

COURS DE PRÉPA

---

# Physique-Chimie

---

Écrit par  
Alexandre JOUANDIN

2013—2015  
Écrit en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X



29 mars 2015

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Physique</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Thermodynamique</b>	<b>8</b>
1.1	Définitions générales . . . . .	8
1.2	Premier Principe . . . . .	9
1.2.1	Transformation isochore . . . . .	9
1.2.2	Transformation isobare . . . . .	10
1.3	Deuxième Principe . . . . .	11
1.4	Cas particulier du gaz parfait . . . . .	12
1.5	Troisième Principe . . . . .	14
1.6	Machines thermiques . . . . .	14
1.7	Systèmes ouverts en régime stationnaire . . . . .	15
1.7.1	Système ouvert . . . . .	15
1.7.2	Premier principe . . . . .	16
1.7.3	Deuxième principe . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Statique des fluides</b>	<b>17</b>
2.1	Champ de pression d'un fluide . . . . .	17
2.2	Théorème d'ARCHIMÈDE . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Électronique</b>	<b>18</b>
3.1	Circuits linéaires dans l'ARQS . . . . .	18
3.1.1	THÉVENIN-NORTON . . . . .	19
3.2	Régime transitoires . . . . .	20
3.3	Amplificateur Opérationnel (AO) . . . . .	20
3.4	Régimes sinusoïdaux . . . . .	21
3.4.1	Puissance . . . . .	22
3.5	Filtres . . . . .	23
3.5.1	Fonctions de transfert usuelles . . . . .	24
3.5.2	Diagrammes de Bode . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Mécanique du Point</b>	<b>26</b>
4.1	Étude cinétique . . . . .	26
4.2	Loi de la quantité de mouvement . . . . .	27
4.3	Approche Énergétique . . . . .	27
4.3.1	Puissance et travail . . . . .	27
4.3.2	Énergie cinétique . . . . .	28
4.3.3	Énergie potentielle . . . . .	28
4.4	Forces centrales . . . . .	29
4.5	Dynamique en référentiel non galiléen . . . . .	31
4.5.1	Loi de composition des vitesses . . . . .	31
4.5.2	Loi de composition des accélérations . . . . .	31
4.5.3	Forces d'inerties . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Mécanique du solide</b>	<b>33</b>
5.1	Préambule . . . . .	33
5.1.1	Dérivée d'un vecteur . . . . .	33
5.1.2	Dérivée en coordonnées polaires . . . . .	33
5.2	Définitions . . . . .	34
5.3	Théorèmes de Koëinig . . . . .	35
5.4	Moment d'inertie . . . . .	35
5.5	Théorèmes de dynamique . . . . .	36
5.6	Solides en contact . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Optique</b>	<b>39</b>
6.1	Optique géométrique . . . . .	39
6.1.1	Stigmatisme et aplanétisme . . . . .	39
6.1.2	Réflexion et réfraction . . . . .	40
6.2	Optique ondulatoire . . . . .	41
6.2.1	Modèle scalaire des ondes lumineuses . . . . .	41
6.2.2	Superposition d'ondes lumineuses . . . . .	44
6.2.3	Trous d'YOUNG . . . . .	46
6.2.4	Interféromètre de MICHELSON . . . . .	48
6.2.5	Diffraction . . . . .	50
6.2.6	Réseaux . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Électromagnétisme</b>	<b>53</b>
7.1	Électrostatique . . . . .	53
7.1.1	Loi de COULOMB . . . . .	53
7.1.2	Propriétés du champ électrostatique . . . . .	54
7.1.3	Circulation du champ électrostatique . . . . .	54
7.1.4	Flux du champ électrostatique . . . . .	55
7.1.5	Dipôle électrostatique . . . . .	55
7.2	Magnétostatique . . . . .	57
7.2.1	Champ magnétique . . . . .	57
7.2.2	Dipôle Magnétique . . . . .	58
7.3	Équations de MAXWELL . . . . .	59
7.3.1	Principe de conservation de la charge . . . . .	59
7.3.2	Les équations de MAXWELL . . . . .	59
7.3.3	Equations de POISSON et de LAPLACE . . . . .	61
7.4	Énergie électromagnétique . . . . .	62
7.5	Induction . . . . .	64

7.5.1	Loi d'Ohm généralisée . . . . .	64
7.5.2	Auto-induction . . . . .	66
7.5.3	Inductance mutuelle . . . . .	66
7.5.4	Force électromotrice induite . . . . .	66
7.6	Propagation et rayonnement . . . . .	67
7.6.1	Dans le vide . . . . .	67
7.6.2	Propagation dans un plasma . . . . .	71
7.6.3	Propagation dans un conducteur ohmique . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Diffusion Thermique</b>	<b>77</b>
8.1	Conduction . . . . .	77
8.2	Convection . . . . .	81
<b>9</b>	<b>Rayonnement Thermique</b>	<b>82</b>
<b>10</b>	<b>Mécanique Quantique</b>	<b>85</b>
10.1	Introduction à la mécanique quantique . . . . .	85
10.1.1	Dualité onde-particule . . . . .	85
10.1.2	Fonction d'onde et équation de SCHRÖDINGER . . . . .	85
10.2	Évolution d'une particule quantique libre . . . . .	86
10.3	Évolution d'une particule quantique dans un potentiel . . . . .	86
<b>11</b>	<b>Thermodynamique statistique</b>	<b>87</b>
11.1	Monde microscopique, monde macroscopique . . . . .	87
11.2	Facteur de BOLTZMANN . . . . .	87
11.2.1	Atmosphère isotherme . . . . .	87
11.2.2	Poids de BOLTZMANN . . . . .	89
<b>12</b>	<b>Annexe</b>	<b>90</b>
12.1	Trigonométrie . . . . .	90
12.1.1	Définition . . . . .	90
12.1.2	Addition / Produit . . . . .	90
12.1.3	Nombres complexes . . . . .	91
12.2	Calcul vectoriel . . . . .	91
12.3	Complément mathématique . . . . .	92
12.3.1	Dérivée d'un vecteur . . . . .	92
12.3.2	Équation différentielle . . . . .	92
12.4	Repères en physique . . . . .	93
12.4.1	Repère cartésien . . . . .	93
12.4.2	Repère cylindrique . . . . .	93
12.5	Analyse Vectorielle . . . . .	94
12.5.1	Généralités sur les champs . . . . .	94
12.5.2	Opérateurs sur les champs . . . . .	94
12.5.3	STOKES et OSTROGRADSKI . . . . .	97
12.6	Règles générales . . . . .	97
12.6.1	Relations entre les grandeurs . . . . .	97
12.6.2	Longueurs de références . . . . .	97

<b>II Chimie</b>	<b>98</b>
<b>13 Première année</b>	<b>99</b>
13.1 Configuration électronique . . . . .	99
13.2 Représentation moléculaire . . . . .	100
13.3 Cinétique chimique . . . . .	100
13.4 Cristallographie . . . . .	101
<b>14 Thermochimie</b>	<b>102</b>
14.1 Grandeurs extensives . . . . .	102
14.2 Équilibre d'une réaction . . . . .	103
14.2.1 Enthalpie libre . . . . .	103
14.2.2 Avancement . . . . .	104
14.2.3 Loi d'action de masse . . . . .	105
<b>15 Premier principe appliqué à la transformation chimique</b>	<b>106</b>
15.1 Enthalpie standard . . . . .	106
15.2 Effets thermiques pour une transformation monobare . . . . .	107
15.3 Relations de KIRCHHOFF . . . . .	107
<b>16 Diagramme Potentiel-pH</b>	<b>110</b>
16.1 Rappels . . . . .	110
16.2 Méthode . . . . .	110
<b>17 Annexe</b>	<b>113</b>
<b>Liste des acronymes</b>	<b>115</b>
<b>Index</b>	<b>117</b>

# Table des figures

3.1	Équivalence THÉVENIN-NORTON . . . . .	19
4.1	Force de rappel d'un ressort . . . . .	27
5.1	Coordonnées polaires . . . . .	33
5.2	Moment d'une force . . . . .	34
5.3	Moment cinétique . . . . .	35
6.1	Système rigoureusement stigmatique . . . . .	40
6.2	Système non stigmatique . . . . .	40
6.3	Système rigoureusement aplanétique . . . . .	40
6.4	Système non aplanétique . . . . .	40
6.5	Trains d'onde dans le temps et dans l'espace . . . . .	44
6.6	Dispositif des trous de YOUNG . . . . .	46
6.7	Interféromètre de MICHELSON en lame d'air . . . . .	49
6.8	Interféromètre de MICHELSON en coin d'air . . . . .	50
6.9	Objet diffractant . . . . .	51
6.10	Deux fentes $O_n$ et $O_{n+1}$ d'un réseau . . . . .	52
7.1	Moment dipolaire . . . . .	56
7.2	Polarisation rectiligne . . . . .	71
9.1	Caractérisation des différents flux . . . . .	83
12.1	Repère en coordonnées cartésiennes . . . . .	93
12.2	Repère en coordonnées cylindriques . . . . .	94
12.3	Ligne de champ . . . . .	94
13.1	Tableau des sous-couches électroniques . . . . .	100
16.1	Diagramme potentiel-pH du fer . . . . .	112
17.1	Tableau périodique des éléments de MENDELEEV . . . . .	114

Première partie

Physique

# Chapitre 1

## Thermodynamique

### Méthode

#### Formules

Premier principe	$\Delta U = Q + W$	(cf. équation (1.4a) page 9)
	$dU = \delta Q + \delta W$	(cf. équation (1.4b) page 9)
	$dU = TdS - PdV$	(cf. équation (1.11) page 11)
Enthalpie	$dH = U + PV$	(cf. équation (1.7) page 10)
	$dH = TdS + VdP$	(cf. équation (1.12) page 12)
Deuxième principe	$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$	(cf. équation (1.10) page 11)
Gaz parfait	$dU = C_V dT$	
	$dH = C_P dT$	
	$PV^\gamma = \text{constante}$	

Les fonctions  $U$ ,  $H$  et  $S$  sont des fonctions d'état. Ainsi, d'un point  $A$  à un point  $B$  d'une transformation, le calcul ne change pas qu'on passe par un chemin réversible ou non.

### 1.1 Définitions générales

Avant de commencer, un petit point sur la différence de notation entre  $d$  et  $\delta$ , conformément au programme de deuxième année.

Signification	Petite	Grande
Variation	$dH$	$\Delta H$
Quantité	$\delta Q$	$Q$

TABLE 1.1 – Différence entre  $d, \delta$ , et  $\Delta$

#### Définition 1 : Système

On appelle **système thermodynamique** le contenu d'une zone délimitée dans l'espace.

Type de système	Ouvert	Fermé	Isolé
Échange d'énergie avec l'extérieur	✓	✓	
Échange de matière avec l'extérieur	✓		



TABLE 1.2 – Les différents systèmes

### Définition 2 : Transfert thermique

Le **transfert thermique** est un apport de chaleur lors d'un transfert de température :

$$(1.1) \quad Q = C \Delta T \quad dQ = C dT$$

Où  $C$  est la capacité calorifique en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

Pour un corps pur,  $C$  est défini, sinon, pour un gaz parfait, il faudra prendre  $C = C_V$  ou  $C = C_P$  suivant qu'on se trouve à volume ou à pression constante.

(ATTENTION) Parfois, on utilise les valeurs molaires en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  :  $C_{Vm} = \frac{C_V}{n}$  par exemple.

### Définition 3 : Travail

Le travail reçu par un système thermodynamique est noté  $W$ .

Il prend en compte le travail des forces de pression  $-P_{\text{ext}}dV$  et les autres forces  $W_u$  :

$$(1.2) \quad \delta W = -P_{\text{ext}}dV + \delta W_u$$

### Définition 4 : Énergie interne

L'énergie interne  $U$  d'un système thermodynamique est définie microscopiquement par :

$$(1.3) \quad U = U_0 + E_c^* + \underbrace{E_p^*}_{\text{Énergie potentielle d'interaction}}$$

## 1.2 Premier Principe

### Théorème 4.1 : Premier principe

La variation d'énergie  $\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p$  est égal à la somme du travail reçu  $W$  et du transfert thermique reçu  $Q$  :

$$(1.4a) \quad \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W$$

Entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  très proches :

$$(1.4b) \quad dU + dE_c + dE_p = \delta Q + \delta W$$

#### 1.2.1 Transformation isochore

Une transformation isochore est une transformation pendant laquelle le volume  $V$  reste constant.

### Théorème 4.2

Pour une transformation **isochore** (à volume constant), on peut simplifier la variation d'énergie interne :

$$(1.5) \quad dU_V = C_V dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à volume constant** :

$$(1.6) \quad C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

**Preuve 4.2.1** On note  $U_V$  et  $Q_V$  respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à volume constant.

Si on néglige  $dE_c$  et  $dE_p$ , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_V &= \delta W + \delta Q_V \\ &= -P \underbrace{dV}_{\text{nul car } V=\text{cte}} + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_V \\ &= \delta Q_V \\ dU_V &= C_V dT \end{aligned}$$

### 1.2.2 Transformation isobare

On peut effectuer un raisonnement analogue à la preuve précédente en étudiant cette fois une transformation **isobare** (à pression constante)

**Preuve 4.2.2** On note  $U_P$  et  $Q_P$  respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à pression constante.

Si on néglige  $dE_c$  et  $dE_p$ , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_P &= \delta W + \delta Q_P \\ &= -PdV + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_P \\ dU_P + PdV &= \delta Q_P \\ d(U + PV)_P &= \delta Q_P \\ &= C_P dT \end{aligned}$$

Cette quantité de chaleur mise en jeu est l'enthalpie. On va maintenant la définir de manière générale :

### Définition 5 : Fonction Enthalpie

On appelle **enthalpie** la fonction d'état  $H$  telle que :

$$(1.7) \quad H = U + PV$$

### Théorème 5.1

Lors d'une transformation isobare, l'enthalpie s'exprime par :

$$(1.8) \quad dH_P = C_P dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à pression constante** :

$$(1.9) \quad C_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

## 1.3 Deuxième Principe

### Théorème 5.2 : Deuxième principe

Il existe une **fonction d'état**  $S$  **entropie**, **additive**, **extensive**, telle que :

$$(1.10) \quad dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T}}$$

Au final,  $\boxed{\delta S_{\text{créée}} \geq 0}$ .

Lorsqu'une transformation est **réversible**, on a  $\boxed{S_{\text{créée}} = 0}$  et alors  $\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}}$

### Théorème 5.3 : Première identité thermodynamique

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **première identité thermodynamique** est vérifiée :

$$(1.11) \quad dU = TdS - PdV$$

**Preuve 5.3.1** On étudie en premier lieu une transformation réversible. C'est-à-dire que  $dS = \frac{\delta Q_{\text{réversible}}}{T}$ .

Ainsi,  $\begin{cases} \delta Q_{\text{réversible}} = TdS \\ \delta W_{\text{réversible}} = -PdV \end{cases}$ . On peut maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique :

$$dU_{\text{réversible}} = TdS - PdV$$

Mais  $U$  est une **fonction d'état**. Donc peu importe le chemin parcouru par la transformation, qu'il soit réversible ou pas, on peut écrire :

$$dU = TdS - PdV$$

(ATTENTION)

On ne peut pas intégrer cette équation sur un chemin irréversible. Mais on peut substituer l'intégrale à celle d'un chemin réversible.

— **Théorème 5.4 : Deuxième identité thermodynamique** —

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **deuxième identité thermodynamique** est vérifiée :

(1.12) 
$$dH = TdS + VdP$$

## 1.4 Cas particulier du gaz parfait

— **Définition 6 : Gaz Parfait** —

Un gaz parfait est un gaz vérifiant l'équation d'état :

(1.13) 
$$PV = nRT$$

— **Théorème 6.1 : Énergie interne d'un gaz parfait** —

L'énergie cinétique interne d'un gaz parfait ne varie pas. On démontre expérimentalement que l'énergie interne d'un gaz parfait est :

(1.14) 
$$U_{\text{Gaz Parfait}} = U_0 + C_V T$$

La capacité thermique à volume constant  $C_V$  d'un gaz parfait est

(1.15) 
$$C_V = \begin{cases} \frac{3}{2}nR & \text{pour un gaz parfait monoatomique} \\ \frac{5}{2}nR & \text{pour un gaz parfait polyatomique} \end{cases}$$

— **Théorème 6.2 : Capacité thermique** —

On peut utiliser deux **capacités thermiques** :

La capacité calorifique  $C_V$  à volume constant

(1.16a) 
$$C_V = \frac{3}{2}nR$$

La capacité calorifique  $C_P$  à pression constante

(1.16b) 
$$C_P = \frac{5}{2}nR$$

— **Définition 7** —

On défini  $\gamma$  comme le rapport des capacités calorifiques :

(1.17) 
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

### Théorème 7.1 : Relation de MAYER

La **relation de MAYER** relie la capacité thermique à pression constante  $C_P$  à la capacité thermique à volume constant  $C_V$  :

$$(1.18) \quad C_P - C_V = nR \quad C_{Pm} - C_{Vm} = R$$

On peut maintenant exprimer :

$$(1.19a) \quad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

$$(1.19b) \quad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

**Preuve 7.1.1** La démonstration de la relation de MAYER ne semble pas être au programme.

Pour le reste, les démonstrations sont assez simples :

$$\begin{aligned} C_P - C_V &= nR \\ \gamma C_V - C_V &= nR \\ (\gamma - 1)C_V &= nR \\ C_V &= \frac{nR}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

La deuxième devient alors bien plus simple à démontrer :

$$\begin{aligned} C_P &= \gamma C_V \\ C_P &= \gamma \frac{nR}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

### Théorème 7.2 : Relations de LAPLACE

Au cours d'une transformation **adiabatique réversible** (donc isentropique), un gaz parfait vérifie :

$$(1.20a) \quad PV^\gamma = \text{constante}$$

$$(1.20b) \quad TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$\begin{aligned} (1.20c) \quad P^{1-\gamma}T^\gamma &= \text{constante} \\ &= P_{\text{eq}}V_{\text{eq}} \end{aligned}$$

**Preuve 7.2.1** On part d'une des identités thermodynamiques. Peu importe laquelle, cela changera juste quelle relation de LAPLACE on obtient.

Nous allons partir de  $dH = TdS + VdP$ .

$$\begin{aligned} dH &= TdS + VdP \\ dS &= \frac{dH}{T} - dP \frac{V}{T} \end{aligned}$$

D'après l'équation d'état d'un gaz parfait (1.13) :

$$dS = \frac{dH}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

$$dS = C_P \frac{dT}{T} - (C_P - C_V) \frac{dP}{P}$$

$$dS = \gamma C_V \frac{dT}{T} - C_V(\gamma - 1) \frac{dP}{P}$$

$$dS = \gamma C_V \ln \frac{T_2}{T_1} - C_V(\gamma - 1) \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Or la transformation est isentropique, donc  $dS = 0$ , d'où :

$$\cancel{C_V}(\gamma - 1) \ln \frac{P_2}{P_1} = \gamma \cancel{C_V} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$(1 - \gamma) \ln \frac{P_1}{P_2} = \gamma \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

On a alors démontré l'équation (1.20c), et on peut passer facilement aux autres avec l'équation d'état des gaz parfait (1.13).  $\square$

De la preuve précédente, on tire une dernière formule pour les gaz parfaits : le calcul de l'entropie.

### Théorème 7.3 : Entropie d'un gaz parfait

Pour une transformation réversible, l'entropie d'un gaz parfait peut être calculée par la formule :

$$(1.21) \quad dS = \gamma C_V \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

## 1.5 Troisième Principe

### Définition 8 : Troisième principe

À température nulle ( $T = 0K$ ), l'entropie est nulle.

## 1.6 Machines thermiques

### Théorème 8.1 : Énoncé des premiers et deuxièmes principes

Sur un cycle, les fonctions d'état reviennent à leur état initial. Donc le premier principe s'écrit :

$$(1.22) \quad W + \sum_i Q_i = \Delta U = 0$$

De même, le second principe s'écrit cette fois :

$$(1.23) \quad S_{\text{échangée}} = \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

On appelle ce second principe l'**inégalité de CLAUSIUS**.

### Théorème 8.2 : Rendement

Le rendement  $r$  est :

$$(1.24a) \quad r = \frac{\text{Bénéfices}}{\text{Donné à la machine}}$$

$$r_{\text{moteur}} = -\frac{W}{Q_c}$$

$$(1.24b) \quad r_{\text{réfrigérateur}} = -\frac{Q_f}{W}$$

$$(1.24c) \quad r_{\text{pompe à chaleur}} = -\frac{Q_c}{W}$$

## 1.7 Systèmes ouverts en régime stationnaire

### 1.7.1 Système ouvert

#### Définition 9 : Système ouvert

Un **système ouvert** est un système dont l'espace est traversé par de la matière.

