

北京交通大学

2012-2013 学年第一学期研究生随机过程试题(A)

姓名: _____ 学院: _____ 任课教师: _____

专业: _____ 班级: _____ 学号: _____

(注: 本试卷满分100分, 共五道大题. 请在答卷纸上写清楚姓名、学院、专业、班级、学号、题号.)

1. (15分) 设随机变量 X 的概率分布是服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布. (1) 写出 X 的概率密度函数; (2) 求出指数分布的矩母函数(写出计算过程); (3) 利用其矩母函数求出 X 的期望和方差(写出计算过程).

2. (15分) 考虑强度为 λ 的齐次 Poisson 过程 $\{N_t, t \geq 0\}$, 计算前三个事件到来的时刻 S_1, S_2, S_3 的联合密度.

3. (20分) 设 $Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n$ 是一个复合 Poisson 过程, $t \geq 0$.

(1) 若 $\varphi_\xi(u) \triangleq Ee^{iu\xi}$ (其中 $i = \sqrt{-1}$) 是随机变量 ξ_n 的特征函数, 试求 Y_t 的特征函数 $\varphi_{Y_t}(u)$.

(2) 若 $E(\xi^2) < \infty$, 试求 $E(Y_t), \text{Var}(Y_t)$.

(注: $\text{Var}(Y_t) = E[\text{Var}(Y_t|N_t)] + \text{Var}[E(Y_t|N_t)]$.)

4. (20分) 记 $Z_i, i = 1, 2, \dots$ 为一串独立同分布的离散随机变量. $P\{Z_1 = k\} = p_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

(1) 令 $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $n = 1, 2, \dots$, 并约定 $X_0 = 0$. 试证 X_n 为 Markov 链, 并求其一步转移概率矩阵. (请将转移概率矩阵完整写出)

(2) 令 $X_n = \max\{Z_1, \dots, Z_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, 并约定 $X_0 = 0$. 试证 X_n 为 Markov 链, 并求其一步转移概率矩阵. (请将转移概率矩阵完整写出)

5. (30分)

(I) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

初始分布 $p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$, 其中 $p_i = P(X_0 = i)$, $i = 0, 1, 2$. 试求 $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2)$ 和 $P(X_0 = 1, X_1 = 1, X_3 = 1)$.

(II) 设 Markov 链 X_n , $n \geq 0$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3\}$ 和一步转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分析该 Markov 链: 画出状态转移图; 常返性; 周期.

(2) 该链是否具有平稳分布? 为什么? 若有则求出.

(III) 设马氏链 $\{X_n\}$ 的状态空间 $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 试分解此链, 画出状态转移图, 并指出其非常返集和基本常返闭集;

(2) 说明常返闭集中的状态是否为正常返态, 并计算其周期.