El modelo de crecimiento Neoclásico de Ramsey

Allen Arroyo & Isidora Miranda - Grupo 1

FCFM Universidad de Chile - MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio - 27 Noviembre 2024
Profesor: Héctor Ramírez C. - Auxiliar: Diego Olguín W.- Ayudantes: Carlos Antil y Luis Fuentes C.

Resumen

El modelo de Ramsey, existen 2 categorías de agentes: Consumidores(familias) y empresas. Los consumidores venden su trabajo a las empresas por un salario que distribuyen entre ahorro(inversión) y consumo. Las empresas contratan trabajo para producir y vender su producto a los consumidores.

El propósito de este modelo es maximizar la utilidad de los trabajadores en un horizonte de tiempo. Esto se representa con la siguiente dinámica

$$\min_{c(\cdot)} \quad J(c(\cdot)) = \int_0^\infty -u(c(t)) \cdot L_0 \cdot e^{-(\rho-n)\cdot t}\, dt \quad \text{(Criterio)}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & \dot{k}(t) = F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t) && \text{(Dinámica)} \\ & 0 \le c(t) \le F(k(t)) && \text{(Restricción de consumo)} \\ & k(0) = k_0 && \text{(Condición inicial de capital)} \end{aligned}$$

Los parámetros corresponden a los siguientes:

- $u(\cdot)$ representa la **Función de utilidad**
- $c(t)$ representa el **Consumo per capita** en el tiempo t
- *k(t)* representa **Capital per capita**
- $F(k(t))$representa la **Función de producción neoclásica**. Se puede interpretar como el trabajo remunerado de los consumidores.
- n represente la **Constante de crecimiento poblacional**
- L_0 representa la **Población Inicial**
- Usual es definir $U(c) := -u(c)e^{nt}$

Un caso de interés del modelo corresponde a cuando u es una **Función CRRA** y F es **Cobb-Douglas**

$$u(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

$$F(k(t)) = Ak(t)^\alpha$$

Con $\theta > 0$ como el *Coeficiente de aversión al riesgo relativo*, $A > 0$ como el *Factor total de productividad* y $\alpha \in (0,1)$ corresponde a la *Elasticidad producto del trabajo*.

Ecuaciones de Pontryagin

Trabajamos en un intervalo de tiempo $t \in [0,T]$, con $T > 0$ tiempo final fijo. Sin el cambio de variable $p_{cv} := pe^{-(\rho-n)t}$ obtenemos :

- Caso general

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -p(t) \cdot [F'(k(t)) - (n+\delta)] \\ u'(c^*(t)) &= -\frac{1}{L_0} \cdot p(t) e^{(\rho-n)t} \\ p(T) &= 0 \end{aligned}$$

- Caso u del tipo CRRA y F Cobb Douglas

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -p(t) \cdot [A\alpha(t)^{\alpha-1} - (n+\delta)] \\ c^*(t) &= \left(-L_0 \cdot \frac{e^{-(\rho-n)t}}{p(t)}\right)^{\frac{1}{\theta}} \\ p(T) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman

La función de utilidad CRRA en función del control optimo

$$u(c^*(t)) = \frac{1}{1-\theta} \cdot \left(-L_0 \cdot \partial_k V(t,k)^{-1} \cdot e^{(\rho-n)t}\right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

Luego, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman es :