Pour être conforme au programme, on n'étudie que l'écoulement dans le cas unidimensionnel.

#### Définition 10 : Régime stationnaire

Un système ouvert en **régime stationnaire** est un système pour lequel toutes les caractéristiques du fluide contenu à l'intérieur du système ne changent pas.

#### Définition 11 : Débits massiques

On se place dans le cas de systèmes ouverts en **régime stationnaire**. La masse étant une caractéristique du fluide, elle ne varie pas non plus.

C'est-à-dire que le débit de fluide massique entrant  $dm_e$  est égal au débit massique de fluide sortant  $dm_s$ , et on peut définir le **débit massique**  $D_m$  à travers le système comme étant  $D_m = dm_e = dm_s$ .

Si  $dm$  est la masse de fluide entrée/sortie pendant un court instant  $dt$  :

$$(1.25) \quad D_m = \frac{dm}{dt}$$

Souvent, on a le débit massique, l'équation plus pertinente serait donc  $dm = D_m \times dt$

### 1.7.2 Premier principe

#### Théorème 11.1 : Premier principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **premier principe** s'écrit :

$$(1.26) \quad dm \left( \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p \right) = dm (q + w_u) \quad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Toutes ces grandeurs **se rapportent au fluide** qui traverse le système et sont **massiques**.  $w_u$  est le travail massique utile à l'intérieur du système, par exemple une hélice, et ne prend pas en compte le travail des forces de pression.

(ATTENTION)

Ça ressemble beaucoup au premier principe, mais c'est l'enthalpie qui rentre en jeu, car elle inclut  $u$  et le travail des forces de pression qui se trouvaient dans le membre de droite de l'équation.

Proof  
du  
PPSO

### 1.7.3 Deuxième principe

#### Théorème 11.2 : Deuxième principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **second principe** s'écrit :

$$(1.27) \quad \Delta s = s_{\text{échangée}} + s_{\text{créée}} \quad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Comme pour le premier principe, ces grandeurs sont celles du fluide traversant le système et sont massiques.

Proof  
du Se-  
cond  
Principe  
en SO



## Chapitre 2

# Statique des fluides

### 2.1 Champ de pression d'un fluide

#### Définition 12 : Définition générale

La pression et la masse volumique sont définies comme des champs scalaires fonctions des variables d'espace.

#### Théorème 12.1 : Relation fondamentale de la statique

Pour un champ de pesanteur  $\vec{g}$ , le champ de pesanteur P vérifie localement :

$$(2.1a) \quad \frac{dP}{dz} = \rho g$$

où  $\rho$  est la masse volumique locale. On l'intègre en :

$$(2.1b) \quad P(z) = P_0 + \rho g z$$

La norme d'une force  $\vec{F}_p$  exercée par une pression P sur une surface S est  $F = P \cdot S$

### 2.2 Théorème d'ARCHIMÈDE

#### Théorème 12.2 : Poussée d'ARCHIMÈDE

Un corps entièrement immergé dans un liquide subit une force opposée au poids du volume du fluide déplacé. C'est à dire :

$$(2.2) \quad \vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

# Chapitre 3

## Électronique

### Méthode

#### Résoudre

<b>Loi des nœuds</b>	$\sum_{\text{Nœud}} i = 0$	<b>Loi des mailles</b>	$\sum_{\text{Maille}} u = 0$
<b>Puissance</b>	$\mathcal{P} = u \times i$	<b>Énergie électrique reçue</b>	$\Delta E = \int_{\Delta t} \mathcal{P}(t) dt$
<b>Inductance</b>	$u = L \frac{di}{dt}$ $E = \frac{1}{2} Li^2$	<b>Capacité</b>	$i = C \frac{du}{dt}$ $E = \frac{1}{2} Cu^2$

#### Lois de KIRCHOFF

Pour ne pas avoir trop d'équations redondantes avec les lois de Kirchhoff, on pourra suivre la méthode suivante :

- On compte le nombre  $b$  de branches et  $n$  de nœuds.
- On écrit  $(n - 1)$  lois des nœuds
- On écrit  $((b - (n - 1)))$  lois des mailles
- On résout le système final

### 3.1 Circuits linéaires dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

#### Définition 13 : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

On parle d'ARQS quand le courant se propage assez rapidement pour pouvoir considérer que son établissement est instantané.

Ainsi, pour une Onde Électromagnétique (OEM) sinusoïdale de période temporelle  $T$  et de

période spatiale  $\lambda$ , telle que  $\lambda = c \cdot T$  (où  $c$  désigne la vitesse de l'onde), et pour un observateur situé à une distance  $D$  d'un point quelconque du circuit, on est dans le cadre de l'ARQS si  $D \ll \lambda$ .

#### Définition 14

Un courant électrique résulte d'un déplacement de charges  $q$ . On peut dès lors définir l'intensité  $I$  et la tension  $U$  d'un dipôle :

$$(3.1) \quad I = \frac{dq}{dt} \quad U_{AB} = V_A - V_B$$

#### Théorème 14.1 : Loi d'Ohm

Loi d'Ohm Globale

$$(3.2) \quad u = Ri \quad i = Gu$$

#### 3.1.1 THÉVENIN-NORTON

##### Théorème 14.2 : Équivalence de THÉVENIN-NORTON

Dans le modèle de THÉVENIN, un générateur de tension est la combinaison d'un générateur de tension idéal de *Force Électromotrice*  $E$  et d'une résistance interne  $R$  :

$$(3.3) \quad u = E - Ri$$

Ce générateur est équivalent, dans le modèle de NORTON, à la combinaison d'un générateur de courant idéal de *courant de court-circuit*  $I_0 = \frac{E}{R}$  et d'une résistance  $R$  en parallèle (on prendra  $G = \frac{1}{R}$ ) :

$$(3.4) \quad i = I_0 - Gu$$

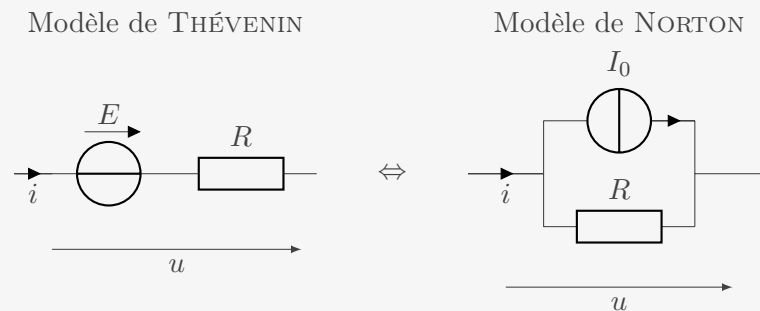
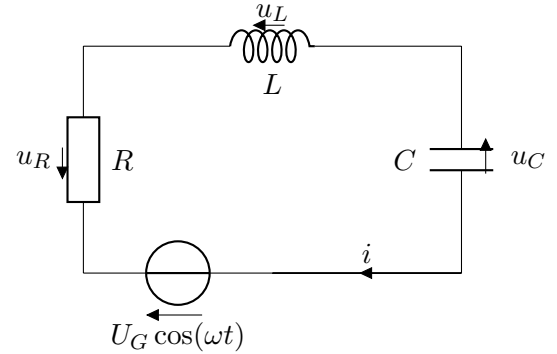


FIGURE 3.1 – Équivalence THÉVENIN-NORTON

### 3.2 Régime transitoires

Mise en équation :

$$\begin{cases} u_C + u_L + u_R = U_G \cos(\omega t) \\ u_R = Ri \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$$



### 3.3 Amplificateur Opérationnel (AO)

#### Définition 15 : L'Amplificateur Opérationnel

Un Amplificateur Opérationnel (AO) est un **circuit intégré** à huit bornes dont 5 sont utilisées en TP. C'est un composant **actif** qui doit être alimenté par un courant stable continu.

#### Propriétés

Les propriétés générales d'un AO :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $V_S \in [-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}]$
- L'intensité de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $I_S \in [-I_{\text{sat}}; I_{\text{sat}}]$

En régime linéaire (avec une boucle de **rétroaction négative**), on a :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est **presque nulle** :  $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $V_S \in ] - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}} [$

Au contraire, en régime saturé (avec une boucle de **rétroaction positive**), on a :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est **quelconque** :  $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est saturée du signe d' $\varepsilon$  :  $V_S \in \{ - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}} \}$

Enfin, l'A.O idéal a les propriétés suivantes :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont nuls :  $I_- = I_+ = 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est nulle en régime linéaire :  $\varepsilon = 0$

### 3.4 Régimes sinusoïdaux

#### Méthode

#### Formules

**Théorème de MILLMAN** 
$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_k \frac{1}{Z_k}}$$

**Puissance moyenne** 
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_0 I_0 \cos \varphi}{2}$$

#### Étudier un circuit électrique

Lorsqu'on doit étudier un circuit, il peut être utile de penser aux méthodes suivantes :

- Calculer les impédances équivalentes
- Utiliser des ponts diviseurs
- Appliquer les lois de KIRCHOFF
- Trouver des équivalences THÉVENIN-NORTON
- Appliquer la formule de Millman

#### Théorème 15.1 : Impédance des dipôles usuels

On donne, pour les dipôles usuels, leur impédance en complexes  $\underline{Z}$  :

<b>Dipole</b>	$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$	
<b>Résistance</b>	$\underline{u} = R \cdot \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Résistance}} = R$
<b>Bobine</b>	$\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Bobine}} = jL\omega$
<b>Condensateur</b>	$C \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$

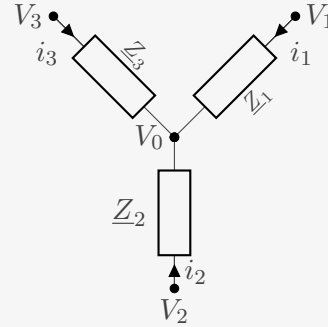
**Preuve 15.1.1** On remarque que pour des fonction complexes, dériver  $f = re^{j(\omega t + \varphi)}$  revient à multiplier  $f$  par  $j\omega$ . On obtient alors immédiatement toutes les formules précédentes en les exprimant bien sous la forme  $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

### Théorème 15.2 : MILLMAN

Le théorème de MILLMAN permet de calculer le potentiel d'un nœud

(3.5)

$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_k \frac{1}{Z_k}}$$



#### 3.4.1 Puissance

##### Définition 16 : Puissance instantanée

La **puissance instantanée** est une fonction du temps :

(3.6)

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$$

En **convention récepteur**, c'est la puissance reçue par le dipôle.

En **convention générateur**, c'est la puissance cédée par le dipôle.

##### Définition 17 : Energie

L'**énergie** est l'intégrale de la puissance :

(3.7)

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt$$

##### Définition 18 : Puissance moyenne

On s'intéresse plus souvent à la **puissance moyenne**  $\mathcal{P}_m$  sur un intervalle de temps  $\tau$

(3.8)

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{P}(t)dt$$

En général, on prend  $\tau = T$  la période d'une fonction sinusoïdale.

On définira la **valeur moyenne** d'une fonction du temps de cette même manière :

(3.9)

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

### Théorème 18.1 : Valeur efficace

La **valeur efficace** est la valeur continue qui fournirait la même énergie pendant un

même intervalle de temps. Pour une tension  $u(t) = Ri(t)$  :

$$(3.10) \quad U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

La valeur efficace est donc la racine carrée de la moyenne du carré, en anglais *Root Mean Square* (RMS).

**Preuve 18.1.1** Par définition de la valeur efficace, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= U_{\text{RMS}} I_{\text{RMS}} \times T \\ \int_0^T u(t)i(t)dt &= U_{\text{RMS}} \frac{U_{\text{RMS}}}{R} T \\ \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt &= \frac{U_{\text{RMS}}^2}{R} T \\ U_{\text{RMS}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \end{aligned}$$

Pour un régime sinusoïdal,  $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$ , donc :

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

### 3.5 Filtres

#### Définition 19 : Fonction de transfert

La **fonction de transfert**  $\underline{H}$  d'un quadripôle de tension d'entrée  $\underline{v}_e$  et de tension de sortie  $\underline{v}_s$  est définie par :

$$(3.12) \quad \underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

#### Définition 20 : Filtre

Un **filtre** est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend de la pulsation  $\omega$

### 3.5.1 Fonctions de transfert usuelles

1 <sup>er</sup> ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
	Passe-haut	$\frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	
2 <sup>e</sup> ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$
	Passe-haut	$\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	
	Passe-bande	$\frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	
	Coupe-bande	$\frac{H_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	

### 3.5.2 Diagrammes de Bode

#### Définition 21 : Gain et phase d'un quadripôle

On peut écrire la fonction de transfert sous la forme polaire :

$$\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

On définit alors le **gain**  $G(\omega)$  comme le rapport des amplitudes d'entrées et de sortie et la **phase**  $\varphi(\omega)$  comme le déphasage entre ces mêmes signaux.

Ainsi :

$$(3.13) \quad G(\omega) = \sqrt{\underline{H}\overline{H}} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}\underline{H}}{\text{Re}\underline{H}}$$



---

**Définition 22 : Diagramme de BODE**

---

Le **diagramme de BODE** d'un quadripôle est l'ensemble des deux tracés en fonction de  $\log(\omega)$  :

- du gain en décibel  $G_{\text{dB}} = 20 \log(G(\omega))$
- de la phase  $\varphi(\omega)$

(ATTENTION)

Il est souvent commode d'avoir recours à une variable réduite comme  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  où  $\omega_0$  est une constante qui permet de simplifier les calculs

---

**Définition 23 : Pulsation de coupure à  $-3$  dB**

---

La **pulsation de coupure**  $\omega_c$  correspond à la valeur de la pulsation pour laquelle le gain maximum  $G_{\text{max}}$  est divisé par  $\sqrt{2}$  :

(3.14)

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

## Chapitre 4

# Mécanique du Point

### Méthode

#### Formules Usuelles

##### Intéractions fondamentales

**Force Gravitationnelle**  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_r$

**Force Électrostatique**  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2}$

##### Forces usuelles

**Poids**  $\vec{P} = m \vec{g}$

**Force de LORENTZ**  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

**Force de Rappel**  $\vec{F} = k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$

##### Énergies usuelles

**Energie potentielle générale**  $E_p(A) - E_p(B) = W_{A \rightarrow B}$

**Energie potentielle gravitationnelle**  $E_p = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r_{AB}}$

**Energie potentielle de pesanteur**  $E_p = mgh$

**Energie cinétique**  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

**Energie potentielle élastique**  $E_{p,e} = \frac{k(l - l_0)^2}{2}$

### 4.1 Étude cinétique

Définition 24 : Force de Rappel

Cette force est déterminée expérimentalement, au voisinage d'une longueur d'équilibre  $l_0$ , par :

$$(4.1) \quad \vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$$

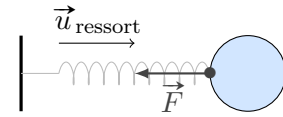


FIGURE 4.1 – Force de rappel d'un ressort

## 4.2 Loi de la quantité de mouvement

### Définition 25 : Quantité de mouvement

Un point  $M$  de masse  $m$  de vecteur vitesse  $\vec{v}$  possède une **quantité de mouvement** définie par la formule :

$$(4.2) \quad \vec{p}(M) = m \vec{v}(M)$$

### Théorème 25.1

La **quantité de mouvement** d'un système  $\Sigma$  fermé de centre d'inertie  $G$  est

$$(4.3) \quad \vec{p}(\Sigma) = m \vec{v}(G)$$

## 4.3 Approche Énergétique

### Définition 26 : Système conservatif

Un **système conservatif** est un système dont l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  est constante.

### Définition 27 : Force conservative

C'est une force dont le travail entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend pas du chemin emprunté.

#### 4.3.1 Puissance et travail

### Définition 28 : Puissance d'une force

La **puissance** caractérise la contribution d'une force  $\vec{F}$  sur un objet en mouvement à une vitesse  $\vec{v}$ .

$$(4.4) \quad \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

### Définition 29 : Travail d'une force

Le travail est la somme des contributions d'une force  $\vec{F}$  sur un objet en mouvement :

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \delta W &= \mathcal{P} dt \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

### 4.3.2 Énergie cinétique

#### Définition 30 : Énergie cinétique

C'est la première énergie qu'on définit :

$$(4.7) \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Pour le **théorème de la puissance cinétique**, cf théorème 38.4 page 37. Le théorème de l'énergie cinétique a été vu en première année\* :

#### Théorème 30.1

Il dérive de l'expression de l'énergie mécanique :

$$(4.8) \quad \underbrace{\frac{dE_m(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action non conservatives}}} = \frac{dE_c(\Sigma)}{dt} + \underbrace{\frac{dE_p(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action conservatives}}}$$

#### Théorème 30.2 : Théorème de l'énergie cinétique

On peut déduire du théorème précédent que

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \text{La variation d'énergie cinétique} & \text{ est égale à } \text{la somme des travaux des forces} \\ E_c(B) - E_c(A) &= \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i) \\ dE_c &= \delta W_{A \rightarrow B} \end{aligned}$$

(ATTENTION) Pour l'énergie cinétique, on prend toutes les forces en comptes. Conservatives ou non.

### 4.3.3 Énergie potentielle

#### Définition 31 : Énergie potentielle

L'énergie potentielle dérivant d'action conservatives, on peut la définir ainsi, en définissant un point  $O$  comme l'origine :

\*. cf page 418 du livre *Physique !* de Jérôme MAJOU

$$(4.10) \quad E_p(M) = E_p(O) - W_{O \rightarrow M}(\vec{P})$$

En pratique, sur Terre,  $E_p = mgh$

## 4.4 Forces centrales

### Définition 32 : Force centrale

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné, une force est **centrale** si elle pointe en permanence vers un point fixe de  $\mathcal{R}$ .

Un champ de force centrale newtonien est défini par

$$(4.11) \quad \vec{F}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad E_p(r) = \frac{k}{r}$$

### Théorème 32.1 : Loi des aires

Une force centrale présente un moment nul, donc le moment cinétique d'un objet soumis exclusivement à une force centrale est constant d'après le Théorème du Moment Cinétique (TMC) (théorème 38.3 page 36).

La trajectoire est alors plane et vérifie :

$$(4.12a) \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m} = C$$

D'où on déduit, en définissant  $\mathcal{V}$  comme étant la vitesse aréolaire d'un point de masse  $m$  :

$$(4.12b) \quad \mathcal{V} = \frac{\sigma_O}{2m} = \frac{C}{2}$$

**Preuve 32.1.1** Les forces centrales ont un moment nul. Donc, d'après le TMC :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = 0$$

Donc  $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{constante}}$ . Or, par définition du moment cinétique (cf. équation (5.6) page 35) :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= mr \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{aligned}$$

### **Théorème 32.2 : Lois de KEPLER**

Les trois lois de KEPLER ont été définies expérimentalement vers la fin du XVI<sup>e</sup> siècle :

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont l'un des foyers est le soleil

- Pendant un même intervalle de temps  $t$ , l'aire balayée par la trajectoire d'une planète est constante (loi des aires)
- La période  $T$  de révolution d'une planète est liée au demi grand axe  $a$  de sa trajectoire elliptique :

$$(4.13) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_{\text{Soleil}}}$$

## 4.5 Dynamique en référentiel non galiléen

### Définition 33 : Référentiel galiléen

On dit qu'un référentiel  $\mathcal{R}$  est **galiléen** si les interactions physiques suffisent à justifier les mouvements

(ATTENTION) Cette définition limite la caractérisation d'un référentiel galiléen à la précision de nos expérimentations

### Définition 34 : Mouvement relatif de deux référentiels

Le mouvement d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}$  est caractérisé par une vitesse de translation ( $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ) et une vitesse angulaire de rotation ( $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ).

#### Théorème 34.1 : Dérivation d'un vecteur dans deux référentiels

Si  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  est le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  relativement à  $\mathcal{R}'$ , alors la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{x}$  est

$$(4.14) \quad \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{x}$$

### 4.5.1 Loi de composition des vitesses

#### Théorème 34.2 : Composition des vitesses

La vitesse d'un point  $M$  s'exprime, dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  en mouvement relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  galiléen, par :

$$(4.15) \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{vitesse de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$$

### 4.5.2 Loi de composition des accélérations

#### Théorème 34.3 : Composition des accélérations

L'accélération d'un point  $M$  s'exprime, dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en mouve-

ment relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, par :

$$(4.16) \quad \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{a}(O')_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge [\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}]}_{\text{Accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{Accélération de CORIOLIS}}$$

### 4.5.3 Forces d'inerties

Les forces d'inerties varient suivant le référentiel. On en distingue 4 :

<b>Force d'inertie de translation</b>	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{translation}} = -m \vec{a}(O)_{\mathcal{R}}$
<b>Force d'inertie centrifuge</b>	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{centrifuge}} = m \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 r \vec{u}_r$
<b>Force d'inertie de rotation différentielle</b>	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{différentielle}} = -m \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$
<b>Force d'inertie complémentaire de CORIOLIS</b>	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{coriolis}} = -2m \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$

**Remarque :** La force d'inertie de rotation différentielle est maintenant hors-programme, car on ne se place que dans des cas où la rotation est uniforme.

