

应用随机过程

第2章 随机过程基本概念

- 2.5 几个特殊的随机过程
 - 独立增量过程、平稳增量过程

几个特殊的随机过程

1) 独立增量过程

设随机过程 $\{X_t\}$, $\forall t_1, \dots, t_n \in T, t_1 < \dots < t_n$, 若
随机变量的增量

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

是相互独立的, 则称过程为独立增量过程.

注: 任意不相交时间间隔上的增量都是相互独立的。

几个特殊的随机过程

2) 平稳增量过程

设随机过程 $\{X_t\}$, $\forall t, t+\tau \in T$, 若 $X_{t+\tau} - X_t$ 的分布与 t 无关, 仅与 τ 有关, 即

$X_{t_1+\tau} - X_{t_1}$ 与 $X_{t_2+\tau} - X_{t_2}$ 的分布一样,

则称过程为平稳增量过程.

或称过程具有时齐性(齐次性).

注: 任意相等时间间隔上的增量都是同分布的。

几个特殊的随机过程

3) 性质

1⁰ 时间离散的独立增量过程，就是独立随机变量的部分和.

2⁰ 时间离散的独立平稳增量过程，就是独立同分布随机变量的部分和.

3⁰ $\{X_t\}$ 的特征函数为 $\phi(t, \theta) = E(e^{i\theta X_t})$. 若 $X_0 = 0$ ，则独立增量过程 $\{X_t\}$ 为平稳的 \Leftrightarrow 其特征函数具有可乘性，即

$$\phi(t+s, \theta) = \phi(t, \theta)\phi(s, \theta).$$

几个特殊的随机过程

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi(t+s, \theta) &= E\left(e^{i\theta X_{t+s}}\right) \\&= E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t+X_t-X_0)}\right) \\&= E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t)} e^{i\theta(X_t-X_0)}\right) \\&\stackrel{\text{独立}}{=} E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t)}\right) E\left(e^{i\theta(X_t-X_0)}\right) \\&\stackrel{\text{齐次}}{=} E\left(e^{i\theta(X_s-X_0)}\right) E\left(e^{i\theta(X_t-X_0)}\right) = E\left(e^{i\theta X_s}\right) E\left(e^{i\theta X_t}\right) \\&= \varphi(t, \theta) \varphi(s, \theta)\end{aligned}$$

几个特殊的随机过程

$$\begin{aligned}\Leftarrow \because \varphi(t+s, \theta) &= E\left(e^{i\theta X_{t+s}}\right) \\ &= E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t+X_t)}\right) = E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t)} e^{i\theta X_t}\right) \\ &\stackrel{\text{独立}}{=} E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t)}\right) E\left(e^{i\theta X_t}\right) \\ &= E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t)}\right) \varphi(t, \theta) = \varphi(t, \theta) \varphi(s, \theta)\end{aligned}$$

$$\therefore E\left(e^{i\theta(X_{t+s}-X_t)}\right) = \varphi(s, \theta) = E\left(e^{i\theta X_s}\right)$$

$\therefore X_{t+s} - X_t$ 与 $X_s - X_0$ 同分布.

\therefore 过程是时齐的