}), F(w_{st2}))$
$\frac{\sin w}{\cos w-\alpha}$	$\max(F(w_{p1}), F(w_{p2}))$	$F(w_{st1})$

def IIR三 → 数字化及还原通型 ($H(s)$, α, 通型)

通型	S
低通	$S=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
高通	$S=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
带通	$S=\frac{1-2\alpha z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$
带阻	$S=\frac{1-z^{-2}}{1-2\alpha z^{-1}+z^{-2}}$

return $H(z)$

002089