### Frottement solide

#### Théorème 34.4 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle  $\vec{T}$  en fonction du frottement solide et de la composante normale  $\vec{N}$  :

$$(4.17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Statique} & \vec{T}_0 \leq \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \stackrel{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right.$$



## Chapitre 5

# Mécanique du solide

### 5.1 Préambule

#### 5.1.1 Dérivée d'un vecteur

Ce problème est courant quand on a les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  à dériver. Il suffit de les décomposer selon la base  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  en utilisant les fonctions cosinus et sinus. On obtient alors :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{d(\vec{u}_r)}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d(\vec{u}_\theta)}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{cases}$$

D'où, en utilisant que  $\frac{d(\vec{u})}{dt} = \frac{d(\vec{u})}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ , le résultat  $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}}{d\theta}$

#### 5.1.2 Dérivée en coordonnées polaires

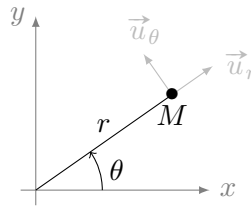


FIGURE 5.1 – Coordonnées polaires

#### **Théorème 34.5 : Vitesse et accélération en coordonnées polaires**

Soit  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ , comme représenté sur la figure 5.1.

$$(5.2) \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

**Preuve 34.5.1** Il suffit de dériver  $\overrightarrow{OM}$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\
 &= \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \\
 \vec{v} &= \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta \\
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\
 \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta
 \end{aligned}$$

**Théorème 34.6 : Relation de VARIGNON**

Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir : la formule de « Babar »

$$(5.3) \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

**Rappel** : La quantité de mouvement  $\vec{P} = m\vec{v}$  se conserve. Cette idée est souvent utile en mécanique.

## 5.2 Définitions

**Définition 35 : Moment  $\vec{\mathcal{M}}$  d'une force**

On définit le **moment**  $\vec{\mathcal{M}}$  (équivalent couple  $\vec{\Gamma}$ ) d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  sur un levier de centre  $O$  :

$$(5.4) \quad \underset{\text{Moment}}{\vec{\mathcal{M}}} = \underset{\text{Couple}}{\vec{\Gamma}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

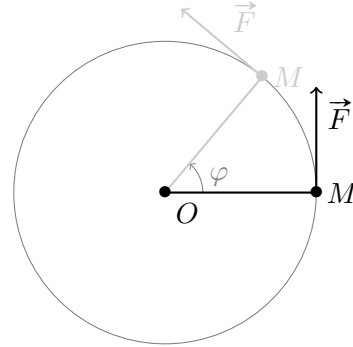


FIGURE 5.2 – Moment d'une force

**Définition 36 : Torseur cinétique**

C'est un torseur tout simple  $[\vec{\sigma}, \vec{p}]$

$$(5.5) \quad \vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}}$$

**Rappel** : La vitesse de rotation  $\omega$  permet de déterminer la vitesse  $\vec{v}$ . Pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  :

$$\text{D'après Varignon, on a} \quad \vec{v}(M) = \vec{\omega}(\Sigma) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\text{D'où} \quad \vec{\omega}(\Sigma) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\Delta$$

$$\text{Dans le mouvement précédent} \quad v(M) = \omega \cdot OM_{\text{rayon}}$$

### Définition 37 : Moment cinétique $\vec{\sigma}_O$

Le moment cinétique caractérise le mouvement de rotation d'un point par rapport à un autre. Il suffit de prendre la relation de notre torseur précédent, appliqué en  $O$  sans mouvement :

(5.6)

$$\vec{\sigma}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

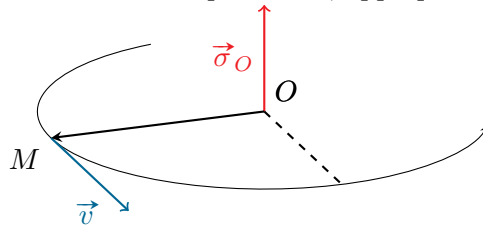


FIGURE 5.3 – Moment cinétique

## 5.3 Théorèmes de Koëinig

### Théorème 37.1 : 1<sup>e</sup> théorème de Koëinig

C'est le torseur cinétique appliquée en  $A$  par rapport à  $G$  le centre du référentiel barycentrique :

(5.7)

$$\vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}_{Br}}_{\text{Moment cinétique du référentiel barycentrique}} + \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}(G)$$

Moment cinétique du référentiel barycentrique

### Théorème 37.2 : 2<sup>e</sup> théorème de Koëinig

Une application du premier théorème à l'énergie cinétique :

(5.8)

$$E_{c,R} = E_{c,Br} + \frac{1}{2} M (\vec{v}(G))^2$$

## 5.4 Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide caractérise la répartition de la masse dans un solide.

### Définition 38 : Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide  $\Sigma$  par rapport à un axe  $\Delta$  est :

$$(5.9) \quad J_{\Delta} = \iiint_{P \in \Sigma} d(P, \Delta)^2 dm = \iiint_{P \in \Sigma} d(P, \Delta)^2 \rho dV_P$$

Où  $d(x, \Delta)^2$  est la distance à l'axe  $\Delta$  d'un volume élémentaire  $dV$  de masse volumique  $\rho$  dans le solide  $\Sigma$ .

### Théorème 38.1

On relie la vitesse de rotation d'un axe  $\Delta$  du solide à  $J_{\Delta}$  par

$$(5.10) \quad \boxed{\vec{\sigma} = J_{\Delta} \cdot \omega \vec{u}_{\Delta}}$$

et on peut alors calculer l'énergie cinétique :

$$(5.11) \quad E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$



## 5.5 Théorèmes de dynamique

Ce sont les 3 théorèmes les plus importants.

### Théorème 38.2 : Théorème de la Résultante Cinétique (TRC)

C'est en réalité le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) qu'on voit en terminale et en première, mais la version originale avec la quantité de mouvement.

$$(5.12) \quad \frac{d \overbrace{\vec{P}_{Rg}}^{m\vec{v}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \text{ est équivalent à } \sum \vec{F} = m \vec{a}$$

### Théorème 38.3 : Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Pour un couple  $\vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$  issu des forces extérieures appliquées en  $A$  et un moment cinétique  $\vec{\sigma}(A)$  appliqué en un point  $A$ , on a :

$$(5.13a) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$(5.13b) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(A)$$

C'est un équivalent du PFD, mais qui prend en compte la rotation, c'est à dire le moment cinétique. Pour les définitions du moment d'une force et du moment cinétique, on se référera à la formule (5.6). On est souvent amené à utiliser cette équation en conjonction avec l'équation (5.10) du moment d'inertie.

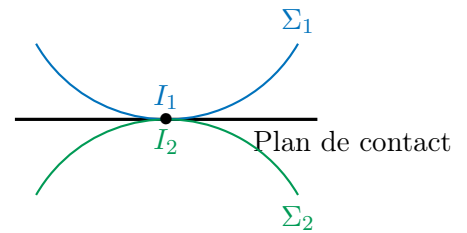
#### Théorème 38.4 : Théorème de la puissance cinétique

$$(5.14) \quad \frac{dE_c}{dt} = \underbrace{\sum_i P_i}_{\text{Puissances des forces qui travaillent}}$$

## 5.6 Solides en contact

On définit la **vitesse de glissement instantané** entre deux solides  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  par :

$$(5.15) \quad \boxed{\vec{v}_{\text{glissement}} = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)}$$



#### Définition 39 : Roulement sans glissement

Deux conditions :

- $\vec{v}_{\text{glissement}} = 0$
- $\vec{\omega}_{/\Sigma_2}(\Sigma_1)$  est parallèle au **plan de contact**

#### Théorème 39.1 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle  $\vec{T}$  en fonction du frottement solide et de la composante normale  $\vec{N}$  :

(5.16)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Statique} & \vec{T}_0 = \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement \textbf{statique}}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \left| \begin{array}{l} \geq \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement \textbf{dynamique}}} \times \vec{N} \\ \stackrel{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement \textbf{dynamique}}} \times \vec{N} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# Chapitre 6

## Optique

### 6.1 Optique géométrique

#### Méthode

#### Formules de conjugaison

$$\text{Miroir} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\text{Lentille} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

#### Techniques

- Les dessins miroirs peuvent être « développés » pour obtenir la représentation d'une lentille
- Règles de construction pour les dioptrés et les miroirs
  - Un rayon passant par le centre n'est pas dévié
  - Un rayon incident parallèle à l'axe passe, après son passage par le système optique, par le foyer image
  - Un rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique
  - Deux rayons parallèles à l'axe se croisent au foyer image
  - Deux rayons se croisant au foyer objet ressortent parallèles du système optique
- Ne pas oublier le principe de retour inverse de la lumière

#### 6.1.1 Stigmatisme et aplanétisme

#### Définition 40 : Système stigmatique

Un système optique est dit rigoureusement **stigmatique** pour le couple de points  $(A; A')$  si tous les rayons issus de  $A$  passent par  $A'$  après avoir été déviés par le système.

Si  $A'$  est une tâche assez petite au lieu d'un point, on parle de **stigmatisme approché**

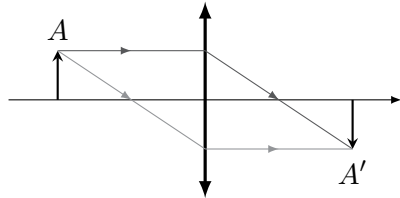


FIGURE 6.1 – Système rigoureusement stigmatique

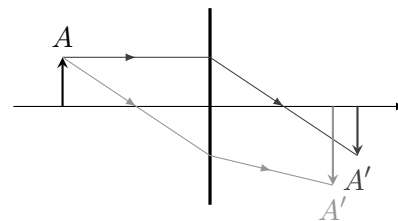


FIGURE 6.2 – Système non stigmatique

#### Définition 41 : Système aplanétique

Soit  $(S)$  un système optique. Soient  $A$  et  $A'$  deux points de l'axe optique conjugués par  $(S)$  et soit  $B$  un point du plan transverse de  $A$ . Le système est dit **aplanétique** pour  $A$  si  $B'$ , le conjugué de  $B$  par  $(S)$ , est dans le plan transverse de  $A'$ .

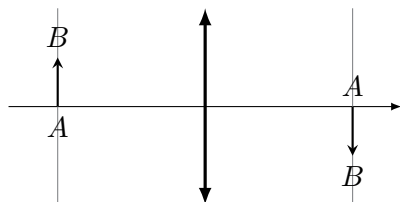


FIGURE 6.3 – Système rigoureusement aplanétique

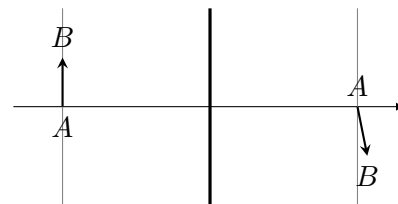


FIGURE 6.4 – Système non aplanétique

#### Définition 42 : Conditions de GAUSS

Les conditions de GAUSS permettent de vérifier l'aplanétisme et le stigmatisme approchés :

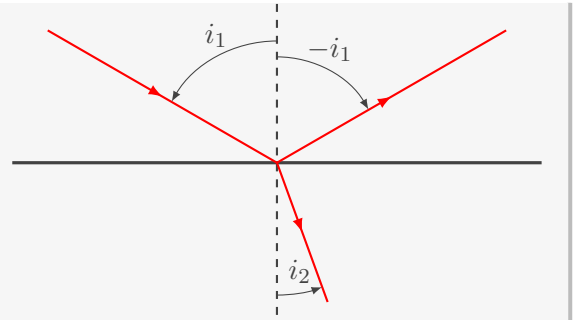
- Les rayons lumineux font un **angle petit** avec l'axe du système  
On parle de **rayons paraxiaux**
- Les rayons lumineux **rencontres** les dioptries ou les miroirs **au voisinage de leur sommet**
- L'**angle d'incidence** des rayons sur les dioptries ou les miroirs est **petit**

#### 6.1.2 Réflexion et réfraction

##### Théorème 42.1 : Loi de DESCARTES



La loi de DESCARTES stipule que l'angle de réflexion est le même que l'angle d'incidence. De plus, la loi permet de calculer l'angle du rayon réfracté :



$$(6.1) \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

## 6.2 Optique ondulatoire

### Méthode

#### Définitions

	$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$		
Périodicité temporelle	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	Vibration Complexe	$\underline{s(M, t)} = A(M) e^{i(\varphi(M) - \omega t)}$
Périodicité spatiale	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Amplitude Complexe	$\underline{a(M)} = A(M) e^{i\varphi(M)}$
$c = \lambda \nu$	$\lambda = cT$	Éclairement (cf. (6.8))	$\mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$

#### Propriétés

$$\begin{array}{l|l}
 s(M, t) = \text{Re}(\underline{s(M, t)}) & \varphi(M) = \arg(\underline{a(M)}) \\
 A(M) = |\underline{a(M)}| = |\underline{s(M, t)}| & \mathcal{E} = \frac{1}{2} K |\underline{a(M)}|^2 = \frac{1}{2} K |\underline{s(M, t)}|^2
 \end{array}$$

### 6.2.1 Modèle scalaire des ondes lumineuses

#### Définition 43 : Onde Électromagnétique (OEM)

Une OEM est le couple  $(\vec{E}, \vec{B})$ . C'est l'oscillation couplée du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ .

#### Définition 44 : Vibration lumineuse

Le modèle ondulatoire de la lumière étant plus vieux que les OEMs, la **vibration lumineuse**  $s(M, t)$  est une composante quelconque du champ électromagnétique. C'est-à-dire que  $s(M, t) = \vec{E}$  ou  $\vec{B}$ .

### Théorème 44.1 : Superposition

On admet que la vibration lumineuse en un point  $M$  à l'instant  $t$  est la somme des toutes les vibrations lumineuses en ce point :

$$(6.2) \quad s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

### Chemin optique

#### Définition 45 : Chemin optique

Soit un rayon lumineux passant par les points  $M$  et  $N$  en un temps  $t_{MN}$ . Le **chemin optique**  $(MN)$  parcouru par la lumière est :

$$(6.3) \quad (MN) = c \cdot t_{MN}$$

En milieu homogène où l'onde se déplace à une vitesse  $v$ , si  $MN$  est la distance parcourue, on a  $t_{MN} = \frac{MN}{v}$ .

### Théorème 45.1 : Déphasage dû à la propagation

Soient deux point  $M$  et  $N$  de chemin optique  $(MN)$ . Le **retard de phase** en  $N$  par rapport à la phase au point  $M$  est :

$$(6.4) \quad \varphi(N) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) = \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN)$$

**Preuve 45.1.1** Le retard en temps accumulé en  $N$  est de  $t_{MN}$ . Donc :

$$s(N, t) = \underbrace{s(M, t - t_{MN})}_{\text{Vibration en } M, t_{MN} \text{ secondes plus tôt}}$$

Donc :

$$A(N) \cos(\omega t - \varphi(N)) = A(M) \cos\left(\omega(t - t_{MN}) - \varphi(M)\right)$$

Ce qui implique :

$$-\varphi(N) = -\omega t_{MN} - \varphi(M)$$

Or par définition de (6.3) :  $t_{MN} = \frac{(MN)}{c}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN) \\ &= \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) \end{aligned}$$

Avec  $\lambda_0 = cT = c \frac{2\pi}{\omega}$  la longueur d'onde dans le vide. □

#### Théorème 45.2 : Réflexion métallique

La lumière subit un déphasage de  $\pi$  lors de sa réflexion dans un matériau. Le chemin optique se voit modifié de  $\frac{\lambda_0}{2}$  :

$$(6.5a) \quad \varphi \text{ (Avant réflexion)} = \varphi \text{ (Après réflexion)} + \pi$$

$$(6.5b) \quad \varphi \text{ (Avant réflexion)} = \varphi \text{ (Après réflexion)} + \frac{\lambda_0}{2}$$

#### Trains d'onde

Le modèle de train d'onde considère une onde lumineuse comme un ensemble de trains d'ondes émis aléatoirement. Il y a donc, pour chaque train d'onde, un temps et une longueur « de cohérence » pendant lequel un autre train d'onde peut interférer.

#### Théorème 45.3 : Temps de cohérence

Les atomes émettent la lumière par trains d'ondes de durée limitée  $\tau_c$  telle que :

$$(6.6) \quad \Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c}$$

La durée moyenne des trains d'ondes est appelée **temps de cohérence**.

#### Définition 46 : Longueur de cohérence

La **longueur de cohérence**  $l_c$  est la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant  $\tau_c$  :

$$(6.7) \quad l_c = c \tau_c$$

$l_c$  représente la longueur moyenne d'un train d'onde.

#### Éclairement et intensité

Les récepteurs de lumière (comme l'œil et les capteurs CCD) sont sensibles à une valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent. Il convient alors de définir l'éclairement pour décrire ce que l'on voit.

#### Définition 47 : Éclairement

Les capteurs photo-sensibles ayant un taux de rafraîchissement lent relativement à la vitesse de la lumière et à sa pulsation  $\omega$ , ils font une moyenne sur une période de la vibration reçue.

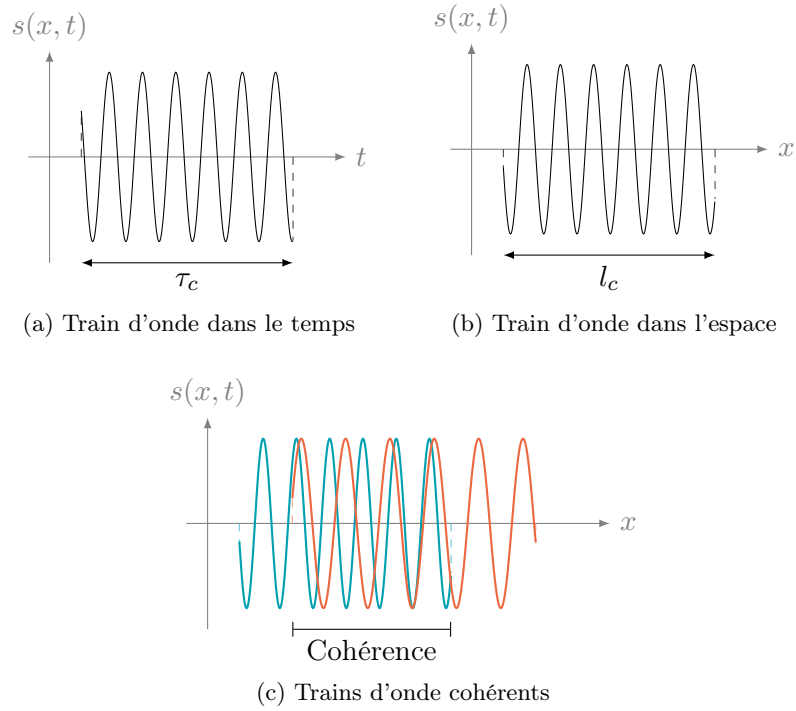


FIGURE 6.5 – Trains d'onde dans le temps et dans l'espace

C'est alors qu'on définit l'**éclairage** :

$$(6.8) \quad \mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

## 6.2.2 Superposition d'ondes lumineuses

### Lumière monochromatique

#### Définition 48 : Lumière monochromatique

La **lumière monochromatique** est la forme la plus idéale de vibration. Elle est « purement » sinusoïdale :

$$(6.9) \quad s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Cette vibration présente une périodicité temporelle et une périodicité spatiale :

- Périodicité temporelle :

caractérisée par la **période**  $T$ , la fréquence  $\nu = \frac{1}{T}$ , et la **pulsation**  $\omega$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Périodicité spatiale :

caractérisée par la **longueur d'onde**  $\lambda$  (période spatiale), le **nombre d'onde**

$\sigma = \frac{1}{\lambda}$  (fréquence spatiale), et le **module d'onde** (pulsation spatiale)  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On les relie avec la vitesse de propagation :  
 Pour la lumière dans le vide :

$$(6.10) \quad \lambda_0 = cT$$

### Interférences

Prenons deux sources  $S_1$  et  $S_2$ , de vibrations respectives  $s_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$  et  $s_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$ .