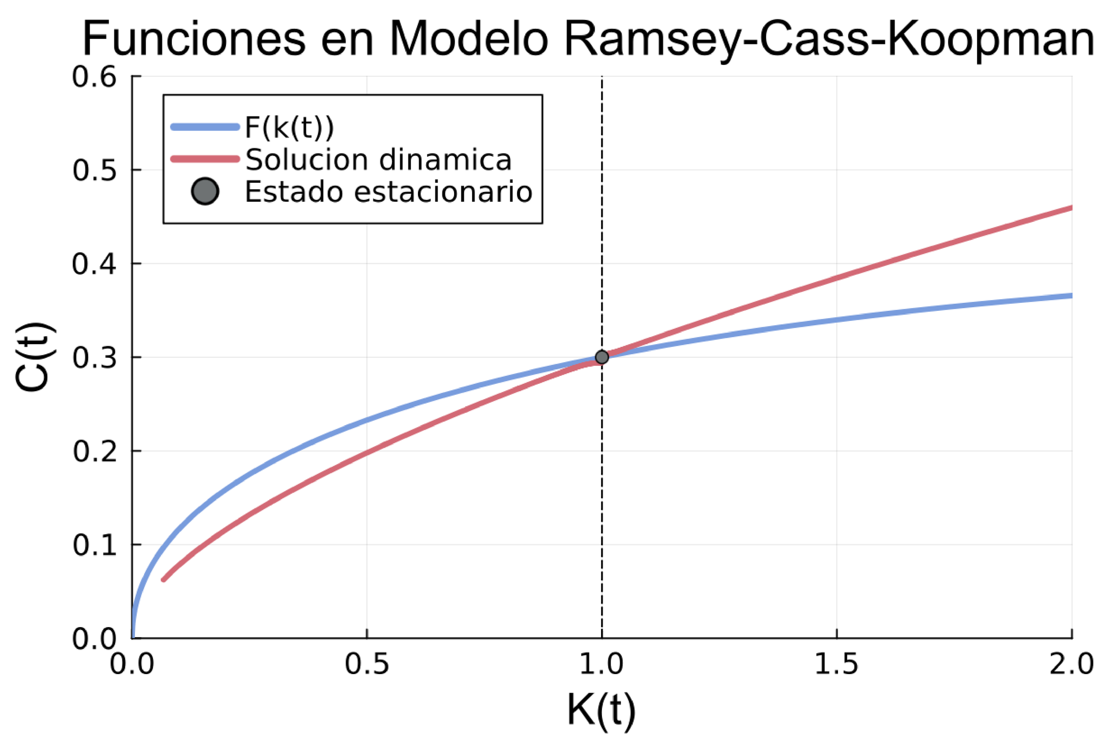
$$\begin{aligned} &\partial_t V - L_0 e^{-(\rho-n)t} u(c^*(t)) + \partial_k V \cdot \dot{k}(c^*(t), t) = 0 \\ &V(T,k) = 0 \end{aligned}$$

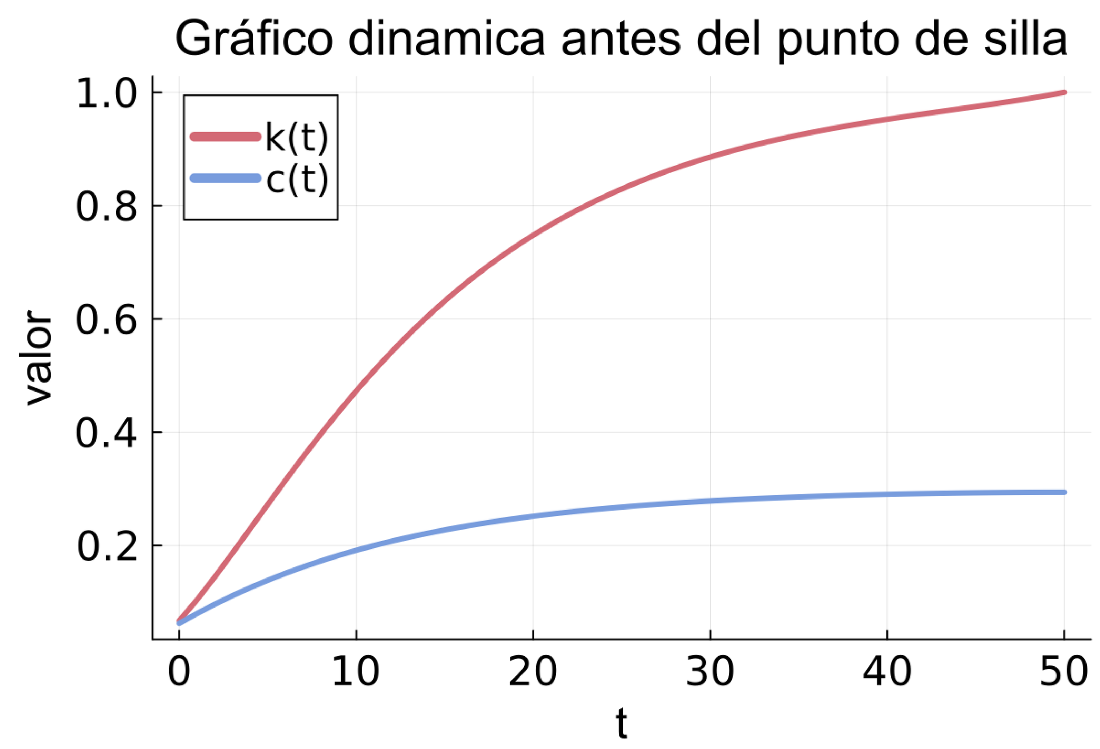
Diferencias entre el modelo de Ramsey y Solow

