Curso: MA4703-1 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio
Profesor: Héctor Ramírez C.
Auxiliar: Diego Olguín Wende
Ayudantes: Luis Fuentes Cruz & Carlos Antil
Autores: Allen Arroyo & Isidora Miranda

Informe: El modelo de crecimiento Neoclásico de Ramsey

Proyecto - Ramsey 1

Índice

1. Resumen **2**

2. Modelo Económico de Ramsey **3**
2.1. Contexto Histórico 3
2.2. Descripción del modelo 3

3. Equivalencia entre el modelo centralizado y el descentralizado. **4**
3.1. Pareto optimalidad del modelo de Ramsey 5

4. Condición No-Ponzi-Game **5**

5. Ecuaciones de Pontryagin y condiciones sobre el control $c(t)$ **5**
5.1. Caso general del Principio del Maximo/Minimo de Pontryagin(PMP) 5
5.2. Solución PMP cuando u es del tipo CRRA y F Coubb-Douglas 7
5.3. PMP en el metodo clásica para el modelo de Ramsey 8

6. Ecuaciones de HJB **9**

7. Estados de equilibrio en la dinámica del modelo de Ramsey y su uso en Julia **9**
7.1. Estados de equilibrio 9
7.2. Regla de Oro del modelo de Ramsey 10
7.3. Trayectoria numérica del consumo y capital en diagramas de fase en **Julia** 10

8. Anexos **12**
8.1. Diferencia entre el modelo de Ramsey y el de Solow. 12
8.2. Estabilidad del estado estacionario y controlabilidad(convergencia) 12

9. Dificultades y Conclusiones **13**

10.Referencias **13**

1. Resumen

El objetivo de este proyecto es estudiar el modelo económico de Ramsey(1926), en el cual los consumidores maximizan su utilidad a lo largo de un horizonte infinito. Este modelo es adecuado para estudiar el crecimiento de las economías así como la respuesta óptima del gobierno frente a shocks. En particular, la idea es maximizar la utilidad en un cierto período de tiempo. Para ello se debe describir y resolver un problema de control óptimo, obteniéndose una política óptima de control basada en el principio del máximo de Pontryagin. Se entregarán simulaciones y ejemplos numéricos en Julia.

2. Modelo Económico de Ramsey

2.1. Contexto Histórico

Figura 1: Frank P. Ramsey 1903-1930

El modelo de Ramsey se desarrolló a finales de los años 20's(1928), pero el uso del cálculo de variaciones para resolverlo hizo que la mayor parte de los economistas ignoraran su trabajo. No fue hasta 1965 cuando Cass y Koopman desarrollaron un modelo muy similar, aceptado por los economistas. Entonces se comprobó que dicho modelo era en realidad equivalente al desarrollado casi 40 años antes por Ramsey.

En otros modelos de crecimiento neoclásico la tasa de ahorro es exógena y constante. La brillante idea de Ramsey fue determinar la tasa de ahorro de forma endógena, a través de un proceso dinámico de maximización.En el modelo los agentes tienen 2 facetas: de consumidores y de empresas. Las familias(consumidores) venden su trabajo por un salario el cual distribuyen entre ahorro(inversión) y consumo. Las empresas contratan trabajo para producir y venden su producto a las familias. Empresas y familias maximizan su utilidad. Los precios del consumo y salario se determinan de manera tal que no quede nadie sin trabajo ni nada sin consumirse (i.e. limpieza de mercado). Nosotros nos enfocaremos en el tratamiento moderno del problema, comenzado inicalmente por Ramsey.

2.2. Descripción del modelo

Primero es necesario aclarar que en el modelo de Ramsey hay un número finito de agentes con un horizonte temporal infinito. estos agentes son completamente iguales(homogéneos) e inmortales, esto se conoce como un modelo de agente representativo, a diferencia del modelo de Diamond que tiene agentes heterogéneos(jóvenes y viejos) que interactúan en cada período. Ramsey originalmente realizó su estudio en tiempo continuo, pero es conocido que es posible trabajar el modelo a tiempo discreto.

El problema consiste ahora en determinar la trayectoria temporal de $c(t)$ de modo que se maximice la utilidad social a lo largo del tiempo. Donde identifcamos $c(t)$ como la variable de control en la teoría del control óptimo. El conjunto factible de $c(t)$ es $0 \leq c(t) \leq F(k(t))$ ya que el consumo per cápita actual no puede ser negativo y tampoco mayor que la producción per cápita actual. Si tenemos en cuenta la posibilidad de ≪comer≫ también el stock de capital existente. Si tuvieramos en cuenta la posibilidad de "comer"(eating) también el stock de capital existente (una posibilidad coherente con nuestra economía de un solo bien) el límite superior de $c(t)$ sería $F(k(t)) + k(t)$, pero ignoraremos esta complicación.

