

北京交通大学

2008-2009 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: _____ 学院: _____ 任课教师: _____

专业: _____ 班级: _____ 学号: _____

(注: 本试卷满分100分, 共六道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (15分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布. (1) 写出 X 的概率分布; (2) 求出指数分布的特征函数和矩母函数(写出计算过程); (3) 利用其特征函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 设在 $[0, t]$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k (k < n)$ 次事件 A 发生的时间 S_k 的条件概率密度函数.

3. (15分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:

- (1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n) (n \geq 1)$, 其中 $f: E \times E \rightarrow E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;
- (2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立.

证明: $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i, j \in E$,

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

4. (15分) 一书亭用邮寄订阅销售杂志, 订阅的顾客是强度为6的一个泊松过程, 每位顾客订阅1年, 2年, 3年的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, 彼此如何订阅是相互独立的, 每订阅一年, 店主即获利5元. 设 Y_t 是 $[0, t]$ 内, 店主从订阅中所获得的总收入, 计算: (1) $E(Y_t)$ (即 $[0, t]$ 内的总的平均收入); (2) $\text{Var}(Y_t)$.

5. (20分)

(I) 设 Markov 链 X_n , $n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性; 周期.
 (2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
 (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

6. (20分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

- (1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$ (其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.
 (2) 若 ξ_n 服从参数为 λ 指数分布, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.