

# 北京交通大学

## 2014-2015 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: \_\_\_\_\_ 学院: \_\_\_\_\_ 任课教师: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

(注: 本试卷满分100分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) 设随机变量  $X$  的概率分布是服从参数为  $\lambda (\lambda > 0)$  的指数分布. (1) 写出  $X$  的概率密度函数; (2) 求出指数分布的矩母函数(写出计算过程); (3) 利用其矩母函数求出  $X$  的期望和方差(写出计算过程).

2. (20分) 设在  $[0, t]$  内事件  $A$  已经发生  $n$  次, 求第  $k (k < n)$  次事件  $A$  发生的时间  $S_k$  的条件概率密度函数.

3. (20分) 设 Markov 链  $X_n, n \geq 0$  有状态 1, 2 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

初始分布为  $P(X_0 = 1) = p, P(X_0 = 2) = 1 - p, 0 < p < 1$ . 对任意  $n \geq 1$ , 试求: (1)  $P(X_{n+2} = 2 | X_n = 1)$ ; (2)  $P(X_3 = 1)$  (写出计算步骤); (3) 该链是否具有平稳分布? 为什么? (4) 是否具有极限分布? 若有则求出.

## 4. (20分)

(I) 设 Markov 链  $X_n$ ,  $n \geq 0$  的状态空间  $E = \{0, 1, 2, 3\}$  和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性; 周期.  
 (2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链  $\{X_n\}$  的状态空间  $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;  
 (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

5. (20分) 设  $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$  是一个复合 Poisson 过程,  $t \geq 0$ .

- (1) 若  $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$  (其中  $i = \sqrt{-1}$ ) 是随机变量  $\xi_n$  的特征函数, 试求  $Y_t$  的特征函数  $\varphi_{Y_t}(u)$ .  
 (2) 若  $E(\xi^2) < \infty$ , 试求  $E(Y_t)$ ,  $\text{Var}(Y_t)$ .  
 (注:  $\text{Var}(Y_t) = E[\text{Var}(Y_t|N_t)] + \text{Var}[E(Y_t|N_t)]$ .)