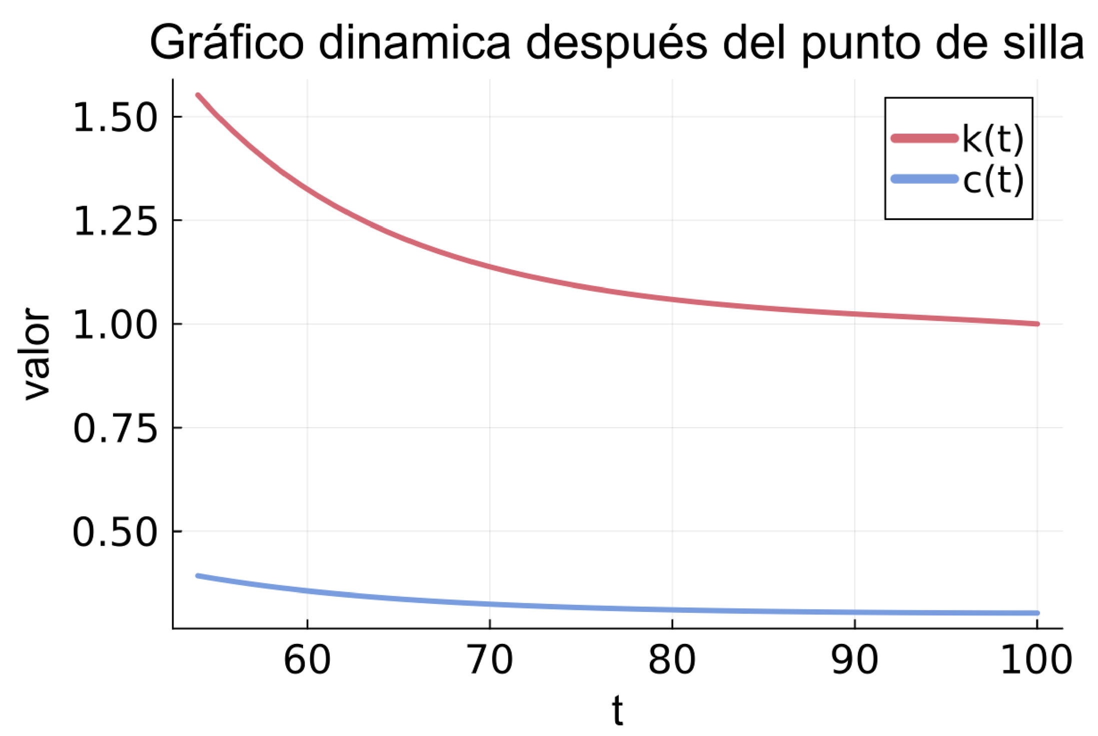
El modelo de Solow es un caso particular del modelo de Ramsey. En el modelo de Solow, el porcentaje de ingreso que se ahorra es una constante fija (es un dato exogeno), en cambio en el modelo de Ramsey este dato varía en el tiempo, dependiendo de las preferencias de los consumidores, la cual se ve determinada por tasa de impaciencia δ y el deseo de consumo θ.