#### Théorème 48.1 : Formule de FRESNEL

Pour le système ainsi défini, l'éclairement résultant d'interférences est donné par la **formule de FRESNEL** :

$$(6.11) \quad \begin{aligned} s(M, t) &= s_1(M, t) + s_2(M, t) \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \underbrace{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}_{\text{Nul si } \omega_1 \neq \omega_2} \end{aligned}$$

Ainsi, le terme d'interférence  $2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$  n'est valable que si :

- Les ondes 1 et 2 doivent être de même pulsation (i.e  $\omega_1 = \omega_2$ )
- Les sources  $S_1$  et  $S_2$  doivent être cohérentes
- Le déphasage ne doit pas dépasser la longueur de cohérence  $l_c$
- Le déphasage doit être quasiment constant sur une durée du temps de réponse du détecteur utilisé

**Preuve 48.1.1** On exprime l'éclairement total en  $M$ ,  $\mathcal{E}(M)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= K \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle \\ &= K \langle (s_1(M, t))^2 \rangle + K \langle (s_2(M, t))^2 \rangle + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \\ &= \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \end{aligned}$$

Étudions ce deuxième terme  $\mathcal{E}_{12}(M) = 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle$  :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

D'après la formule de trigonométrie (12.3) page 90 ( $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(M) &= \frac{1}{2} \times 2K A_1(M) A_2(M) \left( \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \right) \end{aligned}$$

La valeur moyenne d'un cosinus étant nulle, on sait de plus que :  
 $\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle = 0$  car  $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ , et que  
 $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$ .

Si on considère que  $\omega_1 - \omega_2 = 0$ , alors le deuxième terme  $\mathcal{E}_{12}(M)$  devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{12}(M) &= K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \\ &= 2 \sqrt{\frac{K}{2} A_1(M)^2} \sqrt{\frac{K}{2} A_2(M)^2} \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \\ &= 2 \sqrt{\mathcal{E}_1(M) \mathcal{E}_2(M)} \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle\end{aligned}$$

Comme précédemment,  $\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$  est constant.

Alors,  $\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle = \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$  □

**Remarque** : en complexe, ça va beaucoup plus vite.

## Contraste

### Définition 49 : Contraste, visibilité

Sur une figure d'interférence, on appelle **contraste** ou **visibilité** le rapport :

$$(6.12) \quad C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

### Théorème 49.1

Le contraste est maximal lorsque  $I_1 = I_2$  dans la formule de FRESNEL (6.11)

## 6.2.3 Trous d'YOUNG

Étudions le dispositif suivant : deux fentes ( $F_1$ ) et ( $F_2$ ) sont éclairées par une source  $S$  à l'infini formant un angle  $\alpha_0$  avec l'origine.

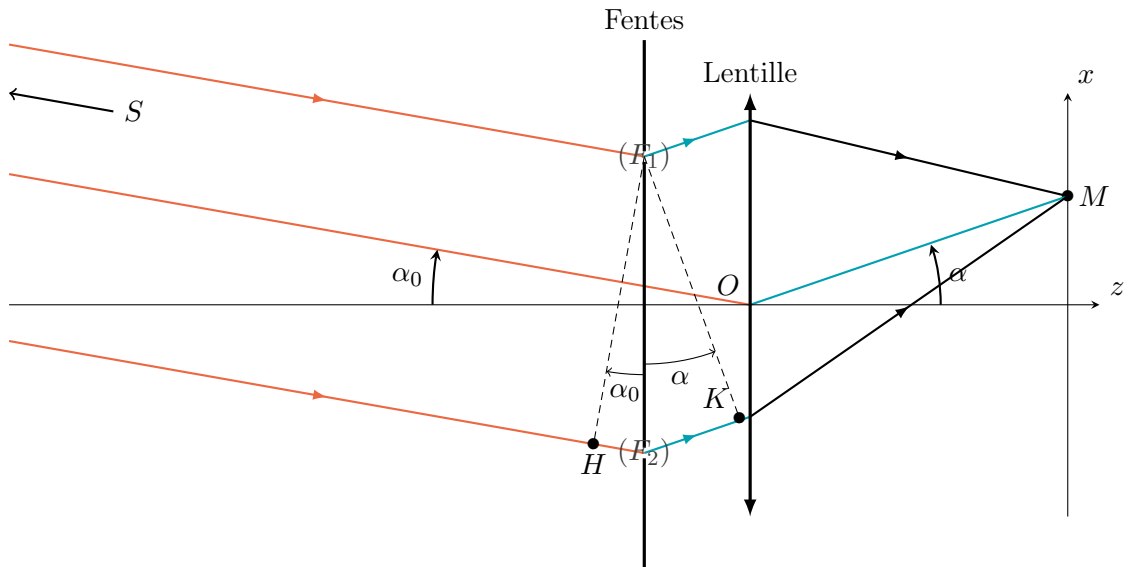


FIGURE 6.6 – Dispositif des trous de YOUNG

Quelques remarques : Puisque  $M$  est dans le plan transversal du foyer de la lentille, on sait que les rayons de cette couleur sont parallèles avant de passer par la lentille. De plus, la présence de la lentille  $F'$  impose que l'on soit dans les conditions de GAUSS pour l'angle  $\alpha$  (cf. définition 42 page 40 pour les conditions de GAUSS). Ainsi, on peut écrire l'approximation

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

avec  $f'$  la distance focale de la lentille  $F'$ .

Pour nous aider dans les calculs, on note  $H$  et  $K$  les projetés orthogonaux de  $(F_1)$ . Calculons la différence de marche  $\delta(M)$  :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= (SF_2M) - (SF_1M) \\ &= (SH) + (HF_2) + (F_2K) + (KM) - ((SF_1) + (F_1M)) \end{aligned}$$

Les chemins optiques en couleur se soustraient. Il nous reste :

$$\delta(M) = (HF_2) + (F_2K)$$

(ATTENTION)

Il ne faut pas omettre de préciser pourquoi  $(KM)$  et  $(F_1M)$  sont identiques.

En effet :  $H$  et  $(F_1)$  sont dans le même plan d'onde car ils viennent directement de  $S$  qui est à l'infini et qui émet une onde plane. Mais le plan contenant  $K$  et  $(F_1)$  n'est pas *a priori* un plan d'onde du fait que les ondes issues des fentes ne sont plus planes. Pour raisonner, on dira que l'onde issue de  $M$  est sphérique, donc après passage par la lentille, elle devient plane. Ainsi,  $(F_1)$  et  $K$  sont bien sur le même plan d'onde.

Maintenant, en remarquant qu'on peut reporter les angles  $\alpha$  et  $\alpha_0$  (cf. le schéma), les calculs de  $(HF_2)$  et  $(F_2K)$  se font facilement :

$$\begin{aligned} (HF_2) &= n_{\text{air}} HF_2 \\ &= n_{\text{air}} a(-\sin \alpha_0) \\ &= -n_{\text{air}} a \sin \alpha_0 \\ &\approx -n_{\text{air}} a \alpha_0 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (F_2K) &= n_{\text{air}} a \sin \alpha \\ &\approx n_{\text{air}} a \alpha \\ (F_2K) &\approx n_{\text{air}} a \frac{x}{f'} \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat :

$$(6.13a) \quad \delta(M) \approx n_{\text{air}} a \left( \frac{x}{f'} - \alpha_0 \right)$$

$$(6.13b) \quad i = \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}} a}$$

Pour décrire au mieux ce que l'on observe, on définit l'ordre d'interférence.

---

**Définition 50 : Ordre d'interférence**


---

L'**ordre d'interférence**  $p(M)$  est défini par :

$$(6.14) \quad p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda}$$

---

**Théorème 50.1**


---

Plus l'ordre d'interférence  $p$  est proche d'un entier  $m \in \mathbb{Z}$ , plus l'interférence est constructive, et plus il y a d'intensité lumineuse. À l'inverse, l'interférence est destructive en  $m + \frac{1}{2}$ .

### 6.2.4 Interféromètre de MICHELSON

L'interféromètre de MICHELSON est un exemple de dispositif interférométrique à division d'amplitude.

#### Configuration en lame d'air

---

**Définition 51 : Lame d'air**


---

Dans le dispositif de MICHELSON, lorsque les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont perpendiculaires, on dit que le dispositif est configuré en **lame d'air**.

$M'_1$ , le symétrique de  $M_1$  (cf. figure 6.7), est alors à une distance  $e$  de  $M_2$  et forme une « lame d'air ».

---

**Théorème 51.1**


---

Pour un interféromètre de MICHELSON réglé en **lame d'air**, en utilisant les notations de la figure 6.7 page 49, on démontre les formules suivantes :

- Différence de marche :

$$(6.15a) \quad \delta(M) = 2ne \cos i$$

- Déphasage :

$$(6.15b) \quad \Delta\varphi(M) = \frac{4\pi ne \cos i}{\lambda_0}$$

- Ordre d'interférences :

$$(6.15c) \quad p(M) = \frac{2ne \cos i}{\lambda_0}$$



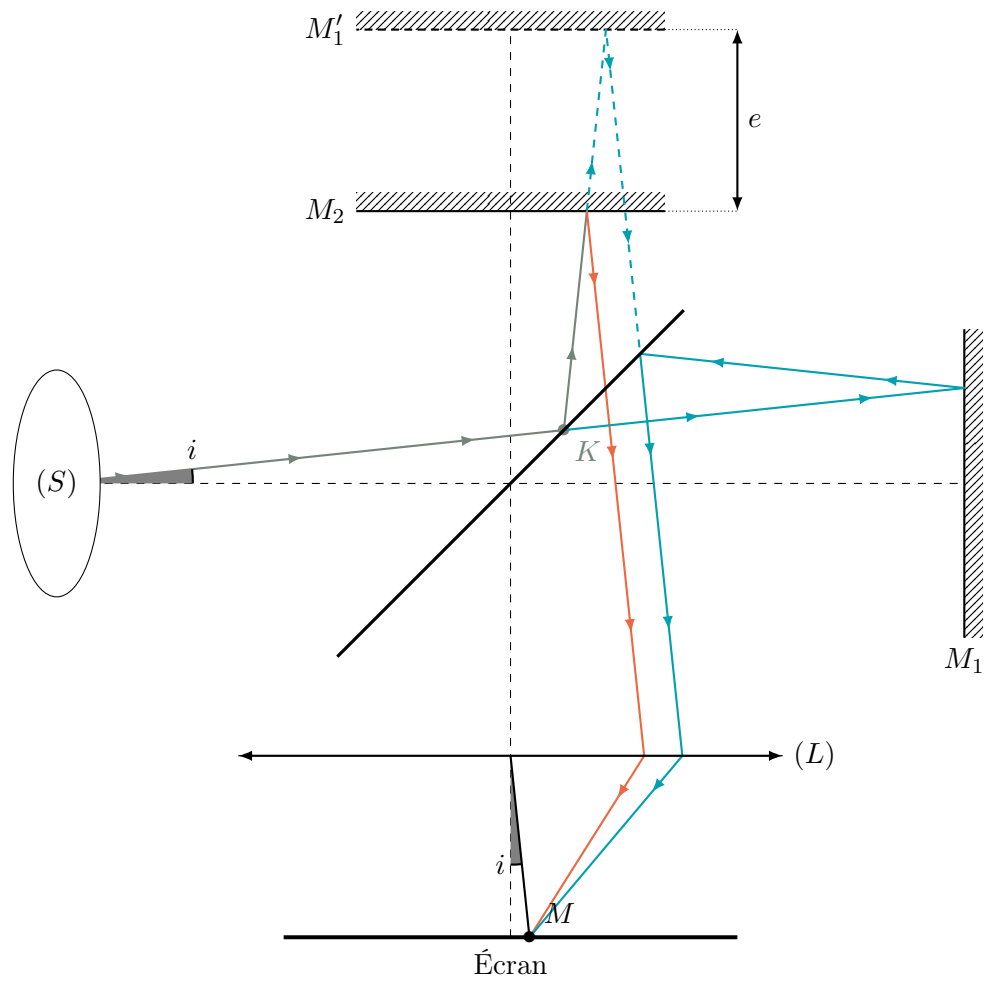


FIGURE 6.7 – Interféromètre de MICHELSON en lame d'air

### Configuration en coin d'air

#### Définition 52 : Configuration en coin d'air

Dans le dispositif de MICHELSON, lorsque les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  ne sont pas perpendiculaires, on dit que le dispositif est configuré en **coin d'air**.

$M'_1$ , le symétrique de  $M_1$  (cf. figure 6.8), est alors incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à  $M_2$  et forme un « coin d'air ».

#### Théorème 52.1

Pour un interféromètre de MICHELSON réglé en **coin d'air**, on démontre les formules suivantes :

- Différence de marche :

$$(6.16a) \quad \delta(M) = 2ne$$

- Déphasage :

$$(6.16b) \quad \Delta\varphi(M) = \frac{4\pi ne}{\lambda_0}$$

- Ordre d'interférences :

$$(6.16c) \quad p(M) = \frac{2ne}{\lambda_0}$$

Ce théorème est admis.

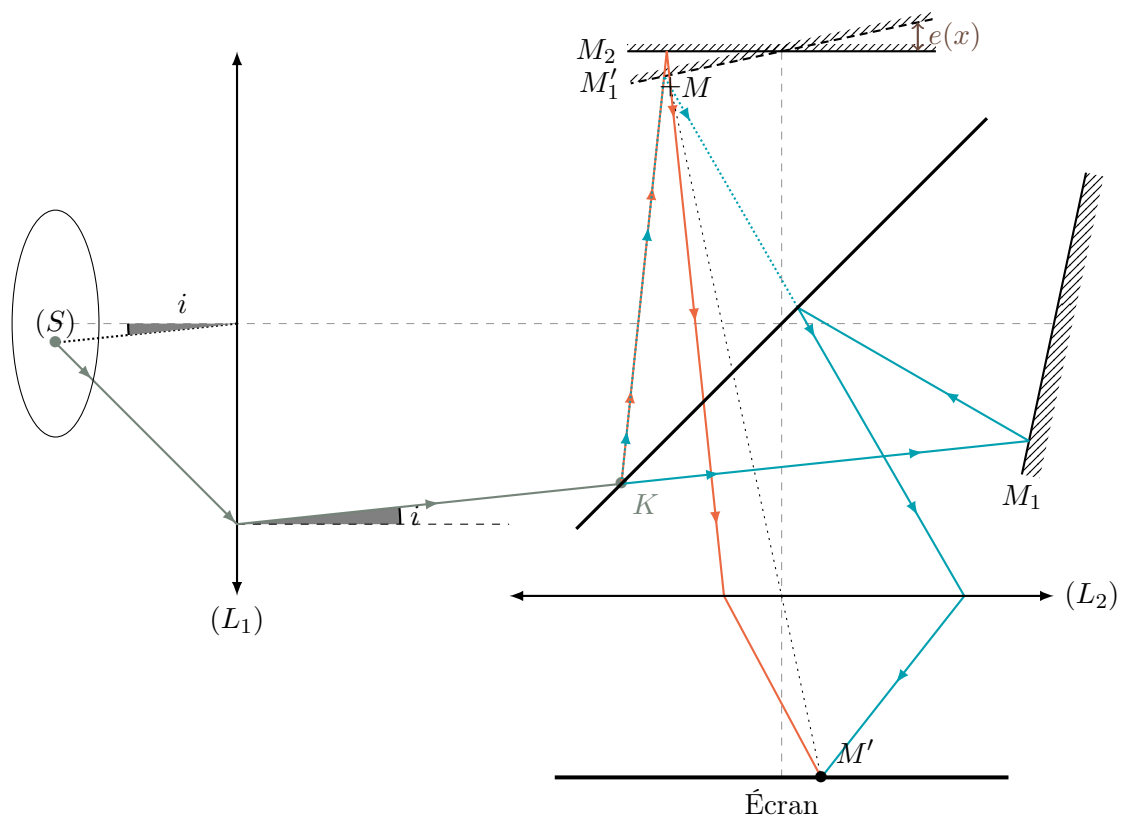


FIGURE 6.8 – Interféromètre de MICHELSON en coin d'air. La lentille  $(L_1)$  permet d'obtenir une source étendue à l'infinie. La lentille  $(L_2)$  conjugue  $M$  à  $M'$ .

### Théorème 52.2

Si on note  $x$  l'abscisse de la réflexion sur le miroir, et  $\alpha$  l'inclinaison du miroir, alors  $e(M)$  est donné par :

$$(6.17) \quad e(M) = |\alpha x|$$

### 6.2.5 Diffraction

Ter-  
miner  
l'énoncé

### Définition 53 : Principe d'HUYGENS-FRESNEL

Tout point  $P$  d'une surface  $\Pi$  issu d'une même source  $\mathcal{S}$  agit comme une source secondaire d'amplitude proportionnelle à celle de la source.

La vibration lumineuse en un point donné est la somme des vibrations émises par l'ensemble des sources secondaires.

$$(6.18) \quad \underline{a}(M) = \mathcal{C}_0 \iint_{P \in \Pi} \frac{\underline{a}(P)}{PM} e^{i \overbrace{k_0 PM}^{\varphi(M)}}$$

### Théorème 53.1 : Diffraction de FRAUNHOFER

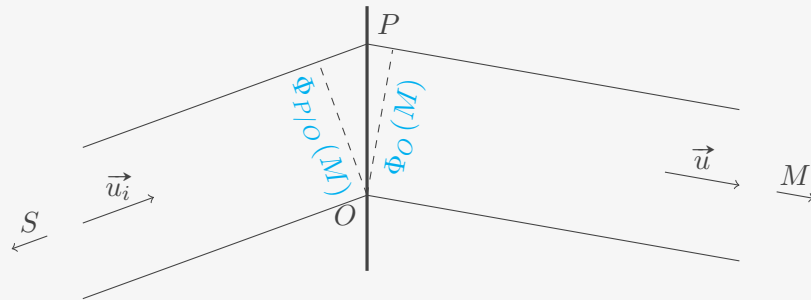


FIGURE 6.9 – Objet diffractant

$$(6.19) \quad \Phi_{P/O}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP} + \underbrace{\arg(\underline{t}(p))}_{\text{Si l'objet est quelconque}}$$

En remaniant l'équation (6.18) d'HUYGENS-FRESNEL avec cette nouvelle phase :

$$(6.20) \quad \underline{a}(M) = \frac{\mathcal{C}_0}{OM} A(P) e^{i \Phi_O(M)} \iint \underline{t}(P) e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}}$$

(ATTENTION) Ne pas oublier le  $\frac{2\pi}{\lambda_0}$  !

### 6.2.6 Réseaux

#### Théorème 53.2 : Formule des réseaux

Dans un réseau

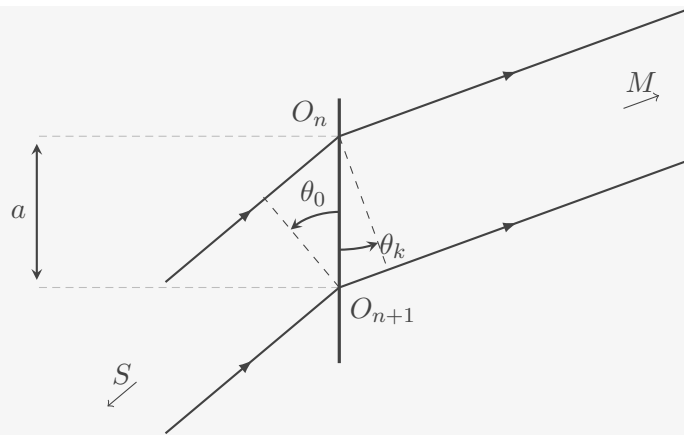


FIGURE 6.10 – Deux fentes  $O_n$  et  $O_{n+1}$  d'un réseau

(6.21) 
$$\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$$

$k$  est appelé **ordre de diffraction**

**Preuve 53.2.1** Calculons la différence de marche  $\delta_d(M)$  entre deux rayons :

$$\delta_d(M) =$$

Démo  
de la  
formule  
des ré-  
seaux

## Chapitre 7

# Électromagnétisme

### Méthode

#### Champ électrostatique

Pour trouver le champ  $\vec{E}$  :

1. Appliquer le théorème de Gauss
2. Appliquer les formule de Coulomb (7.2a)

### 7.1 Électrostatique

#### 7.1.1 Loi de COULOMB

##### Définition 54 : Force de COULOMB

C'est la force électromagnétique entre deux charges  $q_A$  et  $q_B$

$$(7.1) \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

##### Théorème 54.1

On peut définir la force de COULOMB comme  $\vec{F} = q_B \vec{E}(B)$  où :

$$(7.2a) \quad \boxed{\vec{E}(B) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}}$$

Mais on retiendra :

$$\begin{aligned}
 (7.2b) \quad \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{dV}{\|\vec{PM}\|^3} & \rho(M) &= \frac{dQ(M)}{dV} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \frac{dS}{\|\vec{PM}\|^3} & \sigma(M) &= \frac{dQ(M)}{dS} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \lambda \frac{dl}{\|\vec{PM}\|^3} & \lambda(M) &= \frac{dQ(M)}{dl}
 \end{aligned}$$

### 7.1.2 Propriétés du champ électrostatique

#### Théorème 54.2 : Principe de superposition

Soient  $n$  particules  $A_1, A_2, \dots, A_n$  immobiles dans l'espace.

