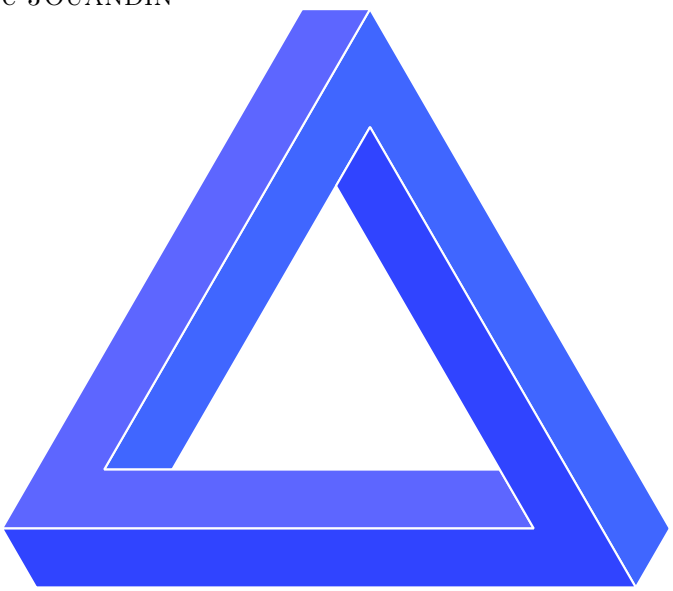
Cours de Prépa

Physique-Chimie

Écrit par
Alexandre Jouandin

2013—2015
Écrit en LaTeX



11 juin 2015

Table des matières

I Physique **7**

1 Thermodynamique **8**
1.1 Définitions générales 8
1.2 Premier Principe 9
1.2.1 Transformation isochore 9
1.2.2 Transformation isobare 10
1.3 Deuxième Principe 11
1.4 Cas particulier du gaz parfait 12
1.5 Troisième Principe 14
1.6 Machines thermiques 14
1.7 Systèmes ouverts en régime stationnaire 15
1.7.1 Système ouvert 15
1.7.2 Premier principe 15
1.7.3 Deuxième principe 17

2 Transferts thermique **18**
2.1 Conduction 18
2.2 Convection 21

3 Statique des fluides **22**
3.1 Champ de pression d'un fluide 22
3.2 Théorème d'Archimède 22

4 Électronique **23**
4.1 Circuits linéaires dans l'ARQS 23
4.1.1 Thévenin-Norton 24
4.2 Régime transitoires 25
4.3 Amplificateur Opérationnel (AO) 25
4.4 Régimes sinusoïdaux 26
4.4.1 Puissance 27
4.5 Filtres 28

4.5.1 Fonctions de transfert usuelles . . . 29
4.5.2 Diagrammes de Bode . . . 29

5 Traitement du signal **31**
5.1 Signaux périodiques . . . 31
5.2 Électronique numérique . . . 32

6 Mécanique du Point **33**
6.1 Étude cinétique . . . 33
6.2 Loi de la quantité de mouvement . . . 34
6.3 Approche Énergétique . . . 34
6.3.1 Puissance et travail . . . 34
6.3.2 Énergie cinétique . . . 35
6.3.3 Énergie potentielle . . . 36
6.4 Forces centrales . . . 36
6.5 Dynamique en référentiel non galiléen . . . 37
6.5.1 Loi de composition des vitesses . . . 37
6.5.2 Loi de composition des accélérations . . . 37
6.5.3 Forces d'inerties . . . 38

7 Mécanique du solide **39**
7.1 Préambule . . . 39
7.1.1 Dérivée d'un vecteur . . . 39
7.1.2 Dérivée en coordonnées polaires . . . 39
7.2 Définitions . . . 40
7.3 Théorèmes de Koënig . . . 41
7.4 Moment d'inertie . . . 41
7.5 Théorèmes de dynamique . . . 42
7.6 Solides en contact . . . 43

8 Optique **44**
8.1 Optique géométrique . . . 44
8.1.1 Stigmatisme et aplanétisme . . . 44
8.1.2 Réflexion et réfraction . . . 45
8.2 Optique ondulatoire . . . 46
8.2.1 Modèle scalaire des ondes lumineuses . . . 46
8.2.2 Superposition d'ondes lumineuses . . . 48
8.2.3 Trous d'Young . . . 51
8.2.4 Interféromètre de Michelson . . . 53
8.2.5 Diffraction . . . 55
8.2.6 Réseaux . . . 56

9 Électromagnétisme **58**
9.1 Électrostatique . . . 58
9.1.1 Loi de Coulomb . . . 58
9.1.2 Propriétés du champ électrostatique . . . 59
9.1.3 Circulation du champ électrostatique . . . 59
9.1.4 Flux du champ électrostatique . . . 60
9.1.5 Dipôle électrostatique . . . 60
9.2 Magnétostatique . . . 62
9.2.1 Champ magnétique . . . 62

9.2.2 Dipôle Magnétique . . . 63
9.3 Équations de Maxwell . . . 64
9.3.1 Principe de conservation de la charge . . . 64
9.3.2 Les équations de Maxwell . . . 64
9.3.3 Equations de Poisson et de Laplace . . . 66
9.4 Énergie électromagnétique . . . 67
9.5 Induction . . . 69
9.5.1 Loi d'Ohm généralisée . . . 69
9.5.2 Auto-induction . . . 70
9.5.3 Inductance mutuelle . . . 70
9.5.4 Force electomotrice induite . . . 71
9.6 Propagation et rayonnement . . . 71
9.6.1 Dans le vide . . . 72
9.6.2 Propagation dans un plasma . . . 75
9.6.3 Propagation dans un conducteur ohmique . . . 79

10 Rayonnement Thermique **81**

11 Mécanique Quantique **84**
11.1 Introduction à la mécanique quantique . . . 84
11.1.1 Dualité onde-particule . . . 84
11.1.2 Fonction d'onde et équation de Schrödinger . . . 84
11.1.3 Équation de Schrödinger . . . 85
11.1.4 Inégalité de Heisenberg . . . 86
11.2 Évolution d'une particule quantique libre . . . 86
11.3 Évolution d'une particule quantique dans un potentiel . . . 87

12 Thermodynamique statistique **88**
12.1 Monde microscopique, monde macroscopique . . . 88
12.2 Facteur de Boltzmann . . . 88
12.2.1 Atmosphère isotherme . . . 88
12.2.2 Poids de Boltzmann . . . 90
12.3 Systèmes à spectres discret d'énergie . . . 90
12.4 Capacités thermiques classiques des gaz et des solides . . . 91

13 Annexe **92**
13.1 Trigonométrie . . . 92
13.1.1 Définition . . . 92
13.1.2 Addition / Produit . . . 92
13.1.3 Nombres complexes . . . 93
13.2 Calcul vectoriel . . . 93
13.3 Complément mathématique . . . 94
13.3.1 Dérivée d'un vecteur . . . 94
13.3.2 Équation différentielle . . . 94
13.4 Repères en physique . . . 95
13.4.1 Repère cartésien . . . 95
13.4.2 Repère cylindrique . . . 95
13.5 Analyse Vectorielle . . . 96
13.5.1 Généralités sur les champs . . . 96
13.5.2 Opérateurs sur les champs . . . 96
13.5.3 Stokes et Ostrogradski . . . 99

13.6 Règles générales . . . 99
13.6.1 Relations entre les grandeurs . . . 99
13.6.2 Longueurs de références . . . 99

II Chimie **100**

14 Première année **101**
14.1 Configuration électronique . . . 101
14.2 Représentation moléculaire . . . 102
14.3 Cinétique chimique . . . 102
14.3.1 Avancement . . . 102
14.3.2 Loi d'action de masse . . . 104
14.4 Cristallographie . . . 104

15 Thermochimie **105**
15.1 Grandeurs extensives . . . 105
15.2 Équilibre d'une réaction . . . 106
15.2.1 Enthalpie libre . . . 106

16 Premier principe appliqué à la transformation chimique **108**
16.1 Enthalpie standard . . . 108
16.2 Effets thermiques pour une transformation monobare . . . 109
16.3 Relations de Kirchhoff . . . 109

17 Diagramme Potentiel-pH **111**
17.1 Rappels . . . 111
17.2 Méthode . . . 111

18 Cinétique de l'oxydoréduction **114**
18.1 Cinétique des réactions d'oxydoréduction . . . 114
18.2 Corrosion . . . 114

19 Annexe **115**

Liste des acronymes **117**

Index **119**

Table des figures

1.1 Étude thermodynamique d'un système ouvert 16

4.1 Équivalence Thévenin-Norton 24

5.1 Spectre d'un signal périodique 31
5.2 Échantillonage 32

6.1 Force de rappel d'un ressort 34

7.1 Coordonées polaires 39
7.2 Moment d'une force 40
7.3 Moment cinétique 41

8.1 Système rigoureusement stigmatique 45
8.2 Système non stigmatique 45
8.3 Système rigoureusement aplanétique 45
8.4 Système non aplanétique 45
8.5 Trains d'onde dans le temps et dans l'espace 49
8.6 Dispositif des trous de Young 51
8.7 Interféromètre de Michelson en lame d'air 54
8.8 Interféromètre de Michelson en coin d'air 55
8.9 Objet diffractant 56
8.10 Deux fentes O_n et O_{n+1} d'un réseau 57

9.1 Moment dipolaire 61
9.2 Polarisation rectiligne 76

10.1 Caractérisation des différents flux 82

13.1 Repère en coordonnées cartésiennes 95
13.2 Repère en coordonnées cylindriques 96
13.3 Ligne de champ 96

14.1 Tableau des sous-couches électroniques 101

17.1 Diagramme potentiel-pH du fer 113

19.1 Tableau périodique des éléments de Mendeleev 116

Première partie

Physique

Chapitre 1

Thermodynamique

Méthode

Formules

Premier principe	$\Delta U = Q + W$	(*cf.* équation (1.4a) page 9)
	$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$	(*cf.* équation (1.4b) page 9)
	$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$	(*cf.* équation (1.11) page 11)
Enthalpie	$\mathrm{d}H = U + PV$	(*cf.* équation (1.7) page 10)
	$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P$	(*cf.* équation (1.12) page 12)
Deuxième principe	$\mathrm{d}S \geq \dfrac{\delta Q}{T}$	(*cf.* équation (1.10) page 11)
Gaz parfait	$\mathrm{d}U = C_V \mathrm{d}T$	
	$\mathrm{d}H = C_P \mathrm{d}T$	
	$PV^\gamma = \text{constante}$	

Les fonctions U, H et S sont des fonctions d'état. Ainsi, d'un point A à un point B d'une transformation, le calcul ne change pas qu'on passe par un chemin réversible ou non.

1.1 Définitions générales

Avant de commencer, un petit point sur la différence de notation entre d et δ, conformément au programme de deuxième année.

Signification	Petite	Grande
Variation	$\mathrm{d}H$	ΔH
Quantité	δQ	Q

Table 1.1 – Différence entre d,δ, et Δ

Définition 1 : Système

On appelle **système thermodynamique** le contenu d'une zone délimitée dans l'espace.

Type de système	**Ouvert**	**Fermé**	**Isolé**
Échange d'énergie avec l'extérieur	✓	✓	
Échange de matière avec l'extérieur	✓		

Table 1.2 – Les différents systèmes

Définition 2 : Transfert thermique

Le **transfert thermique** est un apport de chaleur lors d'un transfert de température :

(1.1) $$Q = C\,\Delta T \qquad\qquad \mathrm{d}Q = C\mathrm{d}T$$

Où C est la capacité calorifique en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$
Pour un corps pur, C est défini, sinon, pour un gaz parfait, il faudra prendre $C = C_V$ ou $C = C_P$ suivant qu'on se trouve à volume ou à pression constante.

(**Attention**) Parfois, on utilise les valeurs molaires en $\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$: $C_{Vm} = \dfrac{C_V}{n}$ par exemple.

Définition 3 : Travail

Le travail reçu par un système thermodynamique est noté W.
Il prend en compte le travail des forces de pression $-P_{\text{ext}}\mathrm{d}V$ et les autres forces W_u :

(1.2) $$\delta W = -P_{\text{ext}}\mathrm{d}V + \delta W_u$$

Définition 4 : Énergie interne

L'énergie interne U d'un système thermodynamique est définie microscopiquement par :

(1.3) $$U = U_0 + E_c^* + \underbrace{E_p^*}_{\text{Énergie potentielle d'interaction}}$$

1.2 Premier Principe

Théorème 4.1 : Premier principe

La variation d'énergie $\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p$ est égal à la somme du travail reçu W et du transfert thermique reçu Q :

(1.4a) $$\Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W$$

Entre deux instants t et $t + \mathrm{d}t$ très proches :

(1.4b) $$\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p = \delta Q + \delta W$$

1.2.1 Transformation isochore

Une transformation isochore est une transformation pendant laquelle le volume V reste constant.

Théorème 4.2

Pour une transformation **isochore** (à volume constant), on peut simplifier la variation d'énergie interne :

$$\mathrm{d}U_V = C_V \mathrm{d}T \tag{1.5}$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à volume constant** :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{1.6}$$

Preuve 4.2.1 *On note U_V et Q_V respectivement l'energie interne et le transfert thermique à volume constant.*
Si on néglige $\mathrm{d}E_c$ et $\mathrm{d}E_p$, le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}U_V &= \delta W + \delta Q_V \\
&= -P \underbrace{\mathrm{d}V}_{nul\ car\ V=cte} + \underbrace{\delta W_u}_{supposé\ nul} + \delta Q_V \\
&= \delta Q_V \\
\mathrm{d}U_V &= C_V \mathrm{d}T
\end{aligned}$$

1.2.2 Transformation isobare

On peut effectuer un raisonnement analogue à la preuve précédente en étudiant cette fois une transformation **isobare** (à pression constante)

Preuve 4.2.2 *On note U_P et Q_P respectivement l'energie interne et le transfert thermique à pression constante.*
Si on néglige $\mathrm{d}E_c$ et $\mathrm{d}E_p$, le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}U_P &= \delta W + \delta Q_P \\
&= -P\mathrm{d}V + \underbrace{\delta W_u}_{supposé\ nul} + \delta Q_P \\
\mathrm{d}U_P + P\mathrm{d}V &= \delta Q_P \\
\mathrm{d}\left(U + PV\right)_P &= \delta Q_P \\
&= C_P \mathrm{d}T
\end{aligned}$$

Cette quantité de chaleur mise en jeu est l'enthalpie. On va maintenant la définir de manière générale :

Définition 5 : Fonction Enthalpie

On appelle **enthalpie** la fonction d'état H telle que :

$$H = U + PV \tag{1.7}$$

Théorème 5.1

Lors d'une transformation isobare, l'enthalpie s'exprime par :

$$\mathrm{d}H_P = C_P \mathrm{d}T \tag{1.8}$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à pression constante** :

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \tag{1.9}$$

1.3 Deuxième Principe

Théorème 5.2 : Deuxième principe

Il existe une **fonction d'état** S **entropie**, **additive**, **extensive**, telle que :

$$\mathrm{d}S = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}} \qquad \text{avec } \boxed{\delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T}} \tag{1.10}$$

Au final, $\boxed{\delta S_{\text{créée}} \geq 0}$.

Lorsqu'une transformation est **réversible**, on a $\boxed{S_{\text{créée}} = 0}$ et alors $\boxed{\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}}$

Théorème 5.3 : Première identité thermodynamique

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **première identité thermodynamique** est vérifiée :

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V \tag{1.11}$$

Preuve 5.3.1 *On étudie en premier lieu une transformation réversible. C'est-à-dire que* $\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{\text{réversible}}}{T}$.

Ainsi, $\begin{cases} \delta Q_{\text{réversible}} &= T\mathrm{d}S \\ \delta W_{\text{réversible}} &= -P\mathrm{d}V \end{cases}$. *On peut maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique :*

$$\mathrm{d}U_{\text{réversible}} = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$$

Mais U est une ***fonction d'état****. Donc peu importe le chemin parcouru par la transformation, qu'il soit réversible ou pas, on peut écrire :*

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V$$

(ATTENTION) *On ne peut pas intégrer cette équation sur un chemin irrversible. Mais on peut substituer l'intégrale à celle d'un chemin réversible.*

Théorème 5.4 : Deuxième identité thermodynamique

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **deuxième identité**

thermodynamique est vérifiée :

$$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P \tag{1.12}$$

1.4 Cas particulier du gaz parfait

Définition 6 : Gaz Parfait

Un gaz parfait est un gaz vérifiant l'équation d'état :

$$PV = nRT \tag{1.13}$$

Théorème 6.1 : Énergie interne d'un gaz parfait

L'énèrgie cinétique interne d'un gaz parfait ne varie pas. On démontre expérimentalement que l'énergie interne d'un gaz parfait est :

$$U_{\text{Gaz Parfait}} = U_0 + C_V T \tag{1.14}$$

La capacité thermique à volume constant C_V d'un gaz parfait est

$$C_V = \begin{cases} \frac{3}{2}nR & \text{pour un gaz parfait monoatomique} \\ \frac{5}{2}nR & \text{pour un gaz parfait polyatomique} \end{cases} \tag{1.15}$$

Théorème 6.2 : Capacité thermique

On peut utiliser deux **capacités thermiques** :

La capacité calorifique C_V à volume constant

$$C_V = \frac{3}{2}nR \tag{1.16a}$$

La capacité calorifique C_P à pression constante

$$C_P = \frac{5}{2}nR \tag{1.16b}$$

Définition 7

On défini γ comme le rapport des capacités calorifiques :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \tag{1.17}$$

Théorème 7.1 : Relation de Mayer

La **relation de Mayer** relie la capacité thermique à pression constante C_P à la

capacité thermique à volume constant C_V :

$$C_P - C_V = nR \qquad C_{Pm} - C_{Vm} = R \tag{1.18}$$

On peut maintenant exprimer :

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \tag{1.19a}$$

$$C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \tag{1.19b}$$

Preuve 7.1.1 *La démonstration de la relation de* Mayer *ne semble pas être au programme.*
Pour le reste, les démonstrations sont assez simples :

$$\begin{aligned} C_P - C_V &= nR \\ \gamma C_V - C_V &= nR \\ (\gamma - 1)C_V &= nR \\ C_V &= \frac{nR}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

La deuxième devient alors bien plus simple à démontrer :

$$\begin{aligned} C_P &= \gamma C_V \\ C_P &= \gamma \frac{nR}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

Théorème 7.2 : Relations de Laplace

Au cours d'une transformation **adiabatique réversible** (donc isentropique), un gaz parfait vérifie :

$$PV^\gamma = \text{constante} \tag{1.20a}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \tag{1.20b}$$

$$\begin{aligned} P^{1-\gamma}T^\gamma &= \text{constante} \\ &= P_{\text{éq}}V_{\text{éq}} \end{aligned} \tag{1.20c}$$

Preuve 7.2.1 *On part d'une des identités thermodynamiques. Peu importe laquelle, cela changera juste quelle relation de* Laplace *on obtient.*
Nous allons partir de $\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}P \\ \mathrm{d}S &= \frac{\mathrm{d}H}{T} - \mathrm{d}P\frac{V}{T} \end{aligned}$$

D'après l'équation d'état d'un gaz parfait (1.13) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{\mathrm{d}H}{T} - nR\frac{\mathrm{d}P}{P} \\
\mathrm{d}S &= C_P\frac{\mathrm{d}T}{T} - (C_P - C_V)\frac{\mathrm{d}P}{P} \\
\mathrm{d}S &= \gamma C_V\frac{\mathrm{d}T}{T} - C_V(\gamma - 1)\frac{\mathrm{d}P}{P} \\
\mathrm{d}S &= \gamma C_V \ln\frac{T_2}{T_1} - C_V(\gamma - 1)\ln\frac{P_2}{P_1}
\end{aligned}$$

Or la transformation est isentropique, donc $\mathrm{d}S = 0$*, d'où :*

$$\begin{aligned}
\cancel{C_V}(\gamma - 1)\ln\frac{P_2}{P_1} &= \gamma\cancel{C_V}\ln\frac{T_2}{T_1} \\
(1-\gamma)\ln\frac{P_1}{P_2} &= \gamma\ln\frac{T_2}{T_1} \\
P_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} &= P_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma}
\end{aligned}$$

On a alors démontré l'équation (1.20c), et on peut passer facilement aux autres avec l'équation d'état des gaz parfait (1.13). □

De la preuve précédente, on tire une dernière formule pour les gaz parfaits : le calcul de l'entropie.

Théorème 7.3 : Entropie d'un gaz parfait

Pour une transformation réversible, l'entropie d'un gaz parfait peut être calculée par la formule :

$$\mathrm{d}S = \gamma C_V \ln\frac{T_2}{T_1} - nR\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{1.21}$$

1.5 Troisième Principe

Définition 8 : Troisième principe

À température nulle ($T = 0K$), l'entropie est nulle.

1.6 Machines thermiques

Théorème 8.1 : Énoncé des premiers et deuxièmes principes

Sur un cycle, les fonctions d'état reviennent à leur état initial. Donc le premier principe s'écrit :

$$W + \sum_i Q_i = \Delta U = 0 \tag{1.22}$$

De même, le second principe s'écrit cette fois :

$$S_{\text{échangée}} = \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \tag{1.23}$$

On appelle ce second principe l'**inégalité de Clausius**.

Théorème 8.2 : Rendement

Le rendement r est :

$$r = \frac{\text{Bénéfices}}{\text{Donné à la machine}}$$

$$r_{\text{moteur}} = -\frac{W}{Q_c} \tag{1.24a}$$

$$r_{\text{réfrigérateur}} = -\frac{Q_f}{W} \tag{1.24b}$$

$$r_{\text{pompe à chaleur}} = -\frac{Q_c}{W} \tag{1.24c}$$

1.7 Systèmes ouverts en régime stationnaire

1.7.1 Système ouvert

Définition 9 : Système ouvert

Un **système ouvert** est un système dont l'espace est traversé par de la matière.
Pour être conforme au programme, on n'étudie que l'écoulement dans le cas unidimensionnel.

Définition 10 : Régime stationnaire

Un système ouvert en **régime stationnaire** est un sytème pour lequel toutes les caractéristiques du fluide contenu à l'intérieur du système ne changent pas.

Définition 11 : Débits massiques

On se place dans le cas de systèmes ouverts en **régime stationnaire**. La masse étant une caractéristique du fluide, elle ne varie pas non plus.
C'est-à-dire que le débit de fluide massique entrant D_{m_e} est égal au débit massique de fluide sortant D_{m_s}, et on peut définir le **débit massique** D_m à travers le système comme étant $D_m = D_{m_e} = D_{m_s}$.
Si $\mathrm{d}m$ est la masse de fluide entrée/sortie pendant un court instant $\mathrm{d}t$:

$$D_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{1.25}$$

Souvent, on a le débit massique, l'équation plus pertinente serait donc $\mathrm{d}m = D_m \times \mathrm{d}t$

1.7.2 Premier principe

Théorème 11.1 : Grandeur extensive en régime stationnaire

Soit Y une grandeur extensive quelconque (*cf.* définition (7) page 105). Si y est la grandeur massique associée telle que $Y = y\ \mathrm{d}m$. Alors

$$\mathrm{d}Y_\Sigma = \mathrm{d}m\ \Delta y \qquad \text{avec } \Delta y = y_s - y_e \tag{1.26}$$

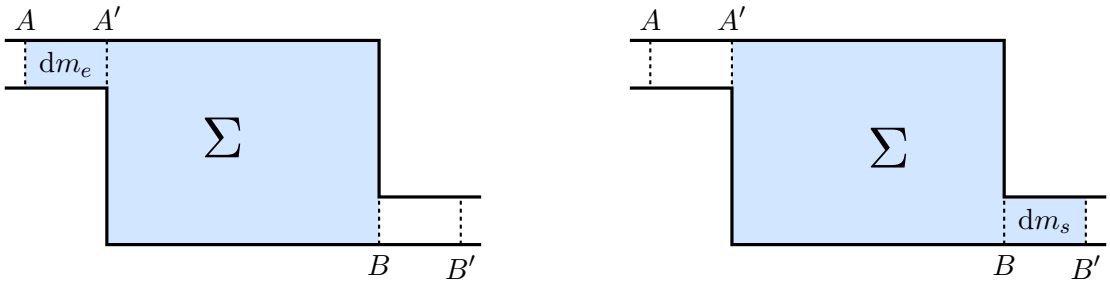
Preuve 11.1.1 *On étudie le système Σ représenté par la zone colorée sur la figure 1.1.*
Y est une grandeur extensive, donc on peut étudier le système aux différents instants :

$$\begin{aligned}
Y(\Sigma_{AB}) &= \underbrace{Y(\Sigma_{AA'})} + Y(\Sigma_{A'B}) \\
Y(\Sigma_{AB}) &= y_e\,\mathrm{d}m_e + Y(\Sigma_{A'B}) \\
Y(\Sigma_{A'B'}) &= Y(\Sigma_{A'B}) + \underbrace{Y(\Sigma_{BB'})} \\
Y(\Sigma_{A'B'}) &= Y(\Sigma_{A'B}) + y_s\,\mathrm{d}m_s
\end{aligned}$$

D'où la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_\Sigma &= Y_\Sigma(t+\mathrm{d}t) - Y_\Sigma(t) \\
&= \left(\cancel{Y(\Sigma_{A'B})} + y_s\,\mathrm{d}m_s\right) - \left(y_e\,\mathrm{d}m_e + \cancel{Y(\Sigma_{A'B})}\right) \\
\mathrm{d}Y_\Sigma &= \mathrm{d}m\ (y_s - y_e)
\end{aligned}$$

En notant $\Delta y = y_s - y_e$, on retrouve l'équation recherchée. □



(a) Système à t (b) Système à $t + \mathrm{d}t$

FIGURE 1.1 – Étude thermodynamique d'un système ouvert.
Le système est représenté en deux instants. À l'instant t, il se trouve entre les points A et B, et en $t + \mathrm{d}t$, il se trouve entre les points A' et B'. La zone entre A' et B (le système interne) sera notée $\Sigma_{A'B}$.

