应用随机过程

第2章 随机过程基本概念

目录

- 2.2 随机过程的数字特征
  - 期望、方差、协方差、自相关函数、特征函数

期望函数

$\forall t \in T$，随机过程$\{X_t, t \in T\}$的一维分布函数为 $F_t(x)$，密度函数为 $f_t(x)$，则

$$\mu_{X_t} = E(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_t(x) dx$$

称为随机过程$\{X_t, t \in T\}$的期望函数.

方差函数

$\forall t \in T$，随机过程$\{X_t, t \in T\}$的一维分布函数为 $F_t(x)$，密度函数为 $f_t(x)$，则

$$\sigma^2_{X_t} = Var(X_t) = E\left[(X_t - EX_t)^2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_{X_t})^2 dF_t(x)$$

$$= E(X_t^2) - (EX_t)^2.$$

称为随机过程$\{X_t, t \in T\}$的方差函数.

方差函数

特殊地,

若$E\left(X_t^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2dF_t\left(x\right)<+\infty$,则称随机过程$\left\{X_t,t\in T\right\}$为实二阶矩过程 .

协方差函数

$\forall t_1, t_2 \in T,$

$$c_X(t_1,t_2) = Cov\left(X_{t_1}, X_{t_2}\right)$$

$$= E\left[\left(X_{t_1} - EX_{t_1}\right)\left(X_{t_2} - EX_{t_2}\right)\right]$$

$$= E\left(X_{t_1} X_{t_2}\right) - E\left(X_{t_1}\right) E\left(X_{t_2}\right).$$

称为随机过程$\{X_t, t \in T\}$的协方差函数.

当$t_1 = t_2 = t$, $c_X(t_1,t_2) = \sigma^2{}_{X_t}$.

自相关函数

$\forall t_1, t_2 \in T,$

$$R_X(t_1, t_2) = E(X_{t_1} X_{t_2})$$

称为随机过程$\{X_t, t \in T\}$的自相关函数.

当$t_1 = t_2 = t,\quad R_X(t_1, t_2) = E(X_t^2).$

特征函数

$$\forall t_1,\cdots,t_n \in T,\ \forall n \geq 1$$

$$\phi\left(t_1,\cdots,t_n;u_1,\cdots,u_n\right) = E\left(e^{i<\vec{u},\vec{X}>}\right)$$

$$= E\left(e^{i(u_1X_{t_1}+\cdots+u_nX_{t_n})}\right)$$

称为随机过程$\{X_t,t\in T\}$的有限维特征函数.

离散型随机过程

当时间参数集T取离散值$n_1,\cdots,n_k,\cdots$时，这种随机过程称为离散时间随机过程．

此时，X_t是一串随机变量$X_{n_1},\cdots,X_{n_k},\cdots$所构成的序列，称为时间序列．

离散时间过程记为 $\{X_n, n \geq 0\}$．

例子

考虑随机点在$(0,t]$内发生的次数，记为$\{Y_t, t\geq 0\}$，其中$Y_0=0$. 设$(t_0, t_0+t]$内有k个随机点发生的概率与t_0无关，且$Y_{t_0+t}-Y_{t_0}=Y_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$，即

$$P_k(t)=P(Y_t=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

再定义如下随机过程，求其数字特征

$$X_t=\begin{cases}1, & \text{若随机点在}(0,t]\text{内发生偶数次}\\ -1, & \text{若随机点在}(0,t]\text{内发生奇数次}\end{cases}.$$

例子

解:

$$
\begin{aligned}
P(X_t=1) &= P\left(\{Y_t=0\}\bigcup\{Y_t=2\}\bigcup\cdots\right) \\
&= p_0(t)+p_2(t)+\cdots \\
&= e^{-\lambda t}\left(1+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\frac{(\lambda t)^4}{4!}+\cdots\right) \\
&= e^{-\lambda t}\frac{e^{\lambda t}+e^{-\lambda t}}{2} \\
&= \frac{1+e^{-2\lambda t}}{2}.
\end{aligned}
$$

例子

$$P\left(X_t=-1\right)=P\left(\{Y_t=1\}\bigcup\{Y_t=3\}\bigcup\cdots\right)$$

$$=\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2}$$

$$\mu_{X_t}=E\left(X_t\right)=\frac{1+e^{-2\lambda t}}{2}-\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2}=e^{-2\lambda t}$$

例子

$$\forall 0 < t_1 < t_2$$

$$
\begin{aligned}
& P\left(X_{t_1} X_{t_2} = 1\right) \\
= & P\left(\left\{X_{t_1} = 1, X_{t_2} = 1\right\} \bigcup \left\{X_{t_1} = -1, X_{t_2} = -1\right\}\right) \\
= & P\left(X_{t_1} = 1, X_{t_2} = 1\right) + P\left(X_{t_1} = -1, X_{t_2} = -1\right) \\
= & P\left(X_{t_1} = 1, X_{t_2 - t_1} = 1\right) + P\left(X_{t_1} = -1, X_{t_2 - t_1} = 1\right) \\
= & P\left(X_{t_1} = 1\right) P\left(X_{t_2 - t_1} = 1\right) + P\left(X_{t_1} = -1\right) P\left(X_{t_2 - t_1} = 1\right) \\
= & \frac{1 + e^{-2\lambda t_1}}{2} \frac{1 + e^{-2\lambda (t_2 - t_1)}}{2} + \frac{1 - e^{-2\lambda t_1}}{2} \frac{1 + e^{-2\lambda (t_2 - t_1)}}{2} \\
= & \frac{1 + e^{-2\lambda (t_2 - t_1)}}{2}
\end{aligned}
$$

例子

$$P\left(X_{t_1}X_{t_2}=-1\right) \qquad \forall 0<t_1<t_2$$

$$=P\left(\left\{X_{t_1}=1,X_{t_2}=-1\right\}\bigcup\left\{X_{t_1}=-1,X_{t_2}=1\right\}\right)$$

$$=P\left(X_{t_1}=1,X_{t_2}=-1\right)+P\left(X_{t_1}=-1,X_{t_2}=1\right)$$

$$=P\left(X_{t_1}=1,X_{t_2-t_1}=-1\right)+P\left(X_{t_1}=-1,X_{t_2-t_1}=-1\right)$$

$$=\frac{1+e^{-2\lambda t_1}}{2}\frac{1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}}{2}+\frac{1-e^{-2\lambda t_1}}{2}\frac{1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}}{2}$$

$$=\frac{1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}}{2}$$

例子

$$R_X(t_1,t_2)=E\left(X_{t_1}X_{t_2}\right)$$

$$=\frac{1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}}{2}-\frac{1-e^{-2\lambda(t_2-t_1)}}{2}=e^{-2\lambda(t_2-t_1)}$$

当$0<t_2<t_1$，$R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda(t_1-t_2)}$

$$R_X(t_1,t_2)=e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$$

例子

$$\sigma^2{}_{X_t} = E\left(X_t{}^2\right) - \left(EX_t\right)^2$$

$$= R_X(t,t) - \left(\mu_{X_t}\right)^2$$

$$= 1 - e^{-4\lambda t}$$