Le champ électrostatique résultant est la somme des champs engendrés par ces particules :

$$(7.3) \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{A_i}(M)$$

#### Théorème 54.3 : Symétries

Le champ  $\vec{E}$  est symétrique pour une distribution symétrique des charges.

On en déduit que le champ  $\vec{E}$  est colinéaire aux plans de symétries des distributions des charges, et orthogonal aux plans d'anti-symétrie.

### 7.1.3 Circulation du champ électrostatique

#### Théorème 54.4 : Circulation d'un champ

Soit  $q_A$  une charge située en  $A$ . Soit  $\vec{E}_A$  le champ électrostatique créé par  $q_A$ .

La circulation de  $\vec{E}_A$  le long d'un chemin  $C \rightarrow D$  est

$$(7.4a) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{AC} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{AD}$$

D'après le théorème de superposition, on peut dire que la circulation d'un champ créé par une distribution quelconque de charges est

$$(7.4b) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i C} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i D}$$

La circulation de  $\vec{E}$  ne dépend donc pas du chemin emprunté, mais seulement des points de départ et d'arrivée. On va pouvoir définir un potentiel

#### Définition 55 : Potentiel Electrostatique

Le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  est défini tel que

$$\mathcal{C}_{M \rightarrow N}(\vec{E}) = V(M) - V(N)$$

Ainsi, **potentiel électrostatique**  $V(M)$  créé par une charge  $q_A$  en un point  $A$  est donné par

(7.5) 
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} + \text{constante}$$

#### Théorème 55.1 : Potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique**  $V(M)$  est lié au champ  $\vec{E}(M)$  par la relation :

(7.6) 
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

(ATTENTION) Pour un champ  $\vec{E}(M)$  donné,  $V(M)$  n'est pas unique.

#### Théorème 55.2 : Energie potentielle

L'**énergie potentielle** d'une charge ponctuelle  $q$  soumise à la force exercée par un champ  $\vec{E}$  de potentiel  $V$  est

(7.7) 
$$E_p(M) = qV(M)$$

### 7.1.4 Flux du champ électrostatique

#### Théorème 55.3 : Équation de MAXWELL-GAUSS

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Gauss).

Le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface orientée d'un volume est proportionnelle à la charge contenue dans ce volume :

(7.8) 
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

L'objectif est de trouver un volume tel que  $\vec{E}$  ne dépende d'aucune variable de l'intégrale  $\oiint_S d\vec{S}$ . Par exemple,  $\oiint_{\theta,z} E \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$ , où on peut sortir  $E \vec{u}_r$ . En général, ce

théorème est très utile avec les symétries.

(ATTENTION) Ce sont des surfaces qu'on étudie avec le théorème de GAUSS. Pas des volumes...

### 7.1.5 Dipôle électrostatique

Définition 56 : Dipôle électrostatique

On appelle **dipôle électrostatique** le système de deux charges ponctuelles opposées ( $q$  et  $-q$ ) situées en deux points  $N$  et  $P$  tels que  $\|\overrightarrow{NP}\|$  soit très petit devant les autres distances envisagées.

#### Définition 57 : Moment dipolaire

Le **moment dipolaire**  $p$  d'un dipôle est défini par :

$$(7.9) \quad \vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$



FIGURE 7.1 – Moment dipolaire

#### Théorème 57.1 : Potentiel électrostatique d'un dipôle

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par un dipôle électrostatique est

$$(7.10) \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right)$$

#### Théorème 57.2 : Potentiel créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire  $p$  :

$$(7.11) \quad V(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

#### Théorème 57.3 : Champ électrique créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire  $p$  :

$$(7.12) \quad \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta}{r^3}$$

#### Théorème 57.4 : Force et moment d'un champ uniforme sur un dipôle

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle électrostatique est

$$(7.13) \quad \vec{F} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P)$$

Quand le champ est uniforme,  $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$ , donc  $\vec{F} = 0$ , et la résultante des forces est nulle.



Il y a néanmoins un couple  $\mathcal{M}_0$  qui s'applique sur le dipôle en son centre 0 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 &= q \left( \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} \right) \wedge \vec{E} \\ &= q \overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \\ \mathcal{M}_0 &= \vec{p} \wedge \vec{E}\end{aligned}\tag{7.14}$$

Le dipôle électrostatique va donc chercher à s'aligner avec le champ  $\vec{E}$ .

## 7.2 Magnétostatique

### 7.2.1 Champ magnétique

#### Définition 58 : Densité Volumique de Courant

La **densité volumique de courant** décrit le mouvement d'ensemble des particules de charges  $q$  passant à travers une surface élémentaire orientée  $dS_M$ .

Pour une surface élémentaire  $dS$  décrite par son vecteur normal  $d\vec{S}$ , le courant électrique  $di$  à travers cette surface est relié à  $\vec{j}$  par

$$di = \vec{j} \cdot d\vec{S} \qquad i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}\tag{7.15a}$$

Un courant électrique est un débit de charges électriques à travers une surface orientée. Si on note  $n$  le nombre de charges  $q$  par unité de volume :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v}\tag{7.15b}$$

Ou encore, la troisième définition qu'on peut déduire :

$$d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M dt\tag{7.15c}$$

#### Théorème 58.1 : BIOT et SAVARD

La formules de BIOT et SAVART permet de calculer des champs  $\vec{B}$  de manière plus directe qu'avec les équations de Maxwell. La contribution au champ  $\vec{B}$  d'un circuit est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{Circuit}} \frac{i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\tag{7.16}$$

(ATTENTION) Ce théorème est désormais **hors-programme**

### Théorème 58.2 : Équation de MAXWELL-AMPÈRE

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Ampère).

(ATTENTION)

Elle n'est valable que si le deuxième terme  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}\right)$  est nul ou négligeable !

(7.17)

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{Enlacé}}$$

### Définition 59 : Force de LORENTZ

C'est la force subit par un charge  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  dans des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

(7.18)

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

### Théorème 59.1 : Force de LAPLACE

On la revoit au théorème 64.5 page 66.

La force de LAPLACE existe sous deux formes, et on voit ici la forme intégrale qui caractérise les effets d'un champs  $\vec{B}$  sur un circuit, elle vient de la force de LORENTZ cf. équation (7.18) page 58

(7.19)

$$\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = \int_{M \in \text{Circuit}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

## 7.2.2 Dipôle Magnétique

### Définition 60 : Moment magnétique

Le **moment magnétique**  $\vec{M}$  d'une distribution de courant d'intensité  $I$ , de surface  $S$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est :

(7.20)

$$\vec{M} = I S \vec{n}$$

Son unité est en  $A \cdot m^2$

### Définition 61 : Dipôle magnétique

Un **dipôle magnétique** est une distribution de courant tel que :

- $\vec{M}$  non nul
- La taille caractéristique  $a$  est infiniment petite devant les autres longueurs

## Action du dipôle magnétique sur l'extérieur

### Théorème 61.1 : Potentiel vecteur et champ magnétique

Le potentiel vecteur créé par un dipôle en  $M$  est, en notant  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$(7.21) \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Le champ magnétique créé par ce même dipôle en  $M$  est

$$(7.22) \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}}}{r^5}$$

$$(7.23) \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

### Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

#### Théorème 61.2

Un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  plongé dans un champ  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est soumis à un couple de moment

$$(7.24) \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

L'énergie potentielle qui en résulte est :

$$(7.25) \quad E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

## 7.3 Équations de MAXWELL

### 7.3.1 Principe de conservation de la charge

#### Théorème 61.3 : Équation de conservation de la charge

Il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique. Ce postulat donne lieu à l'équation de conservation de la charge :

$$(7.26) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

### 7.3.2 Les équations de MAXWELL

Ces 4 équations sont les plus importantes. À elles 4 elles permettent de retrouver intégralement le programme de première année.

#### Théorème 61.4 : Les Équations de MAXWELL

(Maxwell-Gauss)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Maxwell-Flux)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(Maxwell-Faraday)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Maxwell-Ampère)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Grâce aux formules de STOKES ([Stokes](#)) et d'OSTROGRADSKI ([Ostrogradski](#)) de la page 97, on peut obtenir les **versions intégrales** des équations de MAXWELL. On a aussi la loi de FARADAY ([7.41](#)) de la page 64.

### Définition 62 : Célérité de la lumière dans le vide

On définit la célérité  $c$  de la manière suivante :

(7.27)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

C'est la vitesse de la lumière

### Équations de propagation

#### Théorème 62.1 : Équation de d'ALEMBERT

Dans le vide, en l'absence de charges ( $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ ), les champs électrique et magnétique vérifient l'équation de d'ALEMBERT

(7.28)

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

**Preuve 62.1.1** *Démontrons le cas pour  $\vec{B}$ , la démonstration pour  $\vec{E}$  est analogue.*

*On part de l'équation (Maxwell-Ampère) :*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

*Comme dans beaucoup de démonstration, on applique un deuxième  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

*On peut intervertir les opérateurs  $\partial$  et  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$  :*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}}{\partial t}$$

Sachant que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{B}) - \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \underbrace{\text{div } \vec{B}}_0 \right) - \underbrace{\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})}_{\Delta \vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

### Théorème 62.2 : Potentiels

Au champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ , on peut associer un couple de potentiels  $(V(M, t), \vec{A}(M, t))$  tel que :

$$(7.29) \quad \begin{cases} \vec{B} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}(V) \end{cases}$$

**Preuve 62.2.1** Comme  $\text{div } \vec{B} = 0$  (Équation 3 de Maxwell (Maxwell-Faraday)), on sait que  $\vec{B}$  est un champ rotationnel. Donc il existe  $\vec{A}$  tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Maintenant, en prenant l'équation 2 de Maxwell (Maxwell-Flux),  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})}{\partial t}$ . En intervertissant les opérateurs, et en faisant tout passer à gauche :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Donc on sait que  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est un champ à gradient. D'où il existe  $V$  tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

### 7.3.3 Equations de POISSON et de LAPLACE

En statique,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ , ce qui équivaut à l'existence d'un potentiel  $V(M)$  tel que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$  (c'est l'équation (7.6) qu'on voit en électrostatique page 55).

### Théorème 62.3

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'équation de Poisson :

$$(7.30) \quad \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

(ATTENTION)

$\Delta V(M)$  est le laplacien de  $V(M)$ . Ce n'est pas la variation  $\Delta$ .

Lorsqu'une zone est en plus vide de charge,  $\rho(M) = 0$  et l'équation devient l'équation de LAPLACE :

$$(7.31) \quad \Delta V(M) = 0$$

**Preuve 62.3.1** Il suffit d'injecter  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$  à l'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) page 60 :

$$(7.32) \quad \text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} V \right) (M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Or, par définition,  $\text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} f \right) = -\Delta f$ . □

(ATTENTION)

Le potentiel n'existe que quand  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ . En général, c'est en statique ou en régime permanent. Mais écrire  $V(M, t)$  est absurde !

## 7.4 Énergie électromagnétique

Sur une particule chargée, la majorité des forces sont négligeables devant la force de LORENTZ. C'est ainsi qu'on peut appliquer le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) (équation (5.12) page 36)

### Théorème 62.4 : Densité volumique de force

La densité volumique de force électromagnétique est :

$$(7.33a) \quad \vec{f}_V(M, t) = \rho(M, t) \vec{E}(M, t) + \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Cette force est volumique, donc elle s'exerce sur les charges d'un volume  $dV$  tel que :

$$(7.33b) \quad d\vec{F} = \vec{f}_V(M, t) dV$$

**Preuve 62.4.1** On part de la force de LORENTZ (7.18) page 58 :

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En infinitésimal :

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = dq\vec{E} + dq\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On injecte  $dq = \rho dV$

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = [\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \wedge \vec{B}] dV$$

D'où la force volumique :  $\vec{f}_V = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$  □

### Définition 63 : Puissance volumique

La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière est

$$(7.34) \quad \mathcal{P}_v(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

Avec la loi d'Ohm locale (7.38) page 63 :

$$\mathcal{P}_V(M, t) = \frac{\vec{j}^2(M, t)}{\gamma}$$

### Définition 64

Le **vecteur de POYNTING**  $\vec{\Pi}(M, t)$  est tel que l'énergie électromagnétique traversant la surface  $d\vec{S}$  autour de  $M$  est :

$$(7.35) \quad d^2 U_{\text{em}} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} dt$$

On admet les expressions suivantes :

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est

$$(7.36) \quad u_{\text{em}}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2(M, t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M, t)}{2\mu_0}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie, ou **vecteur de POYNTING** est

$$(7.37) \quad \vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

#### Théorème 64.1 : Loi d'Ohm locale

Elle relie, en un point  $M$ , la densité volumique de courant  $\vec{j}(M, t)$  au champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  :

$$(7.38) \quad \vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

#### Théorème 64.2 : Équation locale de POYNTING

L'équation locale de POYNTING est un bilan d'énergie. Elle donne :

$$(7.39) \quad \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M, t) + \text{div } \vec{\Pi}(M, t) = - \left( \vec{j} \cdot \vec{E} \right)(M, t)$$

**Preuve 64.2.1** *Le bilan d'énergie électromagnétique pour une surface  $\mathcal{S}$  est :*

$$(7.40) \quad \frac{dU_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_{sortant} - \mathcal{P}_{perdue}$$

*Exprimons ces grandeurs :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{perdue} &= \iiint \mathcal{P}_V dV \\ &= \iiint (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV \\ \mathcal{P}_{sortant} &= \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_P \\ &= \iiint \operatorname{div}(\vec{\Pi}) dV \\ \frac{dU_{em}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint u_{em} dV \\ &= \iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV \end{aligned}$$

*ce qui nous donne, pour un volume d'intégration  $\mathcal{V}_M$  quelconque :*

$$\iiint_{\mathcal{V}_M} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV + \iiint_{\mathcal{V}_M} \operatorname{div}(\vec{\Pi}) dV = \iiint_{\mathcal{V}_M} -(\vec{j} \cdot \vec{E}) dV$$

*d'où le résultat.*

□

## 7.5 Induction

### Théorème 64.3 : Loi de FARADAY

Elle caractérise la force électromotrice  $e$  induit par un flux  $\Phi_B$

$$(7.41) \quad e = \oint_S \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

#### 7.5.1 Loi d'Ohm généralisée



### Théorème 64.4

On considère un conducteur formé d'un fil de longueur  $L$ , de section  $s$ , constitué d'un matériau dont la conductivité électrique est  $\gamma$ , est branché entre un point  $A$  et un deuxième point  $B$ . La loi d'Ohm pour ce conducteur, dite généralisée, donne :

$$(7.42) \quad V(A, t) - V(B, t) = Ri + \overbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}}^{-e}$$

avec  $R = \frac{L}{\gamma s}$ .

C'est bien sûr l'équation 3.2 de la page 19.

#### Preuve 64.4.1

On part de

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

D'après la définition du  $\overrightarrow{\text{grad}}$ ,

$$- \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M = - (V(B, t) - V(A, t)) = V(A, t) - V(B, t)$$

D'autre part, avec la loi d'Ohm locale (équation 7.38 page 63),

$$\begin{aligned} \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{1}{\gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \\ &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{Rs}{L} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \end{aligned}$$

Si on reprend la définition de  $\vec{j}$  de l'équation (7.15c) (définition 58 page 57), et qu'on prend  $d\vec{l}_M = d\vec{\tau}_M dl_M$  ( $d\vec{\tau}_M$  est orienté dans le sens de  $\vec{j}$ ) :

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = Ri = [V(A, t) - V(B, t)] - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

En approximant :  $- \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = - \oint_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = - \frac{d\Phi_B}{dt} = e$  d'où  
 $V(A, t) - V(B, t) = Ri - e$

La force de LAPLACE est la résultante des forces du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  sur des charges en  $M$

### Théorème 64.5 : Force de Laplace

$$\vec{dF}_{\text{LAPLACE}} = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Cette force est bien volumique, car elle s'exprime en fonction de  $\vec{j}(M)$ . On retiendra surtout :

(7.43)

$$\vec{dF}_{\text{Laplace}} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

(ATTENTION)

$I$  et  $d\vec{l}$  doivent être colinéaires

### 7.5.2 Auto-induction

#### Définition 65 : Inductance propre

Pour un circuit électrique fixe et indéformable parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  crée un flux propre  $\Phi_p(t)$  proportionnel à  $i(t)$  dans les conditions d'ARQS

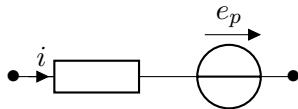
(7.44)

$$\Phi_p(t) = L i(t)$$

Cette relation définit  $L$ , le coefficient d'**inductance propre** du circuit.

**Remarque :** Dans la loi d'OHM vu précédemment (cf. équation (7.42) page 65), on peut prendre, en l'absence d'un champ magnétique extérieur,  $-e = \frac{d\Phi_p}{dt} = L \frac{di}{dt}$ , et alors :

$$V_A - V_B = Ri + L \frac{di}{dt}$$



### 7.5.3 Inductance mutuelle

#### Théorème 65.1 : Inductance mutuelle entre deux circuits

Pour deux circuits 1 et 2 parcourus respectivement par les courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ , l'inductance mutuelle  $M$  d'un circuit sur un autre est proportionnelle à  $i_*(t)$  :

(7.45)

$$\begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M i_1(t) \\ \Phi_{2 \rightarrow 1}(t) = M i_2(t) \end{cases}$$

On admettra le **théorème de NEUMANN** qui donne

(7.46)

$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

### 7.5.4 Force électromotrice induite

### Définition 66 : Champ électromoteur

Lorsqu'on déplace un conducteur à une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  stationnaire, il crée un **champ électrique électromoteur**  $\vec{E}_m$

$$(7.47) \quad \vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}_0(M)$$

### Théorème 66.1 : Force électromotrice induite

La **force électromotrice**  $e_{AB}$  **induite** par  $\vec{E}_m$  est, comme dans l'équation (7.41) de FARADAY :

$$(7.48) \quad e_{AB} = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{l}_M$$

## 7.6 Propagation et rayonnement

### Méthode

#### Relations de structure

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

#### Relations de Passage

$$E_2(A, t) - E_1(A, t) = \frac{\sigma(A, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{sortant}}$$

$$B_2(A, t) - B_1(A, t) = \mu_0 \vec{j}(A, t) \wedge \vec{n}_{\text{sortant}}$$

### 7.6.1 Dans le vide

On se place dans une zone où il n'y a **ni charge, ni courant**. C'est à dire que  $\rho = 0$  et alors  $\vec{j} = 0$ . Lorsqu'on reprend les équations de MAXWELL, les équations (**Maxwell-Gauss**)

et (Maxwell-Ampère) sont modifiées :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

### Onde Plane Progressive

#### Définition 67 : Onde plane

Une **onde plane** est une solution **non constante** de l'équation de d'ALEMBERT qui prend des valeurs uniformes sur les plans perpendiculaires à une direction  $\vec{k}$ .

Une onde plane de pulsation  $\omega$  se décrit de la manière suivante :

$$(OP) \quad U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) + g(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + vt)$$

#### Définition 68 : Onde plane progressive

Une **onde progressive** est une solution de l'équation de d'ALEMBERT qui s'écrit sous la forme  $U(z, t) = f(z - vt)$ . Elle se propage dans le sens positif de l'axe  $Oz$

La forme générale d'une **Onde Plane Progressive (OPP)** de pulsation  $\omega$  se propageant uniquement selon une direction  $\vec{k}$  est :

$$(OPP) \quad U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt)$$

Obtenir la solution des équations de d'ALEMBERT du théorème 62.1 permet de trouver la forme générale d'une onde. C'est ainsi qu'on peut déterminer la forme d'une OPP électromagnétique :

#### Théorème 68.1 : Onde électromagnétique

La forme générale d'une Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans le vide dans la direction de  $\vec{u}_z$  est :

$$(7.49) \quad \vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(z - ct) \\ f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} f_x(z - ct) \\ \frac{1}{c} f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la composante en  $\vec{u}_z$  des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont nulles. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , qui sont donc perpendiculaires à la propagation de l'onde, sont dis **transversaux**. L'onde est appelée **transversale**

**Preuve 68.1.1** Une OPP doit vérifier l'équation de D'ALEMBERT comme on l'a vu au théorème 62.1 page 60. Donc pour une onde se propageant selon  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(t - \frac{z}{c}) \\ f_y(t - \frac{z}{c}) \\ f_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} h_x(t - \frac{z}{c}) \\ h_y(t - \frac{z}{c}) \\ h_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix}$$

L'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) (la version où  $\rho = 0$  car dans le vide il n'y a pas de charge) donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial f_x(t - \frac{z}{c})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(t - \frac{z}{c})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} &= 0 \\ 0 + 0 + \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Et nécessairement,  $\frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} = 0$  implique que  $f_z$  est constante. Donc  $f_z$  est nulle. De même, l'équation de MAXWELL-Flux nous donne que  $h_z$  est nulle.