Théorème 11.2 : Premier principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **premier principe** s'écrit :

(1.27) $$\mathrm{d}m\Big(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p\Big) = \mathrm{d}m\big(q + w_u\big) \qquad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Toutes ces grandeurs **se rapportent au fluide** qui traverse le système et sont **massiques**. w_u est le travail massique utile à l'intérieur du système, par exemple une hélice, et ne prend pas en compte le travail des forces de pression.

(ATTENTION) Ça ressemble beaucoup au premier principe, mais c'est l'enthalpie qui rentre en jeu, car elle inclut u et le travail des forces de pression qui se trouvaient dans le membre de droite de l'équation.

Preuve 11.2.1 *On étudie le système Σ représenté par la zone colorée sur la figure 1.1.*
On peut considérer l'évolution de Σ comme le passage d'un système fermé à un autre : on part du système fermé Σ_{AB} à l'instant t, pour arriver au système ouvert $\Sigma_{A'B'}$ à l'instant $t + \mathrm{d}t$. On applique alors le premier principe (équation (1.4b) page 9) :

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p = \delta W + \delta Q$$
$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p = \delta W_u + \delta W_{pression} + \delta Q$$

Or en appliquant la formule (1.26) précédente :

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p = \mathrm{d}m(\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_p)$$

Ainsi :

$$\mathrm{d}m\ \ (\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_p) = \mathrm{d}m\ \ (w_u - Pv + q)$$

Et on reconnaît $h = u + Pv$, d'où l'équation finale :
$\mathrm{d}m\ \ (\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = \mathrm{d}m\ \ (w_u + q)$. □

1.7.3 Deuxième principe

Théorème 11.3 : Deuxième principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **second principe** s'écrit :

(1.28) $$\Delta s = s_{\text{échangée}} + s_{\text{créée}} \qquad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Comme pour le premier principe, ces grandeurs sont celles du fluide traversant le système et sont massiques.

Proof du Second Principe en SO

Chapitre 2

Transferts thermique

2.1 Conduction

C'est le phénomène à petite échelle qui se produit sans mouvement des particules lors d'une diffusion de chaleur. C'est un processus très lent.

Définition 12 : Vecteur densité de flux thermique

Le transfert thermique passant à travers une surface fermée $\mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$ sera caractérisé par le vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$. La quantité d'énergie qui traverse une surface orientée $\mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$ entre t et $t + \mathrm{d}t$ est :

$$\delta^2 Q = \overrightarrow{j_{\text{th}}} \mathrm{d}\vec{S}\ \mathrm{d}t \tag{2.1a}$$

En notant $\mathrm{d}\vec{S}_M = \mathrm{d}S\,\overrightarrow{n_M}$:

$$\varphi_{\overrightarrow{n_M}}(M,t) = \vec{j} \cdot \overrightarrow{n_M} \tag{2.1b}$$

Définition 13 : Flux Thermique

On appelle **flux thermique** la puissance d'un transfert thermique :

$$\delta Q = \Phi\,\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

On prendra φ tel que $\Phi = \varphi\, S$

Théorème 13.1

Le flux thermique $\Phi(t)$ traversant une surface $\mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$ est :

$$\Phi(t) = \iint_{M \in S_M} \vec{j}_{\text{th}}(M,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M} \tag{2.3}$$

C'est le flux du champ de vecteurs $\vec{j}_{\text{th}}(M,t)$.

Théorème 13.2 : Loi de Fourier

C'est une loi empirique qui donne la densité volumique de courant thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ en fonction d'un champ de températures T :

(**Fourier**)
$$\boxed{\overrightarrow{j_{\text{th}}} = -\underbrace{\lambda}_{\text{Conductivité Thermique}} \overrightarrow{\text{grad}}\,(T)}$$

$\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ est en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$,
λ est en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Conformément au programme, la loi de Fourier doit être interprétée :

Théorème 13.3 : Premier principe de Thermodynamique

Le premier principe de thermodynamique (équation (1.4a) page 9) s'énonce, en diffusion, avec :

(**2.4**)
$$\text{d}U = \delta Q + \mathcal{P}_{\text{prod}}\text{d}t$$

Souvent, $\mathcal{P}_{\text{prod}} = \iiint \mathcal{P}_V \text{d}V$

Théorème 13.4 : Bilan local d'énergie

Pour un système Σ de matière dans un volume $\mathcal{V}$ quelconque, de capacité thermique massique c et de masse volumique μ,

(**2.5**)
$$\mu c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j}_{\text{th}}(M,t) = \mathcal{P}_V(M,t)$$

Preuve 13.4.1 (Bilan à une dimension) *On suppose que la température ne dépend que d'une dimension, x par exemple. On compte appliquer le premier principe sous la forme :*

$$\text{d}^2U = \delta^2 Q + \delta^2 W$$

On étudie un cylindre de longueur $\text{d}x$, de section S (donc de volume $\mathcal{V} = S\text{d}x$). Si μ est la masse volumique du cylindre et c sa capacité thermique massique, alors la capacité thermique du cylindre étudié est $C = mc = \mu\mathcal{V}c = \mu S c\text{d}x$. On peut alors exprimer d^2U et $\delta^2 Q$:

$$\text{d}^2U = C\Delta T$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\text{d}^2U &= \mu S c\text{d}x(T(x,t+\text{d}t) - T(x,t)) \\
&= \mu S c\text{d}x\text{d}t\frac{T(x,t+\text{d}t) - T(x,t)}{\text{d}t} \\
\text{d}^2U &= \mu c\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} S\text{d}x\text{d}t
\end{aligned}$$

Finalement, puisqu'ici $\delta^2 W = 0$, on retrouve :

$$\mathrm{d}^2 U = \delta^2 Q + 0$$

soit :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} \cancel{S \mathrm{d}x \mathrm{d}t} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} \cancel{S \mathrm{d}x \mathrm{d}t}$$
$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} = 0$$

Qui est l'expression (2.5) □

Preuve 13.4.2 (Cas général) *On utilise le premier principe de thermodynamique vu plus haut. D'après un DL au premier ordre, on détermine :*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c \big(T(M, t + \mathrm{d}t) - T(M,t)\big) \mathrm{d}V \\ &= \left(\iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c \left(\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \right) \right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Le transfert thermique est, par définition de $\vec{j}$:

$$\delta Q = \left(- \oiint \vec{j}_{th} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \right) \mathrm{d}t$$

*Qui est, d'après l'équation d'*Ostrogradski (Ostrogradski) *page 99*

$$= \left(- \iiint_{M \in \mathcal{V}} \operatorname{div} j_{th} \mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t$$

Et enfin :

$$\mathcal{P}_{prod} \mathrm{d}t = \left(\iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_V \mathrm{d}V \right) \mathrm{d}t$$

Puisque le volume est constant et le même pour toutes les intégrales, on peut dire que : $\mu c \left(\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \right) = -\operatorname{div} j_{th} + \mathcal{P}_V$ □

Théorème 13.5 : Équation de diffusion thermique

Pour un champ T de températures, on a l'équation :

(2.6) $$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \overbrace{\Delta T}^{\text{Laplacien de } T} + P_v}$$

avec c la capacité calorifique massique à volume constant, μ la masse volumique, et λ définit comme précédemment.

Définition 14 : Résistance thermique

C'est la grandeur R_{th} telle que :

$$\boxed{(T_1 - T_2) = \Phi_{1\to 2}\, R_{th}}$$

Théorème 14.1 : Résistances usuelles

Pour deux plaques parallèles de surfaces S distantes de L :

$$\boxed{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}} \tag{2.8}$$

Pour deux cylindres coaxiaux de hauteur H, de rayons R_1 et R_2

$$R_{\text{th}} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda H} \tag{2.9}$$

2.2 Convection

Bien plus rapide que la conduction, c'est quand la diffusion thermique est accompagnée d'un mouvement de particules (par exemple quand on ouvre une fenêtre)

Définition 15

Encore une loi empirique, la loi phénoménologique de Newton :

$$\varphi_{\text{solide}\to\text{fluide}} = h(T_s - T_f) \tag{2.10}$$

Cette équation permet surtout de donner : $\boxed{\Phi_{\text{solide}\to\text{fluide}} = hS(T_s - T_f)}$

Par définition de R_{th} et par identification, l'interface entre un solide et un fluide a donc pour résistance $R_{\text{th}} = \dfrac{1}{hS}$

Chapitre 3

Statique des fluides

3.1 Champ de pression d'un fluide

Définition 16 : Définition générale

La pression et la masse volumique sont définies comme des champs scalaires fonctions des variables d'espace.

Théorème 16.1 : Relation fondamentale de la statique

Pour un champ de pesanteur $\vec{g}$, le champ de pesanteur P vérifie localement :

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} = \rho g \tag{3.1a}$$

où ρ est la masse volumique locale. On l'intègre en :

$$P(z) = P_0 + \rho g z \tag{3.1b}$$

La norme d'une force $\vec{F}_p$ exercée par une pression P sur une surface S est $\boxed{F = P \cdot S}$

3.2 Théorème d'Archimède

Théorème 16.2 : Poussée d'Archimède

Un corps entièrement immergé dans un liquide subit une force opposée au poids du volume du fluide déplacé. C'est à dire :

$$\vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g} \tag{3.2}$$

Chapitre 4

Électronique

Méthode

Résoudre

Loi des nœuds	$\sum_{\text{Nœud}} i = 0$	**Loi des mailles**	$\sum_{\text{Maille}} u = 0$
Puissance	$\mathcal{P} = u \times i$	**Énergie électrique reçue**	$\Delta E = \int_{\Delta t} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t$
Inductance	$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	**Capacité**	$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
	$E = \frac{1}{2}Li^2$		$E = \frac{1}{2}Cu^2$

Lois de Kirchoff

Pour ne pas avoir trop d'équations redondantes avec les lois de Kirchoff, on pourra suivre la méthode suivante :

- On compte le nombre b de branches et n de nœuds.
- On écrit $(n-1)$ lois des nœuds
- On écrit $\big((b-(n-1)\big)$ lois des mailles
- On résout le système final

4.1 Circuits linéaires dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

Définition 17 : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

On parle d'ARQS quand le courant se propage assez rapidement pour pouvoir considérer que son établissement est instantané.
Ainsi, pour une Onde Électromagnétique (OEM) sinusoïdale de période temporelle T et de

période spatiale λ, telle que $\lambda = c \cdot T$ (où c désigne la vitesse de l'onde), et pour un observateur situé à une distance D d'un point quelconque du circuit, on est dans le cadre de l'ARQS si $D \ll \lambda$.

Définition 18

Un courant électrique résulte d'un déplacement de charges q. On peut dès lors définir l'intensité I et la tension U d'un dipôle :

(4.1) $$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad U_{AB} = V_A - V_B$$

Théorème 18.1 : Loi d'Ohm

Loi d'Ohm Globale

(4.2) $$u = Ri \qquad i = Gu$$

4.1.1 Thévenin-Norton

Théorème 18.2 : Équivalence de Thévenin-Norton

Dans le modèle de Thévenin, un générateur de tension est la combinaison d'un générateur de tension idéal de *Force Électromotrice* E et d'une résistance interne R :

(4.3) $$u = E - Ri$$

Ce générateur est équivalent, dans le modèle de Norton, à la combinaison d'un générateur de courant idéal de *courant de court-circuit* $I_0 = \frac{E}{R}$ et d'une résistance R en parallèle $\left(\text{on prendra } G = \frac{1}{R}\right)$:

(4.4) $$i = I_0 - Gu$$

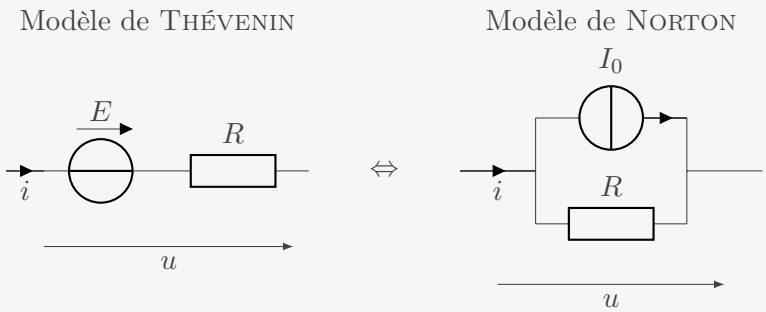


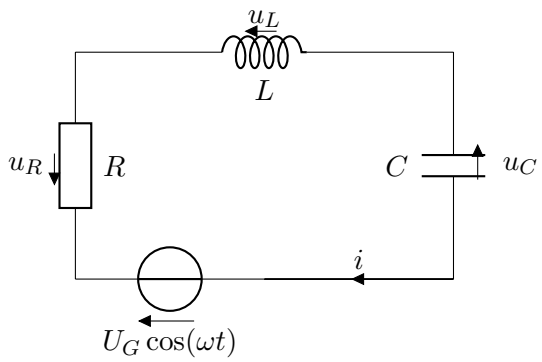
Figure 4.1 – Équivalence Thévenin-Norton

Pont diviseur

4.2 Régime transitoires

Mise en équation :

$$\begin{cases} u_C + u_L + u_R = U_G \cos(\omega t) \\ u_R = Ri \\ u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$



4.3 Amplificateur Opérationnel (AO)

Définition 19 : L'Amplificateur Opérationnel

Un Amplificateur Opérationnel (AO) est un **circuit intégré** à huit bornes dont 5 sont utilisées en TP. C'est un composant **actif** qui doit être alimenté par un courant stable continu.

Propriétés

Les propriétés générales d'un AO :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation : $V_S \in [-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}]$
- L'intensité de sortie est limitée par une valeur de saturation : $I_S \in [-I_{\text{sat}}; I_{\text{sat}}]$

En régime linéaire (avec une boucle de **rétroaction négative**), on a :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est **presque nulle** : $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation : $V_S \in]-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}[$

Au contraire, en régime saturé (avec une boucle de **rétroaction positive**), on a :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est **quelconque** : $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est saturée du signe d'ε : $V_S \in \{-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}\}$

Enfin, l'AO idéal a les propriétés suivantes :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont nuls : $I_- = I_+ = 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est nulle en régime linéaire : $\varepsilon = 0$

4.4 Régimes sinusoïdaux

Méthode

Formules

Théorème de Millman $$V_0 = \frac{\displaystyle\sum_k \frac{V_k}{\underline{Z}_k}}{\displaystyle\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

Puissance moyenne $$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_0 I_0 \cos\varphi}{2}$$

Étudier un circuit électrique

Lorsqu'on doit étudier un circuit, il peut être utile de penser aux méthodes suivantes :

- Calculer les impédances équivalentes
- Utiliser des ponts diviseurs
- Appliquer les lois de Kirchoff
- Trouver des équivalences Thévenin-Norton
- Appliquer la formule de Millman

Théorème 19.1 : Impédance des dipôles usuels

On donne, pour les dipôles usuels, leur impédance en complexes $\underline{Z}$:

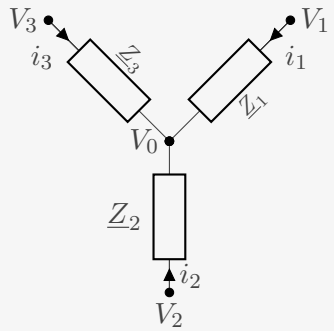
Dipole	$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$	
Résistance	$\underline{u} = R \cdot \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Résistance}} = R$
Bobine	$\underline{u} = L \cdot \frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = j\omega L \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Bobine}} = jL\omega$
Condensateur	$C\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} = \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$

Preuve 19.1.1 *On remarque que pour des fonction complexes, dériver $f = re^{j(\omega t+\varphi)}$ revient à mutiplier f par $j\omega$. On obtient alors immédiatement toutes les formules précédentes en les exprimant bien sous la forme $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$*

Théorème 19.2 : Millman

Le théorème de Millman permet de calculer le potentiel d'un nœud

$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}} \tag{4.5}$$



4.4.1 Puissance

Définition 20 : Puissance instantanée

La **puissance instantanée** est une fonction du temps :

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t) \tag{4.6}$$

En **convention récepteur**, c'est la puissance reçue par le dipôle.
En **convention générateur**, c'est la puissance cédée par le dipôle.

Définition 21 : Energie

L'**énergie** est l'intégrale de la puissance :

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t \tag{4.7}$$

Définition 22 : Puissance moyenne

On s'intéresse plus souvent à la **puissance moyenne** $\mathcal{P}_m$ sur un intervalle de temps τ

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t \tag{4.8}$$

En général, on prend $\tau = T$ la période d'une fonction sinusoïdale.

On definira la **valeur moyenne** d'une fonction du temps de cette même manière :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T}\int_0^{T} u(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.9}$$

Théorème 22.1 : Valeur efficace

La **valeur efficace** est la valeur continue qui fournirait la même energie pendant un

même intervalle de temps. Pour une tension $u(t) = Ri(t)$:

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t} \tag{4.10}$$

La valeur efficace est donc la racine carrée de la moyenne du carré, en anglais *Root Mean Square* (RMS).

Preuve 22.1.1 *Par définition de la valeur efficace, on doit avoir :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= U_{RMS}\, I_{RMS} \times T \\
\int_0^T u(t)i(t)\mathrm{d}t &= U_{RMS}\frac{U_{RMS}}{R}T \\
\int_0^T \frac{u^2(t)}{\cancel{R}}\mathrm{d}t &= \frac{U_{RMS}^2}{\cancel{R}}T \\
U_{RMS} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Pour un **régime sinusoidal**, $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$, donc :

$$\boxed{U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2\cos^2(\omega t)\mathrm{d}t} = \frac{U}{\sqrt{2}}}$$

4.5 Filtres

Définition 23 : Fonction de transfert

La **fonction de tranfert** $\underline{H}$ d'un quadripôle de tension d'entrée $\underline{v}_e$ et de tension de sortie $\underline{v}_s$ est définie par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} \tag{4.12}$$

Définition 24 : Filtre

Un **filtre** est un quadripôle dont la fonction de tranfert dépend de la pulsation ω

4.5.1 Fonctions de transfert usuelles

1er ordre	**Passe-bas**	$\dfrac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$	$\omega_c = \dfrac{1}{RC}$
	Passe-haut	$\dfrac{H_0}{1-j\dfrac{\omega_c}{\omega}} = \dfrac{H_0\frac{j\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$	
2e ordre	**Passe-bas**	$\dfrac{H_0}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}}$	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$
	Passe-haut	$\dfrac{-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}}$	
	Passe-bande	$\dfrac{H_0}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$	
	Coupe-bande	$\dfrac{H_0\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}}$	

4.5.2 Diagrammes de Bode

Définition 25 : Gain et phase d'un quadripôle

On peut écrire la fonction de transfert sous la forme polaire :

$$\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

On définit alors le **gain** $G(\omega)$ comme le rapport des amplitudes d'entrées et de sortie et la **phase** $\varphi(\omega)$ comme le déphasage entre ces mêmes signaux.
Ainsi :

$$G(\omega) = \sqrt{\underline{H}\overline{\underline{H}}} \qquad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\underline{H}}{\mathrm{Re}\underline{H}} \tag{4.13}$$

Définition 26 : Diagramme de Bode

Le **diagramme de Bode** d'un quadripôle est l'ensemble des deux tracés en fonction de $\log(\omega)$:

- du gain en décibel $G_{\text{dB}} = 20\log(G(\omega))$
- de la phase $\varphi(\omega)$

(Attention) Il est souvent commode d'avoir recours à une variable réduite comme $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ où ω_0 est une constante qui permet de simplifier les calculs

Définition 27 : Pulsation de coupure à -3 dB

La **pulsation de coupure** ω_c correspond à la valeur de la pulsation pour laquelle le gain maximum G_{max} est divisé par $\sqrt{2}$:

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \tag{4.14}$$

Chapitre 5

Traitement du signal

5.1 Signaux périodiques

Définition 28 : Signal périodique

On appelle **signal périodique** de période T_s un signal sous la forme tel que :

$$s(t + T_s) = s(t) \tag{5.1}$$

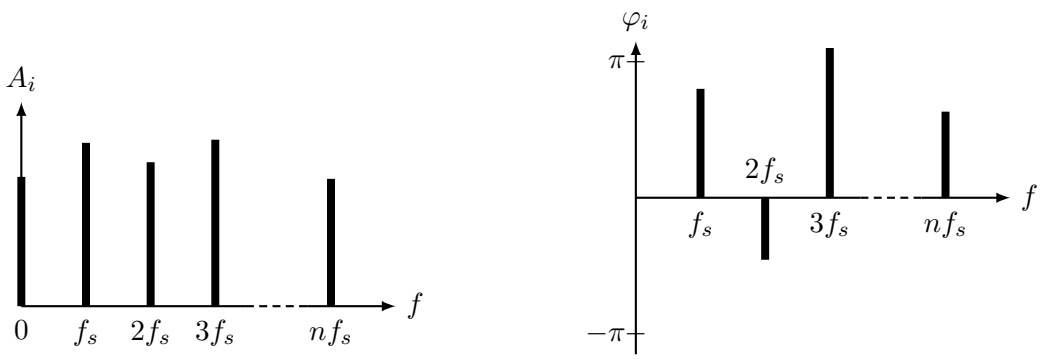
Remarque : Pour le moment, notre signal a une forme quelconque, il n'est pas, *a priori*, sinusoïdal.

Théorème 28.1 : Développement en série de Fourier

Tout signal périodique de fréquence f_s peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_s (sous la forme nf_s). C'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos\left(2\pi\ nf\ t + \varphi_n\right) \tag{5.2}$$

où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes.



(a) Spectre en amplitude

(b) Spectre en phase

Figure 5.1 – Spectre d'un signal périodique

5.2 Électronique numérique

Définition 29 : Échantillonage

L'**échantillonage** d'un signal consiste à prélever à intervalles de temps réguliers T_e la valeur d'un signal analogique $s(t)$.
Le signal s_n^* obtenu est alors une suite, et $s_n^* = s(n\ T_e)$.

