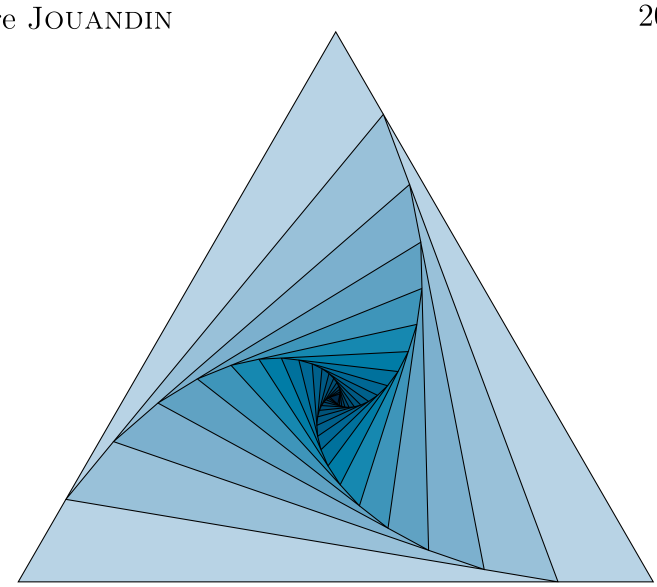
Cours de Prépa

Mathématiques

Écrit par
Alexandre Jouandin

Année
2013—2015



1^er^ avril 2015

Table des matières

Première partie

Première année

Chapitre 1

Géométrie

1.1 Équations générales

Type	Équation
Droite	$ax + by + c = 0$
Plan	$ax + by + cz + d = 0$
Cercle	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
Sphère	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Chapitre 2

Calculs algébriques

2.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Définition 1

Soit I un ensemble fini, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

La somme des x_i est notée $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$

Le produit des x_i est noté $\displaystyle\prod_{i\in I} x_i$

Théorème 1.1 : Somme des entiers de 1 à n

Pour tout n de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2} \tag{2.1}$$

Preuve 1.1.1

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 \quad + \quad 2 \quad + \cdots + n-1 + \quad n \\ + \quad S & = & n \quad + n-1 + \cdots + \quad 2 \quad + \quad 1 \\ \hline 2S & = & n+1+n+1+\cdots+n+1+n+1 \end{array} \tag{2.2}$$

d'où $2S = n \times (n+1)$, *et* $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Théorème 1.2 : Somme des premières puissances

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

(2.3a) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(2.3b) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Les démonstrations de ces formules se font par récurrence (en connaissant le résultat), ou en primitivant.

2.2 Coefficients binomiaux

Définition 2

Pour E un ensemble fini de n éléments, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-parties de E à p éléments.

(2.4) $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Chapitre 3

Suites

Définition 3 : Borne supérieure

On appelle **borne supérieure** d'une partie F d'un ensemble ordonné fini E **le plus petit des majorants** de F.
En d'autres termes,

(3.1) $$a = \sup F \Leftrightarrow \forall y \in F, \Big[a \leq y \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \leq y)\Big]$$

Théorème 3.1 : Théorème de la suite monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si (u_n) est majorée, alors elle converge **vers sa borne supérieure**.
Sinon, si (u_n) n'est pas majorée, alors elle admet $+\infty$ pour limite.

3.1 Comparaison de suites

Définition 4 : Suites équivalentes

Deux suites u_n et v_n sont dites **équivalentes** en l'infini s'il existe une suite w_n tendant vers 1 en l'infini telle que $u_n = w_n \times v_n$.
Autrement dit :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \exists w_n \xrightarrow[+\infty]{} 1 \text{ tq } u_n = w_n v_n}$$

Définition 5 : $O(\cdots)$ et $o(\cdots)$

Si x_n est une suite de $(E,N)^{\mathbb{N}}$ et (α_n) une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(3.3) $$\begin{aligned} x_n = O(\alpha_n), \text{ si } \forall M \in R^+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad & n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq M|\alpha_n| \\ x_n = o(\alpha_n), \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad & n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq \varepsilon|\alpha_n| \end{aligned}$$

Définition 6 : $O(\cdots)$ et $o(\cdots)$ dans $\mathbb{R}$

Si $(\alpha_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$,

(3.4)
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n), \text{ \underline{si et seulement si} } \frac{x_n}{\alpha_n} \text{ est bornée.}$$
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n), \text{ \underline{si et seulement si} } \frac{x_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(**Attention**) Une suite ne peut pas, à notre niveau, être ~ 0, en $o(0)$ ou $O(0)$, car la définition dirait que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

3.2 Suites de Cauchy

Définition 7 : Suite de Cauchy

Une suite $(x_n)_n$ dans (E, N) est dite de Cauchy si

(3.5)
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_0 \implies \boxed{N\left(x_{n+p} - x_n\right) < \varepsilon}$$

Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 Plan complexe

Définition 8 : Corps complexe $(\mathbb{C}, +, \times)$

Un **nombre complexe** est un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, c'est un corps muni des lois suivantes :

Addition $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
de neutre $(0, 0)$

Multiplication $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
de neutre $(1, 0)$

Théorème 8.1

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps (*cf.* tableau 4.1 page 17 pour la définition d'un corps)

Définition 9 : Module

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle **module** la valeur $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

4.2 Nombres complexes de module 1

Définition 10

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Le disque unité est l'ensemble de ses points.

Propriétés

- $\mathcal{U}$ est stable par le produit $\times$
- $z \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

Deuxième partie

Structures algébriques usuelles

		Groupe	Groupe Abélien	Anneau	Corps
Loi (+/*)	Neutre e (ou 0)	✓	✓	✓	✓
	Assossiative	✓	✓	✓	✓
	Symétrique (admet a^{-1})	✓	✓	✓	✓
	Commutative		✓	✓	✓
Loi $\times$	Neutre 1			✓	✓
	Associative			✓	✓
	Distributive de la loi +			✓	✓
	Commutative				✓
	Inversible				✓

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des définitions

Chapitre 5

Groupes et sous-groupes

5.1 Définition d'un groupe

Définition 1 : Groupe

On appelle **groupe** le couple $(G, *)$ où G est un ensemble muni d'$*$, une Loi de Composition Interne (LCI) associative, symétrique, et admettant un neutre.

5.2 Produit fini de groupes

Définition 2 : Groupe Produit

Soient $(G, *)$ et $(G', \circ)$ deux groupes.
Le groupe $\left(G \times G', \square\right)$ tel que

$$(x, x')\square(y, y') = (x * y, x' \circ y')$$

est un groupe appelé **groupe produit** de G et G'

Exemple : Groupe de Klein

Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est appelé **groupe de Klein**. C'est un groupe produit, il n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et **il a la spécificité de ne pas être cyclique**.

5.3 Sous-groupe

Définition 4 : Sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe, et soit H une partie de G
On dit que H est un **sous-groupe** de G si, muni de la LCI $*$, H est un groupe stable par $*$.

Théorème 4.1 : Caractérisation d'un sous-groupe

Avec les notations précédentes, H est un sous-groupe de G si :

- H n'est pas vide
- $\forall (x,y) \in H^2,\ x * y^{-1} \in H$.

En général, pour vérifier que H est non vide, on vérifie que le neutre e de G est aussi dans G.

Théorème 4.2 : Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes.
Alors $H = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_i$ est un sous-groupe.

Preuve 4.2.1 *Avec les notations précédentes, montrons que H est un sous-groupe :*

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N},\ e \in H_i &\implies & e \in H \\ \forall (x,y) \in H^2, \forall i \in \mathbb{N},\ (x,y) \in H_i^2,\ \textit{donc}\ x * y^{-1} \in H_i &\implies & x * y^{-1} \in H \end{aligned}$$

Ainsi, H respecte les propriétés de caractérisation d'un sous-groupe, donc H est un sous-groupe. □

Définition 5 : Sous-groupe engendré

Soit G un groupe, et soit A une partie de G.
L'intersection des sous-groupes de G contenant A est le plus petit sous-groupe contenant A.
On le note $\langle A\rangle$, et on dit que c'est le **sous-groupe engendré** par A.
Quand $A = \{a\}$ est une partie à un seul élément, on dit que $\langle a\rangle$ est un **groupe monogène**

Théorème 5.1 : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Pour tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$

Preuve 5.1.1 *Soit H un sous-groupe. Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$.*
Supposons maintenant que H contient au moins un entier.
Soit <u>n le plus petit entier</u> de H. Il convient de dire que $n\mathbb{Z} \in H$.
Soit m un entier quelconque de H. Effectuons sa division euclidienne par n :

$$\begin{aligned} & m = nq + r \qquad 0 \le r < n \\ & nq \in H,\ m \in H \implies \boxed{r \in H} \end{aligned}$$

Or n étant le plus petit entier dans H, r dans H étant inférieur à n, $r = 0$, donc $m = nq$ □

5.4 Morphismes de groupes

5.4.1 Définition

Définition 6 : Morphisme de groupe

On appelle **morphisme** d'un groupe $(G,*)$ à un groupe $(H,\times)$ l'application f telle que

(5.1) $$\forall(x,y)\in G^2,\ f\,(x*y)=f(x)\times f(y)$$

5.4.2 Propriétés d'un morphisme de groupe

Théorème 6.1 : Image et image réciproque d'un sous-groupe

L'image d'un sous-groupe par un morphisme est un sous groupe.
L'image réciproque d'une sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe

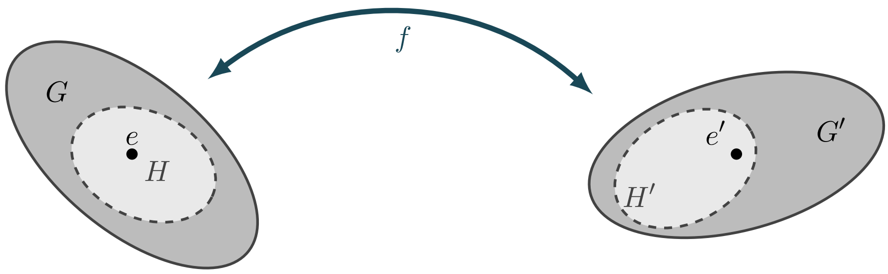


Figure 5.1 – Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme f

Théorème 6.2 : Condition d'injectivité d'un morphisme

Soit f un morphisme de groupes de $(G,*)$ dans $(H,\times)$. Alors :

f est **injective** $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f=\{e\}$
f est **surjective** $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f=H$

5.4.3 Isomorphismes

Définition 7 : Isomorphisme

Un morphisme de groupe **bijectif** est appelé **isomorphisme**

Théorème 7.1 : Réciproque d'un isomorphisme

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

5.5 Groupes monogènes et cycliques

5.6 Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 8 : Éléments nilpotents

Un élément est **nilpotent** si, composé par lui même, il peut être nul :

(5.2) $$\begin{cases} a \text{ nilpotent} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^{\alpha} \text{ tel que } a^p = 0$$

5.7 Classe d'équivalence

Définition 9 : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est une relation binaire caractérisée de la manière suivante :

(5.3) $$\left|\begin{array}{rll} \forall x \in E, & \boldsymbol{x\mathcal{R}x} & \textbf{(Réfléxivité)} \\ \forall (x,y) \in E^2, & x\mathcal{R}y \implies \boldsymbol{y\mathcal{R}x} & \textbf{(Symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in E^3, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies \boldsymbol{x\mathcal{R}z} & \textbf{(Transitivité)} \end{array}\right.$$

Définition 10 : Relation d'ordre

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est également une relation binaire. Elle se caractérise de la manière suivante :

(5.4) $$\left|\begin{array}{rll} \forall x \in E, & \boldsymbol{x\mathcal{R}x} & \textbf{(Réfléxivité)} \\ \forall (x,y) \in E^2, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies \boldsymbol{x = y} & \textbf{(Anti-symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in E^3, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies \boldsymbol{x\mathcal{R}z} & \textbf{(Transitivité)} \end{array}\right.$$

(**Attention**) Bien savoir ce que signifient Symétrie et Anti-symétrie

5.8 Idéaux de $\mathbb{Z}$

Définition 11

Un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la classe des éléments ayant tous le même reste par la division euclidienne par n.
E.g. *: Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, l'élément $\bar{1}$ est la classe des éléments de $\mathbb{Z}$ ayants tous le même reste $\bar{1}$ dans leur division par* 3.