El modelo se presenta de la siguiente manera, la función que se busca maximizar se representa como:

$$\text{(Ramsey)} \begin{cases} \min\limits_{c(\cdot)} \quad J(c(\cdot)) = \int_0^\infty -u(c(t)) \cdot L(t) \cdot e^{-\rho \cdot t}\, dt & \text{(Criterio)} \\ \dot{k}(t) = F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t) & \text{(Dinámica)} \\ 0 \leq c(t) \leq F(k(t)) & \text{(Restricción de consumo)} \\ k(0) = k_0 & \text{(Condición inicial de capital)} \end{cases}$$

Donde se tiene que $c(t) := C(t)/L(t)$ y dado que $\dot{L}(t) = nL(t)$ con solución $L(t) = L_0 e^{nt}$, es posible rescribir la función objetivo como

$$J(c(\cdot)) = \int_0^\infty -u(c(t)) \cdot L_0 \cdot e^{-(\rho - n)\cdot t}\, dt$$

Tenemos que F es función de producción que es homogénea de grado 1, es decir, presenta rendimientos constantes a escala, esto permite que la producción per cápita, se puede expresar a partir del capital per cápita $k(t)$, esto nos permite escribir **todo el modelo de Ramsey en términos per capita, especialemente la dinamica**.

Donde cada termino de Ramsey, tanto como el criterio, dinamica y restriccion representa lo siguiente:
A partir de lo anterior notamos que el termino $\dot{k}(t) + (n+\delta)k(t)$ corresponde a la inversión. Así resolver el problema decisión es equivalente a elegir C(t) para maximizar J(C).

$u(\cdot)$	$C(t)$	$c(t)$	$L(t)$
Función de utilidad estrictamente creciente, cóncava, 2 veces diferenciable y satisface las condiciones INADA	Consumo total de la población en el tiempo t	Consumo per capita en el tiempo t con $c(t) := C(t)/L(t)$	Población en el tiempo t

Cuadro 1: Definiciones de variables I

ρ	$k(t)$	$F(k(t))$	n	δ
Tasa constante de preferencia temporal	Capital per capita	Función de producción neoclásica, que no considera el progreso tecnológico y es homogénea de grado 1. Se puede interpretar como el trabajo remunerado de los consumidores.	Constante de crecimiento poblacional	Tasa de impaciencia

Cuadro 2: Definiciones de variables II

Las condiciones de INADA que cumple u mencionadas son: $u(0) = 0$, u es continuamente diferenciable, u es estrictamente creciente , u' es decreciente, cóncava y $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$

3. Equivalencia entre el modelo centralizado y el descentralizado.

Se cumple que el proceso de maximización de (Ramsey) puede ser puesto en marcha por las familias o por un planificador social benevolente, se cumple que en ambos casos el resultado es el mismo, esto con más precisión se conoce como la equivalencia el modelo centralizado y el descentralizado.

Para contextualizar la equivalencia entre un modelo de economía centralizado(Problema del planificador) y uno descentralizado(competencia perfecta) es oportuno antes mencionar los llamados "teoremas de bienestar" que existen en Economía que son utilizados para argumentar dicha equivalencia, primero enunciaremos dos hipótesis y dos definiciones:

Hipótesis :

1. No existe externalidades al conjunto de mercados(en la producción F y el consumo C), y cada agente(empresas y consumidores) tiene información perfecta.
2. Los agentes(empresas y consumidores) toman los precios como dados en el conjunto de mercados (ningún agente económico tiene poder de para fijar precios).

Para que exista una **competencia perfecta** en un mercado necesitamos ambas hipótesis.

Definición 1. *Una asignación es* ***Pareto óptima*** *si no hay forma de reorganizar la producción F o reasignar capital k de modo que alguien algún agente esté en mejor situación sin empeorar la situación de otro.*

Ahora, el **"Primer Teorema Fundamental del Bienestar"** nos dice :

Teorema 1. *En equilibrio económico, un conjunto de mercados en competencia perfecta, será óptimo de Pareto*

Mientras que el **"Segundo Teorema Fundamental del Bienestar"** nos dice :

Teorema 2. *Si no existen rendimientos crecientes a escala. Entonces una asignación de recursos Pareto eficiente puede ser alcanzada por mercados en competencia perfecta.*

Finalmente podemos definir el modelo centralizado o problema del planificador :

Definición 2. *Si Suponemos que existe un "Planificador Social", que puede decidir cuánto consumen $C(t)$ y trabajan $W(t)$ las familias(consumidores) y cuánto producen las empresas $F(K(t))$ en un conjunto de mercados. Que no controla los precios, pero entiende el costo de oportunidad y busca la mejor asignación posible,i.e, maximiza la utilidad. Aquello lo llamaremos* ***modelo centralizado para el mercado****.*

Y se tiene que:

Propiedad 1. *La solución del Planificador social, i.e, la solución al modelo centralizado para un conjunto de mercados es equivalente al equilibrio económico en un mercado de competencia perfecta.*

Esto último por el 1er teorema de bienestar nos dice que en términos de óptimo de Pareto un modelo centralizado es equivalente a uno descentralizado con las debidas hipótesis.