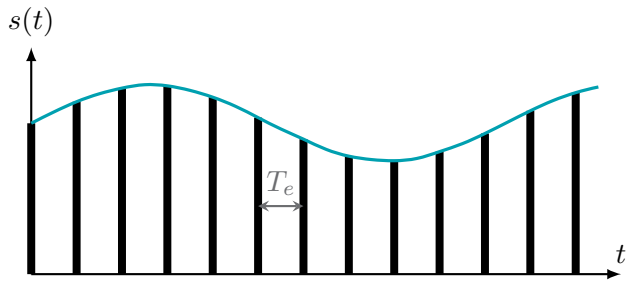


FIGURE 5.2 – Échantillonage

Théorème 29.1 : Condition de NYQUIST-SHANNON

Pour que l'échantillonage d'un signal ne modifie pas son spectre, il faut que la fréquence d'échantillonage $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ soit supérieure au double de la plus grande fréquence $f_{\max}$ contenue dans ce spectre :

$$f_e > 2 f_{\max} \tag{5.3}$$

Chapitre 6

Mécanique du Point

Méthode

Formules Usuelles

Intéractions fondamentales

Force Gravitationnelle	$\vec{F}_{A\to B} = -\mathcal{G}\dfrac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_r$
Force Électrostatique	$\vec{F}_{A\to B} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_a q_b}{r^2}$

Forces usuelles

Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$
Force de Lorentz	$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$
Force de Rappel	$\vec{F} = k(l-l_0)\vec{u}_{\text{ressort}}$

Énergies usuelles

Energie potentielle générale	$E_p(A) - E_p(B) = W_{A\to B}$
Energie potentielle gravitationnelle	$E_p = -\mathcal{G}\dfrac{m_A m_B}{r_{AB}}$
Energie potentielle de pesanteur	$E_p = mgh$
Energie cinétique	$E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$
Energie potentielle élastique	$E_{p,e} = \dfrac{k(l-l_0)^2}{2}$

6.1 Étude cinétique

Définition 30 : Force de Rappel

Cette force est déterminée expérimentalement, au voisinage d'une longueur d'équilibre l_0, par :

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ressort}} \tag{6.1}$$

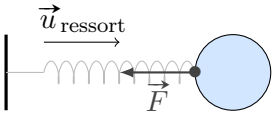


FIGURE 6.1 – Force de rappel d'un ressort

6.2 Loi de la quantité de mouvement

Définition 31 : Quantité de mouvement

Un point M de masse m de vecteur vitesse $\vec{v}$ possède une **quantité de mouvement** définie par la formule :

$$\vec{p}(M) = m\,\vec{v}(M) \tag{6.2}$$

Théorème 31.1

La **quantité de mouvement** d'un système Σ fermé de centre d'inertie G est

$$\vec{p}(\Sigma) = m\,\vec{v}(G) \tag{6.3}$$

6.3 Approche Énergétique

Définition 32 : Système conservatif

Un **système conservatif** est un système dont l'énergie mécanique $E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + E_{\text{p}}$ est constante.

Définition 33 : Force conservative

Une **force conservative** est une force dont le travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin emprunté.

Définition 34 : Force dérivée d'une énergie potentielle

Une force $\vec{f}$ **dérive d'une énergie potentielle** s'il existe une fonction E_{p} des coordonnées des points du système Σ telle que :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_{\text{p}} \tag{6.4}$$

6.3.1 Puissance et travail

Définition 35 : Puissance d'une force

La **puissance** caractérise la contribution d'une force $\vec{F}$ sur un objet en mouvement à une vitesse $\vec{v}$.

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{6.5}$$

Définition 36 : Travail d'une force

Le travail est la somme des contributions d'une force $\vec{F}$ sur un objet en mouvement :

$$\begin{aligned} \delta W &= \mathcal{P}\mathrm{d}t \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t \\ &= \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{6.7}$$

6.3.2 Énergie cinétique

Définition 37 : Énergie cinétique

C'est la première énergie qu'on définit :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.8}$$

Pour le **théorème de la puissance cinétique**, *cf* théorème 45.4 page 43. Le théorème de l'énergie cinétique a été vu en première année* :

Théorème 37.1

Il dérive de l'expression de l'énergie mécanique :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}E_m(\Sigma)}{\mathrm{d}t}}_{\mathcal{P}_{\text{action non conservatives}}} = \frac{\mathrm{d}E_c(\Sigma)}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}E_p(\Sigma)}{\mathrm{d}t}}_{\mathcal{P}_{\text{action conservatives}}} \tag{6.9}$$

Théorème 37.2 : Théorème de l'énergie cinétique

On peut déduire du théorème précédent que

La variation d'énergie cinétique	est égale à	la somme des travaux des forces
$E_c(B) - E_c(A)$	$=$	$\sum_i W_{A\to B}(\vec{F}_i)$
$\mathrm{d}E_c$	$=$	$\delta W_{A\to B}$

(6.10)

(Attention) Pour l'énergie cinétique, on prend toutes les forces en comptes. Conservatives ou non.

*. *cf* page 418 du livre *Physique !* de Jérome Majou

6.3.3 Énergie potentielle

Définition 38 : Énergie potentielle

L'énergie potentielle dérivant d'action conservatives, on peut la définir ainsi, en définissant un point O comme l'origine :

(6.11) $$E_p(M) = E_p(O) - W_{O\to M}\left(\vec{P}\right)$$

En pratique, sur Terre, $\boxed{E_p = mgh}$

6.4 Forces centrales

Définition 39 : Force centrale

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné, une force est **centrale** si elle pointe en permanence vers un point fixe de $\mathcal{R}$.
Un champ de force centrale newtonien est défini par

(6.12) $$\vec{F}(r) = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r \qquad E_p(r) = \frac{k}{r}$$

Théorème 39.1 : Loi des aires

Une force centrale présente un moment nul, donc le moment cinétique d'un objet soumis exclusivement à une force centrale est constant d'après le Théorème du Moment Cinétique (TMC) (théorème 45.3 page 42).
La **trajectoire** est alors **plane** et vérifie :

(6.13a) $$r^2\dot{\theta} = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m} = \mathrm{C}$$

D'où on déduit, en définissant $\mathcal{V}$ comme étant la vitesse aréolaire d'un point de masse m :

(6.13b) $$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\sigma_O}{2m} = \frac{C}{2}}$$

Preuve 39.1.1 *Les forces centrales ont un moment nul. Donc, d'après le TMC :*

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_O}{\mathrm{d}t} = 0$$

Donc $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{constante}$. *Or, par définition du moment cinétique (cf. équation (7.6) page 41) :*

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\\ &= mr\vec{u}_r \wedge (\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_r)\\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z\end{aligned}$$

Théorème 39.2 : Lois de Kepler

Les trois lois de Kepler ont été définies expérimentalement vers la fin du XVIe siècle :

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont l'un des foyers est le soleil
- Pendant un même intervalle de temps t, l'aire balayée par la trajectoire d'une planète est constante (loi des aires)
- La période T de révolution d'une planète est liée au demi grand axe a de sa trajectoire elliptique :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\, m_{\text{Soleil}}} \tag{6.14}$$

6.5 Dynamique en référentiel non galiléen

Définition 40 : Référentiel galiléen

On dit qu'un référentiel $\mathcal{R}$ est **galiléen** si **les intéractions physiques suffisent à justifier les mouvements**

(**Attention**) Cette définition limite la caractérisation d'un référentiel galiléen à la précision de nos expérimentations

Définition 41 : Mouvement relatif de deux référentiels

Le mouvement d'un référentiel $\mathcal{R}'$ relativement à un autre référentiel $\mathcal{R}$ est caractérisé par une **vitesse de translation** ($\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$) et une **vitesse angulaire de rotation** ($\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$).

Théorème 41.1 : Dérivation d'un vecteur dans deux référentiels

Si $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le vecteur rotation de $\mathcal{R}$ relativement à $\mathcal{R}$, alors la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{x}$ est

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{x} \tag{6.15}$$

6.5.1 Loi de composition des vitesses

Théorème 41.2 : Composition des vitesses

La vitesse d'un point M s'exprime, dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ en mouvement relativement à un autre référentiel $\mathcal{R}'$ galiléen, par :

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{\text{vitesse de M dans } \mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{vitesse de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} \tag{6.16}$$

6.5.2 Loi de composition des accélérations

Théorème 41.3 : Composition des accélérations

L'accélération d'un point M s'exprime, dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$ en mouvement relativement à un autre référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, par :

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{a}(O')_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left[\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right]}_{\text{Accélération d'entrainement}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{Accélération de Coriolis}} \tag{6.17}$$

6.5.3 Forces d'inerties

Les forces d'inerties varient suivant le référentiel. On en distingue 4 :

Force d'inertie de translation	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{translation}} = -m\,\vec{a}(O)_{\mathcal{R}}$
Force d'inertie centrifuge	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{centrifuge}} = m\,\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2\,r\,\vec{u}_r$
Force d'inertie de rotation différentielle	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{différentielle}} = -m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{OM}$
Force d'inertie complémentaire de Coriolis	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{coriolis}} = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$

Remarque : La force d'inertie de rotation différentielle est maintenant hors-programme, car on ne se place que dans des cas où la rotation est uniforme.

Frottement solide

Théorème 41.4 : Lois du frottement solide

Les **lois de Coulomb** définissent la composante tangentielle $\vec{T}$ en fonction du frottement solide et de la composante normale $\vec{N}$:

$$\begin{cases} \text{Statique} & \vec{T}_0 \leq \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement } \textbf{statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \overset{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement } \textbf{dynamique}} \times \vec{N} \end{cases} \tag{6.18}$$

Chapitre 7

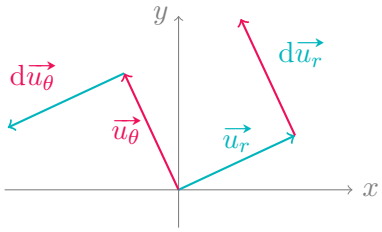
Mécanique du solide

7.1 Préambule

7.1.1 Dérivée d'un vecteur

Ce problème est courant quand on a les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ à dériver. Il suffit de les décomposer selon la base $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}$ en utilisant les fonctions cosinus et sinus. On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{u_r}\right)}{\mathrm{d}\theta} & = & \overrightarrow{u_\theta} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{u_\theta}\right)}{\mathrm{d}\theta} & = & -\overrightarrow{u_r} \end{array}\right. \tag{7.1}$$



D'où, en utilisant que $\dfrac{\mathrm{d}\left(\vec{u}\right)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\left(\vec{u}\right)}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, le résultat $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$

7.1.2 Dérivée en coordonnées polaires

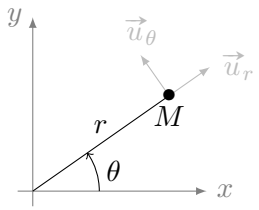


FIGURE 7.1 – Coordonées polaires

Théorème 41.5 : Vitesse et accélération en coordonées polaires

Soit $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$, comme représenté sur la figure 7.1.

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta \tag{7.2}$$

Preuve 41.5.1 *Il suffit de dériver* $\overrightarrow{OM}$ *:*

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} \\
&= \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{u}_r}{\mathrm{d}\theta} \\
\vec{v} &= \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \\
\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta
\end{aligned}$$

Théorème 41.6 : Relation de Varignon

Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir : la formule de «**Babar**»

(7.3) $$\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathbf{B}}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathbf{A}}} + \overrightarrow{\mathbf{BA}} \wedge \vec{\mathbf{R}}$$

Rappel : La quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{v}$ se conserve. Cette idée est souvent utile en mécanique.

7.2 Définitions

Définition 42 : Moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ d'une force

On définit le **moment** $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ (équivalent couple $\vec{\Gamma}$) d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M sur un levier de centre O :

(7.4) $$\underset{\text{Moment}}{\overrightarrow{\mathcal{M}}} = \underset{\text{Couple}}{\vec{\Gamma}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

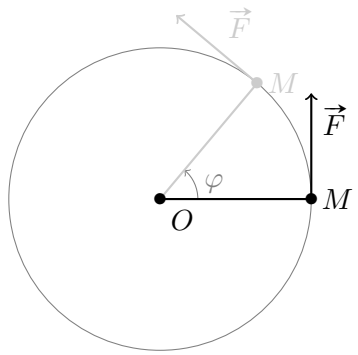


Figure 7.2 – Moment d'une force

Définition 43 : Torseur cinétique

C'est un torseur tout simple $[\vec{\sigma}, \vec{p}]$

(7.5) $$\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}}$$

Rappel : La vitesse de rotation ω permet de déterminer la vitesse $\vec{v}$. Pour un solide en rotation autour d'un axe Δ :

$$\begin{array}{lrcl} \text{D'après Varignon, on a} & \vec{v}(M) & = & 0+\vec{\omega}(\Sigma)\wedge\overrightarrow{OM} \\ \text{D'où} & \vec{\omega}(\Sigma) & = & \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\Delta \\ \text{Dans le mouvement précédent} & v(M) & = & \omega\cdot\underset{rayon}{OM} \end{array}$$

Définition 44 : Moment cinétique $\vec{\sigma}_O$

Le moment cinétique caractérise le mouvement de rotation d'un point par rapport à un autre. Il suffit de prendre la relation de notre torseur précédent, appliqué en O sans mouvement :

(7.6) $$\vec{\sigma}_O = m\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}$$

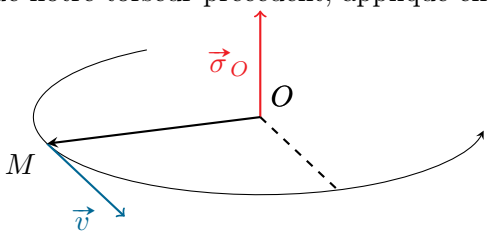


FIGURE 7.3 – Moment cinétique

7.3 Théorèmes de Koënig

Théorème 44.1 : 1e théorème de Koënig

C'est le torseur cinétique appliquée en A par rapport à G le centre du référentiel barycentrique :

(7.7) $$\vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}_{Br}}_{\text{Moment cinétique du référentiel barycentrique}} + \overrightarrow{AG}\wedge M\vec{v}(G)$$

Théorème 44.2 : 2e théorème de Koënig

Une application du premier théorème à l'énergie cinétique :

(7.8) $$E_{c,R} = E_{c,Br} + \frac{1}{2}M\left(\vec{v}(G)\right)^2$$

7.4 Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide caractérise la répartition de la masse dans un solide.

Définition 45 : Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide Σ par rapport à un axe Δ est :

(7.9) $$J_\Delta = \iiint\limits_{P\in\Sigma} \mathrm{d}(P,\Delta)^2\,\mathrm{d}m = \iiint\limits_{P\in\Sigma} \mathrm{d}(P,\Delta)^2\,\rho \mathrm{d}V_P$$

Où $\mathrm{d}(x,\Delta)^2$ est la distance à l'axe Δ d'un volume élémentaire $\mathrm{d}V$ de masse volumique ρ dans le solide Σ.

Théorème 45.1

On relie la vitesse de rotation d'un axe Δ du solide à J_Δ par

(7.10) $$\boxed{\vec{\sigma} = J_\Delta \cdot \omega \vec{u}_\Delta}$$

et on peut alors calculer l'énergie cinétique :

(7.11) $$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \cdot \omega^2$$

7.5 Théorèmes de dynamique

Ce sont les 3 théorèmes les plus importants.

Théorème 45.2 : Théorème de la Résultante Cinétique (TRC)

C'est en réalité le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) qu'on voit en terminale et en première, mais la version originale avec la quantité de mouvement.

(7.12) $$\frac{\mathrm{d}\overbrace{\vec{P}_{R_g}}^{m\vec{v}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \text{ est équivalent à } \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Théorème 45.3 : Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Pour un couple $\overrightarrow{\Gamma_{\text{ext}}}(A)$ issu des forces extérieures appliquées en A et un moment cinétique $\vec{\sigma}(A)$ appliqué en un point A, on a :

(7.13a) $$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(A)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$$

Qu'on peut aussi écrire :

(7.13b) $$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(A)}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(A)$$

C'est un équivalent du PFD, mais qui prend en compte la rotation, c'est à dire le

moment cinétique. Pour les définitions du moment d'une force et du moment cinétique, on se réfèrera à la formule (7.6). On est souvent amené à utiliser cette équation en conjonction avec l'équation (7.10) du moment d'inertie.

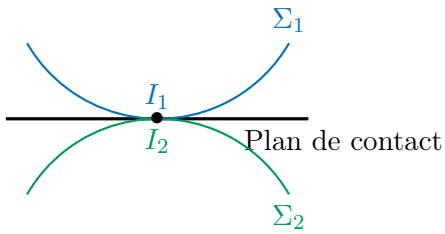
Théorème 45.4 : Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i P_i}_{\text{Puissances des forces qui travaillent}} \tag{7.14}$$

7.6 Solides en contact

On définit la **vitesse de glissement instantané** entre deux solides Σ_1 et Σ_2 par :

$$\boxed{\vec{v}_{\text{glissement}} = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)} \tag{7.15}$$



Définition 46 : Roulement sans glissement

Deux conditions :

- $\vec{v}_{\text{glissement}} = 0$
- $\vec{\omega}_{/\Sigma_2}(\Sigma_1)$ est parallèle au **plan de contact**

Théorème 46.1 : Lois du frottement solide

Les **lois de Coulomb** définissent la composante tangentielle $\vec{T}$ en fonction du frottement solide et de la composante normale $\vec{N}$:

$$\begin{cases} \text{Statique} & \vec{T}_0 = \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement } \textbf{statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \left| \begin{array}{l} \geq \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement textbf dynamique}} \times \vec{N} \\ \overset{RSG}{=} \overbrace{f} \times \vec{N} \end{array} \right. \end{cases} \tag{7.16}$$

Chapitre 8

Optique

8.1 Optique géométrique

Méthode

Formules de conjugaison

Miroir $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$

$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

Lentille $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$

Techniques

- Les dessins miroirs peuvent être «développés» pour obtenir la représentation d'une lentille
- Règles de construction pour les dioptres et les miroirs
  - Un rayon passant par le centre n'est pas dévié
  - Un rayon incident parallèle à l'axe passe, après son passage par le système optique, par le foxer image
  - Un rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique
  - Deux rayons parallèles à l'axe se croisent au foyer image
  - Deux rayons se croisants au foyer objet ressortent parralèles du système optique
- Ne pas oublier le **principe de retour inverse de la lumière**

8.1.1 Stigmatisme et aplanétisme

Définition 47 : Système stigmatique

Un système optique est dit **rigoureusement stigmatique** pour le couple de points $(A; A')$ si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir été déviés par le système.
Si A' est une tâche assez petite au lieu d'un point, on parle de **stigmatisme approché**

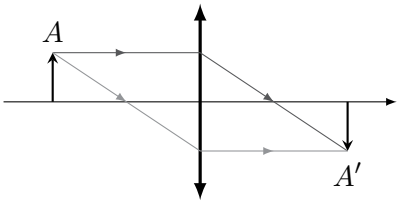


FIGURE 8.1 – Système rigoureusement stigmatique

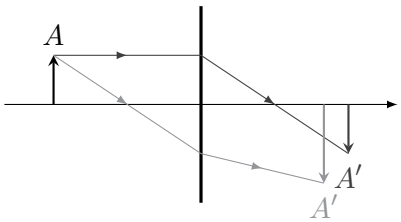


FIGURE 8.2 – Système non stigmatique

Définition 48 : Système aplanétique

Soit (S) un système optique. Soient A et A' deux points de l'axe optique conjugués par (S) et soit B un point du plan transverse de A,. Le système est dit **aplanétique** pour A si B', le conjugué de B par (S), est dans le plan transverse de A'.

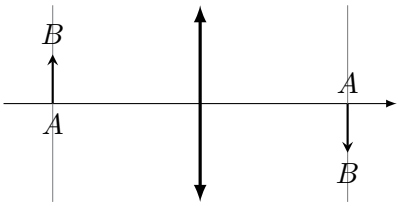


FIGURE 8.3 – Système rigoureusement aplanétique

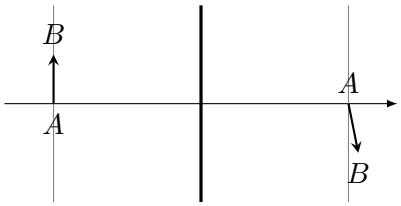


FIGURE 8.4 – Système non aplanétique

Définition 49 : Conditions de GAUSS

Les **conditions de GAUSS** permettent de vérifier l'aplanétisme et le stigmatisme approchés :

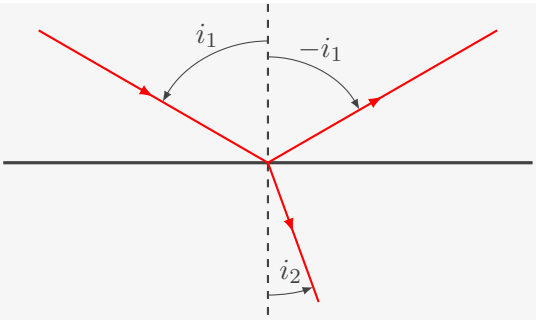
- Les rayons lumineux font un **angle petit** avec l'axe du système
  On parle de **rayons paraxiaux**
- Les rayons lumineux **rencontres** les dioptres ou les miroirs **au voisinage de leur sommet**
- **L'angle** d'incidence des rayons sur les dioptres ou les miroirs **est petit**

8.1.2 Réflexion et réfraction

Théorème 49.1 : Loi de DESCARTES

La loi de DESCARTES stipule que l'angle de **réflexion** est le même que l'angle d'incidence. De plus, la loi permet de calculer l'angle du rayon **réfracté** :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{8.1}$$



8.2 Optique ondulatoire

Méthode

Définitions

$$s(M,t) = A\,(M) \cos\left(\omega t - \varphi\,(M)\right)$$

Périodicité temporelle	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$	Vibration Complexe	$\underline{s(M,t)} = A\,(M) e^{i(\varphi\,(M) - \omega t)}$
Périodicité spatiale	$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	Amplitude Complexe	$\underline{a\,(M)} = A\,(M) e^{i\varphi\,(M)}$
$c = \lambda\nu$	$\lambda = cT$	Éclairement (*cf.* (8.8))	$\mathcal{E} = K\langle s(M,t)^2\rangle$

Propriétés

$$s(M,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{s(M,t)}\right) \qquad \varphi\,(M) = \arg\left(\underline{a\,(M)}\right)$$

$$A\,(M) = \left|\underline{a\,(M)}\right| = \left|\underline{s(M,t)}\right| \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2} K \left|\underline{a\,(M)}\right|^2 = \frac{1}{2} K \left|\underline{s(M,t)}\right|^2$$

8.2.1 Modèle scalaire des ondes lumineuses

Définition 50 : Onde Électromagnétique (OEM)

Une OEM est le couple $(\vec{E}, \vec{B})$. C'est l'oscillation couplée du champ électrique $\vec{E}$ et du champ magnétique $\vec{B}$.

Définition 51 : Vibration lumineuse

Le modèle ondulatoire de la lumière étant plus vieux que les OEMs, la **vibration lumineuse** $s(M,t)$ est une composante quelconque du champ électromagnétique.
C'est-à-dire que $s(M,t) = \vec{E}$ ou $\vec{B}$.

Théorème 51.1 : Superposition

On admet que la vibration lumineuse en un point M à l'instant t est la somme des toutes les vibrations lumineuses en ce point :

$$s(M,t) = \sum_i s_i(M,t) \tag{8.2}$$

Chemin optique

Définition 52 : Chemin optique

Soit un rayon lumineux passant par les points M et N en un temps t_{MN}. Le **chemin optique** (MN) parcouru par la lumière est :

$$(MN) = c \cdot t_{MN} \tag{8.3}$$

En milieu homogène où l'onde se déplace à une vitesse v, si MN est la distance parcourue, on a $t_{MN} = \dfrac{MN}{v}$.

