应用随机过程

第2章 随机过程基本概念

目录

- 2.1 随机过程的定义
  - 定义、分类、样本轨道、有限维分布

随机过程的实例

- 例1: 某服务站在$[0,t]$内来访的顾客数, 记为$N(t)$. 在固定时刻t时, $N(t)$是一个随机变量. 如果想研究该随机变量受时刻t的影响程度, 则随机变量族$\{N(t), t \geq 0\}$才是我们的研究对象.

- 例2: 质点在直线上做随机徘徊. 该质点最初在原点, 以后每单位时间均等地向左或向右移动一格. 设X_n为质点在第n次移动后的坐标. 固定n时, X_n是一个随机变量. 如果想研究质点整个变化时, 则随机变量族$\{X_n, n \geq 0\}$才是我们的研究对象.

随机过程的定义

$(\Omega, \boldsymbol{F}, P)$为一概率空间，$T$为一指标集，$\forall t \in T$，都存在定义在$(\Omega, \boldsymbol{F}, P)$上，取值于$S$的随机变量$X(\omega, t)$与它相对应，则称依赖于$t$的一族随机变量$\{X(\omega, t): t \in T\}$为随机过程.

T称为时间参数集，S称为状态空间.

由定义知，$\{X(\omega, t): t \in T\}$为$\omega$和$t$的二元函数.

随机过程的定义

说明

1^0 给定t_0, $X(\omega, t_0)$是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的一个随机变量;

2^0 给定ω_0, $X(\omega_0, t)$是T上的一个取S值的函数.

并称$X(\omega_0, t)$是$\{X(\omega, t): t \in T\}$的一个样本轨道.

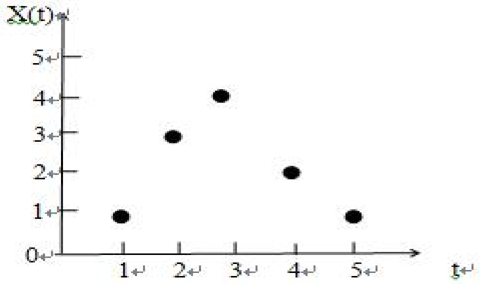
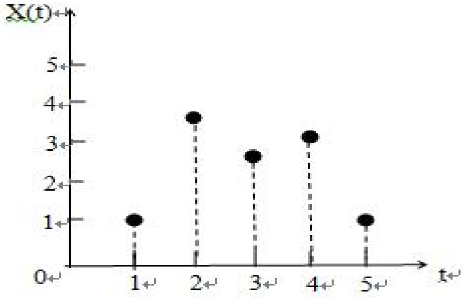
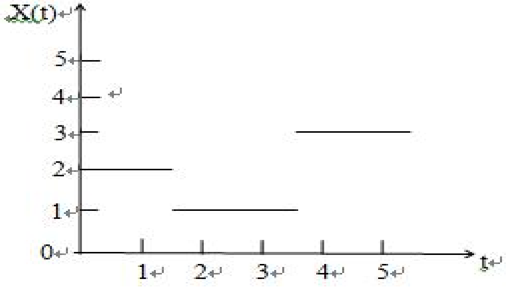
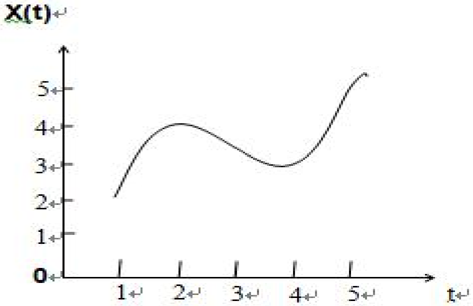
3^0 简记随机过程为$\{X_t, t \in T\}$; $\forall x \in S$,

$X_t = x$表示t时刻, 随机过程处于状态x.

随机过程的分类

T \ S	离散	连续
离散	离散随机序列 (随机徘徊)	连续随机序列 (每时刻的温度)
连续	离散型随机过程 (顾客流)	连续型随机过程 (股票价格)

随机过程的样本轨道

T \ S	离散	连续
离散		
连续		

随机过程的有限维分布函数

1）定义

1^0 $\forall t_1 \in T$， X_{t_1}是一维随机变量，其分布函数为

$$F_{t_1}(x_1) = P(X_{t_1} \le x_1)$$

称为随机过程$\{X_t, t \in T\}$的一维分布函数.

2^0 $\forall t_1, t_2 \in T, (X_{t_1}, X_{t_2})$是二维随机向量，其联合分布函数为：$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P(X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2)$

称为随机过程$\{X_t, t \in T\}$的二维分布函数.

随机过程的有限维分布函数

3^0 $\forall t_1, \cdots, t_n \in T, \left(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}\right)$是$n$维随机向量，

其联合分布函数为：

$$F_{t_1, \cdots, t_n}\left(x_1, \cdots, x_n\right) = P\left(X_{t_1} \le x_1, \cdots, X_{t_n} \le x_n\right)$$

称为随机过程$\{X_t, t \in T\}$的n维分布函数.

4^0 $\left\{F_{t_1, \cdots, t_n}\left(x_1, \cdots, x_n\right) : n \ge 1, t_1, \cdots, t_n \in T\right\}$

称为$\{X_t, t \in T\}$的有限维分布函数族 .

随机过程的有限维分布函数

2）性质

1^0 $\forall x_1,\cdots,x_n \in R$, $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$是非负，单调非降，右连续$n$元函数.

2^0 $$\lim_{x_i \to -\infty} F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=0$$

$$\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \vdots \\ x_n\to+\infty}} F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=1$$

3^0 $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=F_{t_{k_1},\cdots,t_{k_n}}(x_{k_1},\cdots,x_{k_n})$.

随机过程的有限维分布函数

4^0 若$m<n$，则

$$F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m) = \lim_{\substack{x_{m+1}\to+\infty \\ \vdots \\ x_n\to+\infty}} F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

$$= F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty)$$