3.1. Pareto optimalidad del modelo de Ramsey

En nuestro trabajo utilizaremos la definición del modelo de Ramsey como **Solución del Planificador**(Problema centralizado), es posible comenzar con la definición descentralizada con variables como salario $w(t)$, rendimiento real $r(t)$, etc. En [10] explícitamente ambas definiciones conducen a las mismas dinámicas para el capital percapita $k(t)$ y consumo percapita $c(t)$, la dinamica para el consumo (21), se conoce como regla Keynes-Ramsey del problema del planificador. Dado lo explicado en la sección anterior, el modelo de Ramsey encuentra un optimo de Pareto, leer propiedad 1 y teorema 1.

4. Condición No-Ponzi-Game

En el contexto que el modelo es cerrado(No es posible pedir préstamo o prestar al exterior), cuando la dinámica del modelo de Ramsey se combina con el **requisito de solvencia**, osea que el valor presente de la riqueza o los activos futuros del agente sea suficiente para cubrir cualquier deuda acumulada, nos conduce a una nueva *restricción presupuestaria*, que en muchas referencias se denota condición de contorno, transversalidad,final.

Entonces, dado el supuesto de un mercado de préstamos perfecto, el requisito de solvencia relevante es la condición de *No-Ponzi-Game* (NPG) :

$$\lim_{t\to\infty} k(t)\cdot exp\left(-\int_0^t r(s)-n\,ds\right)\geq 0 \tag{1}$$

Donde se tiene que

$$r(t)=F(k(t))'-\delta$$

Esta condición dice que la riqueza financiera muy lejos en el futuro no puede tener un valor presente negativo. Esto nos dice que a largo plazo en tiempo la deuda al menos no debe crecer a un nivel mayor que los intereses acumulados sobre ella.

Aquella restricción es necesaria de agregar al modelo de Ramsey, debido a los motivos mencionados y además que sin ella un agente podría continuamente financiar su deuda acumulada nunca pagando en el tiempo, cosa que es insostenible, pues el sistema colapsaría al no tener capital para cubrirla. Modificaremos dentro del modelo esta condición más adelante para resolverlo computacionalmente.

Ahora bien, la condición de NPG es equivalente a :

$$\lim_{t\to\infty} k(t)p_{cv}(t)e^{-(\rho-n)t}=0$$

Y también equivalente a

$$\lim_{t\to\infty} k(t)u'(c)e^{-(\rho-n)t}=0$$

Donde $p(t)$ es la variable adjunta y $p_{cv}:=p(t)e^{(\rho-n)t}$. Leer [2] Capítulo 10. Pag.6-7.

5. Ecuaciones de Pontryagin y condiciones sobre el control $c(t)$

5.1. Caso general del Principio del Maximo/Minimo de Pontryagin(PMP)

Veremos condiciones sobre el control $c(t)$ inicialmente para $u(c(t))$ y $F(k(t))$ generales. Identificamos que el problema (Ramsey) es de tipo Lagrange si $F(k(t))$ es no lineal yconsideramos $t_f=T>0$ **tiempo final fijo**, en especifico es Lagrange de función objetivo $J(\cdot)$ con descuento exponencial, esto ultimo nos permite eventualmente lidiar con valores de tiempos muy grandes. El pre-Hamiltoniano para este problema será de la forma

$$H(t,k(t),c(t),p(t)) := \ell(k,c) + p(t)^T f(k,c) = -u(c(t))\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} + p(t)\cdot[F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t)]$$

Asumiendo que existe un control optimo $c^*(t)$ solución del problema (Ramsey). Por Principio del máximo de Pontryagin(PMP) con las hipótesis necesarias tenemos que $\exists p : [0,T] \to \mathbb{R}$ abs.continua tal que:

$$\dot{k}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t,k(t),c(t),p(t)) \quad \text{c.t.p.} \quad \forall t\in[0,T]; \quad k(0)=k_0, \tag{2}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial k}(t,k(t),c(t),p(t)) \quad \text{c.t.p.} \quad \forall t\in[0,T]; \quad p(T)=0. \tag{3}$$

Recordando que la condición de transversalidad es $p(T)=0$. Donde el control optimo $c^*(t)$ cumple :

$$\mathcal{H}(k(t),c^*(t),p(t)) = \min_{c\in U} H(k(t),\omega,p(t)) \tag{4}$$

Derivando respectivamente el capital $k(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial k}\\ &= -\frac{\partial}{\partial k}\Big(-u(c(t))\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} + p(t)\cdot[F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t)]\Big)\\ &= -p(t)\cdot[F'(k(t)) - (n+\delta)]\end{aligned}$$

Respecto a la miminización en (4) aquella es equivalente a :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(k(t),c^*(t),p(t)) &= \min_{c\in U} H(k(t),c,\lambda(t))\\ &= \min_{c\in U}\Big\{-u(c(t))\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} + p(t)\cdot(F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t))\Big\}\\ &= \min_{c\in U}\Big\{-u(c(t))\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} - p(t)c(t))\Big\}\end{aligned}$$

Entonces buscamos el $c^*(t) \in argmin_{c\in U}\left\{-u(c(t))\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} - p(t)c(t))\right\}$. Considerando inicialmente que $0 \le c(t)$, por KKT tenemos que el lagrangiano con Holgura complementaria(HC) $\lambda c = 0$, $0\le\lambda$ es.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(c) &= -u(c)\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} - pc - \lambda c\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c} &= -u'(c)\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} - p - \lambda\end{aligned}$$