Théorème 52.1 : Déphasage dû à la propagation

Soient deux point M et N de chemin optique (MN). Le **retard de phase** en N par rapport à la phase au point M est :

$$\varphi\,(N) = \varphi\,(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) = \varphi\,(M) + \frac{\omega}{c}(MN) \tag{8.4}$$

Preuve 52.1.1 *Le retard en temps accumulé en N est de t_{MN}. Donc :*

$$s(N,t) = \underbrace{s\big(M, t - t_{MN}\big)}_{\textit{Vibration en } M,\, t_{MN} \textit{ secondes plus tôt}}$$

Donc :

$$A\,(N)\cos(\omega t - \varphi\,(N)) = A\,(M)\cos\Big(\omega(t - t_{MN}) - \varphi\,(M)\Big)$$

Ce qui implique :

$$-\varphi\,(N) = -\omega t_{MN} - \varphi\,(M)$$

Or par définition de (8.3) : $t_{MN} = \dfrac{(MN)}{c}$, d'où :

$$\begin{aligned}\varphi\,(N) &= \varphi\,(M) + \frac{\omega}{c}(MN)\\ &= \varphi\,(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN)\end{aligned}$$

Avec $\lambda_0 = cT = c\dfrac{2\pi}{\omega}$ la longueur d'onde dans le vide. □

Théorème 52.2 : Réflexion métallique

La lumière subit un déphasage de π lors de sa réflexion dans un matériau. Le chemin optique se voit modifié de $\frac{\lambda_0}{2}$:

$$\varphi \text{ (Avant réflexion)} = \varphi \text{ (Après réflexion)} + \pi \tag{8.5a}$$

$$\varphi \text{ (Avant réflexion)} = \varphi \text{ (Après réflexion)} + \frac{\lambda_0}{2} \tag{8.5b}$$

Trains d'onde

Le modèle de train d'onde considère une onde lumineuse comme un ensemble de trains d'ondes émis aléatoirement. Il y a donc, pour chaque train d'onde, un temps et une longueur «de cohérence» pendant lequel un autre train d'onde peut interférer.

Théorème 52.3 : Temps de cohérence

Les atomes émettent la lumière par trains d'ondes de durée limitée τ_c telle que :

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c} \tag{8.6}$$

La durée moyenne des trains d'ondes est appelée **temps de cohérence**.

Définition 53 : Longueure de cohérence

La **longueur de cohérence** l_c est la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant τ_c :

$$l_c = c\,\tau_c \tag{8.7}$$

l_c représente la longueur moyenne d'un train d'onde.

Éclairement et intensité

Les récepteurs de lumière (comme l'œil et les capteurs CCD) sont sensibles à une valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent. Il convient alors de définir l'éclairement pour décrire ce que l'on voit.

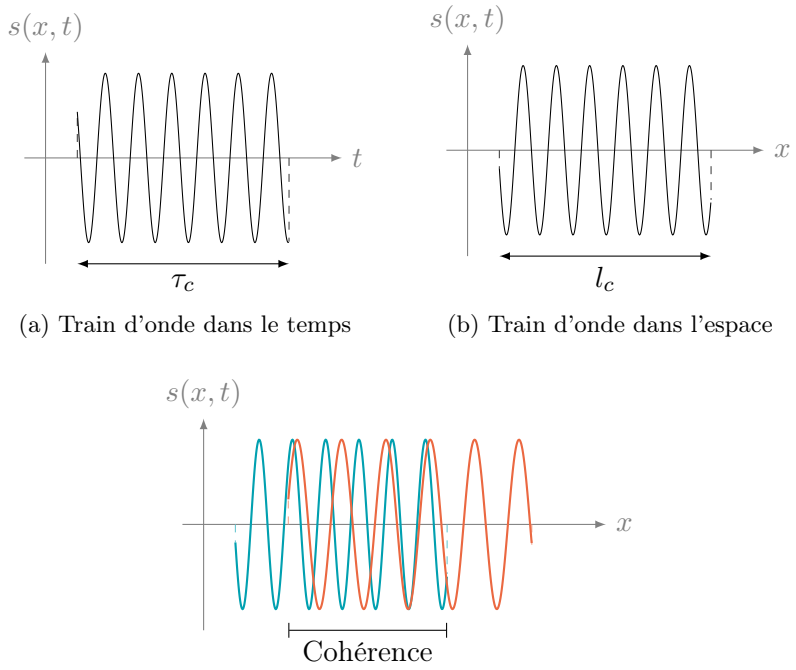
Définition 54 : Éclairement

Les capteurs photo-sensibles ayant un taux de rafraîchissement lent relativement à la vitesse de la lumière et à sa pulsation ω, ils font une moyenne sur une période de la vibration reçue. C'est alors qu'on définit l'**éclairement** :

$$\mathcal{E} = K\langle s(M,t)^2\rangle \tag{8.8}$$

8.2.2 Superposition d'ondes lumineuses

Lumière monochromatique



(a) Train d'onde dans le temps

(b) Train d'onde dans l'espace

(c) Trains d'onde cohérents

FIGURE 8.5 – Trains d'onde dans le temps et dans l'espace

Définition 55 : Lumière monochromatique

La **lumière monochromatique** est la forme la plus idéale de vibration. Elle est «purement» sinusoïdale :

$$s(M,t) = A\,(M)\cos(\omega t - \varphi\,(M)) \tag{8.9}$$

Cette vibration présente une périodicité temporelle et une périodicité spatiale :

- Périodicité temporelle :
  caractérisée par la **période** T, la fréquence $\nu = \dfrac{1}{T}$, et la **pulsation** ω

  $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Périodicité spatiale :
  caractérisée par la **longueur d'onde** λ (**période spatiale**), le **nombre d'onde** $\sigma = \dfrac{1}{\lambda}$ (fréquence spatiale), et le **module d'onde** (pulsation spatiale) k :

  $$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On les relie avec la vitesse de propagation :
Pour la lumière dans le vide :

$$\lambda_0 = cT \tag{8.10}$$

Interférences

Prenons deux sources S_1 et S_2, de vibrations respectives $s_1(M,t) = A_1(M)\cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$ et $s_2(M,t) = A_2(M)\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$.

Théorème 55.1 : Formule de Fresnel

Pour le système ainsi définit, l'éclairement résultant d'interférences est donné par la **formule de Fresnel** :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \underbrace{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}_{\text{Nul si } \omega_1 \neq \omega_2} \tag{8.11}$$

Ainsi, le terme d'interférence $2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}\cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$ n'est valable que si :

- Les ondes 1 et 2 doivent être de même pulsation (i.e $\omega_1 = \omega_2$)
- Les sources S_1 et S_2 doivent être cohérentes
- Le déphasage ne doit pas dépasser la longueur de cohérence l_c
- Le déphasage doit être quasiment constant sur une durée du temps de réponse du détecteur utilisé

Preuve 55.1.1 *On exprime l'éclairement total en M, $\mathcal{E}(M)$:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(M) &= K\langle\Big(s_1(M,t) + s_2(M,t)\Big)^2\rangle \\ &= K\langle(s_1(M,t))^2\rangle + K\langle(s_2(M,t))^2\rangle + 2K\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\rangle \\ &= \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2K\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\rangle\end{aligned}$$

Étudions ce deuxième terme $\mathcal{E}_{12}(M) = 2K\langle s_1(M,t)s_2(M,t)\rangle$:

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2KA_1(M)A_2(M)\langle\cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))\rangle$$

D'après la formule de trigonométrie (13.3) page 92 ($\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$) :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = \frac{1}{2} \times 2KA_1(M)A_2(M)\Big(\langle\cos\big((\omega_1+\omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)\big)\rangle + \langle\cos\big((\omega_1-\omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)\big)\rangle\Big)$$

La valeur moyenne d'un cosinus étant nulle, on sait de plus que :
$\langle\cos\big((\omega_1+\omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)\big)\rangle = 0$ *car* $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$, *et que*
$\langle\cos\big((\omega_1-\omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)\big)\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$.

Si on considère que $\omega_1 - \omega_2 = 0$, alors le deuxième terme $\mathcal{E}_{12}(M)$ devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{12}(M) &= K A_1(M) A_2(M) \langle \cos\left(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right)\rangle \\ &= 2\sqrt{\frac{K}{2} A_1(M)^2}\sqrt{\frac{K}{2} A_2(M)^2} \langle \cos\left(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right)\rangle \\ &= 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\ \mathcal{E}_2(M)} \langle \cos\left(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right)\rangle\end{aligned}$$

Comme précédemment, $\langle \cos\left(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right)\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ est constant.
Alors, $\langle \cos\left(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right)\rangle = \cos\left(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)\right)$ □

***Remarque** : en complexe, ça va beaucoup plus vite.*

Contraste

Définition 56 : Contraste, visibilité

Sur une figure d'interférence, on appelle **contraste** ou **visibilité** le rapport :

(8.12) $$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Théorème 56.1

Le contraste est maximal lorsque $I_1 = I_2$ dans la formule de Fresnel (8.11)

8.2.3 Trous d'Young

Étudions le dispositif suivant : deux fentes (F_1) et (F_2) sont éclairées par une source S à l'infini formant un angle α_0 avec l'origine.

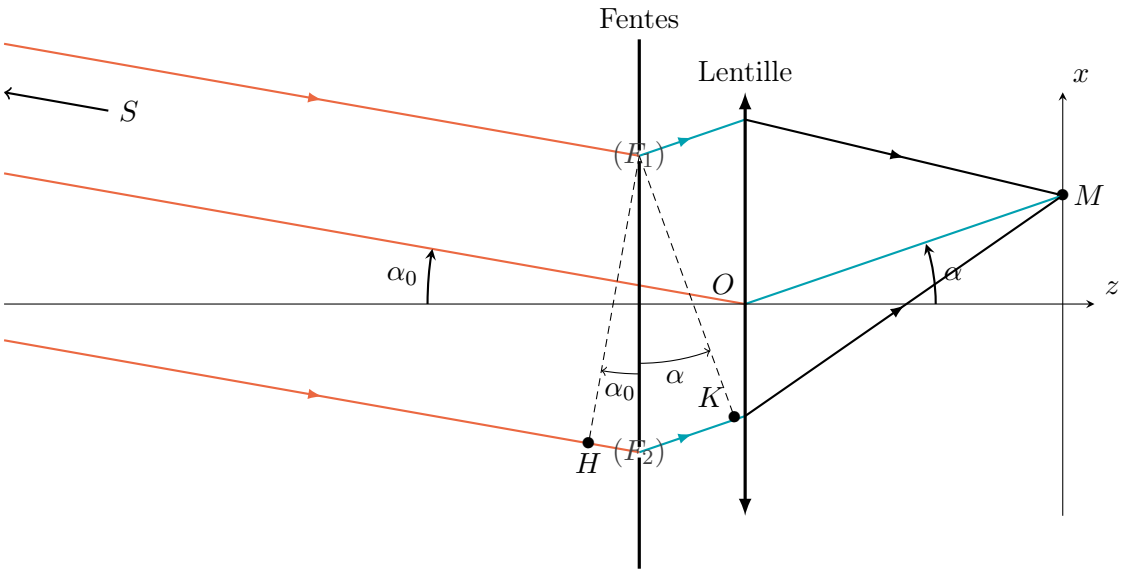


Figure 8.6 – Dispositif des trous de Young

Quelques remarques : Puisque M est dans le plan transversal du foyer de la lentille, on sait que les rayons bleus sont parallèles avant de passer par la lentille.

De plus, **la présence de la lentille F' impose que l'on soit dans les conditions de Gauss pour l'angle α** (*cf.* définition 49 page 45 pour les conditions de Gauss).
Ainsi, on peut écrire l'approximation

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{x}{f'}$$

avec f' la distance focale de la lentille F'.

Pour nous aider dans les calculs, on note H et K les projetés orthogonaux de (F_1). Calculons la différence de marche $\delta(M)$:

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SF_2M) - (SF_1M)\\ &= (SH) + (HF_2) + (F_2K) + (KM) - \big((SF_1) + (F_1M)\big)\end{aligned}$$

Les chemins optiques en couleur se soustraient. Il nous reste :

$$\delta(M) = (HF_2) + (F_2K)$$

(**Attention**) Il ne faut pas omettre de préciser pourquoi (KM) et (F_1M) sont identiques.

En effet : H et (F_1) sont dans le même plan d'onde car ils viennent directement de S qui est à l'infini et qui émet une onde plane. Mais le plan contenant K et (F_1) n'est pas *a priori* un plan d'onde du fait que les ondes issues des fentes ne sont plus planes. Pour raisonner, on dira que l'onde issue de M est sphérique, donc après passage par la lentille, elle devient plane. Ainsi, (F_1) et K sont bien sur le même plan d'onde.

Maintenant, en remarquant qu'on peut reporter les angles α et α_0 (*cf.* le schéma), les calculs de (HF_2) et (F_2K) se font facilement :

$$\begin{aligned}(HF_2) &= n_{\text{air}}\, HF_2\\ &= n_{\text{air}}\, a(-\sin\alpha_0)\\ &= -n_{\text{air}} a \sin\alpha_0\\ &\approx -n_{\text{air}} a\, \alpha_0\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(F_2K) &= n_{\text{air}} a \sin\alpha\\ &\approx n_{\text{air}} a\, \alpha\\ (F_2K) &\approx n_{\text{air}} a \frac{x}{f'}\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat :

$$\delta(M) \approx n_{\text{air}} a \left(\frac{x}{f'} - \alpha_0\right) \tag{8.13a}$$

$$i = \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}} a} \tag{8.13b}$$

Pour décrire au mieux ce que l'on observe, on définit l'ordre d'interférence.

Définition 57 : Ordre d'interférence

L'**ordre d'interférence** $p(M)$ est défini par :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda} \tag{8.14}$$

Théorème 57.1

Plus l'ordre d'interférence p est proche d'un entier $m \in \mathbb{Z}$, plus l'interférence est constructive, et plus il y a d'intensité lumineuse. À l'inverse, l'interférence est destructive en $m + \frac{1}{2}$.

8.2.4 Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson est un exemple de dispositif interférométrique à division d'amplitude.

Configuration en lame d'air

Définition 58 : Lame d'air

Dans le dispositif de Michelson, lorsque les miroirs M_1 et M_2 sont perpendiculaires, on dit que le dispositif est configuré en **lame d'air**.
M_1', le symmétrique de M_1 (*cf.* figure 8.7), est alors à une distance e de M_2 et forme une «lame d'air».

Théorème 58.1

Pour un interféromètre de Michelson réglé en **lame d'air**, en utilisant les notations de la figure 8.7 page 54, on démontre les formules suivantes :

- **Différence de marche :**

$$\delta(M) = 2ne\cos i \tag{8.15a}$$

- **Déphasage :**

$$\Delta\varphi(M) = \frac{4\pi ne\cos i}{\lambda_0} \tag{8.15b}$$

- **Ordre d'interférences :**

$$p(M) = \frac{2ne\cos i}{\lambda_0} \tag{8.15c}$$

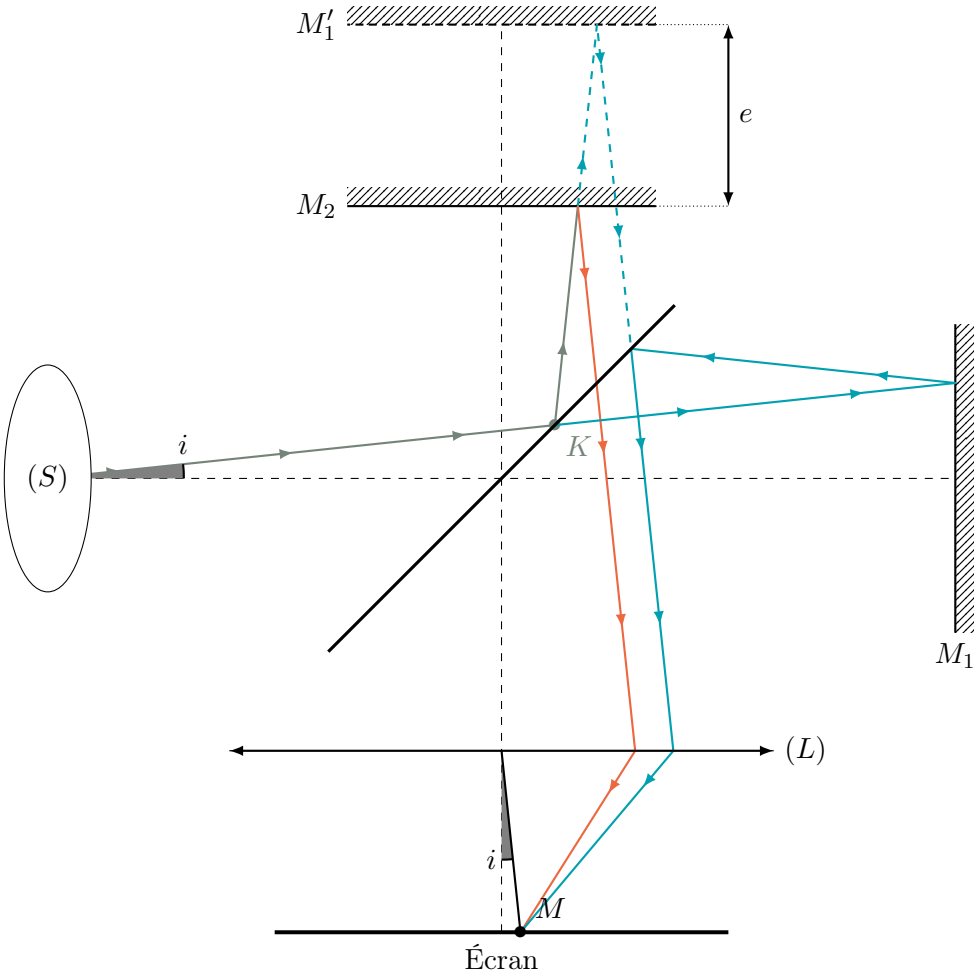


FIGURE 8.7 – Interféromètre de MICHELSON en lame d'air

Configuration en coin d'air

Définition 59 : Configuration en coin d'air

Dans le dispositif de MICHELSON, lorsque les miroirs M_1 et M_2 ne sont pas perpendiculaires, on dit que le dispositif est configuré en **coin d'air**.
M_1', le symmétrique de M_1 (*cf.* figure 8.8), est alors incliné d'un angle α par rapport à M_2 et forme un «coin d'air».

Théorème 59.1

Pour un interféromètre de MICHELSON réglé en **coin d'air**, on démontre les formules suivantes :

- **Différence de marche :**

$$\delta(M) = 2ne \tag{8.16a}$$

- **Déphasage :**

(8.16b) $$\Delta\varphi(M) = \frac{4\pi n e}{\lambda_0}$$

- **Ordre d'interférences :**

(8.16c) $$p(M) = \frac{2ne}{\lambda_0}$$

Ce théorème est admis.

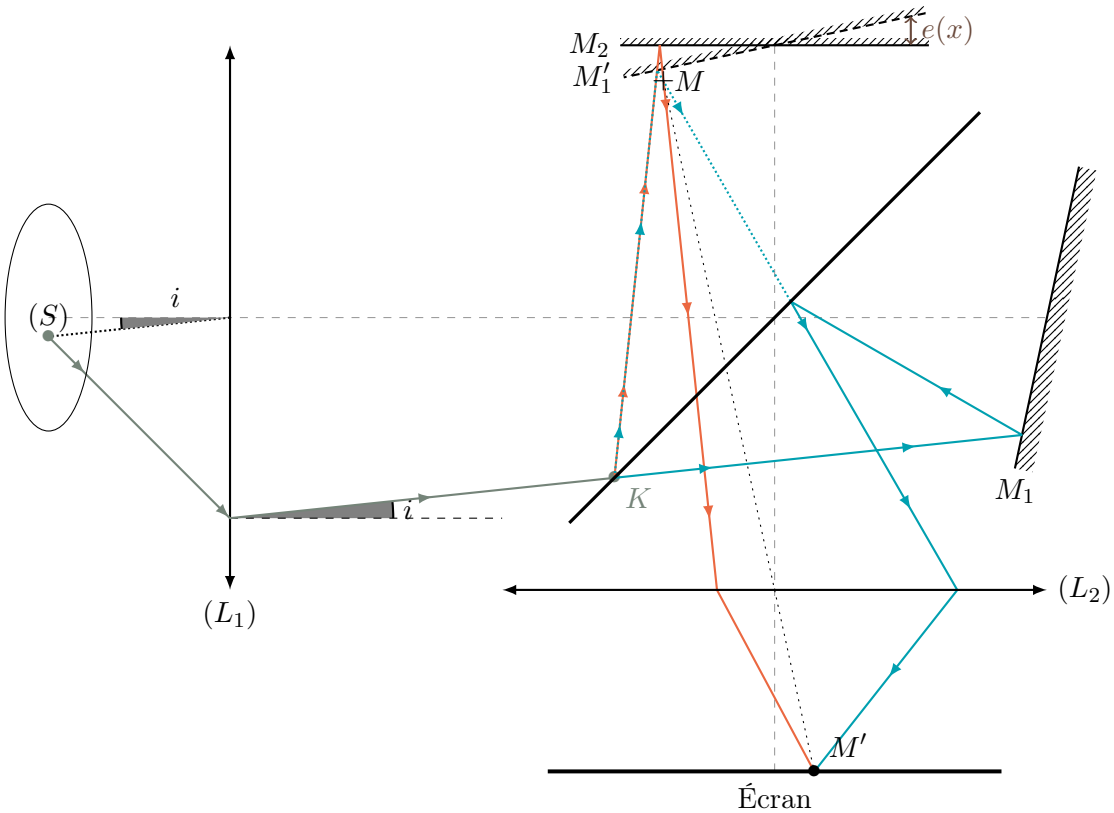


FIGURE 8.8 – Interféromètre de MICHELSON en coin d'air. La lentille (L_1) permet d'obtenir une source étendue à l'infinie. La lentille (L_2) conjugue M à M'.

Théorème 59.2

Si on note x l'abscisse de la réflexion sur le miroir, et α l'inclinaison du miroir, alors $e(M)$ est donné par :

(8.17) $$e(M) = |\alpha x|$$

8.2.5 Diffraction

Théorème 59.3 : Ouverture d'un faisceau

On trouve expérimentalement que l'angle θ_m d'ouverture d'un faisceau projeté sur un trou de diamètre D vérifie :

(8.18) $$\sin\theta_m = 1,22\,\frac{\lambda_0}{D}$$

Définition 60 : Principe d'Huygens-Fresnel

Tout point P d'une surface Π issu d'une même source $\mathcal{S}$ agit comme une source secondaire d'amplitude proportionnelle à celle de la source.
La vibration lumineuse en un point donné est la somme des vibrations émises par l'ensemble des sources secondaires.

(8.19) $$\underline{a\,(M)} = \mathscr{C}_0 \iint\limits_{P\in\Pi} \frac{a\,(P)}{PM} e^{i\overbrace{k_0 PM}^{\varphi(M)}}$$

Théorème 60.1 : Diffraction de Fraunhoffer

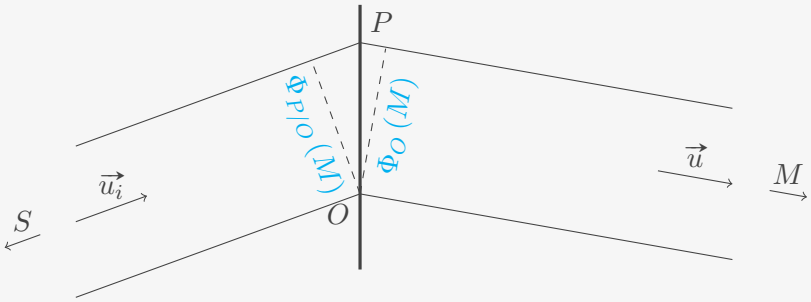


Figure 8.9 – Objet diffractant

(8.20) $$\Phi_{P/O}\,(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u}-\vec{u}_i)\cdot\overrightarrow{OP} + \underbrace{\arg(\underline{t}(p))}_{\text{Si l'objet est quelconque}}$$

En remaniant l'équation (8.19) d'Huygens-Fresnel avec cette nouvelle phase :

(8.21) $$\underline{a\,(M)} = \frac{\mathscr{C}_0}{OM} A\,(P) e^{i\Phi_O(M)} \iint \underline{t(P)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\vec{u}-\vec{u}_i\right)\cdot\overrightarrow{OP}}$$

(Attention) Ne pas oublier le $\frac{2\pi}{\lambda_0}$!