Théorème 11.1 : Indicatrice d'Euler

C'est la fonction φ telle que

$$\varphi(n) = \text{Card}\big(\{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\}\big)$$

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 6

Fonctions convexes

6.1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

6.1.1 Barycentre

Définition 1 : Barycentre

Soit $\left(x_i, \alpha_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille finie de points pondérés telle que la somme des coefficients $\sum\limits_i \alpha_i \neq 0$. On appelle **barycentre** des points x_i le point G tel que :

$$G = \frac{\sum\limits_i \alpha_i \; x_i}{\sum \alpha_i} \tag{6.1}$$

Rajouter les propriétés des barycentres

6.1.2 Partie convexe

La partie suivante est copiée de la sous-section 8.7.1 page 44 :

Définition 2 : Convexe

Un ensemble E est **convexe** si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], \boxed{tx + (1 - t)y \in E} \tag{6.2}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

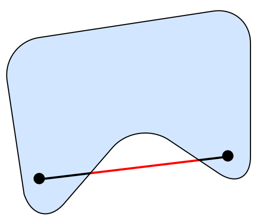


FIGURE 6.1 – Un ensemble non convexe

Théorème 2.1 : Intersection de convexes

L'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe.

Remarque : Ce théorème est même valable pour une famille infinie.

Théorème 2.2 : Convexe dans $\mathbb{R}$

I de $\mathbb{R}$ est convexe **si et seulement si** I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème 2.3 : Caractérisation à l'aide de barycentres

Une partie X de E est convexe **si et seulement si** le barycentre G de toute famille pondérée finie $\left(x_i, \alpha_i\right)_i$ telle que $\alpha_i \geq 0\ \forall i$ appartient à X :

$$G \in X \tag{6.3}$$

(Bien sûr, on a toujours $\sum \alpha_i \neq 0$.)

6.2 Fonctions convexes d'une variable réelle

La définition suivante est copiée de la définition 33 page 44.

Définition 3 : Fonction convexe

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite **convexe** si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[, \boxed{f(\lambda a + (1 - \lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)} \tag{6.4}$$

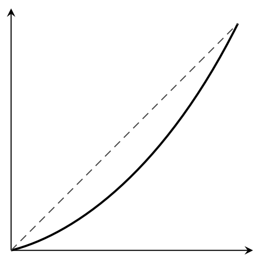


FIGURE 6.2 – Une fonction convexe

Théorème 3.1 : Position relative du graphe

Une fonction est convexe **si et seulement si** tout arc de son graphe est situé en-dessous de la corde correspondante.

Définition 4 : Épigraphe

Soit f une fonction de graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$.
On appelle **épigraphe** de f l'ensemble Γ_f^+ des points situés au dessus du graphe Γ_f. C'est-à-

dire :

(6.5) $$\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

Théorème 4.1 : Convexité de l'épigraphe

Une fonction est convexe **si et seulement si** son épigraphe est convexe.

Théorème 4.2 : Inégalité de Jensen

Soit f une fonction **convexe** sur un intervalle I.
Soit $n \geq 2$. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in I^n$ une famille de points de I.
Pour toute famille de **réels positifs** $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

l'**inégalité de Jensen** donne :

(6.6) $$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Démo épigraphe

Théorème 4.3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.
Pour tout $x \in I$, soit Φ_x la fonction :

(6.7) $$\Phi_x : t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

f est convexe sur I **si et seulement si** , pour tout $x \in I$, Φ_x est croissante sur $I \backslash \{x\}$.

Théorème 4.4 : Inégalité des pentes

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un **ouvert** $I \in \mathbb{R}$ tel que I n'est pas réduit à un singleton.
Si f est convexe, alors f est dérivable en tout point de I à gauche et à droite, et pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$:

(6.8) $$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

Remarque : On déduit de la dérivabilité que f est continue sur I.

Définition 5 : Fonction concave

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite **concave** si son opposée $-f$ est une fonction convexe.

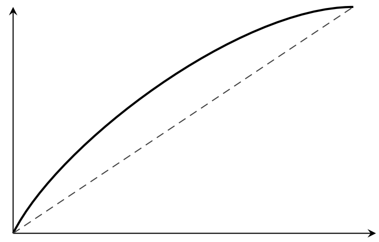


FIGURE 6.3 – Une fonction concave

6.3 Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

6.3.1 Dérivabilité et convexité

Théorème 5.1 : Caractérisation par la dérivabilité

Soit f une fonction dérivable sur I.
f est convexe sur I **si et seulement si** sa dérivée f' est croissante sur I.

Preuve 5.1.1 *Si f est convexe, d'après le théorème 4.4 de l'inégalité des pentes, pour $x < y$, on a $f'(x) \leq f(y)$. Donc f' est croissante.*

Réciproquement, supposons f' croissante, et prenons deux points x et y de I tels que $x < y$. Soient a et b tels que $y = ax + b$ est l'équation de la droite joignant x et y. Soit $g(t) = f(t) - (at + b)$, de dérivée $g'(t) = f'(t) - a$ croissante. D'après le théorème 32.2 des accroissements finis (page 83), $\exists c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = a$, c'est-à-dire tel que $g'(c) = 0$. g' étant croissante, elle est négative sur $[x, c]$, et positive sur $[c, y]$. On en déduit le tableau de variation :

t	x		c		y
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc g est toujours négative, donc $f(t) \leq (at + b)$ implique que la courbe est toujours en dessous de sa corde, donc f est convexe sur I.

Ainsi, f convexe $\Longleftrightarrow$ f' est croissante. $\square$

Théorème 5.2 : Caractérisation par la dérivée double

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
f est convexe sur I **si et seulement si** sa dérivée double f'' est positive sur I :

$$f \text{ convexe sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I,\ f''(x) > 0 \tag{6.9}$$

6.3.2 Position de la tangente

Théorème 5.3 : Tangentes

Le graphe d'une fonction convexe **dérivable** est au-dessus de chacune de ses tangentes

6.3.3 Exemples d'inégalités de convexité

Chapitre 7

Réduction des Endomorphismes

Méthode

Valeurs propres

Pour montrer que λ est une valeur propre d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E, on peut :

- Revenir à la définition, et trouver un vecteur propre x tel que $u(x) = \lambda x$
- Montrer que l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non-injective, c'est-à-dire que

  $$\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$$

- Montrer que λ est une racine du polynôme caractéristique χ_u de u
- On sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace

Polynôme caractéristique

Si on cherche le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u, ces étapes peuvent permettre d'avancer sa détermination :

- Prendre le polynôme dont les racines sont les valeurs propres de u. C'est à dire le polynôme $\prod(X - \lambda_i)$
- Reconnaitre les coefficients de degré $n - 1$ et 0 (*cf.* théorème 12.2 page 33).
- Si la matrice est triangulaire, faire le produit des éléments diagonaux.

Polynôme minimal

Si on cherche le polynôme minimal d'un endomorphisme u dans l'espace E de **dimension finie**, on peut avoir recours aux affirmations suivantes :

- Le polynôme minimal divise le polynome caratéristique.
- Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de u d'ordre de multiplicité m_i, alors le polynôme minimal est la valeur minimale des m_i' tels que

$$\Pi_u(u) = \left(X - \lambda_i\right)^{m_i'}(u) = 0$$

- Si on a un polynôme annulateur P, on peut le factoriser pour obtenir les racines. Puisque le polynôme minimal Π_u divise P, il reste à essayer de combiner ces racines pour obtenir le polynôme de plus petit degré qui annule u.

Théorème de décomposition des noyaux

En général, dès qu'on voit une somme directe, on utilise le théorème de décomposition des noyaux. Si on a P, un polynôme annulateur de u tel que $P(u) = 0$, alors on a $\mathrm{Ker} P(u) = E$, et si $P(u)$ est le produit de plusieurs polynômes, par exemple A et B, on peut écrire

$$E = \mathrm{Ker} A(u) \oplus \mathrm{Ker} B(u)$$

Diagonalisation

7.1 Genéralités

7.1.1 Matrices carrées semblables

Définition 6 : Matrices semblables

Deux matrices sont dites **semblables** si elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 6.1

Deux matrices sont **semblables** **si et seulement si** il existe une matrice P inversible telle que

$$A_1 = PA_2P^{-1} \quad (7.1)$$

Théorème 6.2

Deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant. Ce sont des **invariants de similitude**.

C'est ce dernier théorème qui permet de confirmer l'unicité de la trace et du déterminant d'un endomorphisme.

7.1.2 Sous-espace stable par un endomorphisme

Définition 7 : Sous-espace stable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et u un endomorphisme de E. On dit que F est stable par u si :

$$\forall x \in F,\, u(x) \in F \tag{7.2}$$

On écrit alors que $u(F) \subset F$.

La restriction de u à F au départ et à l'arrivée est l'**endomorphisme induit**.

(ATTENTION) La simple restriction de u à F ($u_{|F}$) est une application de F dans E et ce n'est pas un endomorphisme, alors que l'endomorphisme induit va de F à F.

Traduction matricielle

On va maintenant voir, conformément au programme, la traduction en termes de matrices. On se place donc dans E qui est cette fois de **dimension finie** n.
Si on reprend le sous-espace F, on peut trouver une base $(e_1, \cdots, e_p)$. Cette base peut être complétée en une base de n vecteurs de E : $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p, \cdots, e_n)$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} e_1 & \dots & e_p & \dots & e_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \end{array}$$

où B est la matrice de l'endomorphisme induit.

7.2 Éléments propres d'un endomorphisme

Théorème 7.1 : Droite stable

Une **droite** est **stable** par un endomorphisme u <u>ssi</u> elle est engendrée par un vecteur propre de u.

7.2.1 Éléments propres

Définition 8 : Valeur propre, vecteur propre

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x **non nul** de E tel que

(7.3) $$u(x) = \lambda x$$

Si un tel vecteur x existe, on l'appelera **vecteur propre**.

Définition 9 : Sous-espace propre

Avec les notations précédentes, on appelera **sous-espace propre (s-ep)** associé à une valeur propre λ le sous-espace vectoriel E_λ :

(7.4) $$E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$$

C'est donc le sous-espace de E contenant 0 et tous les vecteurs propres de u.

7.2.2 Éléments propres en dimension finie

(Attention) On se place dans un espace E de **dimension finie**. Les théorèmes et définitions qui suivent ne sont valables (au propgramme) que dans ces conditions.

Définition 10 : Spectre

Le spectre d'un endomorphisme u de E, noté $\mathrm{sp}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

Théorème 10.1 : Famille finie de s-ep

La somme d'une famille **finie** de sous-espace propre (s-ep) E_{λ_i} de valeurs propres λ_i deux à deux distinctes est directe :

(7.5) $$\sum_i E_{\lambda_i} = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$$

Le programme officiel précise le corrolaire qui va avec :

Théorème 10.2 : Famille de vecteurs propres

Toute famille de vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont deux à deux distinctes est libre.

Théorème 10.3

Pour u un endomorphisme de E de dimension finie n, le spectre de u est fini, et de cardinal **au plus** n.

Théorème 10.4 : Endomorphismes commutant

Soient u et v sont deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie.
Si u et v commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Preuve 10.4.1 *Soit λ une valeur propre de u, et E_λ l'espace propre associé. On a :*

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$$

Soit x_λ de E_λ. x_λ est un vecteur propre de u. Pour montrer qu'un sous-espace propre de u est stable par v, ***il faut montrer que*** $v(x_\lambda) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$. *Or :*

$$\begin{aligned}(u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) &= u \circ v(x_\lambda) - \lambda v(x_\lambda) \\ &= v \circ u(x_\lambda) - v(\lambda x_\lambda) \\ &= v\Big(u(x_\lambda) - \lambda x_\lambda\Big)\end{aligned}$$

D'où :

$$(u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) = 0$$

Donc v est stable par tout s-ep de u. □

Définition 11 : Éléments propres d'une matrice

Soit A une matrice carrée de E un espace de dimension finie.
On appelle **valeur propre** de A un scalaire λ pour lequel il existe X tel que :

(7.6) $$AX = \lambda X$$

Si ce vecteur X existe, on l'appelle **vecteur propre** de la matrice A pour la valeur propre λ.

Par extension, on définit le s-ep d'une matrice de manière similaire à la définition 9 page 31.
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice forme son spectre $\operatorname{sp}(A)$.

7.3 Polynôme Caractéristique

Pour une matrice carrée M, on cherche un polynôme dont les valeurs propres sont les racines. C'est alors qu'est né le polynôme caractéristique.

