北京交通大学

2011-2012 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: __________任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: __________ 学号: ________________

(注：本试卷满分100 分, 共六道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (15分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的 Poisson 分布. (1) 写出 X 的概率分布; (2) 求出 Poisson 分布的特征函数(写出计算过程); (3) 利用其特征函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 对于任意的整数 $n \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

3. (15分) 一书亭用邮寄订阅销售杂志, 订阅的顾客是强度为 6 的一个泊松过程, 每位顾客订阅 1 年, 2 年, 3 年的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, 彼此如何订阅是相互独立的, 每订阅一年, 店主即获利 5 元. 设 Y_t 是 $[0, t]$ 内, 店主从订阅中所获得的总收入, 计算：(1) $E(Y_t)$ (即 $[0, t]$ 内的总的平均收入); (2) $\mathrm{Var}(Y_t)$.

4. (15分) A, B 两罐总共装着 N 个球, 在时刻 n 先从 N 个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 $1-p$. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 链的转移概率矩阵.

5. (20分)

(I) 设 Markov 链 $X_n,\ n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性；周期.

(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;

(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

6. (20分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$(其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.

(2) 若 $E(\xi^2) < \infty$, 试求 $E(Y_t)$, $\mathrm{Var}(Y_t)$.

(注：$\mathrm{Var}(Y_t) = E[\mathrm{Var}(Y_t|N_t)] + \mathrm{Var}[E(Y_t|N_t)]$.)