8.2.6 Réseaux

Théorème 60.2 : Formule des réseaux

Dans un réseau

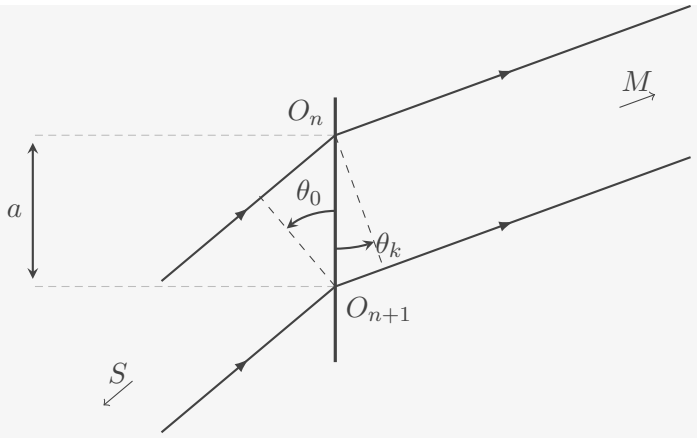


FIGURE 8.10 – Deux fentes O_n et O_{n+1} d'un réseau

(8.22) $$\sin\theta_k - \sin\theta_0 = k\frac{\lambda_0}{a}$$

k est appelé **ordre de diffraction**

Preuve 60.2.1 *Calculons la différence de marche $\delta_d(M)$ entre deux rayons O_n et O_{n+1} :*

$$\delta_d(M) = a\sin\theta_k - a\sin\theta_0$$

On a alors l'ordre d'interférences : $p(M) = \dfrac{\delta_d(M)}{\lambda_0} = \dfrac{a}{\lambda_0}(\sin\theta_k - \sin\theta_0)$.
Pour que les N ondes qui interfèrent créent des interférences constructives, il faut que l'ordre entre deux ondes n et $n+1$ soit un entier k relatif.
Avec cette condition, $p(M) = k$, d'où $\sin\theta_k - \sin\theta_0 = k\dfrac{\lambda_0}{a}$ □

Chapitre 9

Électromagnétisme

Méthode

Champ électrostatique

Pour trouver le champ $\vec{E}$:

1. Appliquer le théorème de Gauss
2. Appliquer les formule de Coulomb (9.2a)

9.1 Électrostatique

9.1.1 Loi de Coulomb

Définition 61 : Force de Coulomb

C'est la force électromagnétique entre deux charges q_A et q_B

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{r^2}\vec{u_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}\overrightarrow{AB} \tag{9.1}$$

Théorème 61.1

On peut définir la force de Coulomb comme $\vec{F} = q_B\vec{E}(B)$ où :

$$\boxed{\vec{E}(B) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^3}} \tag{9.2a}$$

Mais on retiendra :

(9.2b)
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho \frac{\mathrm{d}V}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \qquad \rho(M) = \frac{\mathrm{d}Q(M)}{\mathrm{d}V}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \sigma \frac{\mathrm{d}S}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \qquad \sigma(M) = \frac{\mathrm{d}Q(M)}{\mathrm{d}S}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathscr{C}} \lambda \frac{\mathrm{d}l}{\|\overrightarrow{PM}\|^3} \qquad \lambda(M) = \frac{\mathrm{d}Q(M)}{\mathrm{d}l}$$

9.1.2 Propriétés du champ électrostatique

Théorème 61.2 : Principe de superposition

Soient n particules A_1, A_2, $\cdots$, A_n **immobiles** dans l'espace.
Le champ électrostatique résultant est la somme des champs engendrés par ces particules :

(9.3)
$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_{A_i}(M)$$

Théorème 61.3 : Symétries

Le champ $\vec{E}$ est symétrique pour une distribution symétrique des charges.
On en déduit que le champ $\vec{E}$ est colinéaire aux plans de symétries des distributions des charges, et orthogonnal aux plans d'anti-symétrie.

9.1.3 Circulation du champ électrostatique

Théorème 61.4 : Circulation d'un champ

Soit q_A une charge située en A. Soit $\vec{E}_A$ le champ électrostatique créé par q_A.
La circulation de $\vec{E}_A$ le long d'un chemin $C \to D$ est

(9.4a)
$$\mathscr{C}_{C\to D} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AC} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AD}$$

D'après le théorème de superposition, on peut dire que la circulation d'un champ créé par une **distribution quelconque de charges** est

(9.4b)
$$\mathscr{C}_{C\to D} = \sum_i \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{A_iC} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{A_iD}$$

La circulation de $\vec{E}$ ne dépend donc pas du chemin emprunté, mais seulement des points de départs et d'arrivée. On va pouvoir définir un potentiel

Définition 62 : Potentiel Electrostatique

Le potentiel $V(M)$ en un point M est défini tel que

$$\mathscr{C}_{M\to N}(\vec{E}) = V(M) - V(N)$$

Ainsi, **potentiel électrostatique** $V(M)$ créé par une charge q_A en un point A est donné par

(9.5) $$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{PM} + \text{constante}$$

Théorème 62.1 : Potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique** $V(M)$ est lié au champ $\vec{E}(M)$ par la relation :

(9.6) $$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

(Attention) Pour un champ $\vec{E}(M)$ donné, $V(M)$ n'est pas unique.

Théorème 62.2 : Energie potentielle

L'**energie potentielle** d'une charge ponctuelle q soumise à la force exercée par un champ $\vec{E}$ de potentiel V est

(9.7) $$E_p(M) = qV(M)$$

9.1.4 Flux du champ électrostatique

Théorème 62.3 : Équation de Maxwell-Gauss

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Gauss).

Le flux de $\vec{E}$ à travers la surface orientée d'un volume est proportionnelle à la charge contenue dans ce volume :

(9.8) $$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

L'objectif est de trouver un volume tel que $\vec{E}$ ne dépende d'aucune variable de l'intégrale $\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Par exemple, $\oiint_{\theta,z} E\vec{u}_r\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, où on peut sortir $E\vec{u}_r$. En général, ce théorème est très utile avec les symétries.

(Attention) Ce sont des surfaces qu'on étudie avec le théorème de Gauss. Pas des volumes...

9.1.5 Dipôle électrostatique

Définition 63 : Dipôle électrostatique

On appelle **dipôle electrostatique** le système de **deux charges ponctuelles opposées** (q et $-q$) situées en deux points N et P tels que $\|\overrightarrow{NP}\|$ soit **très petit devant les autres**

distances envisagées.

Définition 64 : Moment dipolaire

Le **moment dipolaire** p d'un dipôle est défini par :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP} \tag{9.9}$$

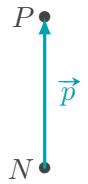


FIGURE 9.1 – Moment dipolaire

Théorème 64.1 : Potentiel électrostatique d'un dipôle

Le potentiel électrostatique créé en M par un dipôle électrostatique est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MN}\right) \tag{9.10}$$

Théorème 64.2 : Potentiel créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipôlaire p :

$$V(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{9.11}$$

Théorème 64.3 : Champ électrique créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipôlaire p :

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta}{r^3} \tag{9.12}$$

Théorème 64.4 : Force et moment d'un champ uniforme sur un dipôle

La résultante des forces qui s'éxercent sur un dipôle electrostatique est

$$\vec{F} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P) \tag{9.13}$$

Quand le champ est uniforme, $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$, donc $\vec{F} = 0$, et la résultante des forces est nulle.
Il y a néanmoins un couple $\mathcal{M}_0$ qui s'applique sur le dipôle en son centre 0 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 &= q\left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}\right) \wedge \vec{E} \\ &= q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \\ \mathcal{M}_0 &= \vec{p} \wedge \vec{E}\end{aligned} \tag{9.14}$$

Le dipôle electrostatique va donc chercher à s'aligner avec le champ $\vec{E}$.

9.2 Magnétostatique

9.2.1 Champ magnétique

Définition 65 : Densité Volumique de Courant

La **densité volumique de courant** décrit le mouvement d'ensemble des particules de charges q passant à travers une surface élémentaire orientée $\mathrm{d}S_M$.

Pour une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ décrite par son vecteur normal $\mathrm{d}\vec{S}$, le courant électrique $\mathrm{d}i$ à travers cette surface est relié à $\vec{j}$ par

(9.15a) $$\mathrm{d}i = \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad i = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Un courant électrique est un débit de charges électriques à travers une surface orientée. Si on note n le nombre de charges q par unité de volume :

(9.15b) $$\vec{j} = \rho \vec{v} = nq\vec{v}$$

Ou encore, la troisième définition qu'on peut déduire :

(9.15c) $$\mathrm{d}^2 q(M,t) = \vec{j}(M,t) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}\, \mathbf{d}t$$

Théorème 65.1 : Biot et Savard

La formules de Biot et Savart permet de calculer des champs $\vec{B}$ de manière plus directe qu'avec les équations de Maxwell. La contribution au champ $\vec{B}$ d'un circuit est

(9.16) $$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{Circuit}} \frac{i\mathrm{d}\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

(Attention) Ce théorème est désormais **hors-programme**

Théorème 65.2 : Équation de Maxwell-Ampère

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Ampère).

(Attention) Elle n'est valable que **si le deuxième terme** $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}\right)$ est **nul ou négligeable** !

(9.17) $$\boxed{\oint_{\mathscr{C}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\, I_{\text{Enlacé}}}$$

Définition 66 : Force de Lorentz

C'est la force subit par un charge q de vitesse $\vec{v}$ dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

(9.18) $$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Théorème 66.1 : Force de Laplace

On la revoit au théorème 71.6 page 70.
La force de Laplace existe sous deux formes, et on voit ici la forme intégrale qui caractérise les effets d'un champs $\vec{B}$ sur un circuit, elle vient de la force de Lorentz *cf.* équation (9.18) page 62

$$\vec{F}_{\text{Laplace}} = \int_{M\in\text{Circuit}} I\vec{\mathrm{d}l} \wedge \vec{B}(M) \tag{9.19}$$

9.2.2 Dipôle Magnétique

Définition 67 : Moment magnétique

Le **moment magnétique** $\vec{\mathcal{M}}$ d'une distribution de courant d'intensité I, de surface S et de vecteur normal $\vec{n}$ est :

$$\vec{\mathcal{M}} = I\,S\,\vec{n} \tag{9.20}$$

Son unité est en $\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}^2$

Définition 68 : Dipôle magnétique

Un **dipôle magnétique** est une distribution de courant tel que :
- $\vec{\mathcal{M}}$ non nul
- La taille caractéristique a est infiniment petite devant les autres longueurs

Action du dipôle magnétique sur l'extérieur

Théorème 68.1 : Potentiel vecteur et champ magnétique

Le potentiel vecteur créé par un dipôle en M est, en notant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3} \tag{9.21}$$

Le champ magnétique créé par ce même dipôle en M est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\vec{r}\cdot\vec{\mathcal{M}}\right)\vec{r} - r^2\vec{\mathcal{M}}}{r^5} \tag{9.22}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{M}}{r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta) \tag{9.23}$$

Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

Théorème 68.2

Un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ $\vec{B}_{\text{ext}}$ est

soumis à un couple de moment

(9.24) $$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

L'energie potentielle qui en résulte est :

(9.25) $$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

9.3 Équations de Maxwell

9.3.1 Principe de conservation de la charge

Théorème 68.3 : Équation de conservation de la charge

Il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique. Ce postulat donne lieu à l'**équation de conservation de la charge** :

(9.26) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

9.3.2 Les équations de Maxwell

Ces 4 équations sont les plus importantes. À elles 4 elles permettent de retrouver intégralement le programme de première année.

Théorème 68.4 : Les Équations de Maxwell

(Maxwell-Gauss) $$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Maxwell-Flux) $$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(Maxwell-Faraday) $$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Maxwell-Ampère) $$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Grâce aux formules de Stokes (Stokes) et d'Ostrogradski (Ostrogradski) de la page 99, on peut obtenir les **versions intégrales** des équations de Maxwell. On a aussi la loi de Faraday (9.41) de la page 69.

Définition 69 : Célérité de la lumière dans le vide

On définit la célérité c de la manière suivante :

(9.27) $$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

C'est la vitesse de la lumière

Équations de propagation

Théorème 69.1 : Équation de d'Alembert

Dans le vide, en l'absence de charges ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les champs électrique et magnétique vérifient l'**équation de d'Alembert**

(9.28) $$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Preuve 69.1.1 *Démontrons le cas pour $\vec{B}$, la démonstration pour $\vec{E}$ est analogue.*
On part de l'équation (Maxwell-Ampère) *:*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Comme dans beaucoup de démonstration, on applique un deuxième $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

On peut intervertir les opérateurs ∂ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ *:*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \overbrace{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}}^{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}}{\partial t}$$

Sachant que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\vec{B}\right) - \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{B}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{B}}_{0}\right) - \underbrace{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{B}\right)}_{\Delta \vec{B}} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Théorème 69.2 : Potentiels

Au champ électromagnétique $\left(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right)$, on peut associer un couple de potentiels $\left(V(M,t), \vec{A}(M,t)\right)$ tel que :

(9.29) $$\begin{cases} \vec{B} &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \\ \vec{E} &= -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V) \end{cases}$$

Preuve 69.2.1 *Comme* $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ *(Équation 3 de Maxwell (Maxwell-Faraday)),*

on sait que $\vec{B}$ est un champ rotationnel. Donc il existe $\vec{A}$ tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$$

Maintenant, en prenant l'équation 2 de Maxwell (Maxwell-Flux), $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right)}{\partial t}$.
En intervertissant les opérateurs, et en faisant tout passer à gauche :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Donc on sait que $\vec{E} + \dfrac{\partial\left(\vec{A}\right)}{\partial t}$ *est un champ à gradient. D'où il existe V tel que*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

9.3.3 Equations de Poisson et de Laplace

En **statique**, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$, ce qui équivaut à l'existence d'un potentiel $V(M)$ tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V)$ (c'est l'équation (9.6) qu'on voit en électrostatique page 60).

Théorème 69.3

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'**équation de Poisson** :

(9.30) $$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

(Attention) $\Delta V(M)$ est le **laplacien** de $V(M)$. Ce n'est pas la variation Δ.
Lorsqu'une zone est en plus vide de charge, $\rho(M) = 0$ et l'équation devient l'**équation de Laplace** :

(9.31) $$\Delta V(M) = 0$$

Preuve 69.3.1 *Il suffit d'injecter $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M)$ à l'équation de* Maxwell-Gauss (Maxwell-Gauss) *page 64 :*

(9.32) $$\text{div}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right)(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Or, par définition, $\text{div}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right) = -\Delta f$. □

(Attention) Le potentiel n'existe que quand $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$. En général, c'est en statique ou en régime permanent. Mais écrire $V(M,t)$ est absurde !

9.4 Énergie électromagnétique

Sur une particule chargée, la majorité des forces sont négligeables devant la force de Lorentz. C'est ainsi qu'on peut appliquer le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) (équation (7.12) page 42)

Théorème 69.4 : Densité volumique de force

La **densité volumique de force électromagnétique** est :

(9.33a) $$\vec{f}_V(M,t) = \rho(M,t)\vec{E}(M,t) + \vec{j}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)$$

Cette force est volumique, donc elle s'exerce sur les charges d'un volume $\mathrm{d}V$ tel que :

(9.33b) $$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{f}_V(M,t)\,\mathrm{d}V$$

Preuve 69.4.1 *On part de la force de* Lorentz (9.18) *page 62 :*

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En infinitésimal :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \mathrm{d}q\vec{E} + \mathrm{d}q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On injecte $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \left[\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \wedge \vec{B}\right]\mathrm{d}V$$

D'où la force volumique : $\vec{f}_V = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ □

Définition 70 : Puissance volumique

La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière est

(9.34) $$\mathcal{P}_v(M,t) = \vec{j}(M,t)\vec{E}(M,t)$$

Avec la loi d'Ohm locale (9.38) page 68 :

$$\mathcal{P}_V(M,t) = \frac{\vec{j}^{\,2}(M,t)}{\gamma}$$

Définition 71

Le **vecteur de Poynting** $\vec{\Pi}(M,t)$ est tel que l'énergie élextromagnétique traversant la surface $\mathrm{d}\vec{S}$ autour de M est :

(9.35) $$\mathrm{d}^2U_{\text{em}} = \vec{\Pi}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

On admet les expressions suivantes :

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est

$$u_{\text{em}}(M,t) = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2(M,t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M,t)}{2\mu_0} \tag{9.36}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie, ou **vecteur de Poynting** est

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t) \tag{9.37}$$

Théorème 71.1 : Loi d'Ohm locale

Elle relie, en un point M, la densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$ au champ électrique $E(M,t)$:

$$\vec{j}(M,t) = \gamma\,\vec{E}(M,t) \tag{9.38}$$

Théorème 71.2 : Équation locale de Poynting

L'équation locale de Poynting est un bilan d'énergie. Elle donne :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M,t) + \operatorname{div}\vec{\Pi}(M,t) = -\left(\vec{j}\cdot\vec{E}\right)(M,t) \tag{9.39}$$

Preuve 71.2.1 *Le bilan d'énergie électromagnétique pour une surface $\mathcal{S}$ est :*

$$\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{sortant} - \mathcal{P}_{perdue} \tag{9.40}$$

Exprimons ces grandeurs :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{perdue} &= \iiint \mathcal{P}_V \mathrm{d}V \\
&= \iiint \left(\vec{j}\cdot\vec{E}\right)\mathrm{d}V \\
\mathcal{P}_{sortant} &= \oiint \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P \\
&= \iiint \operatorname{div}\left(\vec{\Pi}\right)\mathrm{d}V \\
\frac{\mathrm{d}U_{em}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint u_{em}\mathrm{d}V \\
&= \iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t}\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

ce qui nous donne, pour un volume d'intégration $\mathcal{V}_M$ quelconque :

$$\iiint_{\mathcal{V}_M} \frac{\partial u_{em}}{\partial t}\mathrm{d}V + \iiint_{\mathcal{V}_M} \operatorname{div}\left(\vec{\Pi}\right)\mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{V}_M} -\left(\vec{j}\cdot\vec{E}\right)\mathrm{d}V$$

d'où le résultat. □

9.5 Induction

Théorème 71.3 : Loi de Faraday

Elle caractérise la force électromotrice e induit par un flux Φ_B

(9.41) $$\boxed{e = \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}}$$

Théorème 71.4 : Loi de Lenz

Les effets de l'induction s'opposent à la cause qui les a produits.

9.5.1 Loi d'Ohm généralisée

Théorème 71.5

On considère un conducteur formé d'un fil de longueur L, de section s, constitué d'un matériau dont la conductivité électrique est γ, est branché entre un point A et un deuxième point B. La loi d'Ohm pour ce conducteur, dite généralisée, donne :

(9.42) $$V(A,t) - V(B,t) = R\,i + \overbrace{\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}}^{-e}$$

avec $R = \dfrac{L}{\gamma s}$.
C'est bien sûr l'équation 4.2 de la page 24.

Preuve 71.5.1
On part de

$$\int_{M\in\Gamma_{AB}} \vec{E}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_M = -\int_{M\in\Gamma_{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_M - \int_{M\in\Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{l}_M$$

D'après la définition du $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$,

$$-\int_{M\in\Gamma_{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(V) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_M = -\left(V(B,t) - V(A,t)\right) = V(A,t) - V(B,t)$$

D'autre part, avec la loi d'Ohm locale (équation 9.38 page 68),

$$\begin{aligned}\int_{M\in\Gamma_{AB}} \vec{E}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_M &= \int_{M\in\Gamma_{AB}} \frac{1}{\gamma}\vec{j}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_M \\ &= \int_{M\in\Gamma_{AB}} \frac{R\,s}{L}\vec{j}(M,t) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_M\end{aligned}$$

Si on reprend la définition de $\vec{j}$ de l'équation (9.15c) (définition 65 page 62), et qu'on prend $\mathrm{d}\overrightarrow{l_M} = \mathrm{d}\overrightarrow{\tau_M}\mathrm{d}l_M$ ($\mathrm{d}\overrightarrow{\tau_M}$ est orienté dans le sens de $\vec{j}$) :

$$\int\limits_{M\in\Gamma_{AB}} \vec{E}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{l}_M = Ri = [V(A,t)-V(B,t)] - \int\limits_{M\in\Gamma_{AB}} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_M$$

En approximant : $-\int\limits_{M\in\Gamma_{AB}} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_M = -\oint\limits_{M\in\Gamma_{AB}} \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{l}_M = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = e$ *d'où* $V(A,t)-V(B,t) = Ri - e$

La force de Laplace est la résultante des forces du champ magnétique $\vec{B}(M)$ sur des charges en M

Théorème 71.6 : Force de Laplace

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{v\ \text{Laplace}} = \vec{j}(M)\wedge\vec{B}(M)$$

Cette force est bien volumique, car elle s'exprime en fonction de $\vec{j}(M)$. On retiendra surtout :

(9.43) $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}F}_{\text{Laplace}} = I\overrightarrow{\mathrm{d}l}\wedge\vec{B}(M)}$$

(Attention) I et $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ doivent être colinéaires

9.5.2 Auto-induction

Définition 72 : Inductance propre

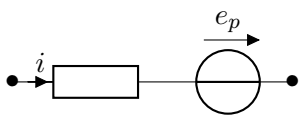
Pour un circuit électrique fixe et indéformable parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ crée un flux propre $\Phi_p(t)$ proportionnel à $i(t)$ dans les conditions d'ARQS

(9.44) $$\Phi_p(t) = L\,i(t)$$

Cette relation définit L, le coefficient d'**inductance propre** du circuit.

