应用随机过程

第2章 随机过程基本概念

目录

- 2.3 平稳随机过程
  - 严平稳、宽平稳

严平稳随机过程

1）定义

实随机过程$\{X_t, t\in T\}$，若对任意正整数n，

$\forall t_1,\cdots,t_n\in T$，$\forall \tau$，有

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=F(x_1,\cdots,x_n;t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

$$f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=f(x_1,\cdots,x_n;t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

则$\{X_t, t\in T\}$称为严平稳过程(强平稳过程).

严平稳随机过程

2）说明

1^0 $\left(X_{t_1},\cdots,X_{t_n}\right)$与$\left(X_{t_1+\tau},\cdots,X_{t_n+\tau}\right)$ 同分布．

2^0 当$\mathrm{n}=1$时，

$\{X_t,t\in R\}$， $X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n},\cdots$均 同分布于$X_0$．

$\{X_n,t\in N\}$， $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$均 同分布于$X_0$．

3^0 当$\mathrm{n}=2$时，

$\left(X_{t_1},X_{t_1+\tau}\right)$与$\left(X_{t_2},X_{t_2+\tau}\right)$ 同分布.

$\left(X_t,X_{t+\tau}\right)$与$\left(X_0,X_\tau\right)$ 同分布.

严平稳随机过程

3）性质

1^0 $\{X_t, t\in T\}$为严平稳过程, 则一维概率密度与时间无关.

$$f(x_1;t_1)=f(x_1;t_1+\tau)\overset{令\tau=-t_1}{=}f(x_1;0)=f(x)$$

$$E(X_t)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\mu$$

$$E(X_t^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\psi^2$$

$$Var(X_t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\sigma^2$$

即严平稳过程的均值、矩和方差函数都是常数.

严平稳随机过程

2^0二维概率密度与时间间隔有关，与起点时刻无关．

$$\Rightarrow f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; t_1 + \tau, t_2 + \tau)$$

$$\overset{令\tau=-t_1}{=} f(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1)$$

严平稳随机过程

$$\Rightarrow R_X(t,t+\tau)=E(X_tX_{t+\tau})$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;0,\tau)dx_1dx_2 \quad =R_X(\tau).$$

$$\Rightarrow C_X(t,t+\tau)=E(X_t-EX_t)(X_{t+\tau}-EX_{t+\tau})$$

$$=E(X_tX_{t+\tau})-EX_tEX_{t+\tau}=R_X(\tau)-\mu^2 \quad =C_X(\tau).$$

即严平稳过程的自相关函数,协方差函数都只是时间间隔τ的函数.

严平稳随机过程

$\Rightarrow$ 当$t_1 = t_2 = t$，即$\tau = 0$时

$$R_X(0) = E\left(X_t^2\right) = \psi^2$$

$$C_X(0) = R_X(0) - \mu^2 = \sigma^2$$

宽平稳随机过程

1）定义

若实随机过程 $\{X_t : t \in T\}$满足，$\forall t \in T$，有

(1) $E\left(X_t\right) = \mu$,

(2) $R_X\left(t, t+\tau\right) = E\left(X_t X_{t+\tau}\right) = R_X\left(\tau\right)$,

(3) $E\left(X_t^2\right) < \infty$,

则$\{X_t : t \in T\}$称为宽平稳过程（弱平稳过程）.

宽平稳随机过程

2）与严平稳过程的区别

1^0 严平稳过程对分布要求高，对任意有限维分布(密度)函数都有平稳性；而宽平稳过程只涉及一二维数字特征.

2^0 严平稳过程不一定二阶矩有限.

3^0 严平稳过程 + 二阶矩过程 $\Rightarrow$ 宽平稳过程

但宽平稳过程不一定是严平稳过程.

4^0 特列. 高斯过程：严平稳过程 $\Leftrightarrow$ 宽平稳过程.