Définition 12 : Polynôme caractéristique

Soit u un endomorphisme de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** n. Soit M sa matrice dans une base associée $\mathcal{B}$.
Le **polynôme caractéristique** de u, noté χ_u, est le déterminant de l'application $(u - X\,\mathrm{Id}_E)$
De même, le **polynôme caractéristique** de la matrice M, noté χ_M, est le déterminant de la matrice $(M - X\,I_n)$

(7.7) $$\chi_u = \det(u - X\,\mathrm{Id}_E) \qquad \chi_M = \det(M - X\,I_n)$$

Ce polynôme est de degré n. Le polynôme caractéristique doit être **unitaire**.
Bien sûr, on a :

(7.8) $$\chi_u = \chi_M$$

Théorème 12.1

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Preuve 12.1.1 ***(Facile)***
Soient A et A' nos deux matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes. Donc

$$\begin{cases} \chi_u & = & \chi_A \\ \chi_u & = & \chi_{A'} \end{cases}$$

D'où $\chi_A = \chi_{A'}$. □

Théorème 12.2 : Valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$

Pour une matrice M de rang n, on peut obtenir quelques coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(M) \times X^{n-1} + \cdots + \det(M)$$

Pour une matrice de rang 2, le polynôme caractéristique est donc donné par

$$\boxed{\chi_M = X^2 - \operatorname{tr}(M)\, X + \det(M)}$$

Preuve 12.2.1 *Il suffit de développer le polynôme caractéristique, en sachant que les valeurs propres sont les racines, puis d'identifier.*

Théorème 12.3 : Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

(7.10) $$\chi_A = \det(A - X\, I_n) = \prod (a_{i,i} - X)$$

Théorème 12.4 : Polynôme caractéristiqur d'un endomorphisme induit

Soit u un endomorphisme de E. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit de u divise χ_u.

7.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Définition 13 : Endomorphisme diagonalisable

On dit que u de E est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonalisable.

Définition 14 : Matrice diagonalisable

Une matrice carrée est dite **diagonalisable** si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.

Définition 15 : Quelques définitions

Quelques définitions portant sur les polynômes :

Racine simple Une racine α du polynôme P est dite simple si elle n'est pas multiple. On dit que son ordre de multiplicité est égal à 1.

Polynôme scindé P est scindé s'il peut s'écrire comme le produit de polynômes du premier degré.

Théorème 15.1 : Caractérisation de la diagonalisation

On donne des équivalences à "u diagonalisable" :

i. E admet une base formée des vecteurs propres de u

ii. E est somme directe d'espaces sur lesquels u induit des homothéties

iii. χ_u est scindé, et $\omega(\lambda) = \dim(E_\lambda)$

iv. $n = \sum \dim E_\lambda$

v. u admet pour matrice une matrice diagonalisable

7.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

7.6 Endomorphismes nilpotents

7.6.1 Définition

Définition 16 : Endomorphisme nilpotent

On dit qu'un endormorphisme u est **nilpotent** d'indice $p \geq 1$ si $u^p = 0$ avec $u^{p-1} \neq 0$.

7.6.2 Propriétés en dimension finie

Théorème 16.1 : Endomorphisme nilpotent trigonalisable

Un endomorphisme u dans un espace E de dimension finie est nilpotent **si et seulement si** u est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre.

Théorème 16.2 : Majoration de l'indice de nilpotence

Dans un espace de dimension n, l'indice de nilpotence d'un endomorphisme ne dépasse pas n.
Si u est nilpotent d'indice n, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \text{\huge 0} & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

7.7 Polynômes d'un endomorphisme

Définition 17 : Polynôme d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on définit l'endomorphisme

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k \tag{7.12}$$

$P(u)$ est appelé **polynôme de l'endomorphisme** u.

Théorème 17.1

Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, l'application $P \mapsto P(u)$ est un **morphisme d'algèbre** de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$

Théorème 17.2

Si d est le degré du polynôme minimal P_u de u, alors la famille $(u^k)_{k\in[0,d-1]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Preuve 17.2.1 *Soit d le degré minimal du polynôme minimal P_u. La famille $(\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{d-1})$ est libre.*

Cayley-Hamilton

Théorème 17.3 : Cayley-Hamilton

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel fini, alors le polynôme caractéristique χ_u est un polynôme annulateur de u.
Le polynôme caractéristique est donc un multiple du polynôme minimal.

7.8 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 17.4 : Théorème de décomposition des noyaux

Soient deux polynomes P et Q de $\mathbb{K}[X]$. Pour P et Q **premiers entre eux** :

$$\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}[P(u)] \oplus \operatorname{Ker}[Q(u)] \tag{7.13a}$$

Maintenant, on va voir le théorème dans une forme plus générale, qu'on déduit par récurrence sur le théorème précédent.

Théorème 17.5 : Théorème de décomposition des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.
Si $A_1, \cdots, A_p$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ **premiers deux à deux**, alors :

$$\operatorname{Ker}\Big((A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p)(u)\Big) = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\big(A_i(u)\big) \tag{7.13b}$$

7.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Définition 18 : Polynôme minimal

Il existe un unique polynôme unitaire Π_φ appelé le polynôme minimal tel que pour tout morphisme φ, $\Pi_\varphi(\varphi) = 0$ CÀD $(\Pi_\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi)$

Théorème 18.1 : Formule de Grassman

Si V et W sont deux espaces vectoriels de **dimension finie** de E alors :

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W) \tag{7.14}$$

7.10 Endomorphismes à polynôme minimal scindé

Chapitre 8

Topologie des espaces vectoriels normés

Méthode

Application continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une application continue $f : E \to F$.

- $f : A \in E \to F$ conserve :
  - les parties compactes
  - les parties connexes par arcs
- $f^{-1} : F \to E$ conserve :
  - les parties fermées
  - les parties ouvertes

8.1 Normes et espaces vectoriels normés

8.1.1 Rappels

Définition 19 : Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel s'il respecte les conditions suivantes :

$$\begin{array}{|clll} (i) & (E,+) \text{ est un} & \underline{\text{groupe abélien}} & \textbf{Groupe pour la loi } + \\ (ii) & \forall x \in E, & 1 \cdot x = x & \textbf{Neutre multiplicatif} \\ (iii) & \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, & (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x & \textbf{Distributivité pour } \mathbb{K} \\ (iv) & \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall(x,y) \in E^2, & \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y & \textbf{Distributivité pour } \boldsymbol{E} \\ (v) & \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall(x,y) \in E^2, & \alpha \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x & \textbf{Associativité} \end{array} \tag{8.1}$$

8.1.2 Norme

Définition 20 : Définition de la norme

Soit E un espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Une **norme** est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

(8.2)
$$\left|\begin{array}{lll} (i) & \forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0 & \textbf{Séparation} \\ (ii) & \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) & \textbf{Homogénéité} \\ (iii) & \forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y) & \textbf{Inégalité triangulaire} \end{array}\right.$$

Et le couple (E, N) est l'**espace vectoriel normé** associé.

Théorème 20.1 : Norme N_2

$$N_2 : f \mapsto \left(\int_{[a,b]} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ est une norme sur } \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{K}\right)$$

8.1.3 Distance

Il y a plusieurs manières de définir la distance. Si on se place dans un espace vectoriel normé, on peut utiliser la norme pour définir la distance, comme dans la définition 22. Sinon, si l'espace est quelconque, la distance peut avoir la définition générale suivante :

Définition 21 : Distance dans un espace quelconque

Soit E un ensemble. On appelle **distance** dans E toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

(8.3)
$$\left|\begin{array}{llll} (i) & \forall x \in E, & d(x,y) = 0 \implies x = y & \textbf{Séparation} \\ (ii) & \forall (x,y) \in E^2, & d(x,y) = d(y,x) & \textbf{Symétrie} \\ (iii) & \forall (x,y,z) \in E^3, & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) & \textbf{Inégalité triangulaire} \end{array}\right.$$

Définition 22 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé
La **distance** d associée à la norme $\|\cdot\|$ est l'application :

(8.4)
$$d : \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \mapsto \|x - y\| \end{array}$$

8.1.4 Boules

Définition 23 : Boule

Dans une espace vectoriel normé (E, N), on définit les boules centrées en a et de rayon r

Boule ouverte de rayon r centrée en a : $x \in E | N(x-a) < r$
Boule fermée de rayon r centrée en a : $x \in E | N(x-a) \leq r$
Sphère de rayon r centrée en a : $x \in E | N(x-a) = r$

8.1.5 Parties, suites, fonctions bornées

Définition 24 : Partie bornée

Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe une boule $B(a,r)$ la contenant :

$$\exists (a,r),\ A \subset B(a,r) \tag{8.5}$$

Théorème 24.1 : CNS d'une partie bornée

Une partie A de E est **bornée** si et seulement si il existe un réel M tel que :

$$\forall x \in A,\ \|A\| \leq M \tag{8.6}$$

(**Attention**) Le caractère borné d'une partie dépend de la norme. Il peut donc arriver qu'une partie soit bornée pour une norme et pas pour une autre.

Définition 25 : Application bornée

Une application $f : X \to E$ est dite **bornée** si l'ensemble $\{f(x),\ x \in X\}$ est borné.

8.1.6 Produit scalaire

Définition 26 : Produit scalaire

Le **produit scalaire** est défini comme suit :

(i)	$\forall x \in E \backslash \{0\}$,	$\underline{\varphi(x,x) > 0}$	**(définie positive)**
(ii)	$\forall (x,y) \in E^2$,	$\underline{\varphi(x,y) = \varphi(y,x)}$	**(symétrie)**
(iii)	$\forall x \in E$,	$\underline{y \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire}}$	**(linéaire à droite)**

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E. L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

Remarque : La symétrie et la linéarité impliquent la linéarité à gauche, donc la bilinéarité du produit scalaire.

Théorème 26.1 : Continuité du produit scalaire

Le produit scalaire est une application bilinéaire continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 26.2 : Norme associée

$x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E. On la note $||x||$, et $||x||^2 = (x|x)$.

Théorème 26.3 : Inégalité Cauchy-Schwarz

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \times \sqrt{(y|y)} \tag{8.7a}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$|(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\| \tag{8.7b}$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

8.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition 27 : Convergence d'une suite

On dit que la suite des $(x_n)_n$ converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{array}{ll} (i) & \exists l \in E \text{ tel que } \big(N(x_n - l)\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \big(n \geq n_0 \implies N(x_n - l) < \varepsilon\big) \\ (iii) & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \big(n \geq n_0 \implies x_n \in B(l, \varepsilon)\big) \end{array} \tag{8.8}$$

8.3 Comparaison des normes

Définition 28 : Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si

$$\exists (c, C) \in \mathbb{R}^{+2}, \forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x) \tag{8.9}$$

Théorème 28.1 : Dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

8.4 Complets

Définition 29 : Complet

A est un **complet** si toute suite de Cauchy $(c_n)_n \in A$ admet une limite $l \in A$
CÀD si toute suite de Cauchy est convergente

Remarque : Intuitivement, un espace est complet s'il n'a pas de « trou ». $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, car $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Définition 30 : Espace de Banach

Un **espace de Banach** est un espace-vectoriel normé et complet.

8.5 Parties compactes d'un espace normé

Théorème 30.1 : Bolzano-Weierstrass

Toute suite réelle **bornée** possède au moins une valeur d'adhérence.

Par extension : toute suite bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie possède au moins une valeur d'adhérence.

On va utiliser cette propriété pour définir un compact :

Définition 31 : Compact

A est un **compact** si toute suite d'éléments $(x_n)_n \in A$ a au moins une valeur d'adhérence CÀD on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge dans A

Théorème 31.1

Soit E un espace vectoriel. Les parties compactes de E sont fermées et bornées.

Théorème 31.2 : Compacts en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Une partie de E est compacte **si et seulement si** elle est fermée bornée.

Théorème 31.3

Toute partie fermée d'un compact est compact

Théorème 31.4

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A un compact de E.
Une suite d'éléments de A converge **si et seulement si** elle possède une unique valeur d'adhérence :

$$\forall (x_n)_n \in A,\ x_n \text{ converge } \Leftrightarrow \exists ! l,\ x_n \to l \tag{8.10}$$

8.6 Applications continues sur une partie compacte

Théorème 31.5 : Image d'une partie compact

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit F un espace vectoriel normé.

Soit $f : A \in E \to F$.
Si f est continue, l'image de tout compact de A est un compact de F.

Théorème 31.6

Soit E un espace vectoriel normé. Soit une application $f : E \to \mathbb{R}$.
Si f est continue, alors elle est bornée et **atteint ses bornes**.

Théorème 31.7 : Théorème de Heine

Si (E, N) et (F, N) sont des espaces vectoriels normés, A une partie **compacte** de E, si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, alors f est **uniformément continue**.

