北京交通大学

2009-2010 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: ______________ 学院: ___________ 任课教师: ____________

专业: ______________ 班级: ___________ 学号: ________________

(注：本试卷满分100 分, 共六道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (20分) (1)设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布, 试写出其分布函数; (2) 证明强度为 λ 的齐次 Poisson 过程 $\{N_t, t\geq 0\}$ 的到达时间间隔序列 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且是具有相同均值 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的指数分布.

2. (15分) 设在 $[0,t]$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k(k<n)$ 次事件 A 发生的时间 S_k 的条件概率密度函数. （其中等待时间 S_n 服从参数为 n,λ 的 Γ 分布, 即分布密度为$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, t\geq 0.$）

3. (15分) 考虑质点在整数点上的一维无限制随机游动, 设质点以概率 $p\ (0<p<1)$ 向右移动一个单位, 以概率 q 向左移动一个单位, 且 $p+q=1$. 试判别各状态的周期和常返性. (注：斯特灵公式 $n!\backsimeq n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$)

4. (15分) A, B 两罐总共装着 N 个球, 在时刻 n 先从 N 个球中等概率地任取一球. 然后从 A, B 两罐中任选一个, 选中 A 的概率为 p, 选中 B 的概率为 $1-p$. 之后再将选出的球放入选好的罐中. 设 X_n 为每次试验时 A 罐中的球数. 试求此 Markov 链的转移概率矩阵.

5. (20分)

(I) 设 Markov 链 $X_n,\ n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性；周期.
(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(II) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;
(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.

6. (15分) 证明Chapman-Kolmogorov 方程: 对任何整数 $m, n \geq 0$ 有

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \quad \text{or} \quad P^{(m+n)} = P^{(m)} \times P^{(n)}.$$