1. Si $\lambda \neq 0$, entonces por HC necesariamente $c^*(t)=0$, solución que no nos intereza.
2. Si $\lambda = 0$, obtenemos el caso irrestricto sobre el consumo $c(t)$. Entonces, cumpliendo la condición de Slater tendremos que :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c} = -u'(c^*)\cdot L_0 e^{-(\rho-n)t} - p(t) = 0 \tag{5}$$

$$\implies \tag{6}$$

$$u'(c^*) = -\frac{1}{L_0}\cdot p(t) e^{(\rho-n)t} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

En síntesis por PMP tenemos para el caso general con control $c(t) > 0$:

$$\dot{p}(t) = -p(t) \cdot [F'(k(t)) - (n + \delta)] \tag{9}$$

$$u'(c^*(t)) = -\frac{1}{L_0} \cdot p(t)e^{(\rho-n)t} \tag{10}$$

$$p(T) = 0 \tag{11}$$

Las observaciones son las siguientes :

1. Es conocido que dado una función de utilidad $u(\cdot)$ general no es posible explicitar un control optimo. En general se utiliza la **Función CRRA** la cual se explicitará a continuación.

2. Es usual en muchos libros de economía utilizar el cambio de variable $p_{cv}(t) := p(t)e^{(\rho-n)t}$, llamado estado adjunto de valor actual(current-value) y expresar el PMP respectivo. [2.] [7.] [8.] [9.]

5.2. Solución PMP cuando u es del tipo CRRA y F Coubb-Douglas

La caracterización de la función de utilidad u, depende del tipo de coeficiente que se usa. En este caso usaremos la siguiente función de utilidad, con el coeficiente θ siendo del tipo **CRRA**, por notación esto también se puede denotar o interpretar que u es **Funcion CRRA**.

$$u(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \qquad \theta > 0 \tag{12}$$

El acrónimo CRRA, representa *Coefficient of Constant Relative Risk-Aversion.*

Se tiene la siguiente interpretación de los posibles valores que puede tomar θ

- **Bajo** θ: Los hogares están más dispuestos a tomar riesgos en escenarios inciertos, ya que está menos preocupados por grandes fluctuaciones en su utilidad marginal.

- **Alto** θ: Los hogares son más reacios a tomar riesgos.

Donde si $\theta = 1$, por l'Hôpital se tiene que $u(c(t)) = log(c(t))$ y si $\theta = 0$ se tiene que $u(c(t)) = c(t) - 1$. Luego si el horizonte de tiempo en el que se trabaja es suficientemente grande, la función de utilidad se puede escribir como

$$u(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

La función de producción $F(k(t), 1)$ del tipo **Cobb-Douglas** se representa por

$$F(k(t)) = Ak(t)^{\alpha}, \quad A > 0, \quad \alpha \in (0, 1)$$

Donde A corresponde al parámetro de **factor total de productividad** y α es la **elasticidad producto del trabajo**. Entonces, para PMP tipo lagrange sobre el problema(Ramsey) tenemos:

$$\dot{p}(t) = -p(t) \cdot [A\alpha(t)^{\alpha-1} - (n + \delta)] \tag{13}$$

$$c^*(t)^{-\theta} = -\frac{1}{L_0}p(t)e^{(\rho-n)t} \tag{14}$$

$$p(T) = 0 \tag{15}$$

Despejando el control optimo,

$$c^*(t) = \left(-L_0 \cdot \frac{e^{-(\rho-n)t}}{p(t)}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

Notemos que resolviendo la EDO de $p(t)$ conocemos el control.

5.3. PMP en el metodo clásica para el modelo de Ramsey

Como fue mencionado, en muchos libros de economía es usual utilizar el cambio de variable $p_{cv}(t) := p(t)e^{(\rho-n)t}$, llamado estado adjunto de valor actual(current-value)[2.] [7.] [8.] [9.] y trabajar con PMP. Veremos que aquello nos logrará obtener una dinámica acoplada $(k(t), c(t))$, olvidandonos del estado adjunto $p(t)$.

Entonces si derivamos tenemos

$$\begin{aligned} \dot{p_{cv}}(t) &= \dot{p(t)}e^{(\rho-n)t} + (\rho - n)p(t)e^{(\rho-n)t} \\ &= \dot{p(t)}e^{(\rho-n)t} + (\rho - n)p_{cv} \end{aligned}$$

Recordemos la dinámica para el capital $\dot{p(t)} = -p(t) \cdot [F'(k) - (n + \delta)]$, por lo que

$$\begin{aligned} \dot{p_{cv}}(t) &= -p(t) \cdot [F'(k) - (n + \delta)]e^{(\rho-n)t} + (\rho - n)p_{cv} \\ &= -p_{cv} \cdot [F'(k) - (n + \delta)] + (\rho - n)p_{cv} \\ &= -p_{cv} \cdot [F'(k) - (n + \delta) - (\rho - n)] \\ &= -p_{cv} \cdot [F'(k) - (\delta + \rho)] \end{aligned}$$