Remarque : Dans la loi d'Ohm vu précédemment (*cf.* équation (9.42) page 69), on peut prendre, en l'absence d'un champ magétique extérieur, $-e = \frac{\mathrm{d}\Phi_p}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, et alors :

$$V_A - V_B = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



9.5.3 Inductance mutuelle

Théorème 72.1 : Inductance mutuelle entre deux circuits

Pour deux circuits 1 et 2 parcourus respectivements par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, l'inductance mutuelle M d'un circuit sur un autre est proportionnelle à $i_*(t)$:

$$\begin{cases} \Phi_{1\to 2}(t) = M\, i_1(t) \\ \Phi_{2\to 1}(t) = M\, i_2(t) \end{cases} \tag{9.45}$$

On admettra le **théorème de Neumann** qui donne

$$M_{1\to 2} = M_{2\to 1} = M \tag{9.46}$$

9.5.4 Force electomotrice induite

Définition 73 : Champ électromoteur

Lorsqu'on déplace un conducteur à une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}_0$ stationnaire, il crée un **champ électrique électromoteur** $\vec{E}_m$

$$\vec{E}_m(M,t) = \vec{v}(M,t) \wedge \vec{B}_0(M) \tag{9.47}$$

Théorème 73.1 : Force électromotrice induite

La **force électromotrice** e_{AB} **induite** par $\vec{E}_m$ est, comme dans l'équation (9.41) de Faraday :

$$e_{AB} = \int_{M\in\Gamma_{AB}} \vec{E}_m(M,t)\cdot \vec{\mathrm{d}l}_M \tag{9.48}$$

9.6 Propagation et rayonnement

Méthode

Relations de structure

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{u}\wedge\vec{E}$$

$$c\,\vec{B}\ \wedge\vec{u} = \ \vec{E}$$

Relations de Passage

$$E_2(A,t) - E_1(A,t) = \frac{\sigma(A,t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{\text{sortant}} \tag{9.49a}$$

$$B_2(A,t) - B_1(A,t) = \mu_0 \vec{j}(A,t) \wedge \vec{n}_{\text{sortant}} \tag{9.49b}$$

9.6.1 Dans le vide

On se place dans une zone où il n'y a **ni charge, ni courant**. C'est à dire que $\rho = 0$ et alors $\vec{j} = 0$. Lorsqu'on reprend les équations de Maxwell, les équations (Maxwell-Gauss) et (Maxwell-Ampère) sont modifiées :

$$\text{div}\,\vec{E} = 0$$
$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Onde Plane Progressive

Définition 74 : Onde plane

Une **onde plane** est une solution **non constante** de l'équation de d'Alembert qui prend des valeurs uniformes sur les plans perpendiculaires à une direction $\vec{k}$.
Une onde plane de pulsation ω se décrit de la manière suivante :

$$U(M,t) = f\left(\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} - vt\right) + g\left(\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} + vt\right) \tag{OP}$$

Définition 75 : Onde plane progressive

Une **onde progressive** est une solution de l'équation de d'Alembert qui s'écrit sous la forme $U(z,t) = f(z - vt)$. Elle se propage dans le sens positif de l'axe Oz
La forme générale d'une **Onde Plane Progressive (OPP)** de pulsation ω se propageant uniquement selon une direction $\vec{k}$ est :

$$U(M,t) = f\left(\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM} - vt\right) \tag{OPP}$$

Obtenir la solution des équations de d'Alembert du théorème 69.1 permet de trouver la forme générale d'une onde. C'est ainsi qu'on peut déterminer la forme d'une OPP électromagnétique :

Théorème 75.1 : Onde électromagnétique

La forme générale d'une Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans le vide

dans la direction de $\vec{u}_z$ est :

$$\vec{E}(M,t) = \begin{pmatrix} f_x(z-ct) \\ f_y(z-ct) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{B}(M,t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c}f_x(z-ct) \\ \frac{1}{c}f_y(z-ct) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.50}$$

On remarque que la composante en $\vec{u}_z$ des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nulles. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, qui sont donc perpendiculaires à la propagation de l'onde, sont dis **transversaux**. L'onde est appelée **transversale**

Preuve 75.1.1 *Une OPP doit vérifier l'équation de* D'ALEMBERT *comme on l'a vu au théorème 69.1 page 65. Donc pour une onde se propageant selon $\vec{u}_z$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont de la forme :*

$$\vec{E}(M,t) = \begin{pmatrix} f_x(t-\frac{z}{c}) \\ f_y(t-\frac{z}{c}) \\ f_z(t-\frac{z}{c}) \end{pmatrix} \qquad \vec{B}(M,t) = \begin{pmatrix} h_x(t-\frac{z}{c}) \\ h_y(t-\frac{z}{c}) \\ h_z(t-\frac{z}{c}) \end{pmatrix}$$

L'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) *(la version où $\rho = 0$ car dans le vide il n'y a pas de charge) donne :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial f_x(t-\frac{z}{c})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(t-\frac{z}{c})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(t-\frac{z}{c})}{\partial z} &= 0 \\ 0 + 0 + \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial f_z}{\partial z}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Et nécessairement, $\dfrac{\partial f_z(t-\frac{z}{c})}{\partial z} = 0$ implique que f_z est constante. Donc f_z est nulle. De même, l'équation de MAXWELL-*Flux nous donne que h_z est nulle.*

Avec l'équation de MAXWELL-FARADAY (Maxwell-Faraday)*, on trouve finalement que*

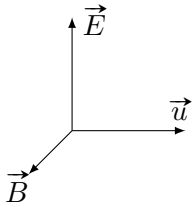
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{c}f'_y &= -h'_x \\ \tfrac{1}{c}f'_x &= h'_y \end{aligned}$$

Et on obtient les équations de propagation d'une onde électromagnétique. □

Théorème 75.2 : Relations de structure

On structure les OPPs de la manière suivante :

- Le trièdre $\left(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}\right)$ est **direct**
- La famille $\left(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B}\right)$ est **orthogonale**
- $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$



Qui peuvent se résumer dans les **relations de structure** :

(9.51) $$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{u} \wedge \vec{E} \qquad\qquad c\,\vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

Onde Plane Progressive Monochromatique

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) de pulsation ω se décrit de la manière suivante :

(OPPM) $$U(M,t) = U_0 \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_0\right)$$

Définition 76 : Vitesse de Phase

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) se propage selon une direction $\vec{u} = \dfrac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$. On définit sa vitesse de phase :

(9.52) $$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Remarque : Dans le vide, $v_\varphi = c$, donc $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Notation complexe

Opérateurs			Maxwell	
$\dfrac{\partial}{\partial t}\bullet$	$\Leftrightarrow$	$i\omega \times \bullet$	(Maxwell-Gauss)	$-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = \dfrac{\underline{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$
$\overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{U}$	$\Leftrightarrow$	$-i\vec{k} \times \underline{U}$	(Maxwell-Flux)	$-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$
$\text{div}\,\underline{\vec{U}}$	$\Leftrightarrow$	$-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Faraday)	$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$
$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{U}}$	$\Leftrightarrow$	$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Ampère)	$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0\,\underline{\vec{j}} + i\omega\dfrac{1}{c^2}\underline{\vec{E}}$

Théorème 76.1 : Relations de structure d'une OPPM

De même que les relations de structure (9.51) d'une OPP, on obtient rapidement, avec

la forme complexe des équations de MAXWELL :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \qquad \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B} \tag{9.53}$$

Preuve 76.1.1 *D'après l'équation* (Maxwell-Faraday) *en complexes (en prenant la partie réelle) :*

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B}$$

Il vient immédiatement :

$$\cancel{i}\frac{1}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{E} = \cancel{i}\vec{B}$$
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

De même, en partant de l'équation (Maxwell-Ampère) *en complexes (et toujours en prenant la partie réelle) :*

$$i\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega\frac{1}{c^2}\vec{E}$$

Qui donne, immédiatement :

$$\cancel{i}\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B} = -\cancel{i}\vec{E}$$
$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B}$$

Ces équations sont homologues à celles vues précédemment, car $k = \dfrac{\omega}{c}$

Polarisation

On considère une OPP *transverse*, donc qui s'écrit :

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0x}\cos(\omega t - kz) + \vec{E}_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi) \tag{9.54}$$

On appelle **onde polarisée rectilignement** une onde sous la forme

$$\vec{E} = E_0(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y)\,\cos(\omega t - kz) \tag{9.55}$$

9.6.2 Propagation dans un plasma

Définition 77 : Plasma

Un **plasma** est un conducteur constitué d'ions et d'électrons pour une charge globale neutre. Les conditions suivantes soient vérifiées

- Les **ions positifs sont immobiles**
- Il est **peu dense**, c'est à dire qu'on néglige les interactions électromagnétiques.

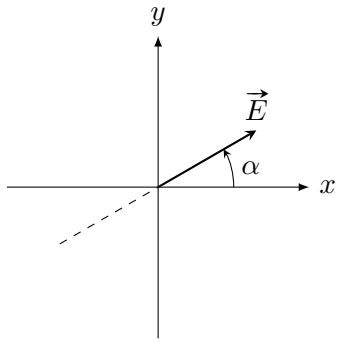


FIGURE 9.2 – Polarisation rectiligne

Théorème 77.1 : Densité volumique de courant

Il existe dans le plasma une densité volumique de courant :

$$\underline{\vec{j}} = -i\frac{n_0 e^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}(M,t) \tag{9.56}$$

Preuve 77.1.1 *Si on note $\vec{f}_e$ et $\vec{f}_m$ respecivement les forces de* LORENTZ *électrostatique et magnétostatique, alors on remarque que :*

$$\begin{aligned}\frac{f_m}{f_e} &= \frac{\|-e\,\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|-e\,\vec{E}\|}\\ &\sim \frac{v}{c}\end{aligned}$$

Or v est la vitesse de l'electron dans le milieu, et $v \ll c$ car l'électron est dit «non relativiste». Donc $\boxed{f_m \ll f_e}$, et on peut négliger $\vec{f}_e$ dans un PFD :

$$m_e\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \approx -e\vec{E}(M,t)$$

On passe en notation complexe, et le mouvement d'oscillation de l'électron est $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0}\exp(i\omega t)$. D'où la nouvelle expression du PFD :

$$m_e(i\omega)\underline{\vec{v}} \approx -e\vec{E}(M,t)$$

soit

$$\underline{\vec{v}} = i\frac{e}{m_e\omega}\vec{E}(M,t)$$

Et on obtient $\vec{j}$ avec $\vec{j} = -n_0 e\vec{v}$ □

On peut donc définir une pulsation plasma ω_p

Définition 78 : Pulsation plasma

On définit la **pulsation plasma** par

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}} \tag{9.57a}$$

Et alors :

$$\underline{\vec{j}} = -i\frac{n_0 e^2}{\omega m}\underline{\vec{E}} = -i\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\underline{\vec{E}} \tag{9.57b}$$

Théorème 78.1 : Relation de dispersion

Dans un plasma, on établit une relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_P^2\right) \tag{9.58}$$

Preuve 78.1.1 *On utilise les equations* (Maxwell-Faraday) *et* (Maxwell-Ampère) *en complexes, ainsi que la formule du double produit vectoriel* (13.5a) *page 94. On part de l'équation de* Maxwell (Maxwell-Faraday), *à laquelle on effectue le produit vectoriel par* $-i\vec{k}$ *des deux cotés :*

$$\cancel{-i}\vec{k} \wedge \left(-i\vec{k} \wedge \vec{E}\right) = \cancel{-i}\vec{k} \wedge \left(-i\omega\vec{B}\right)$$
$$-i\underbrace{(\vec{k}\cdot\vec{E})}_{=0 \text{ car orthogonaux}}\vec{k} + i(\vec{k}\cdot\vec{k})\vec{E} = \omega\vec{k}\wedge\vec{B}$$

D'où :

$$ik^2\vec{E} = \omega\vec{k}\wedge\vec{B}$$

On injecte l'équation de Maxwell (Maxwell-Ampère) *:*

$$ik^2\vec{E} = \omega\left(\mu_0\vec{j} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E}\right)$$

D'après l'équation (9.57b) *de la définition précédente :* $\underline{\vec{j}} = -i\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\underline{\vec{E}}$

$$ik^2\cancel{\vec{E}} = \omega\left(-i\mu_0\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\cancel{\vec{E}} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\cancel{\vec{E}}\right)$$
$$k^2 = \varepsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)$$

D'où $k^2 = \frac{1}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_P^2\right)$ □

Vitesse de phase et dispersion

Définition 79 : Vitesse de phase

La **vitesse de phase** v_φ est la vitesse de propagation d'une OPPM.

Théorème 79.1 : Vitesse de phase dans un plasma

Dans un plasma, avec les hypothèses précédentes, la vitesse de phase est égale à :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \tag{9.59}$$

Définition 80 : Phénomène de dispersion

On dit qu'il y a **dispersion** quand la **vitesse de phase** dépend de la pulsation ω de l'OPPM

Fréquence et pulsation de coupure

Définition 81 : Fréquence de coupure

On appelle **fréquence de coupure** la fréquence f_c pour laquelle une onde ne se propage plus. La pulsation associée ω_c est appelée **pulsation de coupure**

Théorème 81.1 : Pulsation de coupure du plasma

La **pulsation plasma** ω_P est une pulsation de coupure :

$$\omega_c = \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}} \tag{9.60}$$

Preuve 81.1.1 *Deux cas :*

- *Si $\omega > \omega_P$, alors $k^2 > 0 \implies k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}$.*
- *Sinon, si $\omega < \omega_P$, alors k^2 est négatif et il n'y a pas de propagation (une solution imaginaire n'est pas possible pour une onde).*

□

Propagation d'un paquet d'onde

On se place, dans un premier temps, dans un milieu dispersif quelconque.

Définition 82 : Paquet d'onde

Un **paquet d'onde** est la superposition de plusieurs OPPM de **pulsations proches** et de pulsation moyenne ω_0 :

$$\int_0^{+\infty} \underline{A}(M)e^{i(\omega t - kz)}\mathrm{d}\omega \tag{9.61}$$

Cette intégrale est valable de 0 à $+\infty$, car on considère des ondes dont la pulsation ω est comprise dans un intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$, où $\delta\omega \ll \omega_0$

Théorème 82.1 : Vitesse de groupe d'un paquet d'ondes

Par la généralisation de l'étude d'un paquet formé de deux ondes sinusoïdales, on admet que la vitesse de groupe v_g d'un paquet d'onde centré sur une pulsation ω_0 est :

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right)_{\omega_0}} \tag{9.62}$$

où k_0 est une approximation au premier ordre du centre des vecteurs d'ondes : les $k(\omega)$ des ondes dans le paquet d'ondes sont comprises dans $\left[k_0 - \frac{\delta k}{2}, k_0 + \frac{\delta k}{2}\right]$

9.6.3 Propagation dans un conducteur ohmique

Définition 83 : Conducteur ohmique

Le **conducteur ohmique** est un métal pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées :

- Les **ions positifs sont immobiles**
- Il est **dense**, et les électrons, de densité particulaire n_0, sont libres de se déplacer.

On remarque qu'un conducteur ohmique est comme un plasma (*cf.* définition 77 page 75). Sa seule différence est d'être dense. On prend alors en compte les interactions entre électrons et ions sous la forme d'une force de frottement.

Théorème 83.1 : Relation de dispersion

Dans un conducteur ohmique, on établit, comme pour le plasma, une relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega \tag{9.63}$$

Cette équation n'est pas réelle, et conduit à un **module d'onde complexe**. On note :

$$\underline{k} = k' - ik'' \tag{9.64}$$

Théorème 83.2 : Effet de peau

Dans un conducteur ohmique, la **distance caractéristique d'atténuation** d'une OPPM dans l'approximation des basses fréquences $\left(\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)$ est :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \tag{9.65}$$

Preuve 83.2.1 *Dans l'approximation des basses fréquences, on néglige le terme* $\frac{\omega^2}{c^2}$ *par rapport à* $\mu_0\gamma\omega$*, c'est-à-dire qu'on prend :*

$$\omega \ll \mu_0 c^2 \gamma = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

La relation de dispersion devient alors $\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma_0\omega$*. On résout :*

$$\underline{k} = \sqrt{-i\mu_0\gamma_0\omega}$$

Or $-2i = (1-i)^2$*, d'où :*

$$\underline{k} = (1-i)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$$

Puisqu'on a choisi $\underline{k} = k' - ik''$*, on trouve que* $k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$.

La distance caractéristique de pénétration est alors $\delta = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$. □

Réflexion d'une OPPM

On considère les ondes réfléchies et transmises issues d'une OPPM polarisée rectilignement dans la direction de $\vec{u}_x$. L'onde s'écrit :

$$\underline{\vec{E_i}}(M,t) = \underline{E_0}\ \exp\Big(i(\omega t - kz)\Big)\vec{u}_x$$
$$\underline{\vec{B_i}}(M,t) = -\frac{1}{c}\underline{E_0}\ \exp\Big(i(\omega t - kz)\Big)\vec{u}_y$$

La propagation, avant le contact avec le conducteur ohmique, s'effectue dans le vide, donc $k = \frac{\omega}{c}$.

On admettra l'expression des champs réfléchis :

$$\underline{\vec{E_r}}(M,t) = \underline{r}\underline{E_0}\ \exp\Big(i(\omega t + kz)\Big)\vec{u}_x$$
$$\underline{\vec{B_r}}(M,t) = -\frac{1}{c}\underline{r}\underline{E_0}\ \exp\Big(i(\omega t + kz)\Big)\vec{u}_y$$

On admettra également l'expression des champs transmis :

$$\underline{\vec{E_t}}(M,t) = \underline{t}\underline{E_0}\ \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\ \exp\left(i(\omega t - \frac{z}{\delta})\right)\vec{u}_x$$
$$\underline{\vec{B_t}}(M,t) = -\frac{1-i}{\delta\omega}\underline{t}\underline{E_0}\ \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\ \exp\left(i(\omega t - \frac{z}{\delta})\right)\vec{u}_y$$

Où $\underline{r}$ et $\underline{t}$ se calculent avec les relations de passage (*cf.* page 72). Dans un conducteur ohmique parfait, les conditions de continuité des champs imposent $\underline{r} = -1$ et $\underline{t} = 0$.

Chapitre 10

Rayonnement Thermique

Méthode

Calculer un flux thermique

Relation entre les flux $\mathrm{d}\Phi = \varphi^0_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = \varphi^0 \,\mathrm{d}S$

Relation de Stefan-Boltzmann $\varphi^0(T) = \sigma\, T^4$

Loi de Planck *(non exigible) cf* théorème 85.1

Définition 84 : Flux Thermique

La **densité surfacique d'énergie** est définie telle que la puissance électromagnétique reçue par un objet dans l'enceinte sous dS soit

$$\mathrm{d}\Phi = \varphi^0 \,\mathrm{d}S \tag{10.1}$$

L'exposant ^{0} est là pour rappeler que φ ne dépend ni de la position, ni de dS : il ne dépend que de T.
D'ici, on définit la **densité spectrale en longueur d'onde de flux surfacique** (notée φ^0_λ) de manière analogue : elle est telle que la contribution à φ^0 des photons de longueur d'onde comprises entre $[\lambda, t + \mathrm{d}\lambda]$ soit

$$\mathrm{d}\varphi^0 = \varphi^0_\lambda \mathrm{d}\lambda \tag{10.2}$$

Pour résumer, on se rapportera à la figure 10.1 (page 82) et à la simple formule :

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \varphi^0_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = \varphi^0 \,dS}$$

Définition 85 : Énergie d'un photon

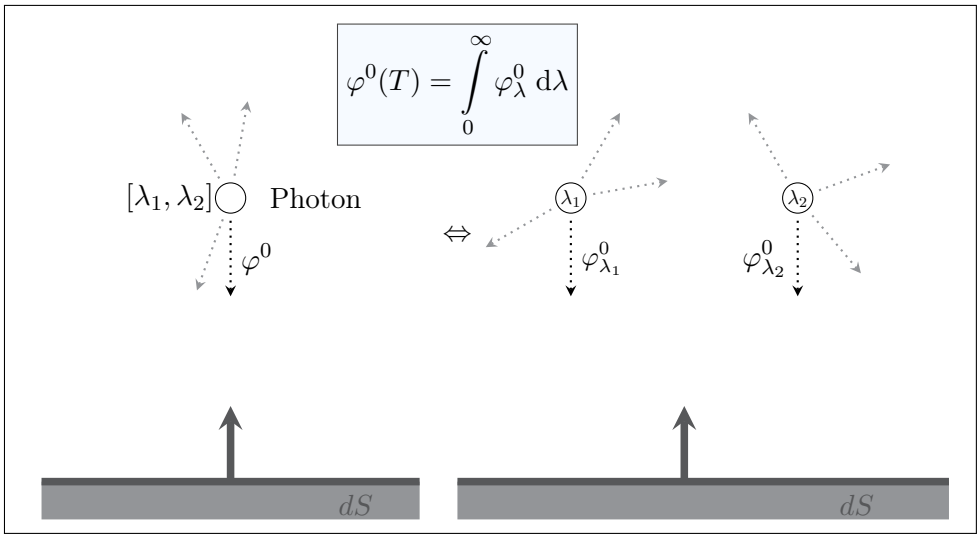


FIGURE 10.1 – Caractérisation des différents flux

(10.4) $$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Théorème 85.1 : Loi de PLANCK

La loi de PLANCK n'est pas exigible, mais elle permet de calculer la densité spectrale en longueur d'onde

$$\boxed{\varphi^\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}}$$

avec :

$$c = 3 \cdot 10^8 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$$
$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \ \mathrm{J \cdot s}$$

Théorème 85.2 : STEFAN-BOLTZMANN

(10.6) $$\varphi^0(T) = \sigma T^4$$

où σ est la constante de STEFAN : $\boxed{\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}}$ C'est aussi le flux émis par un corps noir.

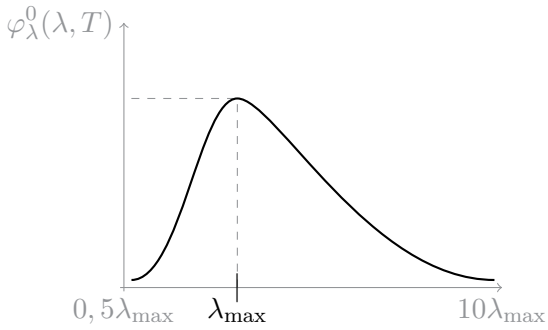
La densité spectrale en longueur d'onde du flux (φ^0_λ) passe par un maximum pour une longeur d'onde λ_m. On l'obtient avec la loi de WIEN :

Théorème 85.3 : Loi de Wien

(10.7) $$\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$$

Pour retenir : $\boxed{\lambda_{\max} T = 2900\ \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}$

Remarque : Le domaine spectral d'émission est compris dans $[\mathbf{0,5\lambda_{\max}, 10\lambda_{\max}}]$



Théorème 85.4 : Flux surfacique radiatif

En un point P, le flux surfacique cédé par un corps noir opaque est :

(10.8) $$\varphi^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{CN}\to\mathrm{ext}}(P) = \sigma T(P)^4 - \varphi_{\mathrm{reçu}}(P)$$

et alors, le flux radiatif suit une loi de Newton $\varphi^{\mathrm{rad}}_{\mathrm{CN}\to\mathrm{ext}}(P) = h(T(P) - T0)$ dont le coefficient est

(10.9) $$h^{\mathrm{rad}} = 4\sigma T_0^4$$

Chapitre 11

Mécanique Quantique

11.1 Introduction à la mécanique quantique

11.1.1 Dualité onde-particule

Définition 86 : Relation de Planck-Einstein

Pour une onde de fréquence $\nu == \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$, l'énergie E_{photon} et la quantité de mouvement p_{photon} d'un photon sont donnés par la **relation de Planck-Einstein** :

$$E_{\text{photon}} = h\nu \tag{11.1a}$$

$$p_{\text{photon}} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \tag{11.1b}$$

où h est la constante de Planck

On donne la valeur de la constante de Planck :

$$h \approx 6,62606957 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$$
$$h \approx 4,1343359 \times 10^{-15}\text{eV} \cdot \text{s}$$

La constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ sera également utilisée :

$$\hbar \approx 1,054571726 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s}$$
$$\hbar \approx 6,58211928 \times 10^{-16}\text{eV} \cdot \text{s}$$

Théorème 86.1 : Relation de De Broglie

À une particule matérielle de quantité de mouvement de norme p, la relation de De Broglie associe une longueur d'onde λ_{DB} :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p} \tag{11.2}$$

11.1.2 Fonction d'onde et équation de Schrödinger

Définir la fonction d'onde

Définition 87 : Probabilité de présence

La probabilité de présence d'une particule t entre x et $x + \mathrm{d}x$ est donné par la relation :

(11.3) $$\mathrm{d}P(x,t) = \Psi(x,t)\overline{\Psi(x,t)}\mathrm{d}x = |\Psi(x,t)|^2\mathrm{d}x$$

Théorème 87.1 : Condition de normalisation

Soit $\mathscr{D}$ le domaine de l'espace accessible à la particule. La condition de normalisation traduit le fait que la particule se trouve **de façon certaine** dans le domaine $\mathscr{D}$:

(11.4) $$\int_{\mathscr{D}} |\Psi(x,t)|^2\mathrm{d}x = 1$$

11.1.3 Équation de Schrödinger

Définition 88 : Équation de Schrödinger

On considère le mouvement **unidirectionnel** d'une particule quantique de masse m. L'interaction de la particule avec les autres éléments du système sera réunie dans une énergie potentielle $V(x)$ **indépendante du temps** (conformément au programme).
L'**équation de Schrödinger** donne :

(11.5) $$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$$

(Attention) $V(x)$ est une énergie potentielle. On l'appelle parfois «potentiel», mais ça ne concerne pas seulement les interactions électromagnétiques.

Définition 89 : État stationnaire

On appelle **état stationnaire** un état du système caractérisé par une fonction d'onde **factorisée** sous la forme

(11.6) $$\Psi(x,t) = \varphi(x)f(t)$$

où f et φ sont *a priori* deux fonctions à valeur **complexe**.

Théorème 89.1 : Équation de Schrödinger indépendante du temps

Pour une fonction d'onde à l'état stationnaire sous la forme $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{i\alpha(t)}$ où $\alpha(t)$ est une fonction du temps, l'équation de Schrödinger se met sous la forme :

(11.7) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

où $E = -\hbar\dfrac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}$. En notant $\omega = -\dot{\alpha}(t)$, on a $E = \hbar\omega$.

Théorème 89.2 : Caractérisation d'un état stationnaire

Un état stationnaire est caractérisé par une densité de probabilité $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = |\Psi(x,t)|^2$ **indépendante du temps**.