Avec l'équation de MAXWELL-FARADAY (Maxwell-Faraday), on trouve finalement que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} f'_y &= -h'_x \\ \frac{1}{c} f'_x &= h'_y \end{aligned}$$

Et on obtient les équations de propagation d'une onde électromagnétique.  $\square$

### Théorème 68.2 : Relations de structure

On structure les OPPs de la manière suivante :

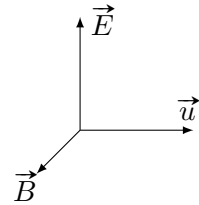
- Le trièdre  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est direct
- La famille  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est orthogonale
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

Qui peuvent se résumer dans les relations de structure :

(7.50)

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$



## Onde Plane Progressive Monochromatique

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) de pulsation  $\omega$  se décrit de la manière suivante :

(OPPM) 
$$U(M, t) = U_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_0)$$

### Définition 69 : Vitesse de Phase

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) se propage selon une direction  $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$ . On définit sa vitesse de phase :

(7.51) 
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

**Remarque :** Dans le vide,  $v_\varphi = c$ , donc  $k = \frac{\omega}{c}$ .

### Notation complexe

Opérateurs	Maxwell
$\frac{\partial}{\partial t} \bullet \Leftrightarrow i\omega \times \bullet$	(Maxwell-Gauss) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$
$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{U} \Leftrightarrow -i\vec{k} \times \underline{U}$	(Maxwell-Flux) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$
$\text{div} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Faraday) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$
$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Ampère) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \frac{1}{c^2} \underline{\vec{E}}$

### Théorème 69.1 : Relations de structure d'une OPPM

De même que les relations de structure (7.50) d'une OPP, on obtient rapidement, avec la forme complexe des équations de MAXWELL :

(7.52) 
$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \qquad \underline{\vec{E}} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}$$

**Preuve 69.1.1** D'après l'équation (Maxwell-Faraday) en complexes (en prenant la partie réelle) :

$$i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = i\omega \underline{\vec{B}}$$

Il vient immédiatement :

$$i \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = i \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

De même, en partant de l'équation (Maxwell-Ampère) en complexes (et toujours en prenant la partie réelle) :

$$i \vec{k} \wedge \vec{B} = -i \omega \frac{1}{c^2} \vec{E}$$

Qui donne, immédiatement :

$$i \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -i \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

Ces équations sont homologues à celles vues précédemment, car  $k = \frac{\omega}{c}$

## Polarisation

On considère une OPP *transverse*, donc qui s'écrit :

$$(7.53) \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_{0x} \cos(\omega t - kz) + \vec{E}_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

On appelle **onde polarisée rectilignement** une onde sous la forme

$$(7.54) \quad \vec{E} = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz)$$

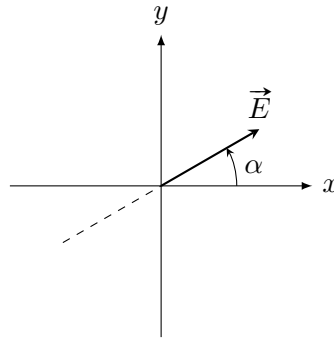


FIGURE 7.2 – Polarisation rectiligne

## 7.6.2 Propagation dans un plasma

### Définition 70 : Plasma

Un **plasma** est un conducteur constitué d'ions et d'électrons pour une charge globale neutre. Les conditions suivantes soient vérifiées

- Les ions positifs sont immobiles
- Il est peu dense, c'est à dire qu'on néglige les interactions électromagnétiques.

### Théorème 70.1 : Densité volumique de courant

Il existe dans le plasma une densité volumique de courant :

$$(7.55) \quad \underline{\vec{j}} = -i \frac{n_0 e^2}{m \omega} \underline{\vec{E}}(M, t)$$

**Preuve 70.1.1** Si on note  $\vec{f}_e$  et  $\vec{f}_m$  respectivement les forces de LORENTZ électrostatique et magnétostatique, alors on remarque que :

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{\| -e \vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e \vec{E} \|} \sim \frac{v}{c}$$

Or  $v$  est la vitesse de l'électron dans le milieu, et  $v \ll c$  car l'électron est dit « non relativiste ». Donc  $f_m \ll f_e$ , et on peut négliger  $\vec{f}_e$  dans un PFD :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \approx -e \vec{E}(M, t)$$

On passe en notation complexe, et le mouvement d'oscillation de l'électron est  $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}}_0 \exp(i\omega t)$ . D'où la nouvelle expression du PFD :

$$m_e(i\omega) \underline{\vec{v}} \approx -e \underline{\vec{E}}(M, t)$$

soit

$$\underline{\vec{v}} = i \frac{e}{m_e \omega} \underline{\vec{E}}(M, t)$$

Et on obtient  $\underline{\vec{j}}$  avec  $\underline{\vec{j}} = -n_0 e \underline{\vec{v}}$  □

On peut donc définir une pulsation plasma  $\omega_p$

### Définition 71 : Pulsation plasma

On définit la **pulsation plasma** par

$$(7.56a) \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}}$$

Et alors :

$$(7.56b) \quad \underline{\vec{j}} = -i \frac{n_0 e^2}{\omega m} \underline{\vec{E}} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$$



### Théorème 71.1 : Relation de dispersion

Dans un plasma, on établit une relation de dispersion :

$$(7.57) \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

**Preuve 71.1.1** On utilise les equations (Maxwell-Faraday) et (Maxwell-Ampère) en complexes, ainsi que la formule du double produit vectoriel (12.5a) page 92. On part de l'équation de MAXWELL (Maxwell-Faraday), à laquelle on effectue le produit vectoriel par  $-i\vec{k}$  des deux cotés :

$$\begin{aligned} \cancel{i\vec{k}} \wedge (-i\vec{k} \wedge \vec{E}) &= \cancel{i\vec{k}} \wedge (-i\omega\vec{B}) \\ -i(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0 \text{ car orthogonaux}})\vec{k} + i(\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} &= \omega\vec{k} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

D'où :

$$ik^2\vec{E} = \omega\vec{k} \wedge \vec{B}$$

On injecte l'équation de MAXWELL (Maxwell-Ampère) :

$$ik^2\vec{E} = \omega \left( \mu_0 \vec{j} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E} \right)$$

D'après l'équation (7.56b) de la définition précédente :  $\vec{j} = -i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$

$$\begin{aligned} ik^2\vec{E} &= \omega \left( -i\mu_0\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E} \right) \\ k^2 &= \varepsilon_0\mu_0 (\omega^2 - \omega_p^2) \end{aligned}$$

$$D'où \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

□

### Vitesse de phase et dispersion

#### Définition 72 : Vitesse de phase

La **vitesse de phase**  $v_\varphi$  est la vitesse de propagation d'une OPPM.

#### Théorème 72.1 : Vitesse de phase dans un plasma

Dans un plasma, avec les hypothèses précédentes, la vitesse de phase est égale à :

$$(7.58) \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

---

**Définition 73 : Phénomène de dispersion**

---

On dit qu'il y a **dispersion** quand la vitesse de phase dépend de la pulsation  $\omega$  de l'OPPM

**Fréquence et pulsation de coupure**

---

**Définition 74 : Fréquence de coupure**

---

On appelle **fréquence de coupure** la fréquence  $f_c$  pour laquelle une onde ne se propage plus. La pulsation associée  $\omega_c$  est appelée **pulsation de coupure**

---

**Théorème 74.1 : Pulsation de coupure du plasma**

---

La pulsation plasma  $\omega_P$  est une pulsation de coupure :

(7.59) 
$$\omega_c = \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

**Preuve 74.1.1** Deux cas :

- Si  $\omega > \omega_P$ , alors  $k^2 > 0 \implies k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}$ .
- Sinon, si  $\omega < \omega_P$ , alors  $k^2$  est négatif et il n'y a pas de propagation (une solution imaginaire n'est pas possible pour une onde).

□

**Propagation d'un paquet d'onde**

On se place, dans un premier temps, dans un milieu dispersif quelconque.

---

**Définition 75 : Paquet d'onde**

---

Un **paquet d'onde** est la superposition de plusieurs OPPM de pulsations proches et de pulsation moyenne  $\omega_0$  :

$$(7.60) \quad \int_0^{+\infty} \underline{A}(M) e^{i(\omega t - kz)} d\omega$$

Cette intégrale est valable de 0 à  $+\infty$ , car on considère des ondes dont la pulsation  $\omega$  est comprise dans un intervalle  $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$ , où  $\delta\omega \ll \omega_0$

### 7.6.3 Propagation dans un conducteur ohmique

---

**Définition 76 : Conducteur ohmique**

---

Le **conducteur ohmique** est un métal pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées :

- Les ions positifs sont immobiles

- Il est **dense**, et les électrons, de densité particulière  $n_0$ , sont libres de se déplacer.

On remarque qu'un conducteur ohmique est comme un plasma (*cf.* définition 70 page 71). Sa seule différence est d'être dense. On prend alors en compte les interactions entre électrons et ions sous la forme d'une force de frottement.

#### Théorème 76.1 : Relation de dispersion

Dans un conducteur ohmique, on établit, comme pour le plasma, une relation de dispersion :

$$(7.61) \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$$

Cette équation n'est pas réelle, et conduit à un **module d'onde complexe**. On note :

$$(7.62) \quad \underline{k} = k' - ik''$$

#### Théorème 76.2 : Effet de peau

Dans un conducteur ohmique, la distance caractéristique de d'atténuation d'une OPPM de pulsation  $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$  est :

$$(7.63) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

#### Réflexion d'une OPPM

## Chapitre 8

# Diffusion Thermique

### 8.1 Conduction

C'est le phénomène à petite échelle qui se produit sans mouvement des particules lors d'une diffusion de chaleur. C'est un processus très lent.

#### Définition 77 : Flux Thermique

On le définira de la façon suivante :

$$(8.1) \quad \delta Q = \Phi dt$$

On prendra  $\varphi$  tel que  $\Phi = \varphi S$

#### Définition 78

Le transfert thermique passant à travers une surface fermée  $\vec{S}$  sera caractérisé par le vecteur  $\vec{j}_{th}$ . On le définit :

$$(8.2a) \quad \delta^2 Q = \vec{j}_{th} d\vec{S} dt$$

En notant  $d\vec{S}_M = dS \vec{n}_M$  :

$$(8.2b) \quad \varphi_{\vec{n}_M}(M, t) = \vec{j} \cdot \vec{n}_M$$

#### Théorème 78.1 : Loi de FOURIER

C'est une loi empirique qui donne la densité volumique de courant thermique  $\vec{j}_{th}$  en fonction de  $T$  un champ de températures :

(Fourier)

$$\vec{j}_{th} = - \underbrace{\lambda}_{\text{Conductivité Thermique}} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

### Théorème 78.2 : Premier principe de Thermodynamique

Le premier principe de thermodynamique (équation (1.4a) page 9) s'énonce, en diffusion, avec :

$$(8.3) \quad dU = \delta Q + \mathcal{P}_{\text{prod}} dt$$

$$\text{Souvent, } \mathcal{P}_{\text{prod}} = \iiint \mathcal{P}_V dV$$

### Théorème 78.3 : Bilan local d'énergie

Pour un système  $\Sigma$  de matière dans un volume  $\mathcal{V}$  quelconque, de capacité thermique massique  $c$  et de masse volumique  $\mu$ ,

$$(8.4) \quad \mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}}(M, t) = \mathcal{P}_V(M, t)$$

**Preuve 78.3.1 (Bilan à une dimension)** On suppose que la température ne dépend que d'une dimension,  $x$  par exemple. On compte appliquer le premier principe sous la forme :

$$d^2U = \delta^2Q + \delta^2W$$

On étudie un cylindre de longueur  $dx$ , de section  $S$  (donc de volume  $\mathcal{V} = Sdx$ ). Si  $\mu$  est la masse volumique du cylindre et  $c$  sa capacité thermique massique, alors la capacité thermique du cylindre étudié est  $C = mc = \mu\mathcal{V}c = \mu S c dx$ . On peut alors exprimer  $d^2U$  et  $\delta^2Q$  :

$$d^2U = C \Delta T$$

Donc :

$$\begin{aligned} d^2U &= \mu S c dx (T(x, t + dt) - T(x, t)) \\ &= \mu S c dx dt \frac{T(x, t + dt) - T(x, t)}{dt} \\ d^2U &= \mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} S dx dt \end{aligned}$$

Finalement, puisqu'ici  $\delta^2W = 0$ , on retrouve :

$$d^2U = \delta^2Q + 0$$

soit :

$$\begin{aligned} \mu c \frac{\partial T}{\partial t} S dx dt &= - \frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial x} S dx dt \\ \mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Qui est l'expression (8.4)

□

**Preuve 78.3.2 (Cas général)** On utilise le premier principe de thermodynamique vu plus haut. D'après un DL au premier ordre, on détermine :

$$\begin{aligned} dU &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c (T(M, t + dt) - T(M, t)) dV \\ &= \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c \left( \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right) \right) dt \end{aligned}$$

Le transfert thermique est, par définition de  $\vec{j}$  :

$$\delta Q = \left( - \oint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

Qui est, d'après l'équation d'OSTROGRADSKI (Ostrogradski) page 97

$$= \left( - \iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div } j_{th} dV \right) dt$$

Et enfin :

$$\mathcal{P}_{prod} dt = \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_V dV \right) dt$$

Puisque le volume est constant et le même pour toutes les intégrales, on peut dire que :  $\mu c \left( \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right) = -\text{div } j_{th} + \mathcal{P}_V$  □

### Théorème 78.4 : Équation de diffusion thermique

Pour un champ  $T$  de températures, on a l'équation :

(8.5)

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \widehat{\Delta T} + P_v$$

Laplacien de  $T$

avec  $c$  la capacité calorifique massique à volume constant,  $\mu$  la masse volumique, et  $\lambda$  définit comme précédemment.

### Définition 79 : Résistance thermique

C'est la grandeur  $R_{th}$  telle que :

$$(T_1 - T_2) = \Phi_{1 \rightarrow 2} R_{th}$$

— **Théorème 79.1 : Résistances usuelles** —

Pour deux plaques parallèles de surfaces  $S$  distantes de  $L$  :

$$(8.7) \quad R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Pour deux cylindres coaxiaux de hauteur  $H$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2$

$$(8.8) \quad R_{th} = \frac{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi\lambda H}$$



## 8.2 Convection

Bien plus rapide que la conduction, c'est quand la diffusion thermique est accompagnée d'un mouvement de particules (par exemple quand on ouvre une fenêtre)

---

### Définition 80

Encore une loi empirique, la loi phénoménologique de NEWTON :

(8.9)

$$\varphi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_s - T_f)$$

Cette équation permet surtout de donner :  $\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = hS(T_s - T_f)$

Par définition de  $R_{\text{th}}$  et par identification, l'interface entre un solide et un fluide a donc pour résistance  $R_{\text{th}} = \frac{1}{hS}$

## Chapitre 9

# Rayonnement Thermique

### Méthode

#### Calculer un flux thermique

Relation entre les flux  $d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$

Relation de STEFAN-BOLTZMANN  $\varphi^0(T) = \sigma T^4$

Loi de PLANCK (*non exigible*) cf théorème 82.1

#### Définition 81 : Flux Thermique

La **densité surfacique d'énergie** est définie telle que la puissance électromagnétique reçue par un objet dans l'enceinte sous  $dS$  soit

$$(9.1) \quad d\Phi = \varphi^0 dS$$

L'exposant  $^0$  est là pour rappeler que  $\varphi$  ne dépend ni de la position, ni de  $dS$  : il ne dépend que de  $T$ .

D'ici, on définit la **densité spectrale en longueur d'onde de flux surfacique** (notée  $\varphi_{\lambda}^0$ ) de manière analogue : elle est telle que la contribution à  $\varphi^0$  des photons de longueur d'onde comprises entre  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  soit

$$(9.2) \quad d\varphi^0 = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda$$

Pour résumer, on se rapportera à la figure 9.1 (page 83) et à la simple formule :

$$d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$$

#### Définition 82 : Énergie d'un photon

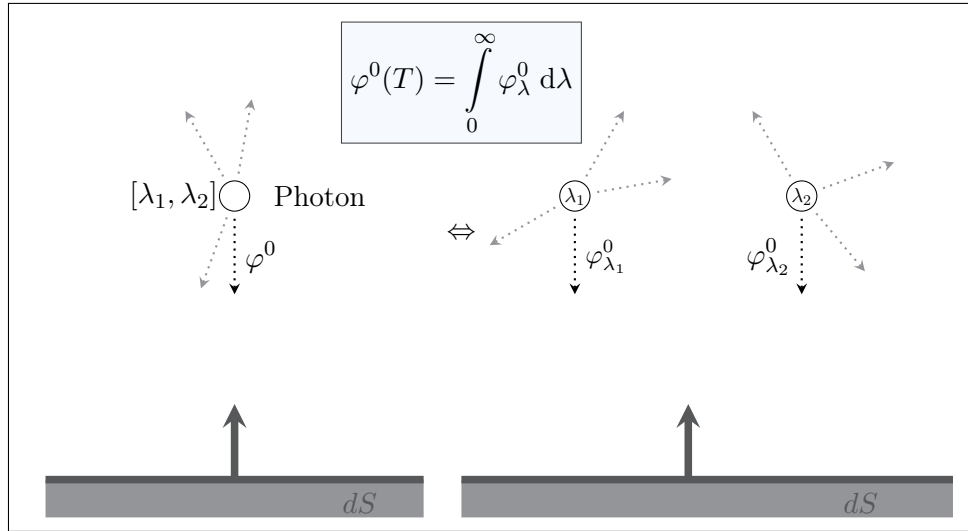


FIGURE 9.1 – Caractérisation des différents flux

(9.4)

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

#### Théorème 82.1 : Loi de PLANCK

La loi de PLANCK n'est pas exigible, mais elle permet de calculer la densité spectrale en longueur d'onde

$$\varphi^\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{\frac{hc}{e^{\lambda k_B T}} - 1}$$

avec :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

#### Théorème 82.2 : STEFAN-BOLTZMANN

(9.6)

$$\varphi^0(T) = \sigma T^4$$

où  $\sigma$  est la constante de STEFAN :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  C'est aussi le flux émis par un corps noir.

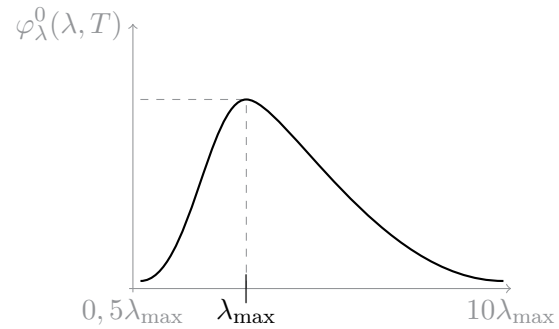
La densité spectrale en longueur d'onde du flux ( $\varphi_\lambda^0$ ) passe par un maximum pour une longueur d'onde  $\lambda_m$ . On l'obtient avec la loi de WIEN :

**Théorème 82.3 : Loi de WIEN**

$$(9.7) \quad \lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$$

Pour retenir :  $\lambda_{\max} T = 2900 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

**Remarque :** Le domaine spectral d'émission est compris dans  $[0, 5\lambda_{\max}, 10\lambda_{\max}]$



**Théorème 82.4 : Flux surfacique radiatif**

En un point  $P$ , le flux surfacique cédé par un corps noir opaque est :

$$(9.8) \quad \varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = \sigma T(P)^4 - \varphi_{\text{reçu}}(P)$$

et alors, le flux radiatif suit une loi de NEWTON  $\varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = h(T(P) - T_0)$  dont le coefficient est

$$(9.9) \quad h^{\text{rad}} = 4\sigma T_0^4$$

# Chapitre 10

## Mécanique Quantique

### 10.1 Introduction à la mécanique quantique

#### 10.1.1 Dualité onde-particule

##### Définition 83 : Relation de PLANCK-EINSTEIN

Pour une onde de fréquence  $\nu == \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$ , l'énergie  $E_{\text{photon}}$  et la quantité de mouvement  $p_{\text{photon}}$  d'un photon sont donnés par la **relation de PLANCK-EINSTEIN** :

(10.1a) 
$$E_{\text{photon}} = \frac{h}{\nu}$$

(10.1b) 
$$p_{\text{photon}} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

où  $h$  est la constante de PLANCK

On donne la valeur de la constante de PLANCK :

$$h \approx 6,62606957 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

$$h \approx 4,1343359 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s}$$

La constante de PLANCK réduite  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  sera également utilisée :

$$\hbar \approx 1,054571726 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

$$\hbar \approx 6,58211928 \times 10^{-16} \text{eV} \cdot \text{s}$$

##### Théorème 83.1 : Relation de DE BROGLIE

À une particule matérielle de quantité de mouvement de norme  $p$ , la relation de DE BROGLIE associe une longueur d'onde  $\lambda_{\text{DB}}$  :

(10.2) 
$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p}$$

#### 10.1.2 Fonction d'onde et équation de SCHRÖDINGER

Définir la fonction d'onde

---

**Définition 84 : Probabilité de présence**

La probabilité de présence d'une particule  $t$  dans un volume mésoscopique  $dV$  centré en un point  $M$  est donné par la relation :

(10.3) 
$$dP(M, t) = \Psi(M, t)\Psi(\bar{M}, t)dV = |\Psi(M, t)|^2 dV$$

## 10.2 Évolution d'une particule quantique libre

## 10.3 Évolution d'une particule quantique dans un potentiel

# Chapitre 11

## Thermodynamique statistique

### 11.1 Monde microscopique, monde macroscopique

#### Définition 85 : Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique

L'**échelle macroscopique** est notre échelle. Une longueur microscopique est de l'ordre du mètre (ou bien plus grande).

