

北京交通大学

2015-2016 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: _____ 学院: _____ 任课教师: _____

专业: _____ 班级: _____ 学号: _____

(注: 本试卷满分100分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) 设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 是参数 λ 的齐次 Poisson 过程, 设 $X_1(t)$ 为第一个事件来到的时刻. 证明条件随机变量 $(X_1|N_t = 1) \sim U(0, t)$, 即服从区间 $(0, t)$ 上的均匀分布.

2. (20分) 对于任意的整数 $n, m \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

3. (20分) 设随机过程 $\{X_n\}$ 满足:

- (1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n) (n \geq 1)$, 其中 $f: E \times E \rightarrow E$, 且 ξ_n 取值在 E 上;
- (2) $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 也相互独立.

证明: $\{X_n\}$ 是 Markov 链, 而且其一步转移概率为, 对于任意 $i, j \in E$,

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j).$$

4. (20分)

(I) 设马尔科夫链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

(II) 设 Markov 链的状态空间 $E = \{1, 2, 3\}$, 其转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(1) 判别以上 Markov 链是否具有平稳分布(写出理由); (2) 若具有平稳分布, 求平稳分布及 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$.

5. (20分) 设 X, Y_1, Y_2, \dots 是一列相互独立的随机变量, 其中 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的 Poisson 分布, 而 Y_1, Y_2, \dots 服从 $[0, 1]$ 上均匀分布. 定义

$$Z(t) = \sum_{k=1}^X I_{[0,t]}(Y_k), \quad t \in [0, 1]$$

其中 $I_{[0,t]}(\cdot)$ 为示性函数(即: $I_{[0,t]}(y) = 1$, 若 $y \in [0, t]$; $I_{[0,t]}(y) = 0$, 若 $y \notin [0, t]$).

(1) 求 $\xi_{t,k} = I_{[0,t]}(Y_k)$ 的特征函数; (2) 求 $Z(t)$ 的特征函数; (3) 证明: $Z(t)$ 是参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的 Poisson 过程. (提示: 可采用特征函数证明)