Es decir, tenemos la relación :

$$\frac{\dot{p_{cv}}(t)}{p_{cv}} = -[F'(k) - (\delta + \rho)] \tag{16}$$

Para obtener una dinámica para el consumo utilizamos la relación clásica Pag. 379 [9.]. En nuestra notación $\sigma =: \theta$ y en las simulaciones será constante positiva.

$$\sigma(c) = -c \cdot \frac{\partial_{cc}U(c)}{\partial_{cc}U(c)}$$

Es usual considerar $U(c) = -u(c)e^{nt}$. Entonces tenemos

$$\sigma(c) = -c \cdot \frac{\partial_{cc}u(c)}{\partial_{cc}u(c)} \tag{17}$$

Pero antes, dada la minimización para encontrar el control optimo, obtuvimos en (10) con $L_0 = 1$ y $c := c^*(t)$ que

$$\partial_c u(c) := u'(c) = -p(t)e^{(\rho-n)t} = -p_{cv} \tag{18}$$

Finalmente, notemos por regla de la cadena

$$\dot{p_{cv}} = \frac{d}{dt}[p_{cv}(t)] = \frac{d}{dt}[-\partial_c u(c(t))] = -\frac{\partial}{\partial c}[\partial_c u] \cdot \frac{d}{dt}[c(t)] = -\partial_{cc}u(c) \cdot \dot{c} \tag{19}$$

Con (17),(18) y (19) obtenemos :

$$\frac{\dot{p_{cv}}}{p_{cv}} = \frac{\partial_{cc}u}{\partial_c u} \cdot \dot{c} = -\frac{\sigma(c)}{c} \cdot \dot{c}$$

Luego reemplazando en (16)

$$-\frac{\sigma(c)}{c} \cdot \dot{c} = -[F'(k) - (\delta + \rho)]$$

$\Longleftrightarrow$

$$\dot{c} = \frac{c}{\sigma(c)} \cdot [F'(k) - (\delta + \rho)]$$

Por lo se logró encontrar un sistema de EDO's para el capital y el consumo

$$\dot{k(t)} = F(k(t)) - (n + \delta)k(t) - c(t) \tag{20}$$

$$\dot{c(t)} = \frac{1}{\sigma(c)}c \cdot [F'(k(t)) - (\delta + \rho)] \tag{21}$$

6. Ecuaciones de HJB

Considerando el problema (Ramsey) como uno de tiempo final $T > 0$ fijo, por teorema de auxiliar 10, tenemos que dadas las hipotesis del teorema la Ec. de HJB asociada:

$$\text{(HJB Ramsey)} \begin{cases} \partial_t V(t,k) + \min_{c\in U}\{H(k,c,\nabla_k V(t,k))\} = 0 \\ V(T,k) = 0 \end{cases}$$

Con pre-hamiltonaino : $H(k,c,\nabla_k V(t,k)) = -L_0 e^{-(\rho-n)t} u(c(t)) + \partial_k V(t,k(t)) \cdot [F(k(t) - (n+\delta)k(t) - c(t)]$. Para encontrar el control optimo de consumo

$$c^* \in argmin_{c\in U}\{H(k,c,\nabla_k V(t,k))$$

Derivamos respecto al consumo e igualamos a 0, pues u es cóncava

$$\partial_c H(k,c,\nabla_k V(t,k)) = -L_0 e^{-(\rho-n)t} u'(c) - \partial_k V(t,k) = 0$$

$\implies$

$$u'(c^*(t)) = -\frac{1}{L_0} \cdot \partial_k V(t,k) \cdot e^{-(\rho-n)t}$$

Suponiendo función CRRA del tipo $u(c(t)) = \dfrac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$, tenemos $u'(c) = c(t)^{-\theta}$. Por lo tanto

$$c^*(t)^{-\theta} = -\frac{1}{L_0} \cdot \partial_k V(t,k) \cdot e^{-(\rho-n)t}$$

$$c^*(t) = \left(-\frac{1}{L_0} \cdot \partial_k V(t,k) \cdot e^{-(\rho-n)t}\right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

$$c^*(t) = \left(-L_0 \cdot \partial_k V(t,k)^{-1} \cdot e^{(\rho-n)t}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

Entonces, la función de utilidad con control optimo es :

$$u(c^*(t)) = \frac{1}{1-\theta} \cdot \left(-L_0 \cdot \partial_k V(t,k)^{-1} \cdot e^{(\rho-n)t}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

Con Ec. de HJB asociada, es usual considerar $F(k) := A \cdot k^\alpha,\ \alpha \in (0,1)$.

$$\text{(HJB Ramsey)} \begin{cases} \partial_t V(t,k) - L_0 e^{-(\rho-n)t} u(c^*(t)) + \partial_k V(t,k) \cdot [F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c^*(t)] = 0 \\ V(T,k) = 0 \end{cases}$$

En este proyecto no se profundizó computacionalmente en las ecuaciones de HJB.

7. Estados de equilibrio en la dinámica del modelo de Ramsey y su uso en Julia

7.1. Estados de equilibrio

Los estados de equilibrio para comprender la dinámica encontrada en (20) y (21) gracias al PMP son fundamentales computacionalmente y analíticamente.

