

应用随机过程

第2章 随机过程基本概念

- 2.1 随机过程的定义
 - 定义、分类、样本轨道、有限维分布

随机过程的实例

- 例1: 某服务站在 $[0, t]$ 内来访的顾客数, 记为 $N(t)$. 在固定时刻 t 时, $N(t)$ 是一个随机变量. 如果想研究该随机变量受时刻 t 的影响程度, 则随机变量族 $\{N(t), t \geq 0\}$ 才是我们的研究对象.
- 例2: 质点在直线上做随机徘徊. 该质点最初在原点, 以后每单位时间均等地向左或向右移动一格. 设 X_n 为质点在第 n 次移动后的坐标. 固定 n 时, X_n 是一个随机变量. 如果想研究质点整个变化时, 则随机变量族 $\{X_n, n \geq 0\}$ 才是我们的研究对象.

随机过程的定义

(Ω, \mathcal{F}, P) 为一概率空间, T 为一指标集, $\forall t \in T$, 都存在定义在 (Ω, \mathcal{F}, P) 上, 取值于 S 的随机变量 $X(\omega, t)$ 与它相对应, 则称依赖于 t 的一族随机变量 $\{X(\omega, t) : t \in T\}$ 为随机过程.

T 称为时间参数集, S 称为状态空间.

由定义知, $\{X(\omega, t) : t \in T\}$ 为 ω 和 t 的二元函数.

随机过程的定义

说明

1⁰ 给定 t_0 , $X(\omega, t_0)$ 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一个随机变量;

2⁰ 给定 ω_0 , $X(\omega_0, t)$ 是 T 上的一个取 S 值的函数.

并称 $X(\omega_0, t)$ 是 $\{X(\omega, t) : t \in T\}$ 的一个样本轨道.

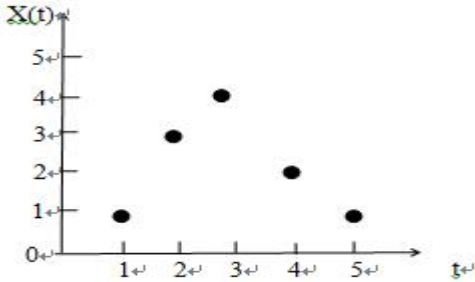
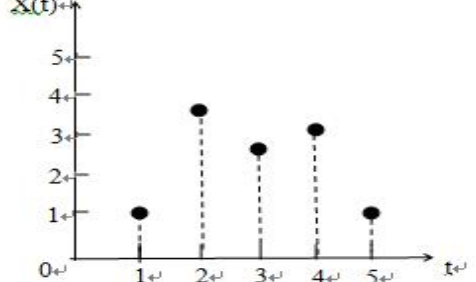
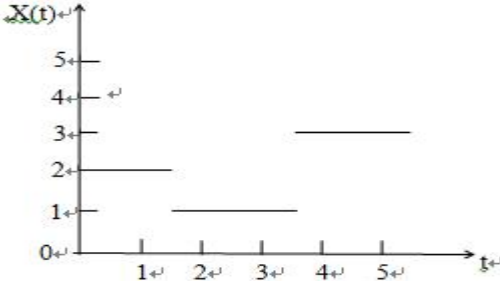
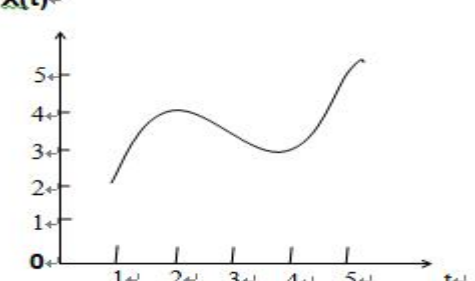
3⁰ 简记随机过程为 $\{X_t, t \in T\}$; $\forall x \in S$,

$X_t = x$ 表示 t 时刻, 随机过程处于状态 x .

随机过程的分类

T \ S	离散	连续
离散	离散随机序列 (随机徘徊)	连续随机序列 (每时刻的温度)
连续	离散型随机过程 (顾客流)	连续型随机过程 (股票价格)

随机过程的样本轨道

T \ S	离散	连续
离散	 <p>A plot of a discrete-time, discrete-state sample path. The vertical axis is labeled $X(t_k)$ and ranges from 0 to 5. The horizontal axis is labeled t_k and ranges from 0 to 5. The plot shows a sequence of points: (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 2), and (5, 1).</p>	 <p>A plot of a discrete-time, continuous-state sample path. The vertical axis is labeled $X(t_k)$ and ranges from 0 to 5. The horizontal axis is labeled t_k and ranges from 0 to 5. The plot shows a sequence of points: (1, 1), (2, 3.5), (3, 2.5), (4, 3.2), and (5, 1). Dashed vertical lines connect each point to its corresponding time value on the horizontal axis.</p>
连续	 <p>A plot of a continuous-time, discrete-state sample path. The vertical axis is labeled $X(t)$ and ranges from 0 to 5. The horizontal axis is labeled t and ranges from 0 to 5. The plot shows a step function that is constant at 2 for $t \in [0, 1]$, constant at 1 for $t \in [1, 3]$, and constant at 3 for $t \in [3, 5]$.</p>	 <p>A plot of a continuous-time, continuous-state sample path. The vertical axis is labeled $X(t)$ and ranges from 0 to 5. The horizontal axis is labeled t and ranges from 0 to 5. The plot shows a smooth, continuous curve that starts at approximately (0, 2.2), peaks at approximately (2, 4.2), dips to approximately (3.5, 3.0), and ends at approximately (5, 5.5).</p>

随机过程的有限维分布函数

1) 定义

1⁰ $\forall t_1 \in T$, X_{t_1} 是一维随机变量, 其分布函数为

$$F_{t_1}(x_1) = P(X_{t_1} \leq x_1)$$

称为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的一维分布函数.

2⁰ $\forall t_1, t_2 \in T$, (X_{t_1}, X_{t_2}) 是二维随机向量, 其联合分布函数为: $F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2)$

称为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的二维分布函数.

随机过程的有限维分布函数

3⁰ $\forall t_1, \dots, t_n \in T, (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 是 n 维随机向量,
其联合分布函数为:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

称为随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 的 n 维分布函数.

$$4^0 \left\{ F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) : n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T \right\}$$

称为 $\{X_t, t \in T\}$ 的有限维分布函数族.

随机过程的有限维分布函数

2) 性质

1⁰ $\forall x_1, \dots, x_n \in R$, $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ 是非负, 单调非降, 右连续 n 元函数.

$$2^0 \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = 1$$
$$\vdots$$
$$x_n \rightarrow +\infty$$

$$3^0 F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_{k_1}, \dots, t_{k_n}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}).$$

随机过程的有限维分布函数

4⁰ 若 $m < n$, 则

$$\begin{aligned} F_{t_1, \dots, t_m} (x_1, \dots, x_m) &= \lim_{\substack{x_{m+1} \rightarrow +\infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow +\infty}} F_{t_1, \dots, t_n} (x_1, \dots, x_n) \\ &= F_{t_1, \dots, t_n} (x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty) \end{aligned}$$