8.7 Connexité par arcs

8.7.1 Convexité

Définition 32 : Convexe

Un ensemble E est **convexe** si :

(8.11) $$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], \boxed{tx + (1-t)y \in E}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

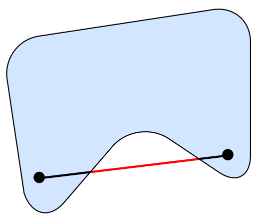


Figure 8.1 – Un ensemble non convexe

Définition 33 : Fonction convexe

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite convexe si :

(8.12) $$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in]0, 1[, \boxed{f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)}$$

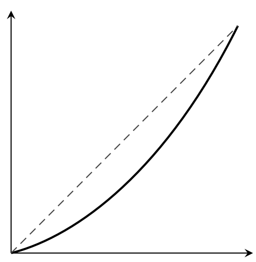


Figure 8.2 – Une fonction convexe

Théorème 33.1 : Convexe dans $\mathbb{R}$

I de $\mathbb{R}$ est convexe **si et seulement si** I est un intervalle de $\mathbb{R}$

8.7.2 Connexité

Définition 34 : Connexe par arcs

Une partie A d'un espace vectoriel normé (E, N) est **connexe par arcs** si, pour tous points a et b de E, il existe une fonction $f : [0,1] \to E$ **continue** telle que

(8.13)
$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \\ f\big([0,1]\big) \subset A \end{cases}$$

Théorème 34.1 : Relation d'équivalence

« Il existe un chemin continu d'un point x à un point y » est une relation d'équivalence sur une partie A de E.
Les **composantes connexes** sont les classes d'équivalences de A.

Théorème 34.2 : Connexe dans $\mathbb{R}$

A non vide de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs **si et seulement si** A est un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème 34.3 : Image continue d'une partie connexe

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit l'application $f : A \in E \to F$.
Si f est continue, alors l'image de toute partie connexe par arcs est connexe par arcs dans F.

Théorème 34.4 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie connexe par arcs de E.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue qui atteint $(c, d) \in \mathbb{R}$. Alors f atteint toute valeur $f(x) \in [c, d]$.

8.8 Topologie

Voici plusieurs définitions utiles à l'étude d'espaces vectoriels normés :

Définition 35 : Ouvert

Une partie E est un **ouvert** si, pour tout élément x de E, il existe une boule centrée en x incluse dans E (*cf.* FIGURE 8.3)

Définition 36 : Fermé

Un espace vectoriel F est dit **fermé** si son complémentaire $\overline{F}$ est un ouvert

Pour différencier un ouvert d'un fermé, prenons le schéma ci-contre :
La partie en **rouge** est un ouvert noté O, celle en **bleue** est un fermé noté F.
En effet : il n'existe aucun disque centré en $y \in O+F$ inclus dans la partie $O+F$, donc $O+F$ n'est pas un ouvert. Par contre, pour tout point $x \in O$, on peut trouver une boule incluse dans O.

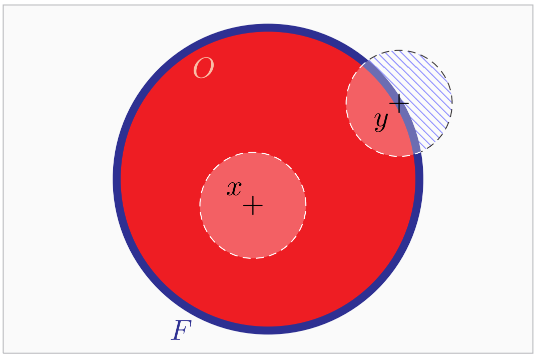


FIGURE 8.3 – Ouvert / Fermé

Théorème 36.1 : Caractérisation d'un fermé

$F \subset E$ est un **fermé** ssi toute suite convergente de F a sa limite dans F

Définition 37 : Intérieur, Adhérence

L'**intérieur** de B, noté $\mathring{B}$, est la réunion des parties ouvertes contenues dans B.
L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$ est l'intersection des parties fermées contenants A.

Propriétés

- A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- $\underbrace{\mathrm{Fr}(A)}_{\text{frontière}}$ est un fermé
- $\bigcup\limits_{\text{finie}}$ fermés $=$ fermé
- $\bigcap$ fermés $=$ fermé

Théorème 37.1

Un **complet** A d'un espace vectoriel normé E est **fermé**.
La réciproque (*Les parties complètes sont les parties fermées*) est vraie si E est un espace de BANACH.

Chapitre 9

Espaces Préhilbertiens réels

Dans cette section, on se placera dans $\mathbb{R}$.

Méthode

Définitions rapides

Produit Scalaire *cf.* définition 26 page 41

Éléments orthogonaux x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Famille orthogonale $(e_i|e_j) = \delta i, j$

Distance de x à une partie F $d(x, F) = \|x - p_f(x)\|$

9.1 Orthogonalité

Définition 38 : Éléments orthogonaux

Deux éléments x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Théorème 38.1 : Pythagore

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille d'éléments de E deux à deux orthogonaux, alors

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^2 \tag{9.1}$$

(Attention) Ce sont bien des normes car x_i au carré n'existe pas (qu'est-ce que le produit de deux vecteurs ?), du coup on utilise $\|\cdot\|^2 = (\cdot|\cdot)$

Preuve 38.1.1 *On procède par récurrence. Avec une famille à deux éléments :*

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

Puisque x_1 et x_2 sont orthogonaux par hypothèse, on obtient :

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème 38.2 : Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Pour toute base de (e_i), il existe une base (ε_i) telle que :

$$\left\{\begin{array}{l}(\varepsilon_i) \text{ est une base } \underline{\text{orthonormée}} \\ \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \\ (e_i|\varepsilon_i) > 0\end{array}\right. \tag{9.2}$$

On aura souvent recours à compléter une base $(e_i)_k$ avec $n - k$ vecteurs orthonormaux aux $(\varepsilon_i)_k$ par le théorème de la base incomplète.

Théorème 38.3 : Inégalité de Bessel

Si (e_i) est une base orthonormée : $\boxed{\sum_i (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2}$

9.2 Automorphismes ortogonaux

u est un endomorphisme, donc il est linéaire.

Définition 39

i. u un endomorphisme, il existe **un unique** endomorphisme u^* tel que

$$\forall (x, y) \in E, (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

u^* est l'**adjoint** de u.

ii. u est **autoadjoint** (symétrique) si $u^* = u$

iii. u est un **automorphisme orthogonal** si $u^* = u^{-1}$. On note $u \in \mathcal{O}(E)$

Propriétés

i. Si $M_{\mathcal{B}}(u) = A$, alors $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$

ii. $\mathrm{Ker}(u^*) = [\mathrm{Im}(u)]^{\perp}$

iii. $\mathrm{Im}(u^*) = [\mathrm{Ker}(u)]^{\perp}$

iv. $\chi_u = \chi_{u^*}$

v. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

Théorème 39.1 : Caractérisation d'un automorphisme orthogonal

u est un automorphisme orthogonal si les assertions suivantes (équivalentes) sont vérifiées :

i. u conserve la norme

ii. u conserve le produit scalaire

iii. $u\left(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}\right) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$

iv. $\forall \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}, \exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$ telle que $u\left(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}\right) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$

v. $\exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$ telle que $\left|\begin{array}{c} U^tU = I_n \\ \text{ou} \\ {}^tUU = I_n \end{array}\right|$ où $U = M_{\mathcal{B}}(u)$

Théorème 39.2 : Théorème spectral

Tout **endomorphisme auto-adjoint** est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u.

Toute **matrice symétrique** **réelle** est diagonalisable. On peut aussi dire :

(**9.3**) $$\forall A \in S_n, \exists \left| \begin{array}{c} P \in \mathcal{O}(n) \\ D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \end{array} \right. \text{ tel que } A = PDP^{-1} = PD^tP$$

9.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition 40 : Isométrie vectorielle d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien.
On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** si u est un endomorphisme qui **conserve la norme** :

(**9.4**) $$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\| = \|x\|$$

Théorème 40.1 : Bijectivité

Une isométrie vectorielle est bijective.

Preuve 40.1.1 *Une isométrie vectorielle est injective :*

$$\begin{aligned} u(x) = 0 &\implies \|u(x)\| = 0 \\ &\implies \|x\| = \|u(x)\| = 0 \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

Puisque E est un espace euclidien, il est de dimension finie. Ainsi injectivité $\Leftrightarrow$ bijectivité, et u est bijective. $\square$

Théorème 40.2 : CNS avec le produit scalaire

$u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** **si et seulement si** u conserve le produit scalaire :

(9.5) $$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \Big(u(x)\Big|u(y)\Big) = (x|y)$$

Preuve 40.2.1 *Commençons par le sens « conserve le produit scalaire $\implies$ isométrie vectorielle » :*

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x)|u(x))} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|$$

Réciproquement, montrons que « conserve le produit scalaire $\impliedby$ isométrie vectorielle ».
Si u est une isométrie vectorielle, d'après les identités de polarisation :

$$\begin{aligned} (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \\ &= (x|y) \end{aligned}$$

On a alors montré l'équivalence. $\square$

Chapitre 10

Espaces Préhilbertiens complexes

10.1 Structure Préhilbertienne complexe

On se place dans $\mathbb{C}$ et on établit de nouveau le produit scalaire comme à la définition 26 page 41 du chapitre précédent. À une différence prêt, la symétrie est appelée **symétrie hermitienne**

Définition 41 : Produit scalaire

Le produit scalaire est défini comme suit :

$$\begin{array}{rrll} (i) & \forall x \in E \backslash \{0\}, & \varphi(x,x) > 0 & \textbf{(définie positive)} \\ (ii) & \forall (x,y) \in E^2, & \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} & \textbf{(symétrie hermitienne)} \\ (iii) & \forall x \in E, & y \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire} & \textbf{(linéaire à droite)} \end{array}$$

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E. L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

10.2 Orthogonalité

Théorème 41.1 : Inégalité de Bessel

Si (e_i) est une base orthonormée : $\boxed{\sum_i |(e_i|x)|^2 \leq {N_2}^2(x)}$

10.3 Séries de Fourier

Méthode

Coefficients

Exponentiels $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,\mathrm{d}t$

Trigonométriques

- $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\,\mathrm{d}t$
- $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}t$

On note $\boldsymbol{\mathcal{C}_{2\pi}}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **2π-périodiques** et **continues** sur $[0, 2\pi]$.
On note $\boldsymbol{\mathcal{CM}_{2\pi}}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **2π-périodiques** et **continues par morceaux** sur $[0, 2\pi]$.

(**Attention**) Sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$, N_1, N_2 et N_∞ ne sont plus des normes, mais elles fonctionnent toujours de la même manière

Cette sous-section se base sur le théorème suivant :

Théorème 41.2

Pour toute fonction dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\boxed{N_2(f - f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

L'objectif des séries de Fourier est de « transposer »une fonction dans une base de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

On prendra pour bases $(e^{it}, e^{2it}, \cdots e^{int})$ ou $(cos(t), cos(2t), \cdots, cos(nt))$ par exemple, et grâce à un produit scalaire, on obtient la décomposition de notre fonction dans la base. C'est ainsi qu'on définit les coefficients :

Définition 42 : Coefficients exponentiels

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$\boxed{c_n(f) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{on est sur } \mathcal{CM}_{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\cdot n\cdot t} f(t)\, dt}$$

En effet : $c_n(f) = (e_n|f)$ avec $e_n = e^{int}$. Or le produit scalaire pour des fonctions est $(g|f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{g(t)}\ f(t)\, dt$, d'où $(e_n|f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{e^{int}}\ f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} e^{-int}\ f(t)\, dt$

On aurait très bien pu intégrer sur $[-\pi, \pi]$ au lieu de $[0, 2\pi]$. C'est ce qu'on fera plus tard avec les coefficients trigonométriques.

Propriétés

- $g : t \mapsto f(-t)$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$

- $f_a : t \mapsto f(t+a)$, $c_n(f_a) = e^{ina} c_n(f)$

Théorème 42.1 : Dérivée de f

$c_n(f') = in\, c_n(f)$

d'où, par récurrence : $\boxed{c_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k c_n(f)}$

Définition 43 : Coefficients trigonométriques

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\, dt} \text{ et } \boxed{b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\, dt}$$

Ici, c'est $\frac{1}{\pi}$ en facteur, car $N_2^2\left(\cos(n\bullet)\right) = \frac{1}{2}$

Propriétés

- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) + c_{-n}(f))$
- Si f est paire, alors $b_n = 0\ \forall n$
- Si f est impaire, alors $a_n = 0\ \forall n$

En général, on utilisera ces coefficients si f présente une parité.