Ocurre que la trayectoria estable cumple que para cada nivel del stock de capital, hay un solo valor que puede tomar el consumo para que la economía converja al estado estacionario óptimo. Esta trayectoria es un conjunto de valores (k, c) que constituyen la solución del planificador(modelo centralizado), y se caracteriza por verificar la condición de transversalidad ya mencionada en NPG, $\lim_{t\to\infty} k(t)p(t)e^{-(\rho-n)t} = 0$. Continuando se sabe que si sólo la variable de control(consumo) se sitúa en la trayectoria estable entonces el modelo converge al estado estacionario(equilibrio), cualquier otro valor alejaría a la economía progresivamente. Sólo la trayectoria estable verifica las condiciones de primer orden junto con la transversalidad, evitando trayectorias explosivas de exceso de inversión(capital) o de consumo. Lo último se podrá ver visualmente en los diagramas de fase.

Los estados de equilibrio se puede encontrar imponiendo $(\dot{k}, \dot{c}) = (0, 0)$. Utilizando función de producción tipo Cobb-Douglas $F(k) = Ak(t)^\alpha$ obtenemos dada las dinámicas en (20) y (21) que :

$$\dot{c} = 0 = \frac{1}{\sigma} \cdot [A\alpha k_{ss}^{\alpha-1} - (\delta+\rho)] \implies k_{ss} = \left(\frac{\delta+\rho}{A\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\dot{k} = 0 = Ak_{ss}^\alpha - (n+\delta)k_{ss} - c_{ss} \implies c_{ss} = Ak_{ss}^\alpha - (n+\delta)k_{ss}$$

Donde vemos que el estado estacionario es único y además la curva (k, c) es cóncava pues $\partial^2_{k_{ss}} c_{ss} = A\alpha(\alpha-1)k_{ss}^{\alpha-2} < 0$ para $\alpha \in (0, 1), A > 0$

7.2. Regla de Oro del modelo de Ramsey

Si ahora derivamos respecto a k_{ss} el consumo c_{ss} e igualamos a 0, obtenemos la llamada **Regla de Oro**(Golde Rule), más correctamente es el "capital de la regla de oro".

$$\partial_{k_{ss}} c_{ss} = A\alpha k_{ss}^{\alpha-1} - (n+\delta) = 0$$

$$\implies K_{GB} = \left(\frac{A\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

el cual es el punto máximo de la curva cóncava (k, c), donde es directo que $k_{ss} \leq k_{GB}$. Elegir la regla de oro produce una sobre acumulación de capital, permitiendo un mayor de nivel de consumo cuando es alcanzado el estado de equilibrio, aunque para esto antes se necesita no consumir considerablemente.

7.3. Trayectoria numérica del consumo y capital en diagramas de fase en Julia

Dada la dinámica del sistema acoplado :

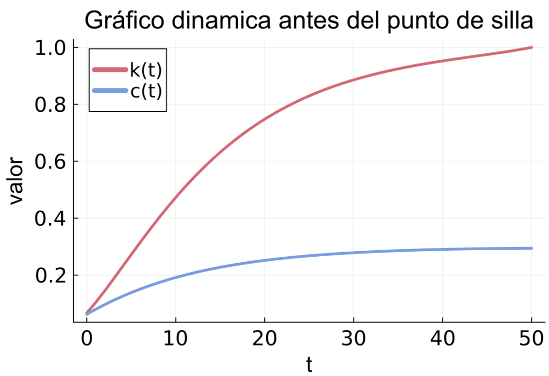
$$\begin{aligned} \dot{k(t)} &= F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t) \\ \dot{c(t)} &= \frac{1}{\sigma(c)} c \cdot [F'(k(t)) - (\delta+\rho)] \end{aligned}$$

Se sabe que las trayectorias hacia el estado de equilibrio pueden ser inestables, dada cierta dificultad en implementar en Julia la cindición de transversalidad $\lim_{t\to\infty} k(t)u'(c)e^{-(\rho-n)t} = 0$, lo que se realiza es el siguiente algoritmo.

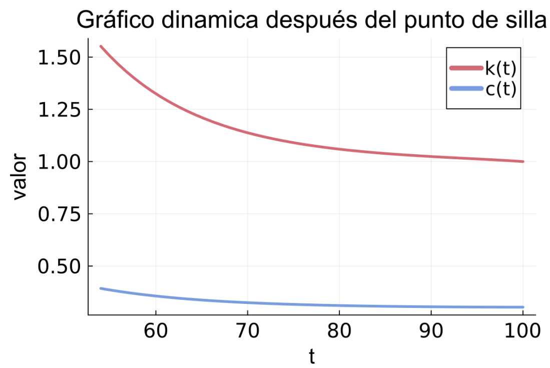
1. Comenzamos antes y sobre un $\varepsilon > 0$ del estado de equilibrio
2. Con la librería **DifferentialEquations** resolvemos las EDO's pero su sistema invertido en el tiempo, así generamos las trayectorias desde cerca del estado de equilibrio. Esto se realiza dos veces dado el paso 1.
3. Se invierte el tiempo para obtener las trayectorias correctas y se juntan.

