

北京交通大学

2007-2008 学年第一学期期末研究生随机过程试题(A)

姓名: _____ 学院: _____ 任课教师: _____

专业: _____ 班级: _____ 学号: _____

(注: 本试卷满分100分, 共七道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (10分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的 Poisson 分布. (1) 写出 X 的概率分布; (2) 求出 Poisson 分布的特征函数(写出计算过程); (3) 利用其特征函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 设 $\{N_t, t \geq 0\}$ 是参数 λ 的齐次 Poisson 过程, 设 $X_1(t)$ 为第一个事件来到的时刻. 证明条件随机变量 $(X_1|N_t = 1) \sim U(0, t)$, 即服从区间 $(0, t)$ 上的均匀分布.

3. (15分) 对于任意的整数 $n \geq 0$ 及 $i, j \in E$ (E 为状态空间). (1) 证明: 转移概率具有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)};$$

(2) 并叙述上式直观意义.

4. (15分) 一书亭用邮寄订阅销售杂志, 订阅的顾客是强度为 6 的一个泊松过程, 每位顾客订阅 1 年, 2 年, 3 年的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, 彼此如何订阅是相互独立的, 每订阅一年, 店主即获利 5 元. 设 Y_t 是 $[0, t]$ 内, 店主从订阅中所获得的总收入, 计算: (1) $E(Y_t)$ (即 $[0, t]$ 内的总的平均收入); (2) $\text{Var}(Y_t)$.

5. (15分) 设 Markov 链 $X_n, n \geq 0$ 有状态 1, 2 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

初始分布为 $P(X_0 = 1) = p, P(X_0 = 2) = 1 - p, 0 < p < 1$. 对任意 $n \geq 1$, 试求: (1) $P(X_{n+2} = 2 | X_n = 1)$; (2) $P(X_3 = 1)$ (写出计算步骤); (3) 该链是否具有遍历性? 为什么? (4) 极限分布和平稳分布.

6. (15分) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集; (2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

7. (15分) 对于任意的状态 $i, j \in E$ (E 为状态空间), $f_{ij} > 0$ 的充要条件是 $i \rightarrow j$.