Définition 44 : Série de Fourier

On appelle **série de Fourier** de f la série $\sum u_n$ où $\left|\begin{array}{lcl} u_0 & = & c_0(f)\, e_0 \\ u_n & = & c_n(f)\, e_n + c_{-n}(f)\, e_{-n} \end{array}\right.$

$S_n(f)$ est appelée **somme partielle de rang n de la série de Fourier**

Théorème 44.1 : Inégalité de Bessel

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_n(f)|^2 \leq N_2^2(f)$$

Théorème 44.2 : Théorème de convergence Parseval

Si f est une fonction de $\underline{\mathcal{CM}_{2\pi}}$, alors $\boxed{N_2\left(f - S_n(f)\right)_n}$ converge vers 0

Avec ce nouveau théorème, on trouve le cas d'égalité de l'inégalité de Bessel :

Théorème 44.3 : Égalité de Parseval

Si f est une fonction de $\underline{\mathcal{CM}_{2\pi}}$:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = N_2^2(f)}$$

En réel, cette égalité devient :

$$N_2^2(f) = \left(\frac{a_0(f)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n^2(f) + b_n(f)^2\right]$$

Théorème 44.4 : Calcul des Coefficients

Si on a la suite s_n telle que $\left|\begin{array}{l} s_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k \\ N_2(s_k - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right.$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \alpha_n$

Preuve 44.4.1

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|c_k(s_n - f)| \leq N_2(s_n - f)$. *Donc* $|c_k(f) - \alpha_k| \leq N_2(s_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *d'où, quand* $n \to +\infty$, $c_n(f) = \alpha_n$.

Théorème 44.5 : Théorème de convergence normale

Si f est $\underline{\mathcal{C}_{2\pi}\text{ et de classe }\mathcal{C}^1\text{ par morceaux}}$ [a]

alors sa série de Fourier **converge normalement** et sa somme vaut f
sa somme partielle de sa série de Fourier S_n **converge uniformément**

a. $\mathcal{C}^1$ par morceaux c'est à dire que la dérivée est continue par morceaux, à ne pas confondre avec $f \in \mathcal{CM}$

Définition 45 : Noyau de Dirichlet

On appelle **noyau de Dirichlet**, et on note $D_p(t)$ la somme : $D_p(t) = \displaystyle\sum_{k=-p}^{p} e^{ikt}$

Théorème 45.1 : Noyau de Dirichlet

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier **converge simplement** sur $\mathbb{R}$.
Sa somme au point x, notée $\widetilde{f}(x)$ est égale à $\dfrac{1}{2} \lim\limits_{h \to 0^+} [f(x+h) + f(x-h)]$. Si f est **continue**, alors $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Quatrième partie

Analyse

Chapitre 11

Séries

Méthode

Étude d'une série

Prenons le cas d'étude d'une série : $\sum u_n$

1. Vérifier que $\sum u_n$ est positive.
   Si elle ne l'est pas, on peut prendre $N(\sum u_n)$. Dans $\mathbb{R}$, on prendra $\left|\sum u_n\right|$.
2. Utiliser un théorème de comparaison pour ramener à des séries facilement étudiables. On peut :
   - Trouver un équivalent (en utilisant des Développements Limités (DLs))
   - Trouver une domination en $o(\cdots)$ ou en $O(\cdots)$
   - Majorer/Minorer explicitement, mais c'est rare

11.1 Définitions

Définition 1

La série S de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où on définit S_n de manière suivante.

$$\underbrace{S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{u_n}_{\text{Terme général de la série}}}_{\text{Somme partielle}}}_{\text{Suite des sommes partielles}}$$

Définition 2 : Convergence d'une série

On dit que la série des u_n converge s'il existe l tel que $l = \lim_{n\to\infty} S_n$ existe.
S'il la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que sa série S_n **diverge grossièrement**

Théorème 2.1 : Théorème suite-série

La série $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{n+1} - a_n)$ converge **si et seulement si** la suite (a_n) converge.

11.2 Séries à termes positifs

Définition 3 : Série À Termes Positifs

On appelle **Série À Termes Positifs (SATP)** toute série de terme général u_n réel tel que, à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$.

Théorème 3.1 : Convergence des SATP

Si $\sum u_n$ est une SATP, alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_n \text{ est majorée} \tag{11.1}$$

11.3 Complément sur les séries numériques

11.3.1 Règle de d'Alembert

Lemme

Pour toute suite (u_n) strictement positive, s'il existe une suite (α_n) strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, alors

$$u_n \underset{+\infty}{=} O(\alpha_n) \tag{11.2}$$

Théorème 3.2 : Règle de d'Alembert

Si, à partir d'un certain rang, $\begin{cases} u_n > 0 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l \end{cases}$ alors :

$$\begin{cases} \text{Si } l > 1, \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \\ \text{Si } l < 1, \sum u_n \text{ converge} \end{cases} \tag{11.3}$$

Ce théorème est peu utile car il est « trop vrai ».

11.3.2 Séries alternées

Définition 4 : Série alternée

La série $\sum u_n$ est une **série alternée** s'il existe (α_n) une suite positive et $\varepsilon \in \{-1;1\}$ tels que $u_n = \varepsilon(-1)^n \alpha_n$

Théorème 4.1 : Théorème spécial des séries alternées (TSSA)

Si $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|) \text{ est décroissante} \\ (|u_n|) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \end{cases}$, alors $\sum u_n$ converge et $\forall n \geq 0, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_n|$

(**Attention**) Ne pas oublier les valeurs absolues pour l'étude des séries alternées.

11.3.3 Comparaison série intégrale

Théorème 4.2 : Comparaison d'une série à une intégrale

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive** et **décroissante** sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\left(\int_{n-1}^{n} f\right) - f(n)$ est une SATP convergente.

$$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \sum f(n) \text{ converge} \tag{11.4}$$

En cas de divergence, $\int f \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum f(n)$

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive**, **croissante** et majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\left(\int_{n}^{n+1} f\right) - f(n)$ est une SATP convergente.

11.3.4 Comparaison des SATP

Théorème 4.3 : Théorème de comparaison des SATPs

Si on a deux suites u_n et v_n de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles qu'on ait une des conditions suivantes : $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ u_n = o(v_n) \\ u_n = O(v_n) \end{cases}$, alors $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.

On a également la contraposée : $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge

Théorème 4.4 : 2e théorème de comparaison des SATPs

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **deux suites positives**.
Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même nature.

Théorème 4.5 : CÉSARO

Si $\sum \alpha_n$ est une SATP divergente, et que (β_k) est une suite complexe convergente vers β, alors la suite (S_n) de terme général :

$$S_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$$

(définie à partir d'un certain rang) converge vers β.

La moyenne de CÉSARO apparait en prenant la suite $\alpha_k = 1\ \forall k$, car alors $\sum \alpha_k = n$ et :

$$S_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{n}$$

C'est la moyenne des termes de la suite β_k, et on sait qu'elle converge si β_k converge.

Preuve 4.5.1 *L'idée est de séparer la somme en deux. Prenons $\varepsilon > 0$. Soit l la limite de la suite β_k.*
Soit N tel que $\forall n \geq N$, $|\beta_n - l| < \varepsilon$. Alors :

$$S_n - l = \frac{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\beta_k - l)}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \frac{\sum_{k=N}^{n} \alpha_k(\beta_k - l)}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$$

La somme allant jusqu'à N ne dépendant plus de n :

$$S_n - l \leq \frac{constante}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \frac{\sum_{k=N}^{n} \alpha_k}{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \cdot \varepsilon$$
$$S_n - l \leq \frac{constante}{\pm\infty} + 1 \cdot \varepsilon$$

On a majoré par quelque chose d'aussi petit qu'on veut, et alors S_n converge $\square$

11.4 Hors programme

Tous les théorèmes vus ici sont à démontrer.

Théorème 4.6 : Transformation d'ABEL

Soient deux suites (a_n) et (b_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i \tag{11.5}$$

On peut en déduire, si on a les conditions $\begin{cases} \sum (a_i - a_{i+1}) \text{ CVA vers } 0 \\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \text{ est bornée} \end{cases}$, que $\sum a_k b_k$ converge.

Preuve 4.6.1 *On remarque que $b_i = B_i - B_{i-1}$, avec $b_0 = B_0$. Il vient :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) \\
&= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}
\end{aligned}$$

On change d'indice sur la deuxième somme, et comme $b_0 = B_0$:

$$\begin{aligned}
&= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k
\end{aligned}$$

Chapitre 12

Familles sommables de nombres complexes

12.1 Dénombrement

Définition 5 : Ensemble fini

On dit que E est un **ensemble fini** de cardinal n si E est en bijection avec $[\![0, n[\![$

Définition 6 : Equipotence

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** (ou en bijection) s'il existe une application $\varphi : E \to F$ telle que φ soit bijective.

Définition 7 : Ensemble dénombrable

On dit que E est un **ensemble dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$

Théorème 7.1

Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Théorème 7.2

Un ensemble est fini ou dénombrable **si et seulement si** il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$

Théorème 7.3

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Preuve 7.3.1 *On utilise la fonction de couplage de* Cantor *:*

(12.1) $$f(p,q) = q + \sum_{i=0}^{p+q} i$$

On montre que cette fonction est bijective.

Fonction de Cantor

Théorème 7.4

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Ainsi, $\mathbb{Q}$ est dénombrable :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Théorème 7.5

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

12.2 Familles sommables

12.2.1 Pour les réels positifs

Définition 8 : Famille sommable de réels positifs

Soit une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs. Une famille est sommable s'il existe un réel M tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait :

(12.2a) $$\sum_{i \in J} u_i \leq M$$

On définit la somme de cette famille par

(12.2b) $$\sum_{i \in I} u_i = \sup_J \sum_{n \in J} u_n$$

Théorème 8.1 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs.
Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition dénombrable de I.
La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable **si et seulement si** :

- la sous-famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable pour tout n

- la série $\sum_n \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est convergente

Dans ce cas :

(12.3) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = \sum_{n \in I} u_n$$

Théorème 8.2 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

(12.4) $$\begin{aligned} (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable } &\Leftrightarrow \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \text{ converge} \\ \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \end{aligned}$$

12.2.2 Pour les réels et les complexes

Définition 9 : Famille sommable

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Théorème 9.1

$(u_i)_{i\in I}$ **est sommable** $\Leftrightarrow \sum_{i\in I} u_i$ **absolument covergente**

Théorème 9.2 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition **dénombrable** de I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable **si et seulement si** :

- la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable pour tout n
- la série $\sum_n \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$ est convergente

Dans ce cas :

(12.5) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = \sum_{n \in I} u_n$$

Théorème 9.3

Soient $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables. Alors la famille $\big(a_p b_q\big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ sommable et

(12.6)
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} b_q\right)$$

Preuve 9.3.1 *Ce théorème est issu du théorème de* FUBINI *(cf. théorème 25.4 page 76) : les deux suites* $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ *sont sommables, donc leurs séries convergent absolument, et les hypothèse du théorème de* FUBINI *sont alors vérifiées.*

Théorème 9.4 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

(12.7)
$$\begin{aligned} (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_n \left(\sum_{p+q=n} |u_{p,q}|\right) \text{ converge} \\ \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} \quad &= \quad \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right) \end{aligned}$$

(**ATTENTION**) Faire attention à bien mettre des modules partout

Chapitre 13

Variables aléatoires discrètes

13.1 Espace probabilisé

Définition 10 : Univers

Un **univers** Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des parties de l'univers Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$

Définition 11 : Tribu, espace probabilisable, évènement

Une **tribu** sur un univers Ω est un sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés :

- $\Omega \in \mathscr{T}$
- $\forall A \in \mathscr{T},\ \overline{A} \in \mathscr{T}$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}},\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$

Le couple $(\Omega, \mathscr{T})$ est appelé **espace probabilisable**.
Un élément de la tribu $\mathscr{T}$ est appelé un **évènement**

Propriétés

Si $(\Omega, \mathscr{T})$ est un espace probabilisable, et A_i un élément de $\mathscr{T}$:

- $\varnothing \in \mathscr{T}$
- $\bigcup\limits_{\text{finie}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\bigcap\limits_{\text{finie}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\forall (A, B) \in \mathscr{T}^2,\ A \cap \overline{B} = A \backslash B$

Définition 12 : Incompatibilité, implication

Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
On dit que $A \underset{\text{implique}}{\Longrightarrow} B$ quand $A \subset B$

(**Attention**) Ne pas confondre $(A \cap B = \varnothing)$ et $(P(A \cap B) = 0)$

Définition 13 : Système complet d'évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable.
Soit I fini ou égal à $\mathbb{N}$
Un **système complet d'évènements** est <u>une suite d'évènements</u> $(A_i)_{i\in I}$ telle que :

- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
- $\forall (p,q) \in I^2,\ p \neq q,\ A_p \cap A_q = \varnothing$

Définition 14 : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable. La **probabilité** est l'application $\mathbb{P} : \mathscr{T} \to [0,1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ d'évènements <u>**deux à deux incompatibles**</u> :
  - $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge
  - $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$
    (σ-additivité)

Le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**

(**Attention**) Espace propabilisable $(\Omega, \mathscr{T}) \neq$ Espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$

Théorème 14.1 : Caractérisation par une famille sommable

Soit Ω un univers fini ou dénombrable.
Soit une application $\left\{\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \omega & \longmapsto & p_\omega\end{array}\right.$ telle que $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ soit une famille sommable de somme 1.
Soit $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega\end{array}\right.$
Alors $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ est un espace probabilisé.

