北京交通大学

2013-2014 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ____________ **学院:** __________ **任课教师:** ____________

专业: ____________ **班级:** __________ **学号:** ______________

(注：本试卷满分100 分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) 对于任意的整数 $n, m \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

2. (20分) 证明在 $N_t = n$ 的条件下, n 个事件来到的时刻 $S_1, \cdots, S_n$ 的联合密度与 n 个独立的 $[0, t]$ 上均匀分布随机变量的顺序统计量的联合密度相同. 即条件随机向量$(S_1, \cdots, S_n | N_t = n)$具有联合密度

$$f(t_1, \cdots, t_n) = \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 < t_1 < \cdots < t_n < t.$$

3. (20分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:
(1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n)(n \geq 1)$, 其中 $f : E \times E \to E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;
(2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立.
证明： $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i, j \in E$,

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

4. (20分)

(I) 设马尔科夫链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E=\{0,1,2,3\}$, 一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

(II) 设 Markov 链的状态空间 $E=\{0,1,2\}$, 其转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(1) 判别以上 Markov 链是否具有平稳分布(写出理由); (2) 若具有平稳分布, 求平稳分布及 $\lim\limits_{n\to\infty} P^{(n)}$.

5. (20分) 设 $X, Y_1, Y_2, \cdots$ 是一列相互独立的随机变量, 其中X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 分布, 而 $Y_1, Y_2, \cdots$ 服从 $[0,1]$ 上均匀分布. 定义

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{X} I_{[0,t]}(Y_k), \quad t\in[0,1]$$

其中$I_{[0,t]}(\cdot)$ 为示性函数(即: $I_{[0,t]}(y)=1$, 若 $y\in[0,t]$; $I_{[0,t]}(y)=0$, 若 $y\notin[0,t]$). (1) 求 $\xi_{t,k}=I_{[0,t]}(Y_k)$ 的特征函数; (2) 求 $Z(t)$ 的特征函数; (3) 证明: $Z(t)$ 是参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的 Poisson 过程. (提示：可采用特征函数证明)