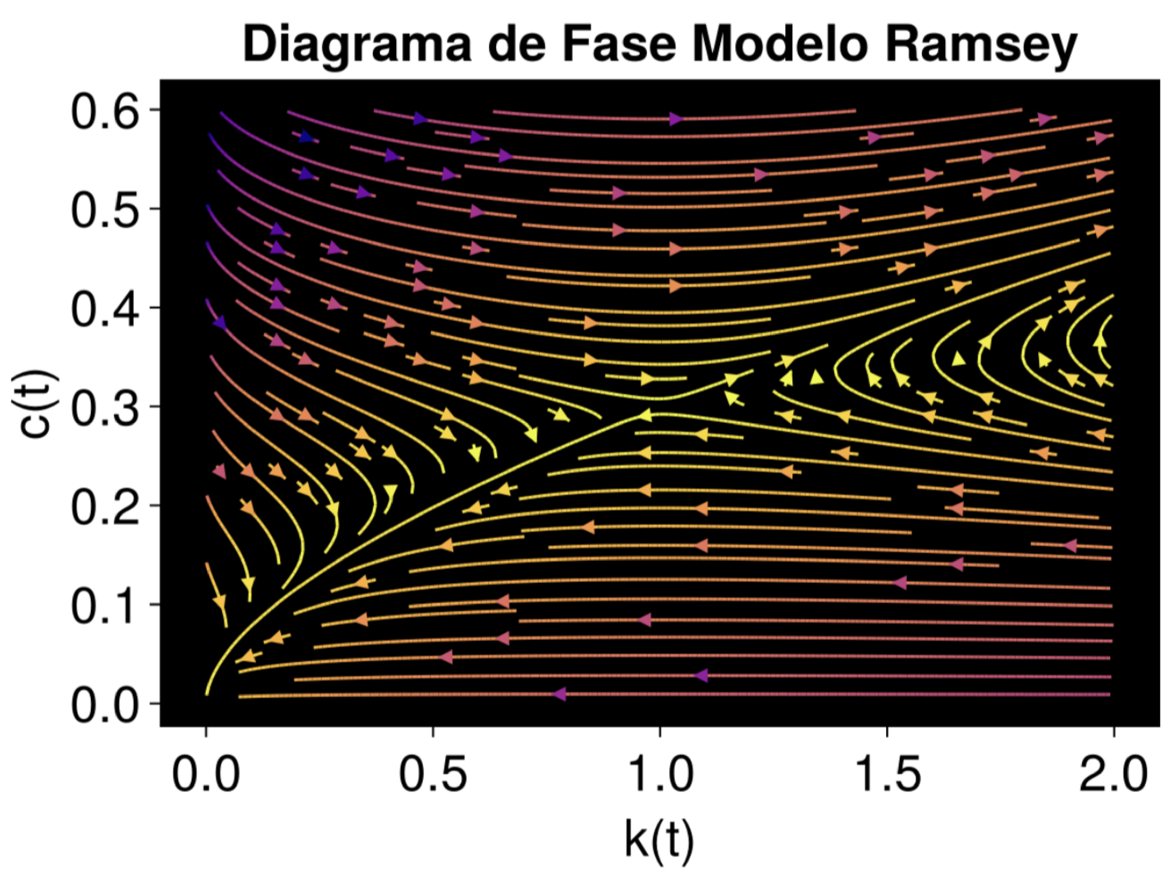
Simulación

Para la simulación del problema se usaron los datos $A = 0.4$, $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.1$, $\rho = 0.1$ y $\theta = 0.5$, obteniéndose los siguientes gráficos









Enfoque sobre estados de equilibrio y Pontryagin

Realizando el cambio de variable $p_{cv} := pe^{(\rho-n)t}$ llamado estado adjunto de valor actual(current-value). Por PMP,

$$\dot{p_{cv}} = -p_{cv} \cdot [F'(k) - (n+\delta) - (\rho - n)]$$

Dada la definición $\sigma(c) = \dfrac{\partial_{cc}U(c)}{\partial_c U(c)}$ la relación

$$\frac{\dot{p_{cv}}}{p_{cv}} = -\frac{\partial_{cc}U(c)}{\partial_c U(c)} = -\sigma(c)\frac{\dot{c}}{c}$$

Obtenemos sistema de EDO's para el consumo y capital:

$$\begin{aligned} \dot{k(t)} &= F(k(t)) - (n+\delta)k(t) - c(t) \\ \dot{c(t)} &= \frac{1}{\sigma(c)} c \cdot [F'(k(t)) - (n+\delta) - (\rho - n)] \end{aligned}$$

Estado de equilibrio del punto de silla para el diagrama de fase

Para la dinámica anterior, buscamos los puntos de equilibrio tal que $\dot{k}, \dot{c} = 0, 0$. Considerando $F(k) = Ak^\alpha$.

$$k_{GR} = \left(\frac{A\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{(Golden Rule)}$$

$$k_{ss} = \left(\frac{A\alpha}{\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (k(t) \text{ equilibrio})$$

$$c_{ss} = A \cdot k_{ss}^\alpha - (\delta + n) \cdot k_{ss} \quad (c(t) \text{ equilibrio})$$

Método para calcular diagrama de fase

Se considera el sistema inverso desde los estados de equilibrio, luego se necesitan resolver las EDO's en dos partes con **DifferentialEquations**, una por debajo del punto de equilibrio y otro por arriba.

Condición de contorno - No Ponzi Game

La condición de NPG es equivalente [1.] a :

$$\lim_{t\to\infty} k(t) p_{cv}(t) e^{-(\rho-n)t} = 0$$

Es necesaria para obtener alguna trayectoria optima.

Referencias

1. Groth, C. (s.f.). Capítulos 9-10. Apuntes de Macroeconomía. Departamento de Economía, Universidad de Copenhague. Recuperado en 1.
2. Bondarev, A. (2018). Introduction to optimal control in growth theory [PowerPoint presentation]. Department of Business and Economics, Basel University. Recuperado en 2.
3. Gourinchas, P.-O. (2014). Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model. UC Berkeley. Recuperado en 3.
4. Gandolfo, G. (2005). Economic dynamics (Springer Study Edition). University of Rome "La Sapienza".
5. Ramírez, H. (2020). Apunte Control óptimo: Teoría y laboratorio. Universidad de Chile - FCFM.

Figure 1. Enlace Gitgub códigos simulación

Linkedin(leer PDF) : Allen-Isidora allen.joseph.arroyo@ug.uchile.cl - isidora.miranda@ug.uchile.cl