13.2 Propriétés élémentaires des probabilités

Théorème 14.2 : Théorème de la limité monotone

Soit $\big(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé.

- Si A_n est une suite croissante d'évènements ($A_n \subset A_{n+1}$), alors :

(13.1a)
$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

- Si A_n est une suite décroissante d'évènements ($A_{n+1} \subset A_n$), alors :

(13.1b)
$$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

Dans la définition 14 de la probabilité, la propriété de σ-additivité nécessite que les évènements soient incompatibles. Cette propriété existe sous forme d'inégalité quand les évènements ne sont pas incompatibles :

Théorème 14.3 : Inégalité de BOOLE

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probablilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors :

(13.2)
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve 14.3.1 *On se ramène à une suite d'évènements deux à deux disjoints en introduisant la suite (C_n) telle que :*

$$C_0 = A_0 \qquad\qquad C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

Puisque $C_n \subset A_n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Évènements négligeables / presque sûrs

13.3 Indépendance

Définition 15 : Évènements indépendants

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** lorsque

(13.3) $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

13.4 Espérance

13.4.1 Définitions

Définition 16 : Espérance d'une famille finie

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$. L'**espérance** de X est donnée par la somme finie :

(13.4) $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}_X(x_i)$$

On peut étendre la définition précédente au cas où les valeurs de X forment une famille sommable :

Définition 17 : Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire **réelle discrète**. On dit que X est d'**espérance** finie si la famille $(x\mathbb{P}_X(x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

13.4.2 Propriétés

Propriétés

- L'ensemble $\mathscr{E}$ des variables aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}$ et dont l'espérance est finie est un espace vectoriel
- L'espérance est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$
- $\forall X \in \mathscr{E},\ X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \implies E(X) \geq 0$ (l'espérance est positive)
- Soit Y une variable aléatoire d'espérance finie, si X est une variable aléatoire telle que $|X| \leq Y$, alors X est d'espérance finie.
- Si X et Y sont deux lois **indépendantes et admettant chacune une espérance**

finie, alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

13.5 Variance

13.5.1 Moment

Définition 18 : Moment d'ordre n

Soit X une variale aléatoire discrète. On dit que X admet un **moment** d'ordre m si X^m admet **une espérance finie**.

Théorème 18.1

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance finie.

Théorème 18.2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes de moment d'ordre 2, alors XY a une espérance finie et

$$\Big(E(XY)\Big)^2 \leq E(X^2)\,E(Y^2) \tag{13.5}$$

13.5.2 Variance et écart-type

Définition 19 : Variance et Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète **admettant un moment d'ordre 2**.

On définit la **variance** par :

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) \tag{13.6a}$$

et l'**écart-type** par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{13.6b}$$

Théorème 19.1 : Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{13.7}$$

13.5.3 Covariance

Définition 20 : Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant un espérance finie.**
Si elle existe, on définit la **covariance** de X et de Y par :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\,\big(Y - E(Y)\big)\Big) \tag{13.8}$$

Théorème 20.1 : Existence de la covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires **admettant un moment d'ordre 2**. Alors la covariance de X et de Y existe et on a :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{13.9}$$

Exis-
tence

Preuve 20.1.1 *On a :*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\,\big(Y - E(Y)\big)\Big)$$

On développe :

$$= E\Big(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\Big)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} &= E\big(XY\big) - E\big(E(X)Y\big) - E\big(E(Y)X\big) + E\big(E(X)E(Y)\big) \\ &= ??? \\ \operatorname{cov}(X,Y) &= E\big(XY\big) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Finir la
demo

13.6 Lois usuelles

Définition 21 : Loi de Bernoulli

La **loi de Bernoulli** est une distribution discrète qui prend la valeur 1 avec une probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $(1-p)$.
Une variable alétoire qui suit cette loi est appelée variable de Bernoulli

13.6.1 Loi binomiale

Définition 22

La loi binomiale, de paramètres n et p, est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale au nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli, p étant la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli.

Autrement, c'est une variable aléatoire X telle que

$$X = Y_1 + Y_1 + \cdots + Y_n$$

où les Y_i sont des variables aléatoires **indépendantes** de loi de Bernoulli.

La variable aléatoire suit une loi de probabilité :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{13.10}$$

Théorème 22.1 : Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binômiale. Alors :

$$E(X) = np \qquad\qquad V(X) = np(1-p) \tag{13.11}$$

13.7 Fonctions génératrices

Définition 23 : Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la **fonction génératrice** G_X de X par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_k \mathbb{P}(X = k) t^k \tag{13.12}$$

pour les valeurs de t telles que la variable aléatoire t^X admette une espérance finie.

Chapitre 14

Suites de fonctions

Méthode

En général, pour la convergence simple, on **fixe** x. Pour la convergence uniforme, puisqu'on cherche la norme N_∞, on **dérive** $f_n(x)$ pour étudier ses variations.

14.1 Convergence de suites de fonctions

Définition 24

Définitions simplifiées des différents types de convergence

(**14.1**)

$$\begin{aligned}
\text{La suite des } (f_n) \text{ converge } \textbf{simplement} \text{ vers } f &\Leftrightarrow \forall x, (f_n(x))_n \to f(x) \\
\text{La suite des } (f_n) \text{ converge } \textbf{uniformément} \text{ vers } f &\Leftrightarrow N_\infty^A\left(\underbrace{f_n - f}_{\in B(A,F)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
(f_n(x))_n \text{ vérifie le } \textbf{critère de Cauchy de CU} &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 | n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow N_\infty^A((f_n - f)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

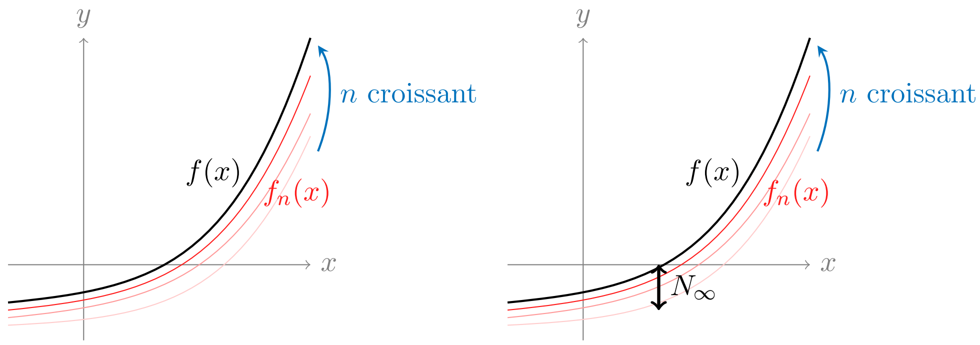
Le critère de Cauchy de convergence uniforme est équivalent à la convergence uniforme. $\boxed{\text{Critère de Cauchy} \Leftrightarrow \text{Convergence Uniforme}}$

Pour illustrer, on peut faire les shémas suivants :

Propriétés de la simple convergence

- $\begin{cases} f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (f_n(x))_n \text{ est croissante} \\ (f_n(x))_n \xrightarrow[x\in A]{CVS} f \end{cases} \Leftrightarrow f \text{ est croissante}$

- (autres propriétés analogues de f_n appliquées à f par CVS)



(a) Convergence Simple

(b) Convergence Uniforme

FIGURE 14.1 – Les différents types de convergence de fonction

Théorème 24.1 : Convergence par changement de base

Si $(f_n(x))_n$ converge simplement ou uniformément <u>**ssi**</u> $(f_{n,i}(x))_n$ converge de la même manière dans la base $\mathcal{B} = (e_i)$

Théorème 24.2 : Conditions nécessaire de CU [a]

$$\left.\begin{array}{r}(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\textbf{CU}} f \\ (f_n(x))_n \quad \text{est } \textbf{bornée}\end{array}\right\} \implies f \text{ est } \textbf{uniformément convergente bornée}$$

Théorème 24.3 : Conditions nécessaire de <u>Non</u>-CU

Il suffit que : $\exists (x_n)$ tel que $f(x_n) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$

a. **CU** pour **C**onvergence **U**niforme

On notera les fonctions f dont la dérivée est continue de $A \to B$ comme appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}(A, B)$

Théorème 24.4 : Continuité par convergence

$$\left.\begin{array}{r}(f_n(x))_n \ \textbf{continue} \text{ en a} \\ (f_n(x))_n \ \textbf{converge uniformément} \text{ vers } f\end{array}\right\} \implies f \text{ est continue en } a$$

$$(f_n(x))_n \quad \left.\begin{array}{r}(f_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \\ \textbf{converge uniformément} \text{ vers} \\ f \text{ sur tout compact} \subset A\end{array}\right\} \implies f \in \mathcal{C}(A, F)$$

Théorème 24.5 : Théorème de la double limite

Si $f_n(x)$ $\boxed{\text{converge uniformément}}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}$$

Théorème 24.6 : Théorème d'approximation de Weierstrass

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ est **limite uniforme** d'une suite $(\mathcal{P}_n(X))_n$ de fonctions polynômes.

Le même théorème existe pour les fonctions (T-périodiques à valeurs complexes) limites d'une suite de polynômes trigonométriques.

14.2 Convergence des Séries

Définition 25

Définitions simplifiées des convergences de Séries de fonctions :

$$\begin{array}{lll} \sum f_n \text{ converge } \textbf{simplement} & \text{si} & \forall x \in A, \text{ la série } \sum f_n(x) \text{ converge} \\ \sum f_n \text{ converge } \textbf{uniformément} & \text{si} & \left\{ \begin{array}{l} x \in A, \text{ la série } (S_n) = \sum_0^n f_n(x) \\ \qquad \text{converge uniformément} \\ x \in A, \text{ la série } (R_n) = \sum_n^\infty f_n(x) \\ \qquad \text{converge uniformément} \end{array} \right. \\ \sum f_n \text{ converge } \textbf{normalement} & \text{si} & \sum N_\infty(f_n) \text{ converge} \end{array} \tag{14.2}$$

Pour les définitions de convergence de fonctions, se référer aux définitions 14.1.

On retrouve certaines propriétés des fonctions :

Théorème 25.1

$$\left.\begin{array}{r} (u_n(x))_n \in \mathcal{C}(A,F) \\ (u_n(x))_n \text{ converge uniformément sur } A \end{array}\right\} \implies \sum u_n \text{ est continue sur } A$$

Théorème 25.2 : Théorème de la double limite

Si $\sum f_n$ **converge uniformément**, et qu'il existe (v_n) telle que $v_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$, alors

$\sum v_n$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)}_{=v_n} = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x))}$$

Preuve 25.2.1 *C'est le théorème 24.5 de la double limite de suites de fonctions appliqué aux séries*

14.3 Propriétés de la somme

Théorème 25.3 : Intégration sous le signe somme

$$\begin{cases} u_k \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C}) \text{ et intégrable sur } I \\ S \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C}) \\ \sum u_n \to S \\ \boxed{\sum |u_n| \text{ converge}} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} S \text{ est intégrable, et} \\ \int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n\right) \end{array} \tag{14.3}$$

14.4 Séries doubles

Théorème 25.4 : Interversion des sommations de Fubini

Si $\begin{cases} (u_{p,q})_{p,q} \text{ est une suite double complexe} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \left(\sum |u_{p,q}|\right)_{p,q} \text{ converge} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right) \text{ converge} \end{cases}$, alors :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \tag{14.4}$$

Avec les deux séries $\left(\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_q$ et $\left(\sum \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_p$ qui convergent

Chapitre 15

Séries Entières

Certains objets mathématiques ont des développements de Taylor exacts. C'est le cas notamment des polynômes, qui sont déjà des développements de Taylor. Les séries géométriques par exemple ont également un développement de Taylor exact : pour la série de terme général q^k, on a $\sum_0^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$. Sinon, la plupart du temps, le développement de Taylor est précis jusqu'à un dernier terme qu'on ne peut calculer, mais qu'on peut quand même approximer en $o(\cdots)$ ou en $O(\cdots)$

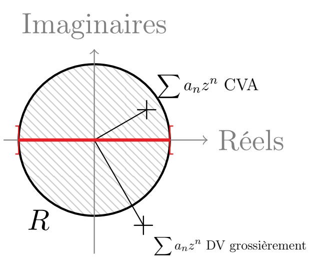
15.1 Généralités

Définition 26

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. On appelle **série entière** de la variable complexe z la série de fonctions $\sum a_n z^n$.

Le **rayon de convergence** est la borne supérieure de $I = \{z \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| z^k \text{ converge}\}$. C'est en fait la valeur maximale de z pour laquelle la série converge.

