

LPPL 模型及其在股票市场中的应用

Jingyang Zhang lydon Liang

南方科技大学

October 23, 2019

Outline



1 背景介绍

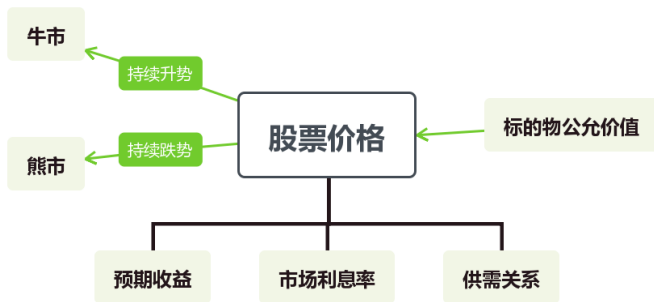
2 LPPL 模型

3 LPPL 模型的求解

研究背景与意义

定义 1 (金融泡沫)

金融“泡沫”即在现代信用体系下，金融资产的流通价格偏离标的物公允价值的非理性增长。



运行规律



- ① 当国民经济向好时，市场参与者对未来经济增长预期良好，金融资产的流通价格趋向于上涨，投资者的收益随之水涨船高；
- ② 在积极的经济预期下这部分收益持续投入资本市场，同时羊群效应促使新的投资者，尤其是中小投资者在市场极度繁荣的吸引下加入市场，创造了新的资本来源，市场价格急速膨胀，开始持续脱离标的物的价值，泡沫产生；
- ③ 资产价格飙升到一定程度时，大量投资者纷纷卖出手头的资产以套利，资产供需关系逐渐演变转换，直到价格失去急速上涨的动力，市场的持续繁荣已无法继续维持，价格持续波动导致投资者发现预期与实际相差甚远，市场参与者信心下降，纷纷大面积抛售，情势急转直下直至最后市场崩盘。



LPPL 模型的提出

定义 2 (LPPL 模型对金融泡沫的定义)

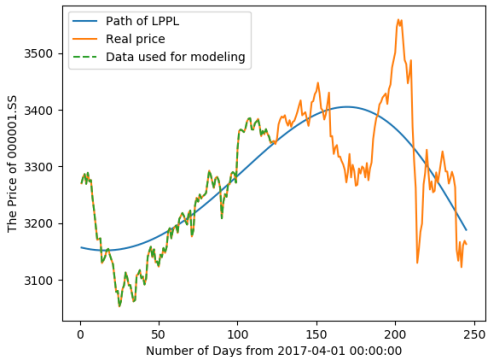
泡沫在这里被定义为资产价格快于指数变动速率的增长现象，反映了积极的高回报预期的反馈螺旋与消极的崩溃预期的反馈螺旋之间的竞争。

为了能够更加准确地预测金融泡沫崩溃点，D.Sornette 和 A.Johansen 基于金融经济学和统计物理学开发了一系列模型和技术，他们发现，市场泡沫行为和地震、物质破裂和其他物理现象存在很多相似之处，都是复杂系统的自组织临界行为。基于这个想法，他们采用复杂科学系统中描述自组织临界现象研究中常用的对数周期性幂律（log-periodic power law，简称 LPPL）来研究金融领域的泡沫现象。



成功预测

- 1 包括 2000 年–2003 年美国股票市场的反泡沫。
- 2 2004 年中期英国的房地产泡沫。
- 3 2008 年–2009 年中国市场的泡沫。



Outline



- 1 背景介绍
- 2 LPPL 模型
- 3 LPPL 模型的求解

LPPL 模型的具体函数形式

该模型拟合的泡沫呈现以下状态：市场价格为对数周期震荡且呈现幂律法则加速，系统越靠近临界点会出现一连串的频率逐渐增加的震荡循环。

LPPL 模型的具体函数形式如下：

$$\begin{aligned}\ln [p(t)] &= A + B(t_c - t)^m + C(t_c - t)^m \cos [\omega \ln(t_c - t) + \varphi] \\ &= A + B(t_c - t)^m + C_1(t_c - t)^m \cos [\omega \ln(t_c - t)] \\ &\quad + C_2(t_c - t)^m \sin [\omega \ln(t_c - t)]\end{aligned}$$

符号解释

符号	约束条件	解释
$p(t)$	-	在 t 时刻的资产价格或资产价格指数;
t_c	-	临界时间, 即泡沫破裂的时间;
t	$< t_c$	是泡沫破灭前的任一时刻;
A	> 0	泡沫持续到临界时间 t_c 时刻 $\ln[p(t_c)]$ 的值;
C	-	围绕指数增长的波动振幅的比例因子;
B	< 0	为 C 接近 0 时, $\ln[p(t_c)]$ 在崩盘时刻 t_c 之前的单位时间增长量;
m	$= 0.33 \pm 0.18$	幂率增长的指数;
ω	$= 6.26 \pm 1.56$	泡沫期间波动的频率;
φ	$\in [0, 2\pi]$	相位参数。

Figure 1: 符号说明

LPPL 模型的假设条件



- ① 投资者是多种多样的，并且不同的投资者的投资策略、对市场信息的判断不一样，同时他们的交易频率和投资头寸也不一样。
- ② 投资者处在一个会互相影响的网络中，投资者的决策会受其他投资者的影响。
- ③ 金融崩溃出现在不同的投资者纷纷跟风做同样决策之后。随着市场的发展完善，由于市场反馈机制良好，异质投资者之间会出现自组织的合作，从而导致模仿行为。随着市场协同效应和一致性的加深，泡沫继续扩大。当达到临界时间时，市场上所有的投资者同时采取统一的投资策略。