L'**échelle microscopique** est l'échelle des molécules. Une longueur microscopique est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des molécules.

L'**échelle mésoscopique** est une échelle à la fois très petite devant l'échelle macroscopique et très grande devant l'échelle microscopique.

### 11.2 Facteur de BOLTZMANN

#### 11.2.1 Atmosphère isotherme

##### Théorème 85.1 : Équation fondamentale de l'hydrostatique

À une altitude  $z$ , la variation de la pression  $P(z)$  s'exprime en fonction de la masse volumique  $\mu(z)$  d'un système :

$$(11.1) \quad \frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g$$

**Preuve 85.1.1** On étudie un gaz situé dans un cylindre de section  $S$  entre  $z$  et  $z + dz$ .

On applique un PFD à notre cylindre entre  $z$  et  $z + dz$ , à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\underbrace{-\mu(z)Sdz g \vec{u}_z}_{\text{Poids}} + \underbrace{P(z)S \vec{u}_z}_{\text{Pression sur la tranche inférieure}} + \underbrace{(-P(z+dz)S \vec{u}_z)}_{\text{Pression sur la tranche supérieure}} = \vec{0}$$

En projetant sur  $\vec{u}_z$  et en simplifiant :

$$-\mu(z)g dz + P(z) - P(z + dz) = 0$$

D'où, puisque  $P(z + dz) = P(z) + \frac{dP(z)}{dz}dz$  :  $\frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g$  □

### Théorème 85.2

La solution à l'équation différentielle précédente est :

$$(11.2) \quad P(z) = P_0 e^{-\frac{zMg}{RT}}$$

$H = \frac{RT}{Mg}$  est la distance caractéristique de la variation de la pression.

**Preuve 85.2.1** On étudie un gaz situé dans un cylindre de section  $S$  entre  $z$  et  $z + dz$ .

D'après l'équation (1.13) d'état des gaz parfaits :

$$P(z) dV = dn(z) RT$$

Or, en notant  $\mu(z)$  la masse volumique du gaz en  $z$  :

$$dn(z) = \frac{dm(z)}{M} = \frac{\mu(z)Sdz}{M}$$

On réinjecte :

$$P(z) dV = \frac{\mu(z)Sdz}{M} RT$$

et sachant que  $\frac{dV}{S} = dz$ , on a :

$$\mu(z) = \frac{P(z) M}{RT}$$

Depuis l'équation fondamentale de l'hydrostatique (équation (11.1)), on obtient une équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{dP(z)}{dz} &= -\frac{M}{RT}P(z)g \\ \frac{dP(z)}{dz} + \frac{Mg}{RT}P(z) &= 0 \end{aligned}$$

La solution à cette équation est donc  $P(z) = P_0 e^{-\frac{z Mg}{RT}}$  □

Puisque  $PV = nRT$ , on peut utiliser cette équation pour déterminer l'expression de grandeurs comme la masse volumique  $\mu(z)$  ou  $dn(z)$  :

$$\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{z Mg}{RT}}$$



— **Théorème 85.3** —

La probabilité  $dp(z)$  pour une molécule de se trouver entre les cotes  $z$  et  $z + dz$  est proportionnelle au **facteur de BOLTZMANN** :

$$(11.3) \quad dp(z) = A e^{-\frac{E_p(z)}{k_B T}}$$

Cette probabilité est appelée le **poids de BOLTZMANN**  
 $dp$  est une probabilité ! Pas une pression !

(ATTENTION)

### 11.2.2 Poids de BOLTZMANN d'une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat

On va généraliser ce qu'on vient de voir au cas d'un système constitué de particules indépendantes, c'est-à-dire qui n'interagissent pas entre elles.

**Théorème 85.4**

La probabilité  $dp(E_i)$  qu'une particule microscopique **indépendante** soit dans un état quantique d'énergie  $E_i$  est **proportionnelle** au **facteur de BOLTZMANN** :

$$(11.4) \quad dp(E_i) = A e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Pour déterminer la constante  $A$ , on utilise le théorème suivant de condition de normalisation :

— **Théorème 85.5 : Condition de normalisation** —

La somme des probabilités est égale à 1. Autrement dit :

$$(11.5) \quad \sum_i p(E_i) = 1$$

# Chapitre 12

## Annexe

Gran-  
deurs à  
connaître

### 12.1 Trigonométrie

#### 12.1.1 Définition

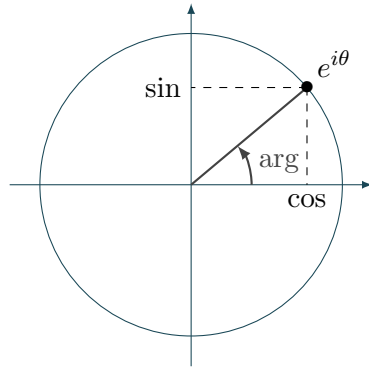
On aura souvent besoin de trigonométrie en Physique. Surtout les règles sur les sinus et cosinus. Bien sûr, la première chose à ne jamais oublier, c'est leur définition en exponentielle :

$$(12.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array} \right. (12.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

#### 12.1.2 Addition / Produit

$$(12.3) \quad \begin{array}{l|l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \end{array}$$

### 12.1.3 Nombres complexes



#### Opérations en complexes

	Forme exponentielle	Module	Argument
<b>Produit</b>	$z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$	$ zz'  =  z   z' $	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
<b>Quotient</b>	$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$\left \frac{z}{z'}\right  = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
<b>Exposant</b>	$z^n = r^n e^{in\theta}$	$ z^n  =  z ^n$	$\arg(z^n) = n \times \arg z \quad [2\pi]$
<b>Conjugué</b>	$\bar{z} = r e^{-i\theta}$	$ \bar{z}  =  z $	$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$

## 12.2 Calcul vectoriel

On a deux types de calculs vectoriels. Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . En physique, on les définit comme suit :

$$(12.4) \quad \left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u \cdot v \cdot \cos \theta \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= u \cdot v \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ avec : } \begin{array}{c} \vec{v} \\ \nearrow \\ \theta \\ \searrow \vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$

(ATTENTION) Il ne faut **pas oublier** que le produit scalaire renvoie un **scalaire**, et que le produit vectorel renvoie un **vecteur perpendiculaire** au plan formé des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

#### Propriétés Produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v} \end{aligned}$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif

(12.5a) Formules du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

(12.5b)

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

## 12.3 Complément mathématique

### 12.3.1 Dérivée d'un vecteur

(12.6)

$$\frac{dx_i \vec{i}}{dt} = x_i \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

### 12.3.2 Équation différentielle

En général, on résout l'équation homogène, on trouve une solution particulière, puis la combinaison linéaire des deux donne la solution générale.

#### Au premier ordre

Dans le cas d'une équation de la forme :

$$y'(t) = ay(t) + b$$

La solution générale est

(12.7)

$$Ae^{ax} - \frac{b}{a}$$

#### Au second Ordre

Dans le cas de l'équation homogène suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On calcule le discriminant  $\Delta$  du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution  $y(t)$  pour l'équation homogène :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm \beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t))$
$\Delta < 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t))$
$\Delta = 0$	$r \text{ double} \quad y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

(**ATTENTION**) Pour déterminer la solution particulière quand le second membre n'est pas constant, on suppose que **la solution est sinusoïdale et de même pulsation**. Alors il n'y a plus qu'à réinjecter la solution dans l'équation différentielle pour déterminer les constantes restantes.

## 12.4 Repères en physique

### 12.4.1 Repère cartésien

Dans un repère en **coordonnées cartésiennes** (cf. figure 12.1), le point  $M$  est repéré par la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  :

$$(12.8) \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

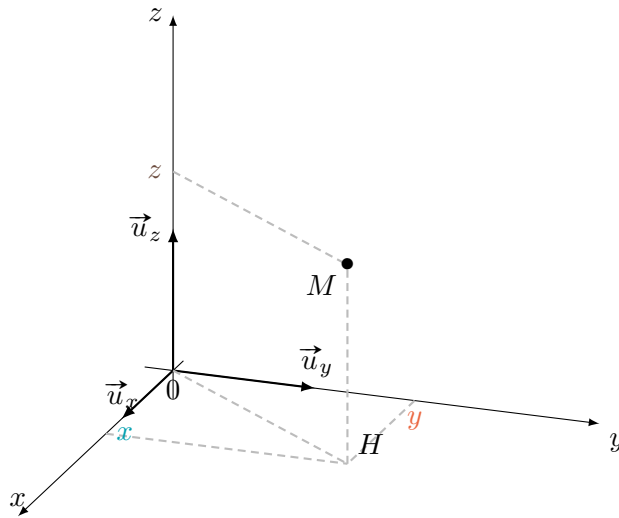


FIGURE 12.1 – Repère en coordonnées cartésiennes

### 12.4.2 Repère cylindrique

Dans un repère en **coordonnées cylindriques** (cf. figure 12.2), le point  $M$  est repéré par la base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  :

$$(12.9) \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$$

(**ATTENTION**)  $r$  se mesure sur le projeté :  $r = \|\overrightarrow{OH}\|$ , et non  $\overrightarrow{OM}$

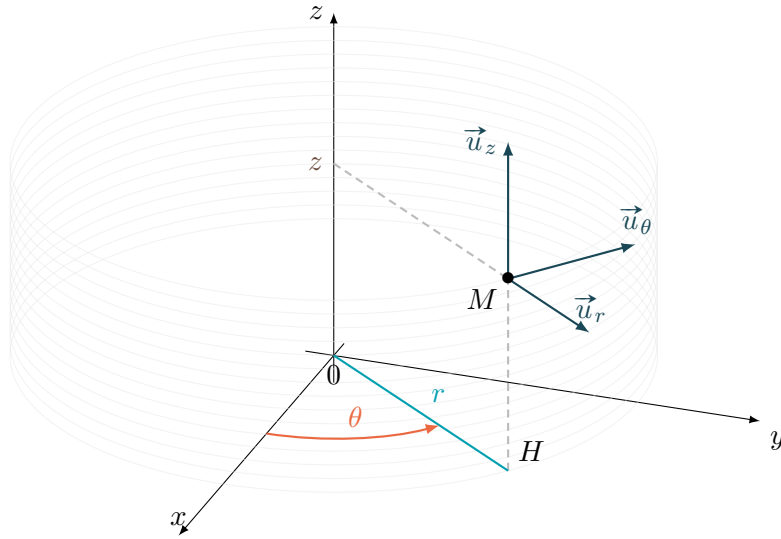


FIGURE 12.2 – Repère en coordonnées cylindriques

## 12.5 Analyse Vectorielle

### 12.5.1 Généralités sur les champs

Coordonnées	Déplacement élémentaire	Circulation élémentaire
Cartésiennes	$dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$
Cylindriques	$dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_z dz$
Sphériques	$dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin \theta d\varphi$

#### Définition 86 : Lignes et tubes de champ

Pour un champ de vecteurs  $\vec{A}(M)$ , une **ligne de champ** est une courbe sur laquelle, en tout point  $M$ ,  $\vec{A}(M)$  est **tangent**.

Si on note  $d\vec{M}$  le déplacement élémentaire, une ligne de champ vérifie :

$$(12.10) \quad d\vec{M} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

On appelle **tube de champ** un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

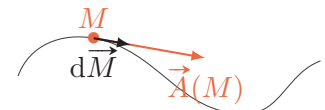


FIGURE 12.3 – Ligne de champ

### 12.5.2 Opérateurs sur les champs

---

**Définition 87 : Gradient**

Soit  $U(M)$  un champ scalaire. La variation  $dU$  est lié au déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  par le **gradient** :

(12.11) 
$$\overrightarrow{\text{grad}}(U(M)) \cdot d\vec{l}_M = dU$$

Ses expressions sont :

Coordonnées	Expressions
Cartésiennes	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
Cylindriques	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
Sphériques	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

### Définition 88 : Divergence

Soit un volume élémentaire  $dV_M$  autour d'un point  $M$  et un champ de vecteur  $\vec{A}(M)$ . En notant  $d\Phi$  le flux de  $\vec{A}(M)$  traversant la surface entourant  $dV_M$ , la **divergence** est définie par :

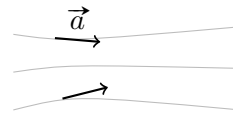
$$(12.12) \quad \text{div}(\vec{A}(M)) \cdot dV_M = d\Phi(M)$$

Ses expressions sont :

Coordonnées	Expressions
Cartésiennes	$\text{div}(\vec{A}(M)) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$\text{div}(\vec{A}(M)) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\text{div}(\vec{A}(M)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

### Définition 89 : Circulation

Soit  $\vec{a}$  un champ de vecteur.



La **circulation élémentaire** du champ  $\vec{a}$  de vecteurs sur le déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  autour d'un point  $M$  est

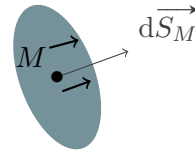
$$(12.13) \quad d\mathcal{C} = \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}_M$$

Alors, la **circulation** le long d'un chemin  $\Gamma_{AB}$  est :

$$(12.14) \quad \mathcal{C}_a = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{l}_M$$



On va maintenant définir le flux passant à travers une surface :



### Définition 90 : Flux

Le **flux élémentaire** du champs  $\vec{a}$  de vecteurs à travers une surface élémentaire  $d\vec{l}_M$  autour d'un point  $M$  est

$$(12.15) \quad d\Phi = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Alors, le **flux** le long d'un chemin  $\Gamma_{AB}$  est :

$$(12.16) \quad \Phi_a = \iint_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{S}_M$$

### 12.5.3 STOKES et OSTROGRADSKI

#### Théorème 90.1 : Formules de STOKES et d'OSTROGRADSKI

(Ostrogradski)

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \cdot d\vec{V} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Flux})$$

(Stokes)

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Contour fermé})$$

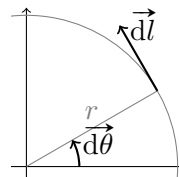
## 12.6 Règles générales

### 12.6.1 Relations entre les grandeurs

$$\boxed{\text{Puissance} = \frac{d \text{Travail}}{dt}}$$

### 12.6.2 Longueurs de références

$$\boxed{d\vec{l} = r d\vec{\theta}}$$



Deuxième partie

Chimie

# Chapitre 13

## Première année

### 13.1 Configuration électronique

#### Définition 1 : Les nombres quantiques

Pour caractériser un électron, on définit :

- $n$ , le **nombre quantique principal**, définit la couche sur laquelle un électron est rangé
- $l \in [0, n - 1]$ , le **nombre quantique azimutal**, précise la sous-couche sur laquelle un électron est rangé
- $m_l \in [-l; l]$ , le **nombre quantique magnétique**, définit le nombre d'orbitales possibles. Chaque orbitale est appelée "case quantique".
- $m_s \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , **nombre quantique de spin**, définit le sens de rotation des électrons d'une même case quantique.

#### Théorème 1.1 : Principe d'exclusion de PAULI

Deux électrons ne peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques

#### Théorème 1.2 : Règle de stabilité de KLECHKOWSY

Le remplissage des orbitales atomiques se fait par ordre des  $(n + l)$  croissants.

#### Théorème 1.3 : Règle de remplissage de HUND

Lorsqu'un niveau d'énergie est **dégénéré** — c'est à dire pour deux orbitales de même nombre quantique principal  $n$  — et que le nombre d'électrons n'est pas suffisant pour sauter le niveau :

- L'état de plus basse énergie est obtenu en utilisant un maximum d'orbitales
- Les spins des électrons non appariés (les électrons célibataires) d'une même orbitale étant parallèles

n \ 1	1	2	3	4
1	$1s^2$			
2	$2s^2$	$2p^6$		
3	$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
4	$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$

FIGURE 13.1 – Tableau des sous-couches électroniques

## 13.2 Représentation moléculaire

### Méthode

#### Représentation de LEWIS

La **charge formelle** d'un atome est déterminée par :

(13.1) 
$$CF_A = n_{\text{Atome}}(e^-) - n_{\text{Molécule}}(e^-)$$

1. On compte le nombre  $N$  d'électrons pour connaître le nombre  $\frac{N}{2}$  de doublets à répartir
2. On minimise le nombre de charges formelles en multipliant les liaisons
3. On distribue les charges formelles par ordre d'électronégativité

#### Méthode VSEPR

Le **moment dipolaire**  $\vec{\mu}$  est le vecteur caractérisant une liaison entre deux charges  $(-\delta e)$  et  $(+\delta e)$  distancées de  $d$ . Ses caractéristiques sont :

**Direction** Celle de la liaison

**Sens** Du  $-$  au  $+$  (donc de  $(-\delta e)$  vers  $(+\delta e)$ )

**Norme**  $\|\vec{\mu}\| = \delta e \times d$

La notation VSEPR s'exprime par :

(VSEPR) 
$$A X_m E_n$$

où  $m$  est le nombre d'atomes liés à l'atome central et  $n$  est le nombre d'entités non liantes (doublets ou électron célibataire).

## 13.3 Cinétique chimique

Écrire  
de la  
chimie  
ici

## 13.4 Cristallographie

### Définition 2 : Cristal

Un cristal est défini par une **maille** et un **motif**. Un motif est une translation de la maille selon un vecteur  $\vec{t}$ .

### Définition 3 : Compacité

En considérant les atomes comme des sphères, la **compacité**  $C$  se définit dans une maille par :

$$(13.2) \quad C = \frac{\text{Volume des atomes de la maille}}{\text{Volume de la maille}}$$

# Chapitre 14

## Thermochimie

### Méthode

Enthalpie	$H = U + PV$	Capacité thermique molaire à volume constant	$c_v = \frac{(\partial U_m)}{\partial T}$
Energie libre	$F = U - TS$	Capacité thermique molaire à pression constante	$c_v = \frac{(\partial H_m)}{\partial T}$
Enthalpie libre	$G = H - TS$	Avancement	$\xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$
		Vitesse de réaction	$v = \frac{d\xi}{dt} = k \prod_i c_i$

### 14.1 Grandeurs extensives

#### Définition 4 : Grandeure intensive/extensive

Une grandeur **extensive** est une grandeur proportionnelle à la taille du système qu'elle caractérise.

#### Propriétés

- extensive  $\times$  intensive = extensive
- $\frac{\text{extensive}}{\text{extensive}} = \text{intensive}$
- $J_{\text{extensive}}(\alpha n, \alpha V) = \alpha J(n, V)$

### Définition 5 : Variance

La **variance** d'un système est le nombre maximal de paramètres intensifs que l'on peut choisir sans remettre en cause l'équilibre du système étudié.