Pour calculer le rayon de convergence, il importera peu de l'étudier pour les valeurs absolues, les nombres imaginaires, etc... car c'est seulement un rayon. Dans les réels, on appèlera l'intervalle $]-R, R[$ l'intervalle ouvert de convergence.



Lemme d'Abel

S'il existe ρ tel que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée, alors

$$\forall z < \rho, |a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \qquad \text{et } \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \tag{15.1}$$

15.1.1 Rayon de Convergence

Théorème 26.1 : Relations de comparaisons

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors :

i. Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$

ii. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$

iii. Si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$

iv. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$

Théorème 26.2

Sur le disque ouvert D_R de convergence $]-R, R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge **absolument**.

Théorème 26.3

Sur le disque ouvert D_R de convergence $]-R, R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge **uniformément** et sa somme est une fonction **continue**.

Théorème 26.4

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Pour déterminer le rayon, il existe plusieurs méthodes, mais on se servira principalement du théorème suivant étant une conséquence de la règle de d'Alembert :

15.1.2 D'Alembert

Théorème 26.5 : Règle de d'Alembert

Pour la série entière $\sum a_n z^k$ non nulle à partir d'un certain rang, et qu'il existe l tel que

$$\boxed{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} l} \text{ alors } l = \frac{1}{R}$$

La réciproque est fausse : si on connait R, on n'a pas $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Sinon, on a aussi $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$

Preuve 26.5.1 *Il suffit d'appliquer d'Alembert (cf. théorème 3.2 page 58) à la série de terme général $|a_n z^k|$ (qui est une SATP) qu'on prend à partir d'un certain rang tel que $a_n \neq 0$. Donc il existe une limite l telle que*

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^z|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$$

Donc $|a_n z^n|$ converge si $l|z| < 1$, et diverge si $l|z| > 1$.

Puisque toute série entière de rayon de convergence $R > 0$ est absolument convergente dans son disque ouvert de convergence.

(**Attention**) En général, il vaut mieux utiliser le théorème original (théorème 3.2 page 58). En effet, ce théorème ne s'applique que pour des séries entières fonctions de z^n. Pour une série entière du type $\sum a_n z^{n^2}$, il n'est plus valable !

15.2 Série entière d'une variable réelle

15.2.1 Primitivation

Théorème 26.6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa primitive est :

(15.2) $$\forall z \in]-R; R[, \qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Et la série entière $\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence R.

15.2.2 Dérivation

Théorème 26.7

La somme d'une série entière est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Théorème 26.8 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa dérivée est :

(15.3) $$\forall z \in]-R; R[, \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Et la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence.

(**Attention**) Le théorème de dérivation n'est valable qu'à l'intérieur du disque de convergence !

15.3 Fonctions développables en série entière

Définition 27 : Fonction développable en série entière

$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ admet un DSE en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que

(15.4) $$\forall z \in \overset{\text{boule ouverte de centre 0}}{V}, f(z) = \sum a_n z^n$$

Cette boule ouverte de centre 0 est inclue dans le disque de convergence du Développement en Série Entière (DSE) : $V \subset]-R; R[$.

Théorème 27.1 : Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) d'un DSE

$$f : \mathbb{R} \to K \text{ est un DSE en } 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} 0}$$

15.4 Propriétés de la somme

Continuité

Théorème 27.2

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence R

Dérivabilité

Théorème 27.3 : Dérivées successives

Les dérivées successives d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ont toutes le même rayon de convergence R

Théorème 27.4

Pour des séries entières avec $R = \min(R_a, R_b)$, alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$$

Chapitre 16

Calcul Différentiel et Intégral

16.1 Dérivation

Définition 28 : Dérivabilité

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

On notera $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 28.1

f dérivable $\Leftrightarrow \exists l$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)l + (x-a)\varepsilon(x)$
Alors, l est la dérivée en a de f

Propriétés

Continuité f dérivable $\implies f$ continue

Linéarité $(f + \alpha g)' = f' + \alpha g'$

Dérivées usuelles

Application linéaire u linéaire, f dérivable ; $(u \circ f)'(x) = u \circ f'(x)$

Application multi-linéaire φ une application n-linéaire ;

$$\Big(\varphi(f_1, \cdots, f_n)\Big)'(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi\Big(f_1(x), \cdots, f_{i-1}(x), f_i'(x), f_{i+1}(x), \cdots, f_n(x)\Big)$$

Quotient u et v dérivables ; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Composition f et g dérivables ; $(f \circ g)' = f'\, g'(f)$

Définition 29 : Application $\mathcal{C}^1$

$f \in \mathcal{C}^1\big(E, F\big)$ si l'application $f' : a \mapsto f'(a)$ existe et est continue.

Définition 30 : Dérivée k-ième

On définit récursivement la dérivée k-ième $f^{(k)}$:

(16.1) $$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

Définition 31 : Application de classe $\mathcal{C}^k$

f est $\mathcal{C}^k$ si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.

Théorème 31.1 : Leibniz

Soit φ une application bilinéaire, alors :

(Leibniz) $$\varphi^{(n)}(f,g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right)$$

16.2 Intégration

Inégalité de la moyenne

Théorème 31.2 : Cas réel

Si f est **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et qu'il existe m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors

(16.2) $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

16.3 Primitive

Définition 32 : Primitive

F est une **primitive** de f si $\forall x, F'(x) = f(x)$.

Théorème 32.1

Si F est la primitive de f,

(16.3) $$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

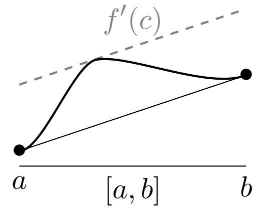
16.4 Accroissements finis

16.4.1 Cas réel

Théorème 32.2 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{D}\big(]a,b[, \mathbb{R}\big)$, alors

$$\exists\, c \in]a,b[\text{ tel que } \boxed{f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)} \tag{16.4}$$

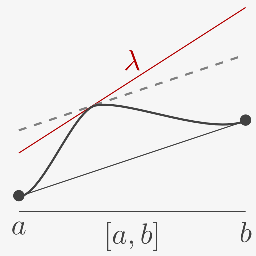


16.4.2 Cas vectoriel

Théorème 32.3 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{C}\big(]a,b[, \mathbb{R}\big)$
Si $\exists\, \lambda$ tel que $\forall t \in]a,b[$, $N(f'(t)) \leq \lambda$, alors

$$\boxed{N\big(f(b) - f(a)\big) \leq \lambda\big((b-a)\big)} \tag{16.5}$$



16.5 Formules de Taylor

Théorème 32.4 : Formules de Taylor

$f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E)$, avec $(a,b) \in I^2$

Taylor-Young $\quad f(x) \underset{x \to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad + \quad o\left((x-a)^n\right)$

Taylor-Laplace $\quad f(x) = \overbrace{\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)}^{T_k(x)} \quad + \quad \underbrace{\overbrace{\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt}^{\text{Reste intégral } R_k(x)}}_{= (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}((1-u)a + ux)\, du}$

Taylor-Lagrange $f(x) = N\left(f(b) - f(a) - \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)\right) \leq \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} N_\infty^{[a,b]}\left(f^{(k+1)}\right)$

Chapitre 17

Intégrales sur un intervalle

Méthode

Définitions rapides

Intégrabilité $f(x)$ intégrable si $\displaystyle\int |f(x)| < +\infty$

Norme de la convergence en moyenne

$N_1 : \displaystyle\int_I |f|$

Norme de la convergence en moyenne quadratique

$N_2 : f \to (f|f)^{\frac{1}{2}}$ (*cf* théorème 26.2 de la page 42)

Pour prouver l'intégrabilité

1. Vérifier la continuité sur l'intervalle étudié
2. Remplacer la fonction par sa valeur absolue
3. Étudier les problèmes aux bornes
   - Trouver un équivalent
   - Trouver un $o(\cdots)$
   - Avoir une primitive dont la limite vers la borne est finie
4. Comparer la fonction
   On pourra utiliser :
   - La fonction **exponentielle** ;
   - Les croissances comparées ;

- L'intégrale de **Riemann** : $\frac{1}{t^\alpha}$ (théorème 36.3 page 88)
- Une extension de Riemann : par exemple, f est intégrable sur $]0,1[$ si $\exists \alpha < 1$ tel que $f(x)\,x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, car alors, quand x tend vers 0, $x^\alpha f(x) \leq 1$ et on retrouve Riemann.
- L'intégrale de **Bertrand** (hors programme) : $\frac{1}{|\ln(t)|^\beta t^\alpha}$

Pour intégrer

On utilisera

1. Les intégrations par partie
2. Un changement de variable
3. Cauchy-Schwarz
4. L'intégrale d'un polynôme est un polynôme

Souvent, on ne peut intégrer sur tout un intervalle comme $[0;+\infty]$. Pour y remédier, on peut poser $a > 0$ tel que notre fonction soit intégrable sur $[a;+\infty[$. Alors, la fonction est intégrable sur $\cup[a;+\infty[= \mathbb{R}^+$

Formes usuelles

Forme	Méthode
$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{x}$	Multiplier le dénominateur et le numérateur par le conjugué $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pour obtenir $a-b$ en haut
$\frac{\ln x}{x^\alpha}$	On remarque que $x^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. On a alors $\frac{\ln x}{x^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$. Plus qu'à appliquer Riemann.
$\frac{1}{(x+a)\cdots(x+z)}$	Décomposition en éléments simples !

Applications classiques des théorèmes

Dérivation d'une intégrale à paramètre - (38.11)	Montrer que $\lim\left(\int\cdots\right) = \int(\lim\cdots)$
Intégration terme-à-terme - (38.9)	Montrer une égalité du type $\int f_{\text{DSE}} = \int\left(\sum(DSE)\right) = \sum\left(\int\cdots\right)$
Convergence dominée - (38.7)	Dériver une fonction de type $f(x) = \int_I \varphi(x,t)\mathrm{d}t$

17.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

17.1.1 Définition

Définition 33 : Intégrale convergente

Pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction $\mathcal{CPM}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite **convergente** si la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $x \to +\infty$.

Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

17.1.2 Propriétés de l'intégrale

Définition 34 : Notation $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$

Soient E et F deux intervalles de $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(E, F)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CPM}(E, F)$ dont la valeur absolue $|f|$ est intégrable sur E.

(**Attention**) Cette notation n'existe pas, je l'ai inventée pour alléger la suite

Théorème 34.1 : Linéarité de l'intégration

$\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^{+\infty} f \end{array} \right\}$ est **linéaire**.

Théorème 34.2 : Positivité

Soit $f \in \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\Big([a, +\infty[, \mathbb{K}\Big)$.
Si f est positive, alors :

$$\int_a^{+\infty} f \geq 0 \tag{17.1}$$

De plus, si f est **continue** sur $[a, +\infty[$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0$, alors f est nulle sur $[a, +\infty[$.

Théorème 34.3 : Dérivation

Soit f une application continue de $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

L'application $\left\{\begin{array}{ccc}[a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{+\infty} f\end{array}\right\}$ est **dérivable** et de dérivée $(-f)$ sur $[a,+\infty[$.

17.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Définition 35 : Fonction intégrable

Soit f une fonction $\mathcal{CPM}$ de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est **intégrable** sur $[a,+\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente :

(17.2) $$f \text{ intégrable si } |f| \in \mathcal{L}^1\Big([a,+\infty[,\mathbb{K}\Big)$$

Remarque : Cela revient à dire que f est intégrable si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument.

Définition 36 : Notation $\mathcal{L}^1$

Soient E et F deux intervalles de $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{L}^1(E,F)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CPM}(E,F)$ dont la valeur absolue $|f|$ est intégrable sur E.

(**Attention**) Une fonction dont l'intégrale converge n'est pas forcément intégrable (*cf.* définition 35 page 87), c'est sa valeur absolue qui doit avoir une intégrale convergente!

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est seulement convergente, l'intégrale est dite **semi-convergente**

Théorème 36.1

Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

17.3 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Théorème 36.2 : Fonction positive intégrable

Soit f une fonction positive sue $[a,+\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge <u>**si et seulement si**</u> $x \longmapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est majorée :

(17.3) $$\int_a^{+\infty} f \text{ converge } \iff \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \int_a^{+\infty} f \leq M$$

Théorème 36.3 : Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$

Soit α dans $\mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ **si et seulement si** $\alpha > 1$.

On étudie ici des intervalles du type $[a, +\infty[$, mais il peut être bon de savoir que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1[$ **si et seulement si** $\alpha < 1$.