Para la simulación del problema se usaron los datos $A = 0{,}4$; $\alpha = 0{,}5$; $\delta = 0{,}1$; $\rho = 0{,}1$; $\sigma = \theta = 0{,}5$, $L_0 = 1$ obteniéndose los siguientes gráficos

Las trayectorias generadas al invertir el sistema para el consumo y capital respecto al tiempo. Para cada sistema de ED0's, i.e, antes y después del estado de equilibrio



(a) Trayectorias k, c el tiempo t



(b) Trayectorias k, c el tiempo t

Figura 2: Resultados antes y después del estado de equilibrio

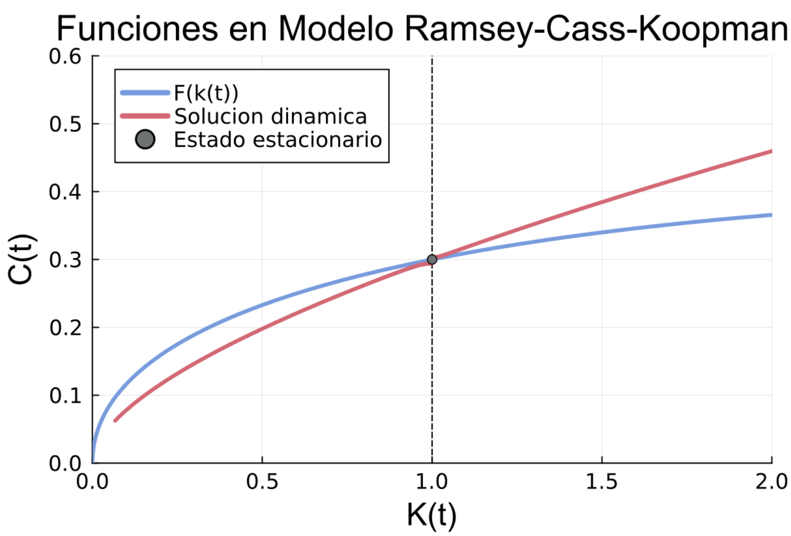


Figura 3: Función de producción $F(k)$ y solución de la dinámica

Tenemos que para el diagrama de fase es claro que existe solo una trayectoria hacia el estado de equilibrio, el cual se visualiza como un punto de silla. Una pequeña desviación del valor del control(consumo) convierte explosiva la trayectoria, desviándola del optimo.

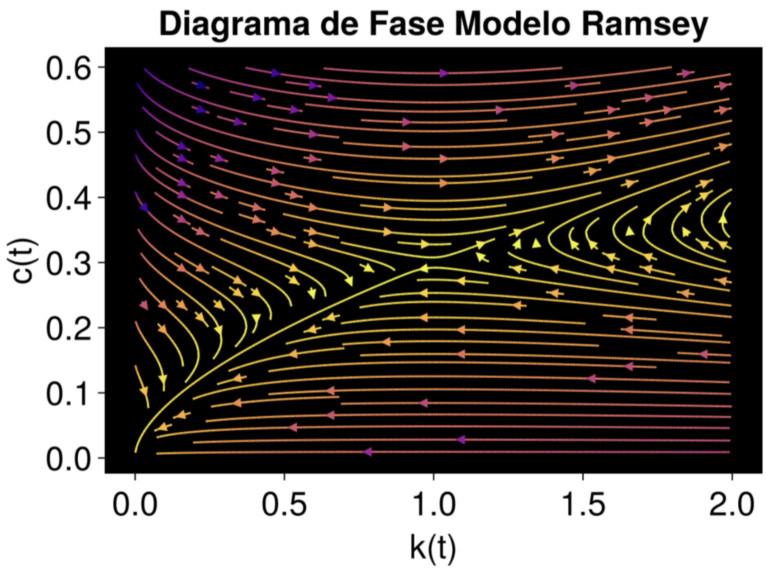


Figura 4: diagramas de fase de trayectorias (k, c)

8. Anexos

8.1. Diferencia entre el modelo de Ramsey y el de Solow.

Se considera el modelo de Solow como un caso especial del modelo de Ramsey. Donde en el modelo de Solow, el porcentaje de ingreso que se ahorra es una constante fija, correspondiente a un dato exogeno, es decir, se asume como número dado y no se cuestiona el origen.

En cambio el modelo de Ramsey, la tasa de ahorro varía en el tiempo (no es constante) dependiendo de las preferencias que toman los agentes en particular los consumidores respecto a dos factores correspondientes a la tasa de impaciencia δ y el deseo de consumo θ. Es decir

- δ : Refleja cuanto valoran el consumo presente frente al consumo futuro. A mayor delta, mas impaciente es el consumidor por lo que preferirá consumir mas hoy y ahorrar menos.
- θ : Representa si los consumidores prefieren tener grandes fluctuaciones en su consumo a lo largo de tiempo. Si valoran mucho la estabilidad en su consumo, tratarán de ahorrar más cuando sus ingresos sean altos para tener suficiente durante periodos de ingresos bajo.