11.1.4 Inégalité de Heisenberg

Théorème 89.3 : Inégalité spatiale

Il existe une limitation à la définition de la position (d'indétermination Δx) et de la quantité de mouvement (d'indétermination Δp_x) imposée par l'**inégalité d'Heisenberg** :

(11.8) $$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Théorème 89.4 : Inégalité temps-énergie

La pulsation, d'incertitude $\Delta\omega$, et la durée, caractérisé par τ, la durée caractéristique d'évolution d'un signal sont limités dans leur définition par :

(11.9a) $$\tau \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2}$$

En utilisant la relation $E = \hbar\omega$ du théorème 89.1 page 85 :

(11.9b) $$\tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

11.2 Évolution d'une particule quantique libre

Dans cette section, on considère le mouvement d'une particule lorsque $V(x) = 0$, c'est-à-dire qui évolue dans le vide sans interaction. L'équation (11.5) de Schrödinger devient alors :

(11.10) $$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Théorème 89.5 : Relation de dispersion et vitesse de phase

La résolution de l'équation (11.10) conduit à la relation de dispersion suivante :

(11.11a) $$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

On peut alors en déduire une vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$:

(11.11b) $$v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m}$$

11.3 Évolution d'une particule quantique dans un potentiel

Dans cette partie, nous nous limiterons à des solutions stationnaires de l'équation (11.5) de Schrödinger. On pourra donc résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps (11.7) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

On se place dans le cas où la longueur d'onde de De Broglie des particules quantiques est très inférieure à la longueur caractéristique des variations du potentiel $V(x)$. On modélise alors la marche de potentiel de la manière suivante :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Définition 90 : Coefficients de transmission et de réflexion

En ayant définis des vecteurs densité de courant de probabilité $\vec{j}_i$, $\vec{j}_r$ et $\vec{j}_t$, respectivement pour les ondes incidente, réfléchie, et transmise, on peut définir les probabilités de réflexion R et de transmission T :

(11.12) $$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} \qquad T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|}$$

Chapitre 12

Thermodynamique statistique

12.1 Monde microscopique, monde macroscopique

Définition 91 : Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique

L'**échelle macroscopique** est notre échelle. Une longueur microscopiques et de l'ordre du mètre (ou bien plus grande).
L'**échelle microscopique** est l'échelle des molécules. Une longueur microscopique est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des molécules.
L'**échelle mésoscopique** est une échelle à la fois très petite devant l'échelle macroscopique et très grande devant l'échelle microscopique.

12.2 Facteur de Boltzmann

12.2.1 Atmosphère isotherme

Théorème 91.1 : Équation fondamentale de l'hydrostatique

À une altitude z, la variation de la pression $P(z)$ s'exprime en fonction de la masse volumique $\mu(z)$ d'un système :

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\mu(z)g \tag{12.1}$$

Preuve 91.1.1 *On étudie un gaz situé dans un cylindre de section S entre z et $z + \mathrm{d}z$.*
On applique un PFD à notre cylindre entre z et $z + \mathrm{d}z$, à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\underbrace{-\mu(z)S\mathrm{d}z\ g\vec{u}_z}_{\textit{Poids}} + \underbrace{P(z)S\vec{u}_z}_{\substack{\textit{Pression sur la}\\ \textit{tranche inférieure}}} + \underbrace{(-P(z+\mathrm{d}z)S\vec{u}_z)}_{\substack{\textit{Pression sur la}\\ \textit{tranche supérieure}}} = \vec{0}$$

En projetant sur $\vec{u}_z$ et en simplifiant :

$$-\mu(z)g\mathrm{d}z + P(z) - P(z+\mathrm{d}z) = 0$$

D'où, puisque $P(z+\mathrm{d}z) = P(z) + \dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$ *:* $\dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\mu(z)g$ □

Théorème 91.2

La solution à l'équation différentielle précédente est :

$$P(z) = P_0\ e^{-\dfrac{zMg}{RT}} \tag{12.2}$$

$H = \dfrac{RT}{Mg}$ est la distance caractéristique de la variation de la pression.

Preuve 91.2.1 *On étudie un gaz situé dans un cylindre de section S entre z et $z+\mathrm{d}z$.*
D'après l'équation (1.13) d'état des gaz parfaits :

$$P(z)\ \mathrm{d}V = \mathrm{d}n(z)\ RT$$

Or, en notant $\mu(z)$ la masse volumique du gaz en z :

$$\mathrm{d}n(z) = \frac{\mathrm{d}m(z)}{M} = \frac{\mu(z)S\mathrm{d}z}{M}$$

On réinjecte :

$$P(z)\ \mathrm{d}V = \frac{\mu(z)S\mathrm{d}z}{M}\ RT$$

et sachant que $\dfrac{\mathrm{d}V}{S} = \mathrm{d}z$*, on a :*

$$\mu(z) = \frac{P(z)\ M}{RT}$$

Depuis l'équation fondamentale de l'hydrostatique (équation (12.1)), on obtient une équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{M}{RT}P(z)g$$
$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} + \frac{Mg}{RT}P(z) = 0$$

La solution à cette équation est donc $P(z) = P_0\ e^{-\dfrac{z\ Mg}{RT}}$ □

Puisque $PV = nRT$, on peut utiliser cette équation pour déterminer l'expression de grandeurs comme la masse volumique $\mu(z)$ ou $\mathrm{d}n(z)$:

$$\mu(z) = \mu_0\ e^{-\dfrac{z\ Mg}{RT}}$$

Théorème 91.3

La probabilité $\mathrm{d}p(z)$ pour une molécule de se trouver entre les cotes z et $z + \mathrm{d}z$ est **proportionnelle** au **facteur de Boltzmann** :

(12.3) $$\mathrm{d}p(z) = A\ e^{-\dfrac{E_p(z)}{k_B T}}$$

Cette probabilité est appelée le **poids de Boltzmann**

(Attention) $\mathrm{d}p$ est une probabilité ! Pas une pression !

12.2.2 Poids de Boltzmann d'une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat

On va généraliser ce qu'on vient de voir au cas d'un système constitué de particules indépendantes, c'est-à-dire qui n'interagissent pas entre elles.

Théorème 91.4

La probabilité $\mathrm{d}p(E_i)$ qu'une particule microscopique **indépendante** soit dans un état quantique d'énergie E_i est **proportionnelle** au **facteur de Boltzmann** :

(12.4) $$\mathrm{d}p(E_i) = A\ e^{-\dfrac{E_i}{k_B T}}$$

12.3 Systèmes à spectres discret d'énergie

Pour déterminer la constante A, on utilise le théorème suivant de condition de normalisation :

Théorème 91.5 : Condition de normalisation

La somme des probabilités est égale à 1. Autrement dit :

(12.5) $$\sum_i p(E_i) = 1$$

Définition 92 : Probabilité d'occupation

Si N est le nombre total de particules, le nombre moyen $\langle N_i \rangle$ de particules du système à l'état E_i, appelé **probabilité d'occupation** de l'état quantique E_i, est donné par :

(12.6) $$\langle N_i \rangle = N \times p(E_i) = \frac{N}{Z} e^{-\dfrac{E_i}{k_B T}}$$

Définition 93 : Énergie moyenne

L'énergie moyenne d'une particule, notée $\langle E_{\text{Particule}} \rangle$, est l'espérance de son énergie :

$$\langle E_{\text{Particule}} \rangle = \sum_i E_i \, p(E_i) \tag{12.7a}$$

$$\langle E_{\text{Particule}} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i E_i \, e^{-\dfrac{E_i}{k_B T}} \tag{12.7b}$$

Voir dans le cours de mathématiques, section 17.7.1 page 110 pour plus d'informations sur l'espérance.

Définition 94 : Écart quadratique moyen

Les fluctuations de l'énergie d'une particule sont caractérisées par la variance, qu'on appelle aussi "écart quadratique moyen" :

$$\text{Var}(E_{\text{Particule}}) = \langle E^2_{\text{Particule}} \rangle - \langle E_{\text{Particule}} \rangle^2 \tag{12.8a}$$

$$\text{Var}(E_{\text{Particule}}) = \sum_i E_i^2 \, p(E_i) - \left(\sum_i E_i \, p(E_i) \right)^2 \tag{12.8b}$$

Voir dans le cours de mathématiques, section 17.8.2 page 112 pour plus d'informations sur la variance et l'écart-type.

Définition 95 : Énergie d'un système

L'énergie d'un système est la somme des énergies des particules qui le composent.
Sa valeur moyenne est :

$$\langle E_{\text{Système}} \rangle = N \langle E_{\text{Particule}} \rangle \tag{12.9}$$

Théorème 95.1

Les fluctuations d'énergie régressent quand la taille du système augmente

12.4 Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

Théorème 95.2

L'énergie interne U du système est égale à l'énergie moyenne du système :

$$U = \langle E_{\text{Système}} \rangle = N \langle E_{\text{Particule}} \rangle \tag{12.10}$$

Chapitre 13

Annexe

Grandeurs à connaître

13.1 Trigonométrie

13.1.1 Définition

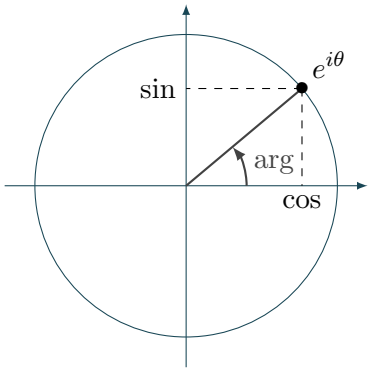
On aura souvent besoin de trigonométrie en Physique. Surtout les règles sur les sinus et cosinus. Bien sûr, la première chose à ne jamais oublier, c'est leur définition en exponentielle :

$$\begin{cases} \cos x &= \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{cases} \quad (13.1) \qquad (13.2) \quad \begin{cases} \cosh x &= \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ \sinh x &= \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{cases}$$

13.1.2 Addition / Produit

$$(13.3) \quad \begin{array}{c|c} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b \end{array}$$

13.1.3 Nombres complexes



Opérations en complexes

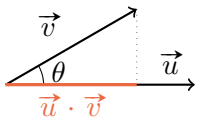
	Forme exponentielle	Module	Argument	
Produit	$z\,z' = r\,r'\,e^{i(\theta+\theta')}$	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\,\lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$	$[2\pi]$
Quotient	$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$	$\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$	$[2\pi]$
Exposant	$z^n = r^n\,e^{in\theta}$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n) = n \times \arg z$	$[2\pi]$
Conjugué	$\overline{z} = r\,e^{-i\theta}$	$\lvert\overline{z}\rvert = \overline{\lvert z\rvert}$	$\arg(\overline{z}) = -\arg z$	$[2\pi]$

13.2 Calcul vectoriel

On a deux types de calculs vectoriels. Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$. En physique, on les définit comme suit :

(13.4)
$$\left.\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= u\cdot v\cdot\cos\theta\\ \vec{u}\wedge\vec{v} &= u\cdot v\cdot\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

avec :



(**Attention**) Il ne faut **pas oublier** que le produit scalaire renvoie un **scalaire**, et que le produit vectoriel renvoie un **vecteur perpendiculaire** au plan formé des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Propriétés Produit vectoriel

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= -\vec{v}\wedge\vec{u}\\ \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v}) &= \lambda\vec{u}\wedge\vec{v} &&= \vec{u}\wedge\lambda\vec{v}\end{aligned}$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif

Formules du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{13.5a}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \tag{13.5b}$$

13.3 Complément mathématique

13.3.1 Dérivée d'un vecteur

$$\frac{\mathrm{d}x_i \vec{i}}{\mathrm{d}t} = x_i \frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} \tag{13.6}$$

13.3.2 Équation différentielle

En général, on résout l'équation homogène, on trouve une solution particulière, puis la combinaison linéaire des deux donne la solution générale.

Au premier ordre

Dans le cas d'une équation de la forme :

$$y'(t) = ay(t) + b$$

La solution générale est

$$Ae^{ax} - \frac{b}{a} \tag{13.7}$$

Au second Ordre

Dans le cas de l'équation homogène suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution $y(t)$ pour <u>l'équation homogène</u> :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_\pm = \alpha \pm \beta$	$y(t) = e^{\alpha t}\left(A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t)\right)$
$\Delta < 0$	$r_\pm = \alpha \pm i\beta$	$y(t) = e^{\alpha t}\left(A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t)\right)$
$\Delta = 0$	r double	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

(**Attention**) Pour déterminer la **solution particulière** quand le second membre n'est pas constant, on suppose que **la solution est sinusoïdale et de même pulsation**. Alors il n'y a plus qu'à réinjecter la solution dans l'équation différentielle pour déterminer les constantes restantes.

13.4 Repères en physique

13.4.1 Repère cartésien

Dans un repère en **coordonnées cartésiennes** (*cf.* figure 13.1), le point M est repéré par la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \tag{13.8}$$

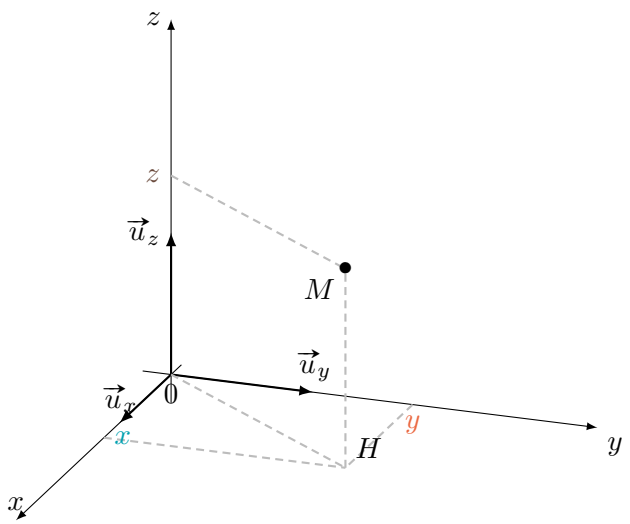


Figure 13.1 – Repère en coordonnées cartésiennes

13.4.2 Repère cylindrique

Dans un repère en **coordonnées cylindriques** (*cf.* figure 13.2), le point M est repéré par la base **locale** $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + z\vec{u}_z \tag{13.9}$$

(**Attention**) r se mesure sur le projeté : $r = \|\overrightarrow{OH}\|$, et non $\overrightarrow{OM}$

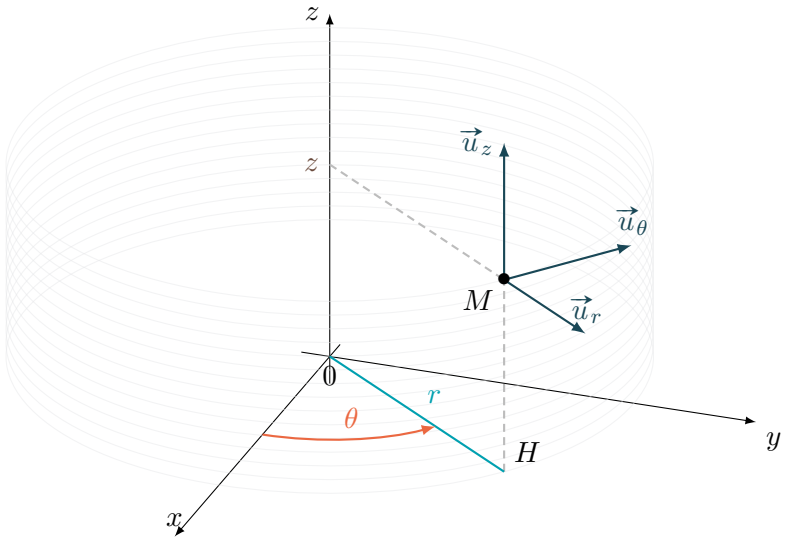


FIGURE 13.2 – Repère en coordonnées cylindriques

13.5 Analyse Vectorielle

13.5.1 Généralités sur les champs

Coordonnées	Déplacement élémentaire	Circulation élémentaire
Cartésiennes	$\mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$	$\mathrm{d}\mathscr{C} = a_x\mathrm{d}x + a_y\mathrm{d}y + a_z\mathrm{d}z$
Cylindriques	$\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$	$\mathrm{d}\mathscr{C} = a_r\mathrm{d}r + a_\theta\, r\mathrm{d}\theta + a_z\mathrm{d}z$
Sphériques	$\mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$	$\mathrm{d}\mathscr{C} = a_r\mathrm{d}r + a_\theta\, r\mathrm{d}\theta + a_\varphi\, r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$

Définition 96 : Lignes et tubes de champ

Pour un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$, une **ligne de champ** est une courbe sur laquelle, en tout point M, $\vec{A}(M)$ est **tangent**.
Si on note $\mathrm{d}\vec{M}$ le déplacement élémentaire, une ligne de champ vérifie :

$$\mathrm{d}\vec{M} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0} \tag{13.10}$$

On appelle **tube de champ** un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

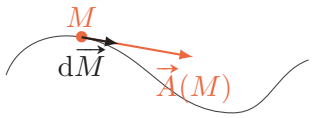


FIGURE 13.3 – Ligne de champ

13.5.2 Opérateurs sur les champs

Définition 97 : Gradient

Soit $U(M)$ un champ scalaire. La variation $\mathrm{d}U$ est lié au deplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\vec{l}_M$ par le **gradient** :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(U(M)) \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_M = \mathrm{d}U \tag{13.11}$$

Ses expressions sont :

Coordonnées	**Expressions**
Cartésiennes	$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
Cylindriques	$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
Sphériques	$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f) = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

Définition 98 : Divergence

Soit un volume élémentaire $\mathrm{d}V_M$ autour d'un point M et un champ de vecteur $\vec{A}(M)$. En notant $\mathrm{d}\Phi$ le flux de $\vec{A}(M)$ traversant la surface entourant $\mathrm{d}V_M$, la **divergence** est définie par :

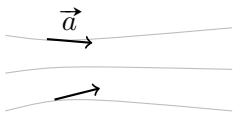
(13.12) $$\text{div}\left(\vec{A}(M)\right) \cdot \mathrm{d}V_M = \mathrm{d}\Phi(M)$$

Ses expressions sont :

Coordonnées	**Expressions**
Cartésiennes	$\text{div}\left(\vec{A}(M)\right) = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$\text{div}\left(\vec{A}(M)\right) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r \cdot A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\text{div}\left(\vec{A}(M)\right) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (\sin\theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Définition 99 : Circulation

Soit $\vec{a}$ un champ de vecteur.



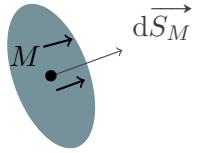
La **circulation élémentaire** du champ $\vec{a}$ de vecteurs sur le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{l_M}$ autour d'un point M est

(13.13) $$\mathrm{d}\mathscr{C} = \vec{a}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l_M}$$

Alors, la **circulation** le long d'un chemin Γ_{AB} est :

(13.14) $$\mathscr{C}_a = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{l_M}$$

On va maintenant définir le flux passant à travers une surface :



Définition 100 : Flux

Le **flux élémentaire** du champs $\vec{a}$ de vecteurs à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{l_M}$ autour d'un point M est

(13.15) $$\mathrm{d}\Phi = \vec{a}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$$

Alors, le **flux** le long d'un chemin Γ_{AB} est :

(13.16) $$\Phi_a = \iint\limits_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$$

13.5.3 Stokes et Ostrogradski

Théorème 100.1 : Formules de Stokes et d'Ostrogradski

(Ostrogradski) $$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\left(\vec{E}\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{V} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \qquad \text{(Flux)}$$

(Stokes) $$\iint\limits_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{E}\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oint\limits_{\mathscr{C}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \qquad \text{(Contour fermé)}$$

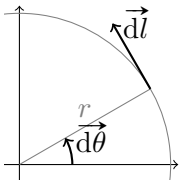
13.6 Règles générales

13.6.1 Relations entre les grandeurs

$$\boxed{\text{Puissance} = \frac{\mathrm{d}\,\text{Travail}}{\mathrm{d}t}}$$

13.6.2 Longueurs de références

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{l} = r\mathrm{d}\vec{\theta}}$$



Deuxième partie

Chimie

Chapitre 14

Première année

14.1 Configuration électronique

Définition 1 : Les nombres quantiques

Pour caractériser un électron, on définit :

- $\boldsymbol{n}$, le **nombre quantique principal**, définit la couche sur laquelle un électron est rangé
- $\boldsymbol{l} \in [0, n-1]$, le **nombre quantique azimutal**, précise la sous-couche sur laquelle un électron est rangé
- $\boldsymbol{m_l} \in [-l; l]$, le **nombre quantique magnétique**, définit le nombre d'orbitales possibles. Chaque orbitale est appellée "case quantique".
- $\boldsymbol{m_s} \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$, **nombre quantique de spin**, définit le sens de rotation des électrons d'une même case quantique.

Théorème 1.1 : Principe d'exclusion de Pauli

Deux électrons ne peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques

Théorème 1.2 : Règle de stabilité de Klechkowsy

Le remplissage des orbitales atomiques se fait par ordre des $(n + l)$ croissants.

n \ l	1	2	3	4
1	$1s^2$			
2	$2s^2$	$2p^6$		
3	$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
4	$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$

Figure 14.1 – Tableau des sous-couches électroniques

Théorème 1.3 : Règle de remplissage de Hund

Lorsqu'un niveau d'énergie est **dégénéré** — c'est à dire pour deux orbitales de même nombre quantique principal n — et que le nombre d'électrons n'est pas suffisant pour sauter le niveau :

- L'état de plus basse énergie est obtenu en utilisant un maximum d'orbitales
- Les spins des électrons non appariés (les électrons célibataires) d'une même orbitale étants parallèles

14.2 Représentation moléculaire

Méthode

Représentation de Lewis

La **charge formelle** d'un atome est determinée par :

$$\mathrm{CF_A} = n_{\text{Atome}}(e^-) - n_{\text{Molécule}}(e^-) \tag{14.1}$$

1. On compte le nombre N d'électrons pour connaitre le nombre $\frac{N}{2}$ de doublets à répartir
2. On minimise le nombre de charges formelles en multipliant les liaisons
3. On distribue les charges formelles par ordre d'électronégativité

Méthode VSEPR

Le **moment dipolaire** $\vec{\mu}$ est le vecteur caractérisant une liaison entre deux charges $(-\delta e)$ et $(+\delta e)$ distancées de d. Ses caractéristiques sont :

Direction Celle de la liaison
Sens Du $-$ au $+$ (donc de $(-\delta e)$ vers $(+\delta e)$)
Norme $\|\vec{\mu}\| = \delta e \times d$

La notation VSEPR s'exprime par :

$$\mathrm{A\,X}_m\,\mathrm{E}_n \tag{VSEPR}$$

où m est le nombre d'atomes liés à l'atome central et n est le nombre d'entités non liantes (doublets ou électron célibataire).

14.3 Cinétique chimique

14.3.1 Avancement

Définition 2 : Avancement

L'**avancement** d'une réaction est défini par

(14.2) $$\xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$$

Où n_i est la quantité molaire du constituant A_i, n_i° sa quantité molaire initiale, et ν_i son coefficient stœchiométrique.
ξ est en mol

Définition 3 : Vitesse de réaction

La vitesse de réaction est la variation de l'avancement :

(14.3) $$v_{\text{réaction}} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}$$

Dans les systèmes à volumes constants, on parle de **vitesse volumique de réaction** :

$$v_{\text{vol}} = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\nu_i}\frac{\mathrm{d}c_i}{\mathrm{d}t}$$

Définition 4 : Loi de vitesse

Une réaction chimique **admet un ordre** si on peut relier la vitesse de réaction à la constante de vitesse k et aux concentrations $[A_k]$:

(14.4a) $$v = k \cdot f\Big([A_k]\Big)$$

où $f\Big([A_k]\Big)$ est une fonction des concentrations. Souvent, on a :

(14.4b) $$\boxed{v = k \prod_i [A_k]^{\alpha_i}}$$

α_i est appelé **ordre partiel** de la réaction par rapport à

Théorème 4.1 : Loi d'Arrhenius

On dit q'une réaction associée à une équation stœchiométrique **admettant un ordre** suit la **loi d'Arrhenius** si sa constante de vitesse k suit :

(14.5) $$k(T) = A\, e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

14.3.2 Loi d'action de masse

Théorème 4.2 : Loi d'action de masse

La **loi d'action de masse**, aussi appelée **Loi de Gulderg et Waage**, permet de calculer la constante K :

$$K = \prod_i a_i^{\nu_i} \tag{14.6}$$

14.4 Cristallographie

Définition 5 : Cristal

Un cristal est défini par une **maille** et un **motif**. Un motif est une translation de la maille selon un vecteur $\vec{t}$.

Définition 6 : Compacité

En considérant les atomes comme des sphères, la **compacité** C se définit dans une maille par :

$$C = \frac{\text{Volume des atomes de la maille}}{\text{Volume de la maille}} \tag{14.7}$$

Chapitre 15

Thermochimie

Méthode

Enthalpie	$H = U + PV$	Capacité thermique molaire à volume constant	$c_v = \dfrac{(\partial U_m)}{\partial T}$
Energie libre	$F = U - TS$	Capacité thermique molaire à pression constante	$c_v = \dfrac{(\partial H_m)}{\partial T}$
Enthalpie libre	$G = H - TS$	Avancement	$\xi_i = \dfrac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$
		Vitesse de réaction	$v = \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = k \prod_i c_i$

15.1 Grandeurs extensives

Définition 7 : Grandeure intensive/extensive

Une **grandeur extensive** est une grandeure proportionnelle à la taille du système qu'elle caractérise.
De manière générale, si S_1 et S_2 sont deux systèmes **disjoints**, on dit que Y est une grandeur extensive si :

$$Y(S_1) + Y(S_2) = Y(S_1 \bigcup S_2) \tag{15.1}$$

Une **grandeur intensive** est le contraire d'une grandeur extensive.