#### Théorème 5.1 : Règle de GIBBS

La règle de GIBBS permet de déterminer la **variance**  $v$  d'un système en connaissant :

- i. Le nombre  $\varphi$  de phases distinctes
- ii. Le nombre  $c$  de constituants
- iii. Le nombre  $r$  de réactions chimiques

Alors, on a :

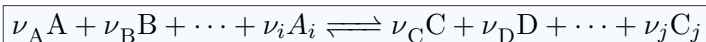
$$(14.1) \quad v = c - r + 2 - \varphi$$

(ATTENTION)

Il faut faire attention en comptant  $\varphi$  dans un système : les phases doivent être distinctes. Par exemple,  $\varphi = 2$  pour un liquide et un gaz,  $\varphi = 2$  pour deux états solides (car ils sont non miscibles), et  $\varphi = 1$  pour deux liquides ou deux gaz miscibles

## 14.2 Équilibre d'une réaction

On considère une réaction du type :



Les  $\nu_i$  et les  $\nu_j$  sont les coefficients stœchiométriques associés à chaque constituant  $i$ . Ceux des réactifs (les  $\nu_i$ ) sont comptés négativement.

Les  $n_k$  sont les quantités de matière associées à chaque constituant  $P_k$  de la réaction.

### 14.2.1 Enthalpie libre

#### Définition 6 : Enthalpie libre de réaction

L'**enthalpie libre**  $G$  est une fonction d'état associée au deuxième principe de la thermodynamique :

$$G = H - TS$$

(14.3a)

$$G = U + PV - TS$$

La version différentielle :

(14.3b)

$$dG = Vdp - SdT + \delta W_{\text{rév}}$$

Et  $G$  étant une fonction d'état extensive :

(14.3c)

$$\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

$\Delta_r G^\circ$  caractérise l'équilibre de réaction, et  $\Delta_r G$  son sens.

$$\begin{aligned}
 \Delta_r G^\circ &= -RT \ln K \\
 \Delta_r G &= \Delta_r G^\circ + RT \ln Q \\
 &= RT \ln \frac{Q}{K} \\
 \Delta_r G \leq 0 &\Leftrightarrow \text{Sens direct}
 \end{aligned}
 \tag{14.4}$$

À l'équilibre,  $Q = K$ , donc  $\Delta_r G = 0$ .

### 14.2.2 Avancement

#### Définition 7 : Avancement

L'**avancement** d'une réaction est défini par

$$\xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}
 \tag{14.5}$$

Où  $n_i$  est la quantité molaire du constituant  $A_i$ ,  $n_i^\circ$  sa quantité molaire initiale, et  $\nu_i$  son coefficient stœchiométrique.

$\xi$  est en mol

#### Définition 8 : Vitesse de réaction

La vitesse de réaction est la variation de l'avancement :

$$v_{\text{réaction}} = \frac{d\xi}{dt}
 \tag{14.6}$$

Dans les systèmes à volumes constants, on parle de **vitesse volumique de réaction** :

$$v_{\text{vol}} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt}$$

#### Définition 9 : Loi de vitesse

Une réaction chimique admet un ordre si on peut relier la vitesse de réaction à la constante de vitesse  $k$  et aux concentrations  $[A_k]$  :

$$v = k \cdot f([A_k])
 \tag{14.7a}$$

où  $f([A_k])$  est une fonction des concentrations. Souvent, on a :

$$v = k \prod_i [A_k]^{\alpha_i}
 \tag{14.7b}$$

$\alpha_i$  est appelé **ordre partiel** de la réaction par rapport à



### 14.2.3 Loi d'action de masse

#### Théorème 9.1 : Loi d'action de masse

La **loi d'action de masse**, aussi appelée **Loi de GULDERG et WAAGE**, permet de calculer la constante  $K$  :

$$(14.8) \quad K = \prod_i a_i^{\nu_i}$$

## Chapitre 15

# Premier principe appliqué à la transformation chimique

### 15.1 Enthalpie standard

#### Définition 10 : État standard

L'**état standard** d'un constituant est défini par son état physique stable à la température  $T$ , sous la pression standard :  $P^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

#### Définition 11 : Enthalpie standard de réaction

L'**enthalpie standard de réaction**  $\Delta_r H_{(T,P)}$  correspond à la variation d'enthalpie du mélange réactionnel pour  $\xi = 1$  mole d'avancement de la réaction en cours, dans l'**état standard**.

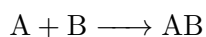
La réaction est alors dite, suivant le signe de  $\Delta_r H^\circ$  :

- **endothermique** (pour  $\Delta_r H^\circ > 0$ ) :  
dans le sens direct, la réaction consomme de la chaleur
- **exothermique** (pour  $\Delta_r H^\circ < 0$ ) :  
dans le sens direct, la réaction dégage de la chaleur

#### Définition 12 : Enthalpie standard de formation

On appelle **enthalpie standard de formation**, en on note  $\Delta H_f^\circ(\text{AB})$ , la variation d'enthalpie lors de la formation d'un constituant AB.

C'est donc l'enthalpie standard de formation  $\Delta_r H^\circ$  de la réaction :



**Remarque :** Les composants simples comme le carbone C ou l'hydrogène H ont une enthalpie standard de formation nulle. Idem pour les composés stables comme le dioxygène  $\text{O}_2$  ou le diazote  $\text{N}_2$  : leur enthalpie standard de formation est nulle.

$$\Delta H_f^\circ(\text{O}_2) = \Delta H_f^\circ(\text{N}_2) = \Delta H_f^\circ(\text{C}) = \Delta H_f^\circ(\text{H}) = 0$$

### Définition 13 : Grandeur de réaction

Pour toute grandeur extensive  $J$  dans une réaction d'avancement  $\xi$ , on définit sa grandeur de réaction  $\Delta_r J$  :

$$(15.1) \quad \Delta_r J = \left( \frac{\partial J}{\partial \xi} \right)_{T, P \text{ fixés}}$$

$\Delta_r J$  est une grandeur intensive

### Théorème 13.1 : Loi de HESS

En conditions standards, les grandeurs de réactions obéissent à la **loi de HESS** :

$$(15.2) \quad \Delta_r J^\circ = \sum_{\substack{\text{Produits} + \\ \text{Réactifs} -}} \nu_i \Delta J_{f,i}^\circ$$

où  $\Delta J_{f,i}^\circ$  est une grandeur standard de formation.

## 15.2 Effets thermiques pour une transformation monobare

Le programme préconise plutôt une transformation isobare, mais monobare est une condition suffisante.

### Définition 14 : Transformation monobare

Une transformation **monobare** est une transformation s'effectuant à pression extérieure  $P_{\text{ext}}$  constante, et telle que la pression initiale  $P_{\text{initiale}}$  du système soit la même que la pression finale  $P_{\text{finale}}$  :

$$(15.3) \quad P_{\text{finale}} = P_{\text{initiale}} = P_{\text{ext}} \quad P_{\text{ext}} = \text{constante}$$

La pression du système peut varier pendant la transformation (et c'est là la différence avec une transformation **isobare**), mais elle doit toujours revenir à la pression extérieure à la fin.

### Théorème 14.1 : Application du premier principe

Lors d'une réaction **monobare** et **monotherme**, le transfert thermique causé par la transformation se relie à l'enthalpie standard de réaction :

$$(15.3) \quad \Delta H = Q_P = \xi \Delta_r H^\circ$$

## 15.3 Relations de KIRCHHOFF

**Théorème 14.2 : Relations de KIRCHHOFF**

Les **relations de KIRCHHOFF** permettent d'exprimer les variations de l'énergie interne standard de réaction  $\Delta_r U^\circ$ , de l'enthalpie standard de réaction  $\Delta_r H^\circ$ , ou encore

de l'entropie standard de réaction  $\Delta_r S^\circ$  en fonction de la température  $T$ .

- Pour une réaction à température et volume constants :

$$(15.4a) \quad \frac{d\Delta_r U^\circ}{dT} = \Delta_r C_V^\circ$$

$$(15.4b) \quad \frac{d\Delta_r S^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r C_V^\circ}{T}$$

- Pour une réaction à température et pression constantes :

$$(15.5a) \quad \frac{d\Delta_r H^\circ}{dT} = \Delta_r C_P^\circ$$

$$(15.5b) \quad \frac{d\Delta_r S^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r C_P^\circ}{T}$$

## Chapitre 16

# Diagramme Potentiel-pH

Pour un couple Oxydant-Réducteur, le diagramme potentiel-pH représente l'évolution du potentiel d'oxydo-réduction en fonction du pH.

### 16.1 Rappels

Le **produit ionique de l'eau**  $K_e$  est le coefficient de réaction d'autoprotolyse de l'eau.

$$(16.1a) \quad K_e = [\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]$$

Le  $pK_e$  est son potentiel :

$$(16.1b) \quad \begin{aligned} pK_e &= -\log K_e \\ pK_e &= p\text{OH} + p\text{H} \end{aligned}$$

À 25°C,  $K_e = 10^{-14}$ .

### 16.2 Méthode

On va prendre pour exemple le fer :  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})/\text{Fe}(\text{s})$ , à une concentration de tracé  $c_{\text{tra}} = 10^{-2} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

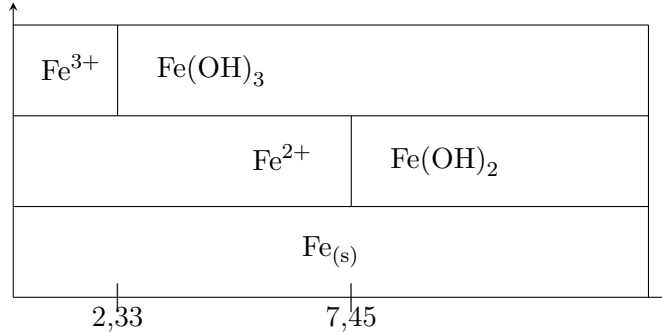
1. Créer un diagramme de situation

- Calculer les **nombre d'oxydation** ( $\sum q = \sum n_0$ )  
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}^{3+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s}) & / & \text{Fe}^{2+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s}) & / & \text{Fe}(\text{s}) \\ +III & & +III & & +II & & +II & & 0 \end{array}$$
- Pour un même nombre d'oxydation, on regarde les gammes de pH.
  - (a) Avec la concentration de tracé  $c_{\text{tra}} = [\text{Fe}^{2+}]$ , on écrit une équation, par exemple  
$$\text{Fe}^{2+} + 2 \text{OH}^- = \text{Fe}(\text{OH})_2$$
  - (b) On utilise la loi d'action de masse pour trouver le pH en connaissant le  $K_e = 10^{-14}$  et le  $K_{s2} = [\text{OH}^-]^2[\text{Fe}^{2+}]$

$$\begin{aligned}
K_{s_2} &= [\text{OH}^-]^2 [\text{Fe}^{2+}] \\
pH &= -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \\
&= -\log \left( \frac{K_e}{[\text{OH}^-]} \right) \\
&= -\log \left( \frac{K_e}{\sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}}} \right) = pK_e + \log \left( \sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}} \right)
\end{aligned}$$

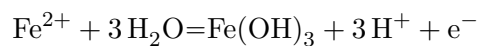
Les données renvoient les frontières  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3$  respectivement à 7,5 et 2,3

- On en déduit un diagramme de situation :



2. On étudie, pour les frontières existantes, l'équation de la droite

- Pour les équations ne faisant pas intervenir  $\text{H}^+$ , comme par exemple à la frontière  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{s})$  où l'équation est  $\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Fe}$ , ou à la frontière  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+}$ , la frontière sera horizontale, d'équation  $E^\circ$
- Pour les autres, on applique simplement NERNST pour exprimer  $E$  en fonction du pH. Par exemple :



Alors,

$$\begin{aligned}
E &= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 (3 \log [\text{H}^+] - \log [\text{Fe}^{2+}]) \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}] - 0,18 \text{pH}
\end{aligned}$$

$E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}]$  étant constant, on peut le déterminer par continuité avec la frontière de  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  à  $\text{pH} = 2,3$

3. On trace le diagramme Potentiel-pH

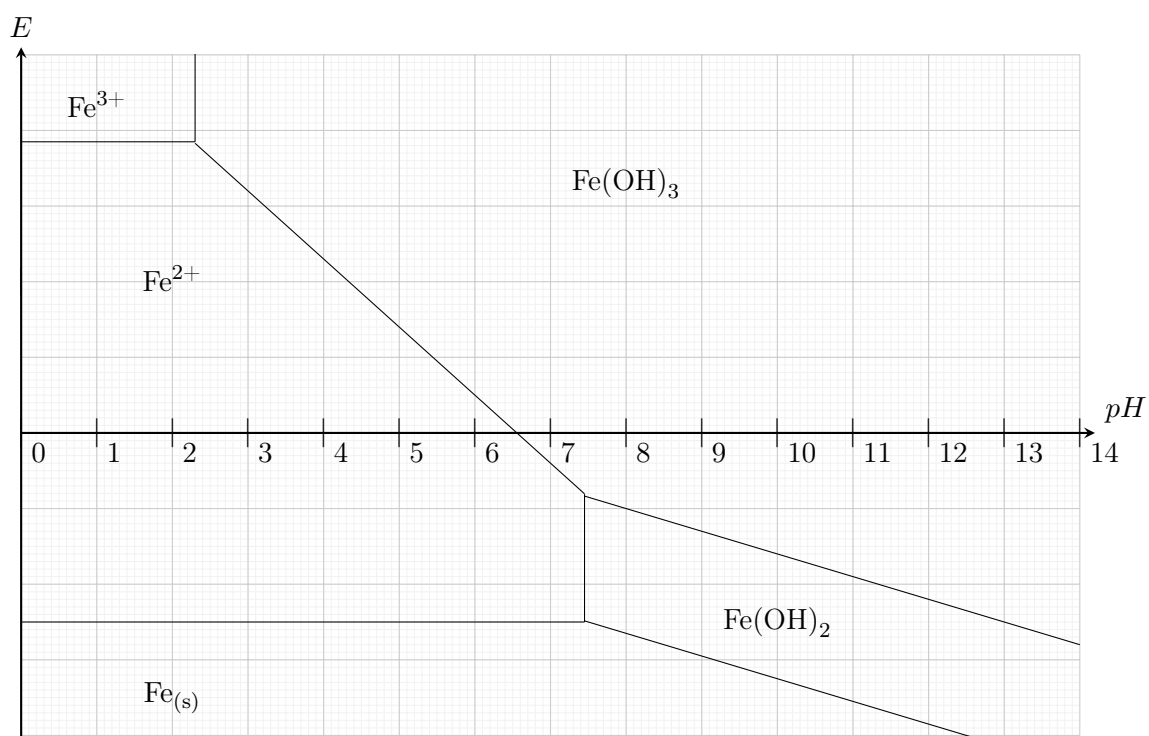


FIGURE 16.1 – Diagramme potentiel-pH du fer



## Chapitre 17

### Annexe



# Liste des acronymes

AO      Amplificateur Opérationnel. 2, 20

ARQS    Approximation des Régimes  
Quasi-Stationnaires. 2, 18, 117

FEM     Force Électromotrice. 19

OEM     Onde Électromagnétique. 18, 41

OPP     Onde Plane Progressive. 68, 69, 70, 71

OPPM    Onde Plane Progressive Monochromatique.  
69, 70, 73, 74, 76

PFD     Principe Fondamental de la Dynamique. 36,  
72, 87

TMC      Théorème du Moment Cinétique. 29, 36

TRC      Théorème de la Résultante Cinétique. 36, 62

# Index

- D'ALEMBERT, 60
- Aplanétisme, 40
- ARCHIMÈDE, 17
- ARQS, 18
- Avancement, 104
  
- Biot et Savart, 57
- BODE, 25
  
- Capacité thermique, 12
  - à pression constante, 11
  - à volume constant, 10
- Champ
  - électromoteur, 67
- Charge formelle, 100
- Chemin optique, 42
- Circulation, 96
- Cirulation
  - élémentaire, 96
- CLAUSIUS
  - inégalité, 15
- Compacité, 101
- Conducteur ohmique, 75
- Constante
  - STEFAN, 83
- Contraste, 46
- Coordonnées
  - cartésiennes, 93
  - cylindriques, 93
  
- Dégénéré, 99
- Densité
  - spectrale d'onde de flux surfacique, 82
  - surfacique
    - d'énergie, 82
  - volumique d'énergie électromagnétique, 63
  - volumique de force électromagnétique, 62
- DESCARTES, 40
- Deuxième principe, 11
- Diagramme
  - potentiel-pH, 110
- Dipôle
  - magnétique, 58
- Dipôle
  - électrostatique, 56
- Dispersion, 74
- Divergence, 96
  
- Éclairement  $\mathcal{E}$ , 44
- Endothermique, 106
- Energie
  - d'un dipôle, 22
- Énergie
  - cinétique, 28
  - potentielle, 28
- Enthalpie, 10
  - de formation, 106
  - libre, 103
  - standard de réaction, 106
- Entropie, 11
- Équilibre de Réaction, 104

État  
     standard, 106  
 Exothermique, 106  
 Grandeur Extensive, 102  
  
 Facteur de BOLTZMANN, 89  
 FARADAY, 64  
 Filtre, 23  
 Flux, 97  
     élémentaire, 97  
     radiatif, 84  
     thermique, 77  
 Fonction  
     de transfert, 23  
 Force  
     centrale, 29  
     conservative, 27  
     de CORIOLIS, 32  
     de COULOMB, 53  
     électromotrice induite, 67  
     de LAPLACE, 58, 66  
     de LORENTZ, 58  
     de rappel, 27  
 FRAUNHOFER, 51  
 Fréquence  
     de coupure, 74  
 FRESNEL, 45  
  
 Gain, 24  
 GALILÉEN, 31  
 Gradient, 95  
  
 HUND, 99  
 HUYGENS-FRESNEL, 51  
  
 Impédance, 21  
 Inductance  
     propre, 66  
 Isobare, 10, 107  
 Isochore, 10  
  
 $\vec{j}$  (Densité Volumique de Courant), 57  
  
 KEPLER, 30  
 KLECHKOWSY, 99  
  
 LAPLACE, 62  
 LEWIS, 100  
 Ligne de champ, 94  
 Loi  
     d'action de masse, 105  
     de COULOMB, 32, 37  
     de FOURIER, 77  
     de GULDERG et WAAGE, 105  
     de HESS, 107  
     de KIRCHOFF, 18  
     des mailles, 18  
     des nœuds, 18  
     de PLANCK, 83  
     de STEFAN-BOLTZMANN, 83  
     de WIEN, 84  
 Longueur  
     de cohérence, 43  
 Longueur d'onde  $\lambda$ , 44  
  
 Masse  
     volumique, 17  
 MAXWELL  
     AMPÈRE, 58  
     GAUSS, 55  
 MAYER, 13  
 michelson  
     MICHELSON  
         coin d'air, 49  
         lame d'air, 48  
 MILLMAN, 22  
 Module d'onde  $k$ , 44  
 Moment  
     cinétique, 35  
     dipolaire, 100  
     dipolaire(Electrostatique), 56  
     d'une force, 34  
     d'inertie, 35  
     magnétique, 58  
 Monobare, 107

Lumière monochromatique, 44  
 NEUMANN, 66  
 Nombre d'onde  $\sigma$ , 44  
 Nombre quantique, 99  
     azimutal  $l$ , 99  
     magnétique  $m_l$ , 99  
     principal  $n$ , 99  
     de spin  $m_s$ , 99  
 NORTON, 19  
 Loi d'OHM  
     Globale, 65  
 Onde  
     électromagnétique, 41  
     plane, 68  
     polarisée rectilignement, 71  
     progressive, 68  
     transversale, 68  
 Ordre d'interférence, 48  
 Ostrogradski, 97  
 Paquet d'onde, 75  
 Paraxial(rayon), 40  
 PAULI, 99  
 Période, 44  
 Phase, 24  
 PLANCK-EINSTEIN, 85  
 Plasma, 71  
 Poids de BOLTZMANN, 89  
 POISSON, 62  
 Potentiel  
     électrostatique, 55  
 POYNTING  
     équation locale, 63  
     vecteur, 63  
 Premier principe, 9  
 Pression, 17  
 Puissance  
     d'une force, 27  
     instantanée, 22  
     moyenne, 22  
 Pulsation  
     de coupure, 74  
     de coupure, 25  
     plasma, 72  
 Pulsation  $\omega$ , 44  
 Quantité de mouvement, 27  
 Régime  
     stationnaire (Thermodynamique), 15  
 Relation(s)  
     de KIRCHHOFF, 108  
 Retard de phase, 42  
 Rétroaction, 20  
 Stigmatisme  
     approché, 40  
     rigoureux, 40  
 Stokes, 97  
 Système  
     conservatif, 27  
     ouvert, 15  
     thermodynamique, 8  
 Temps de cohérence, 43  
 THÉVENIN, 19  
 Torseur  
     cinétique, 34  
 Transfert thermique, 9  
 Transverse, 68  
 Travail d'une force, 28  
 Troisième principe, 14  
 Tube de champ, 94  
 Valeur  
     efficace, 22  
     moyenne, 22  
 Variance, 103  
 VARIGNON, 34  
 Vibration lumineuse, 41  
 Vitesse  
     de phase, 73