Lo anterior se resume en que el modelo de Solow asume una tasa de ahorro fija s, mientras que el modelo de Ramsey tiene en consideración cómo los individuos valoran el presente versus el futuro y cómo intentan mantener su consumo estable. Donde vemos que la dinámica del modelo de Solow corresponde

$$\dot{k}(t) = s \cdot F(k(t)) - (\delta + n)k(t) \tag{22}$$

y ademas el modelo de Solow no se considera explícitamente una función de utilidad debido a que el modelo no optimiza las decisiones de consumo y ahorro.

8.2. Estabilidad del estado estacionario y controlabilidad(convergencia)

La dinámica de (20) y (21) con $F(k) = Ak^{\alpha}, A = 1$ se puede escribir como :

1. **Regla Keynes-Ramsey:**

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha k_t^{\alpha-1} - (\delta + \rho)\right] \iff \frac{d \ln c_t}{dt} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha e^{(\alpha-1)\ln k_t} - (\delta + \rho)\right]$$

2. **Restricción de recursos:**

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \left[k_t^{\alpha-1} - (n+\delta) - \frac{c_t}{k_t}\right] \iff \frac{d\ln k_t}{dt} = \left[e^{(\alpha-1)\ln k_t} - (n+\delta) - e^{\ln c_t - \ln k_t}\right]$$

Donde el sufijo nos indica la dependencia. Luego si aproximamos log-linealmente estas dos ecuaciones alrededor del estado estacionario, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\ln c_t}{dt} \\ \frac{d\ln k_t}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\eta \\ -h & \rho \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \ln c_t - \ln c_{ss} \\ \ln k_t - \ln k_{ss} \end{bmatrix},$$

Con (leer [10] Pag.22.)

$$\eta = \frac{1-\alpha}{\sigma}(\delta+\rho) > 0,$$
$$h = \frac{(1-\alpha)(n+\delta)+\rho}{\alpha} > 0,$$

siendo los valores propios de A:

$$\mu_1 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\eta h}}{2} > \rho > 0, \quad \mu_2 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\eta h}}{2} < 0,$$

Lo que nos indica que existe de una solución de punto de silla.

9. Dificultades y Conclusiones

Algunas de las dificultades más relevantes corresponden a estudiar formalmente la controlabilidad de la dinámica del modelo y la estabilidad del estado estacionario. Además de simplificar las Ec. de HJB para trabajar numéricamente en Julia, nosotros en el proyecto decidimos no utilizar la ecuación de HJB encontrada y enfocarnos en PMP, obteniendo las dinámicas clásicas del capital k y consumo c.

Es importante destacar que si bien el modelo de ramsey sirve para maximizar las utilidades de las empresas y familias, es importante señalar que este modelo es aplicable a intervalos de tiempo no extensos, ya que Ramsey ve el progreso tecnológico como una función constante. Por este último motivo el modelo es ideal para estudiar fluctuaciones de “corto plazo” donde el cambio tecnológico es despreciable.

Los diagramas de fase obtenidos tienen sentido y corresponden con lo esperado en la literatura. La referencia [9] en su capitulo 22 contiene notación similar a la utilizada en el PMP. Otras referencias como [2],[7],[8] y [10] completan lo explicado en aquél libro. Para referencias más históricas considerar [1],[3] y [4].

Dado que el sistema es invertido, no se utiliza una condición de capital inicial k_0. Por lo que tiene sentido encontrar otros métodos para predecir las trayectorias utilizando condiciones iniciales y no finales.

Finalmente es de especial interés, aplicar lo visto en este informe para economías especificas, para lograr caracteriza la política monetaria óptima de tipo Ramsey.

10. Referencias

1. Frank P. Ramsey. A mathematical theory of saving. Economic Journal, vol. 38, no. 152, pp. 543–559. (1928).

2. Groth, C. (s.f.). Capítulos 9-10. Apuntes de Macroeconomía. Departamento de Economía, Universidad de Copenhague. Recuperado de :`https://web.econ.ku.dk/okocg/VM/VM-general/Material/Chapters-VM.htm`

3. Koopmans, T. C., On the Concept of Optimal Economic Growth, in The econometric approach to Development Planning, Pontif. Acad. Sc. Scripta Varia 28, pp. 225–300; reissued North-Holland Publ. (1966).

4. Cass, D., Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem, Econometrica 34, 4, pp. 833–850. (1966).

5. Trètal, E. (2005). Contrôle optimal : Théorie et applications. Université Paris-Sud.
6. Ramírez, H. (2020). Apunte Control óptimo: Teoría y laboratorio. Universidad de Chile - FCFM.
7. Bondarev, A. (2018). Introduction to optimal control in growth theory [PowerPoint presentation]. Department of Business and Economics, Basel University. Recuperado de: :`https://wwz.unibas.ch/fileadmin/user_upload/wwz/00_Professuren/Krysiak_Umweltoekonomie/lecture_3_opt_control.pdf`
8. Gourinchas, P.-O. (2014). Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model. UC Berkeley. Recuperado de:`https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf`
9. Gandolfo, G. (2005). Economic dynamics (Springer Study Edition).
10. Universidad Complutense de Madrid. (2015). Macroeconomía I: Sesión 7 Crecimiento neoclásico: El Modelo de Ramsey.