Outline



① 背景介绍

② LPPL 模型

③ LPPL 模型的求解



一般求解方式

假设我们已经已经获取到数据, $\{(t_i, p_i) \mid \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}\}$ 。其中数据对 (t_i, p_i) 指的是, 在时间 t_i 下, 价格为 p_i 。

首先, 我们来解决线性参数 A, B, C_1 与 C_2 的求解。为突出线性部分, 我们令:

$$\begin{cases} f_i(t_c, m) &= (t_c - t_i)^m \\ g_i(t_c, m, \omega) &= (t_c - t_i)^m \cos[\omega \ln(t_c - t_i)] \\ h_i(t_c, m, \omega) &= (t_c - t_i)^m \sin[\omega \ln(t_c - t_i)] \end{cases}$$

将上是代入 LPPL 模型中有:

$$\begin{pmatrix} 1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ 1 & f_2 & g_2 & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & f_n & g_n & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(p_1) \\ \ln(p_2) \\ \vdots \\ \ln(p_n) \end{pmatrix}$$

一般求解方式



简记为 $\mathbf{X}\beta = \mathbf{y}$ 。于是有：

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \\ &= \begin{pmatrix} \sum 1 & \sum f_i & \sum g_i & \sum h_i \\ \sum f_i & \sum f_i^2 & \sum f_i g_i & \sum f_i h_i \\ \sum g_i & \sum f_i g_i & \sum g_i^2 & \sum g_i h_i \\ \sum h_i & \sum f_i h_i & \sum g_i h_i & \sum h_i^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum \ln(p_i) \\ \sum f_i \ln(p_i) \\ \sum g_i \ln(p_i) \\ \sum h_i \ln(p_i) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

一般求解方式

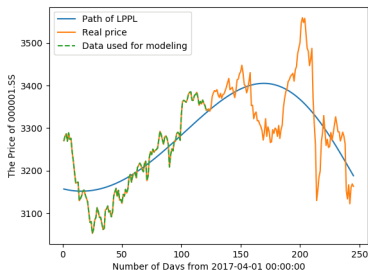


根据克莱姆法则可知四阶矩阵的逆表达式十分繁杂，所以只能采用数值方式进行求解 LPPL 模型。残差平方和可以表示为

$$Res = \left\| \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\beta} \right\|_2^2.$$

在这一步，就找到了使用优化算法的函数，将 t_c , m 与 ω 代入后即可使用常规的优化算法来求解。而由于 LPPL 模型的特殊性，其优化算法得出来的解可能对初始值的依赖很大。于是取不同的初值点进行优化，取使 Res 最小的优化解。

模型求解的实例：SSEC



(a)

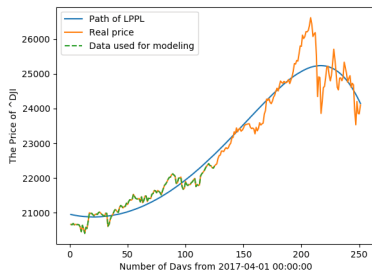


(b)

	m	ω	t_c	A	B	C_1	C_2
000001.SS	1.00	5.64	448.48	0.00	0.00	0.00	-0.00

Figure 3: LPPL 模型的一般求解结果

模型求解的实例：DJIA



(a)

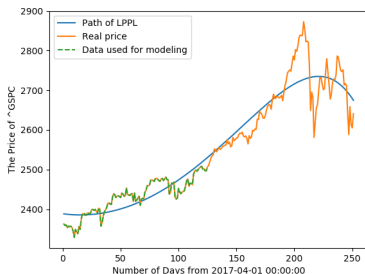


(b)

	m	ω	t_c	A	B	C_1	C_2
\hat{DJI}	0.00	0.05	458.08	-4.7e11	4.7e11	2.4e4	-7.9e4

Figure 5: LPPL 模型的一般求解结果

模型求解的实例：SPX



(a)



(b)

	m	ω	t_c	A	B	C_1	C_2
\wedge GSPC	0.00	0.00	451.00	$-2.4e11$	$2.4e11$	$5.3e6$	$-4.3e8$

Figure 7: LPPL 模型的一般求解结果

References I



- [BJ13] D. S Bree and N. L. Joseph, *Testing for financial crashes using the log periodic power law model*, International Review of Financial Analysis **30** (2013), 287–297.
- [FG13] D. Fantazzini and P. Geraskin, *Everything you always wanted to know about log periodic power laws for bubble modelling but were afraid to ask*, European Journal of Finance **19** (2013), no. 5, 366–391.
- [FS13] V. Filimonov and D. Sornette, *A stable and robust calibration scheme of the log-periodic power law model*, Physica A-statistical Mechanics and Its Applications **392** (2013), no. 17, 3698–3707.
- [KB15] D. P Kingma and J. Ba, *Adam: A method for stochastic optimization*, international conference on learning representations (2015).
- [Li17] C. Li, *Log-periodic view on critical dates of the chinese stock market bubbles*, Physica A-statistical Mechanics and Its Applications **465** (2017), 305–311.
- [MTW03] G. Marsaglia, W. W. Tsang, and J. Wang, *Evaluating kolmogorov's distribution*, Journal of Statistical Software **008** (2003), no. 1, 1–4.

References II



- [Pel12] D. T. Pele, *An lppl algorithm for estimating the critical time of a stock market bubble*, *Social and Economic Statistics* **1** (2012), 14–22.

THANKS!