Propriétés

- extensive $\times$ intensive $=$ extensive
- $\dfrac{\text{extensive}}{\text{extensive}} = \text{intensive}$

- $J_{\text{extensive}}(\alpha n, \alpha V) = \alpha J(n, V)$

Définition 8 : Variance

La **variance** d'un système est le nombre maximal de paramètres intensifs que l'on peut choisir sans remettre en cause l'équilibre du système étudié.

Théorème 8.1 : Règle de Gibbs

La règle de Gibbs permet de déterminer la **variance** v d'un système en connaissant :

i. Le nombre φ de phases distinctes

ii. Le nombre c de constituants

iii. Le nombre r de réactions chimiques

Alors, on a :

$$v = c - r + 2 - \varphi \tag{15.2}$$

(Attention) Il faut faire attention en comptant φ dans un système : les phases doivent être distinctes. Par exemple, $\varphi = 2$ pour un liquide et un gaz, $\varphi = 2$ pour deux états solides (car ils sont non miscibles), et $\varphi = 1$ pour deux liquides ou deux gaz miscibles

15.2 Équilibre d'une réaction

On considère une réaction du type :

$$\boxed{\nu_{\mathrm{A}}\mathrm{A} + \nu_{\mathrm{B}}\mathrm{B} + \cdots + \nu_i A_i \rightleftharpoons \nu_{\mathrm{C}}\mathrm{C} + \nu_{\mathrm{D}}\mathrm{D} + \cdots + \nu_j \mathrm{C}_j}$$

Les ν_i et les ν_j sont les coefficients stœchiometriques associés à chaque constituant i. Ceux des réactifs (les ν_i) sont comptés négativements.
Les n_k sont les quantités de matière associées à chaque constituant P_k de la réaction.

15.2.1 Enthalpie libre

Définition 9 : Enthalpie libre de réaction

L'**enthalpie libre** G est une fonction d'état associée au deuxième principe de la thermodynamique :

$$G = H - TS$$

$$\boxed{G = U + PV - TS} \tag{15.4a}$$

La version différentielle :

$$\mathrm{d}G = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T + \delta W_{\text{rév}} \tag{15.4b}$$

Et G étant une fonction d'état extensive :

(**15.4c**)
$$\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

$\Delta_r G^\circ$ caractérise l'équilibre de réaction, et $\Delta_r G$ son sens.

(**15.5**)
$$\begin{aligned}
\Delta_r G^\circ &= -RT \ln K \\
\Delta_r G &= \Delta_r G^\circ + RT \ln Q \\
&= RT \ln \tfrac{Q}{K} \\
\Delta_r G \leq 0 &\Leftrightarrow \text{Sens direct}
\end{aligned}$$

À l'équilibre, $Q = K$, donc $\Delta_r G = 0$.

Chapitre 16

Premier principe appliqué à la transformation chimique

16.1 Enthalpie standard

Définition 10 : État standard

L'**état standard** d'un constituant est défini par son état physique stable à la température T, sous la pression standard : $P^\circ = 1$ bar $= 10^5$ Pa

Définition 11 : Enthalpie standard de réaction

L'**enthalpie standard de récation** $\Delta_r H_{(T,P)}$ correspond à la variation d'enthalpie du mélange réactionnel pour $\xi = 1$ mole d'avancement de la réaction en cour, dans l'**état standard**.

La réaction est alors dite, suivant le signe de $\Delta_r H^\circ$:

- **endothermique** (pour $\Delta_r H^\circ > 0$) :
  dans le sens direct, la réaction consomme de la chaleur
- **exothermique** (pour $\Delta_r H^\circ < 0$) :
  dans le sens direct, la réaction dégage de la chaleur

Définition 12 : Enthalpie standard de formation

On appelle **enthalpie standard de formation**, en on note $\Delta H_f^\circ(\mathrm{AB})$, la variation d'enthalpie lors de la formation d'un constituant AB.
C'est donc l'enthalpie standard de formation $\Delta_r H^\circ$ de la réaction :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{AB}$$

Remarque : Les composants simples comme le carbone C ou l'hydrogène H ont une enthalpie standard de formation nulle. Idem pour les composés stables comme le dioxygène O_2 ou le diazote N_2 : leur enthalpie standard de formation est nulle.

$$\Delta H_f^\circ(\mathrm{O_2}) = \Delta H_f^\circ(\mathrm{N_2}) = \Delta H_f^\circ(\mathrm{C}) = \Delta H_f^\circ(\mathrm{H}) = 0$$

Définition 13 : Grandeur de réaction

Pour toute grandeure extensive J dans une réaction d'avancement ξ, on définit sa grandeur de réaction $\Delta_r J$:

(16.1) $$\Delta_r J = \left(\frac{\partial J}{\partial \xi}\right)_{T,\, P \text{ fixés}}$$

$\Delta_r J$ est une grandeur intensive

Théorème 13.1 : Loi de Hess

En conditions standards, les grandeurs de réactions obéissent à la **loi de Hess** :

(16.2) $$\Delta_r J^\circ = \sum_{\substack{\text{Produits } + \\ \text{Réactifs } -}} \nu_i \, \Delta J^\circ_{f,i}$$

où $\Delta J^\circ_{f,i}$ est une grandeur standard de formation.

16.2 Effets thermiques pour une transformation monobare

Le programme préconise plutôt une transformation isobare, mais monobare est une condition suffisante.

Définition 14 : Transformation monobare

Une transformation **monobare** est une transformation s'effectuant à pression extérieur P_{ext} constante, et telle que la pression initiale P_{initiale} du système soit la même que la pression finale P_{finale} :

(Monobare) $$P_{\text{finale}} = P_{\text{initiale}} = P_{\text{ext}} \qquad\qquad P_{\text{ext}} = \text{constante}$$

La pression du système peut varier pendant la transformation (et c'est là la différence avec une transformation **isobare**), mais elle doit toujours revenir à la pression extérieure à la fin.

Théorème 14.1 : Application du premier principe

Lors d'une réaction **monobare** et **monotherme**, le transfert thermique causé par la transformation se relie à l'enthalpie standard de réaction :

(16.3) $$\Delta H = Q_P = \xi \Delta_r H^\circ$$

16.3 Relations de Kirchhoff

Théorème 14.2 : Relations de Kirchhoff

Les **relations de Kirchhoff** permettent d'exprimer les variations de l'énergie interne standard de réaction $\Delta_r U^\circ$, de l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$, ou encore de l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ en fonction de la température T.

- Pour une réaction à température et volume constants :

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_r U^\circ}{\mathrm{d}T} = \Delta_r C_V^\circ \tag{16.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_r S^\circ}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_r C_V^\circ}{T} \tag{16.4b}$$

- Pour une réaction à température et pression constantes :

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_r H^\circ}{\mathrm{d}T} = \Delta_r C_P^\circ \tag{16.5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_r S^\circ}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta_r C_P^\circ}{T} \tag{16.5b}$$

Chapitre 17

Diagramme Potentiel-pH

Pour un couple Oxydant-Réducteur, le diagramme potentiel-pH représente l'évolution du potentiel d'oxydo-réduction en fonction du pH.

17.1 Rappels

Le **produit ionique de l'eau** K_e est le coefficient de réaction d'autoprotolyse de l'eau.

$$K_e = [\mathrm{OH}^-][\mathrm{H_3O}^+] \tag{17.1a}$$

Le pK_e est son potentiel :

$$pK_e = -\log K_e$$
$$pK_e = p\mathrm{OH} + p\mathrm{H} \tag{17.1b}$$

À 25řC, $K_e = 10^{-14}$.

17.2 Méthode

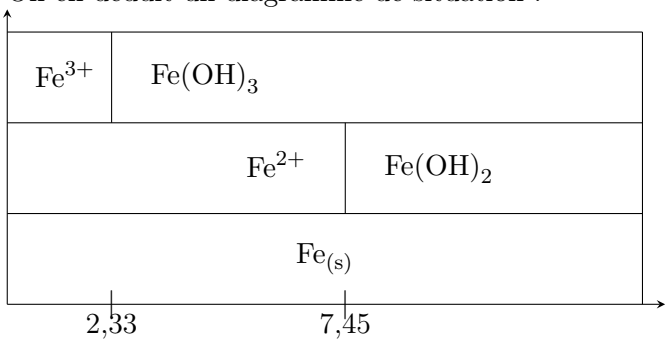
On va prendre pour exemple le fer : $Fe^{3+}/Fe(OH)_3(s)/Fe^{2+}/Fe(OH)_2(s)/Fe(s)$, à une concentration de tracé $c_{\mathrm{tra}} = 10^{-2}\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1}$

1. Créer un diagramme de situation
   - Calculer les **nombres d'oxydation** ($\sum q = \sum n_0$)
     $\underset{+III}{Fe^{3+}}/\underset{+III}{Fe(OH)_3}(s)/\underset{+II}{Fe^{2+}}/\underset{+II}{Fe(OH)_2}(s)/\underset{0}{Fe}(s)$
   - Pour un même nombre d'oxydation, on regarde les gammes de pH.
     (a) Avec la concentration de tracé $c_{\mathrm{tra}} = [\mathrm{Fe}^{2+}]$, on écrit une équation, par exemple
     $\mathrm{Fe}^{2+} + 2\,\mathrm{OH}^- = \mathrm{Fe(OH)_2}$
     (b) On utilise la loi d'action de masse pour trouver le pH en connaissant le $K_e = 10^{-14}$ et le $K_{s_2} = [\mathrm{OH}^-]^2[\mathrm{Fe}^{2+}]$

$$
\begin{aligned}
K_{s_2} &= [\mathrm{OH}^-]^2[\mathrm{Fe}^{2+}] \\
pH &= -\log\,[\mathrm{H_3O}^+] \\
&= -\log\left(\frac{K_e}{[\mathrm{OH}^-]}\right) \\
&= -\log\left(\frac{K_e}{\sqrt{\dfrac{K_{s_2}}{[\mathrm{Fe}^{2+}]}}}\right) = pK_e + \log\left(\sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\mathrm{Fe}^{2+}]}}\right)
\end{aligned}
$$

Les données renvoient les frontières $\mathrm{Fe}^{2+}/\mathrm{Fe(OH)_2}$ et $\mathrm{Fe}^{3+}/\mathrm{Fe(OH)_3}$ respectivement à 7,5 et 2,3

- On en déduit un diagramme de situation :



2. On étudie, pour les frontières existantes, l'équation de la droite

   - Pour les équations ne faisant pas intervenir H^+, comme par exemple à la frontière $\mathrm{Fe}^{2+}/\mathrm{Fe(s)}$ où l'équation est $\mathrm{Fe}^{2+} + 2\,\mathrm{e}^- = \mathrm{Fe}$, ou à la frontière $\mathrm{Fe}^{2+}/\mathrm{Fe}^{3+}$, la frontière sera horizontale, d'équation E°
   - Pour les autres, on applique simplement Nernst pour exprimer E en fonction du pH. Par exemple :

$$\mathrm{Fe}^{2+} + 3\,\mathrm{H_2O} = \mathrm{Fe(OH)_3} + 3\,\mathrm{H}^+ + \mathrm{e}^-$$

   Alors,

$$
\begin{aligned}
E &= E^\circ_{\mathrm{Fe(OH)_3/Fe^{2+}}} + 0,06 \log \frac{[\mathrm{H}^+]^3}{[\mathrm{Fe}^{2+}]} \\
&= E^\circ_{\mathrm{Fe(OH)_3/Fe^{2+}}} + 0,06\left(3\log[\mathrm{H}^+] - \log[\mathrm{Fe}^{2+}]\right) \\
&= E^\circ_{\mathrm{Fe(OH)_3/Fe^{2+}}} - \log[\mathrm{Fe}^{2+}] - 0,18\mathrm{pH}
\end{aligned}
$$

   $E^\circ_{\mathrm{Fe(OH)_3/Fe^{2+}}} - \log[\mathrm{Fe}^{2+}]$ étant constant, on peut le déterminer par continuité avec la frontière de Fe^{2+} et Fe^{3+} à pH$= 2,3$

3. On trace le diagramme Potentiel-pH

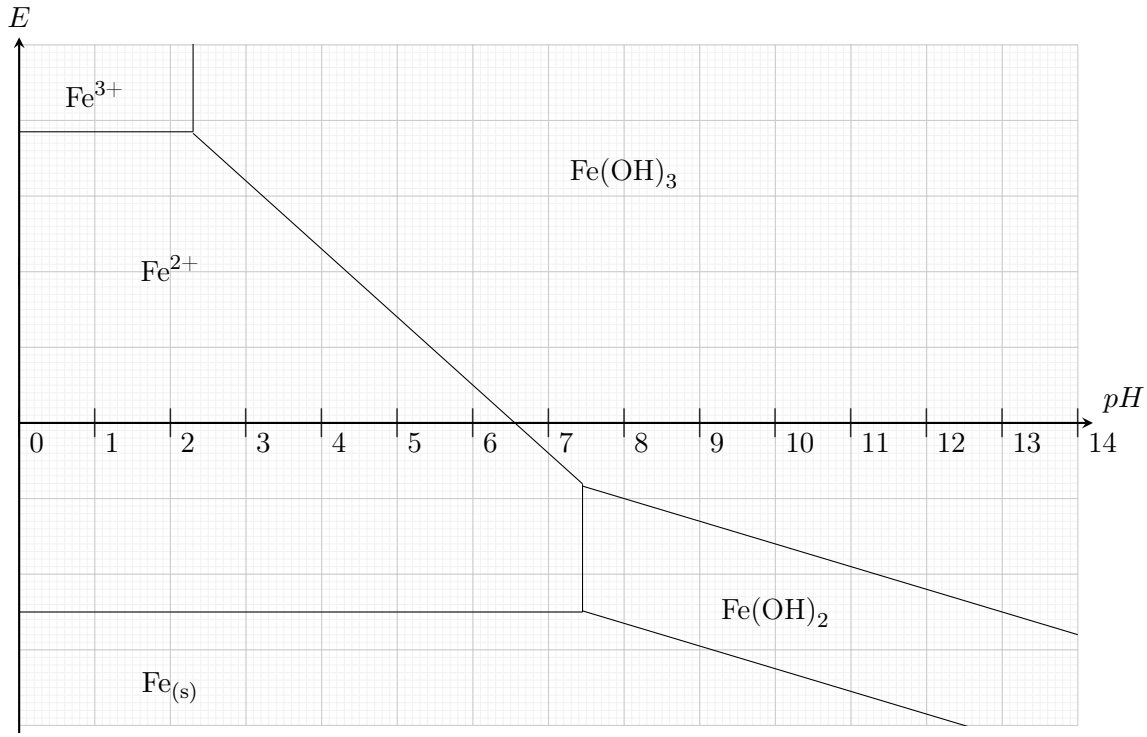


FIGURE 17.1 – Diagramme potentiel-pH du fer

Chapitre 18

Cinétique de l'oxydoréduction

18.1 Cinétique des réactions d'oxydoréduction

18.2 Corrosion

Chapitre 19

Annexe

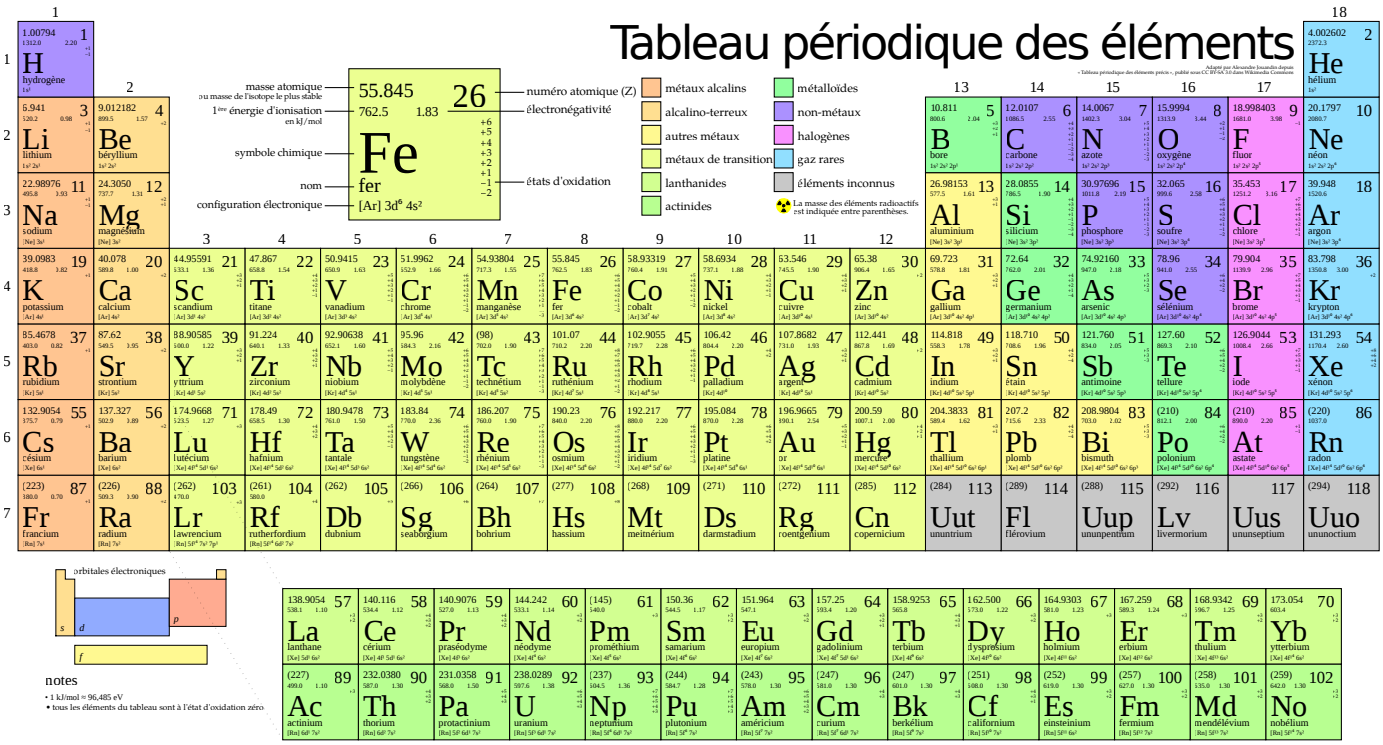


FIGURE 19.1 – Tableau périodique des éléments de MENDELEEV

Liste des acronymes

AO Amplificateur Opérationnel. 2, 25

ARQS Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires. 2, 23, 119

FEM Force Électromotrice. 24

OEM Onde Électromagnétique. 23, 46

OPP Onde Plane Progressive. 72, 73, 74, 75

OPPM Onde Plane Progressive Monochromatique. 74, 77, 78, 79, 80

PFD Principe Fondamental de la Dynamique. 42, 76, 88

TMC Théorème du Moment Cinétique. 36, 42

TRC Théorème de la Résultante Cinétique. 42, 66

Index

D'Alembert, 65
Aplanétisme, 45
Archimède, 22
ARQS, 23
Avancement, 103

Biot et Savart, 62
Bode, 30

Capacité thermique, 12
    à pression constante, 11
    à volume constant, 10
Champ
    électromoteur, 71
Charge formelle, 102
Chemin optique, 47
Circulation, 98
Cirulation
    élémentaire, 98
Clausius
    inégalité, 15
Compacité, 104
Conducteur ohmique, 79
Constante
    Stefan, 82
Contraste, 51
Coordonnées
    cartésiennes, 95
    cylindriques, 95

Débit massique, 15
Dégénéré, 102
Densité
    spectrale d'onde de flux surfacique, 81
    surfacique
      d'énergie, 81
    volumique d'énergie électromagnétique, 68
    volumique de force electromagnétique, 67
Descartes, 45
Deuxième principe, 11
Diagramme
    potentiel-pH, 111
Dipôle
    magnétique, 63
Dipôle
    électrostatique, 60
Dispersion, 78
Divergence, 98

Échantillonage, 32
Éclairement $\mathcal{E}$, 48
Endothermique, 108
Energie
    d'un dipôle, 27
Énergie
    cinétique, 35
    potentielle, 36
Enthalpie, 10
    de formation, 108
    libre, 106
    standard de réaction, 108

Entropie, 11
Équation
de Schrödinger, 85
Équilibre de Réaction, 107
État
standard, 108
Exothermique, 108
Grandeur extensive, 105

Facteur de Boltzmann, 90
Faraday, 69
Filtre, 28
Flux, 99
élémentaire, 99
radiatif, 83
thermique, 18
Fonction
de transfert, 28
Force
centrale, 36
conservative, 34
de Coriolis, 38
de Coulomb, 58
dérivée d'une énergie potentielle, 34
électromotrice induite, 71
de Laplace, 63, 70
de Lorentz, 62
de rappel, 34
Fraunhoffer, 56
Fréquence
de coupure, 78
Fresnel, 50

Gain, 29
Galiléen, 37
Gradient, 97

Hund, 102
Huygens-Fresnel, 56

Impédance, 26
Inductance
propre, 70
Inégalité
d'Heisenberg, 86
Grandeur intensive, 105
Isobare, 10, 109
Isochore, 10

$\vec{j}$ (Densité Volumique de Courant), 62

Kepler, 37
Klechkowsy, 101

Laplace, 66
Lenz, 69
Lewis, 102
Ligne de champ, 96
Loi
d'action de masse, 104
d'Arrhenius, 103
de Coulomb, 38, 43
de Fourier, 19
de Gulderg et Waage, 104
de Hess, 109
de Kirchoff, 23
des mailles, 23
des nœuds, 23
de Planck, 82
de Stefan-Boltzmann, 82
de Wien, 83
Longueur
de cohérence, 48
Longueur d'onde λ, 49

Masse
volumique, 22
Maxwell
Ampère, 62
Gauss, 60
Mayer, 12
michelson
Michelson
coin d'air, 54

lame d'air, 53
Millman, 27
Module d'onde k, 49
Moment
cinétique, 41
dipolaire, 102
dipolaire(Electrostatique), 61
d'une force, 40
d'inertie, 41
magnétique, 63
Monobare, 109
Lumière monochromatique, 49

Neumann, 71
Nombre d'onde σ, 49
Nombre quantique, 101
azimutal l, 101
magnétique m_l, 101
principal n, 101
de spin m_s, 101
Norton, 24
Nyquist-Shannon, 32

Loi d'Ohm
Globale, 69
Onde
électromagnétique, 46
plane, 72
polarisée rectilignement, 75
progressive, 72
transversale, 73
Ordre d'interférence, 52
Ordre partiel, 103
Ostrogradski, 99

Paquet d'onde, 79
Paraxial(rayon), 45
Pauli, 101
Période, 49
Phase, 29
Planck-Einstein, 84
Plasma, 75
Poids de Boltzmann, 90
Poisson, 66
Potentiel
électrostatique, 60
Poynting
équation locale, 68
vecteur, 68
Premier principe, 9
Pression, 22
Probabilité
d'Occupation, 90
Puissance
d'une force, 35
instantanée, 27
moyenne, 27
Pulsation
de coupure, 78
de coupure, 30
plasma, 77
Pulsation ω, 49

Quantité de mouvement, 34

Régime
stationnaire (Thermodynamique), 15
Relation(s)
de Kirchhoff, 110
Retard de phase, 47
Rétroaction, 25

Signal
périodique, 31
Stigmatisme
approché, 45
rigoureux, 45
Stokes, 99
Système
conservatif, 34
ouvert, 15
thermodynamique, 8

Temps de cohérence, 48

Thévenin, 24
Torseur
    cinétique, 40
Transfert thermique, 9
Transverse, 73
Travail d'une force, 35
Troisième principe, 14
Tube de champ, 96
Valeur
    efficace, 27
    moyenne, 27
Variance, 106
Varignon, 40
Vibration lumineuse, 46
Vitesse
    de phase, 77