Théorème 36.4 : Relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions **réelles**, **positives**, et **continues par morceaux** sur $[a, +\infty[$:

si $\quad 0 \leq f \leq g \quad , \qquad g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big), \qquad g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si $\quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x) \quad , \qquad g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \iff f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

17.4 Intégration sur un intervalle quelconque

17.4.1 Sur un intervalle semi-ouvert

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant $+\infty$ par un réel b quelconque de $\mathbb{R}$. On effectue alors l'étude sur un semi-ouvert $[a, b[$. On retrouve alors :

- la définition 33 d'une intégrale convergente ;
- la définition 35 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 36.2, CNS d'une fonction positive intégrable ;
- le théorème 36.4 des relations de comparaisons.

Théorème 36.5 : Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$

Soit α dans $\mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ **si et seulement si** $\alpha < 1$ $(x - a > 0)$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ **si et seulement si** $\alpha < 1$ $(x - a < 0)$.

17.4.2 Sur un intervalle de la forme $]a, b[$

Définition 37 : L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(**Attention**) L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ n'a aucune des propriétés algébriques familières qu'on a dans $\mathbb{R}$: par exemple, $a + b = a + c \implies b = c$ n'est plus vrai dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 38 : Intégrale convergente sur un ouvert

Soit f une fonction $\mathcal{CPM}\big(]a, b[, \mathbb{K}\big)$. Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite **convergente** s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent sur leur intervalle semi-ouvert. On pose alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \tag{17.4}$$

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant $+\infty$ par un réel b quelconque de $\mathbb{R}$. On effectue alors l'étude sur un ouvert $]a, b[$ et on retrouve :

- la définition 33 d'une intégrale convergente ;
- la définition 35 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 36.2, CNS d'une fonction positive intégrable.

17.4.3 Sur un intervalle I quelconque

Théorème 38.1 : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I, \mathbb{K})$ dont l'intégrale sur I converge. Pour tout $(a, b, c) \in \overline{I}^3$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, la **relation de Chasles** nous donne :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \tag{Chasles}$$

Soit I un intervalle quelconque entre deux bornes a et b.
Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, on note $\displaystyle\int_I f$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$. On retrouve :

- le théorème 34.1 de linéarité de l'intégration : $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- le théorème 34.2 de positivité de l'intégration.

Théorème 38.2 : Inégalité triangulaire

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^p(I,\mathbb{K})$ avec $p \in \mathbb{R}$. L'**inégalité triangulaire** des intégrale donne :

(17.5) $$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

C'est l'inégalité de MINKOWSKI appliquée aux intégrales. Elle est au programme dans le chapitre 6 des fonctions convexes (page 23), en tant qu'« exemple d'inégalités de convexité ».

Démo de MINKOWSKI

Théorème 38.3 : Changement de variable

Soit f une fonction **continue** sur $]a,b[$ et soit $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une fonction **bijective** (donc strictement monotone) et de classe $\mathscr{C}^1$.

Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi\cdot|\varphi'|$ sont de même nature. Si elles convergent, elles sont égales :

(17.6) $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\Big(\varphi(u)\Big)\cdot\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Remarque : On a nécessairement $\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to\beta}\varphi(x) = b$.

Théorème 38.4 : Intégration par parties

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soient f et g deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Si $f\cdot g$ possède des limites finies aux bornes a et b de l'intervalle, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f\cdot g'$ et $\displaystyle\int_a^b f'\cdot g$ sont de même nature.
Si les intégrales convergent :

(17.7) $$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$$

où $[fg]_a^b = \lim\limits_{x\to b}(f\cdot g)(x) - \lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)$

17.5 Intégration des relations de comparaison

Théorème 38.5 : 1$^{\text{er}}$ théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{CPM}\Big([a,b[,\mathbb{R}^+\Big)$ telles qu'on ait une des conditions suivantes : $\begin{cases} f \leq g \\ f = o(g) \quad (cf. \text{ définition 6 page 13}), \text{ alors :} \\ f = O(g) \end{cases}$

(17.8a) $$\int_a^b g \text{ converge} \implies \int_a^b f \text{ converge}$$

On a également la contraposée :

(17.8b) $$\int_a^b f \text{ diverge} \implies \int_a^b g \text{ diverge}$$

Remarque : D'après le programme officiel, seule la fonction de référence doit être positive.

Théorème 38.6 : 2e théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{CPM}\Big([a, b[, \mathbb{R}^+\Big)$.
Si $f \sim g$, alors f et g sont de même nature.

17.6 Passage à la limite sous l'intégrale

17.6.1 Convergence dominée

Théorème 38.7 : Convergence dominée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\left(f_n\right)_n$ est une suite de fonction de $\mathcal{CPM}(I, K)$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CPM}(I, K)$, et s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$, alors $f \in \mathcal{L}^1$ et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n$

Théorème 38.8 : Convergence dominée de fonction à paramètre réel

Soit $\lambda \in J \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- $\left(f_\lambda\right)_\lambda$ est une suite de fonction de $\mathcal{CPM}(I, K)$;
- pour tout $x \in I$, pour tout $\lambda_0 \in \overline{J}$, $f_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} f(x)$ avec $f \in \mathcal{CPM}(I, K)$;
- il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_\lambda| \leq \varphi}$.

Alors, $f \in \mathcal{L}^1$, et $\displaystyle\int_I f = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_I f_\lambda$

Démo !

17.6.2 Intégration terme à terme

Théorème 38.9 : Intégration terme à terme

Si $\left.\begin{array}{ll} \sum \overbrace{f_n}^{} & \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ \quad f_n \in \mathcal{L}^1 & \\ \sum \int_I \overbrace{|f_n|}^{} & \text{converge} \end{array}\right\}$, alors f est intégrable et :

(17.9) $$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Remarque : L'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$ est en faite une hypothèse de domination.

17.7 Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 38.10 : Continuité

La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)$ est définie et continue sur A si

(17.10) $$\left\{\begin{array}{lll} \forall x \in A, & t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{CM} & \textbf{(}\mathcal{CPM}\textbf{ pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ \forall t \in I, & x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C} & \textbf{(Continue pour } \boldsymbol{x}\textbf{)} \\ \quad \forall (x,t) \in (A \times I) & |f(x,t)| \leq \varphi & \textbf{(Domination)} \\ \quad \exists \varphi \in \mathscr{L}^1 \text{ tel que} & & \end{array}\right.$$

On a aussi la version avec $\mathcal{C}^k$ mais ce n'est pas au programme

17.8 Dérivation d'un intégrale à paramètre

Théorème 38.11 : Dérivabilité

La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)$ est dérivable et continue $(\mathcal{C}^1)$ sur A si

(17.11) $$\left\{\begin{array}{l} \forall x \in A, t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{CM} \quad \textbf{(}\boldsymbol{f}\textbf{ intégrable pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ f \text{ admet une dérivée partielle qui vérifie} \\ \left\{\begin{array}{ll} \forall x \in A, t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{CM} & \textbf{(}\mathcal{CPM}\textbf{ pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ \forall t \in I, x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{C} & \textbf{(Continue pour } \boldsymbol{x}\textbf{)} \\ \forall (x,t) \in A \times \underbrace{[a,b]}_{\in I}, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \in \mathscr{L}^1 & \textbf{(Domination)} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Alors, la dérivée de g est $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$

Inté-
grale
$\mathcal{C}^k$

17.9 Intégrabilité (Ancienne version)

À l'origine, on donne plusieurs définitions de l'intégrabilité : d'abord pour les fonctions positives, puis pour les autres en disant que c'est si $|f|$ est intégrable. On donne ici une définition plus générale :

Définition 39 : Fonction intégrable

$f(x) \in \mathcal{CM}$ est intégrable sur I si
$\forall x \in \underbrace{J}_{\text{segment}} \subset I, \exists M \in \mathbb{R}^+$ **tel que** $\displaystyle\int_J |f| \leq M$

Théorème 39.1 : CNS de l'intégration

$f(x)$ est intégrable sur I si
$\forall x \in I, \boxed{\displaystyle\int_I |f| \leq \varphi}$ où $\varphi \in \mathscr{L}^1$

Théorème 39.2

Si f est une fonction intégrable sur I,

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| \tag{17.12}$$

17.10 Intégrales classiques

Théorème 39.3

Si $-\infty < a < b < +\infty$, alors $f : t \mapsto \dfrac{1}{(b-a)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $\boxed{\alpha < 1}$

Théorème 39.4 : Intégrale de Riemann

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est l'intégrale de Riemann, } \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

17.11 Espaces vectoriels normés de fonction intégrables

Théorème 39.5 : Convergence dominée

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonction de $\mathcal{CM}(I, K)$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, K)$, et s'il existe $\varphi \in \mathscr{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$,
alors $f \in \mathscr{L}$ et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty}, \int_I f_n$

Théorème 39.6 : Intégration terme à terme

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f_n}_{f_n \in \mathscr{L}^1} \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ \displaystyle\sum \int_I \overbrace{|f_n|} \quad \text{converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \in \mathscr{L}^1 \\ \sum f_n \text{ converge} \\ \int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{array} \tag{17.13}$$

17.12 Fonction Gamma

Définition 40 : Fonction Gamma

On définit Γ de $]0, +\infty[$ par $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

Cette fonction est convexe (comme produit de deux applications $x \mapsto t^{x-1}$ et $x \mapsto e^{-t}$ convexes), donc continue.

Théorème 40.1 : Étude de Γ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \cdots = \sqrt{\pi}$

Preuve 40.1.1 *Vérifions que Γ est une fonction continue. On utilise le théorème de continuité de fonctions paramétrés, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue.*
Pour dominer $t^{x-1}e^{-t}$, avec $x \in [a, b]$, on prend $\varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$
Maintenant qu'on a étudié la continuité, on peut faire une intégration par

partie de $\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$ *en posant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(t) = t^n & \Longrightarrow & u'(t) = nt^{n-1} \\ v(t) = -e^{-t} & \Longrightarrow & v'(t) = e^{-t} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \Gamma(n+1) = \underbrace{\left[-t^n e^{-t}\right]_0^{\infty}}_{=-0+0} - \underbrace{\int_0^{\infty} -t^{n-1} e^{-t}}_{\Gamma(n)}$$

$$\Longrightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n!\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}$$

d'où $\Gamma(n+1) = n!$ *CQFD.*

17.13 Intégrales doubles

Définition 41 : Intégrale double

f une fonction continue de $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ dans $\mathbb{C}$.
Alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right) dt$

Cinquième partie

Équations Différentielles

Chapitre 18

Équations Différentielles Linéaires

Méthode

Résoudre une équation différentielle

Scalaire du 1^er ordre Méthode algorithmique, *cf.* preuve 6.2.1 page 100

Vectorielles du 1^er ordre

- Avec les coefficients constants
- Avec une matrice Diagonalisable
- Avec une matrice Trigonalisable

Scalaire du second ordre

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

18.1 Généralités

18.1.1 Équation différentielle linéaire

Définition 1 : Équation différentielle linéaire d'ordre 1

On appelle **équation différentielle d'ordre 1** l'équation $(\mathcal{L})$:

$$x' = a(t)(x) + b(t) \qquad (\mathcal{L})$$

avec $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathscr{L}(E)\big)$ et $b \in \mathcal{C}\big(I, E\big)$.
L'application $x : I \to E$, dérivable, est **solution** de l'équation $(\mathcal{L})$ si :

$$\forall t \in I, \qquad x'(t) = a(t)\Big(x(t)\Big) + b(t) \qquad (18.1)$$

(**Attention**) a est une application de I dans $\mathscr{L}(F)$. Donc $a(t)$ est une application linéaire, pas un scalaire

Définition 2 : Forme matricielle

En choisissant une base de E, l'équation peut s'écrire matriciellement :

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \tag{18.2}$$

avec $A \in \mathcal{C}\Big(I, M_n(\mathbb{R})\Big)$ et $B \in \mathcal{C}\big(I, \mathbb{R}^n\big)$

Définition 3 : Équation homogène associée

On appelle **équation homogène** associée à l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ l'équation :

$$x' = a(t)(x) \tag{$\mathcal{H}$}$$

Théorème 3.1 : Principe de superposition

Si x_1 est solution de $x' = a(t)\ x + b_1(t)$
et x_2 ———————— $x' = a(t)\ x + b_2(t)$
alors $x_1 + x_2$ est solution de

$$x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t) \tag{18.3}$$

18.1.2 Problème de Cauchy

Définition 4 : Problème de Cauchy

On appelle **problème de Cauchy** pour l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ l'ensemble constitué par $(\mathcal{L})$ et un couple (t_0, x_0) formant une condition initiale :

$$\begin{cases} x'(t) &= a(t)\big(x(t)\big) + b(t) & \qquad (\mathcal{L}) \\ x(t_0) &= x_0 & \qquad \text{(Condition initiale)} \end{cases} \tag{18.4}$$

Théorème 4.1 : Mise sous forme intégrale

$x \in \mathcal{C}(I, F)$ **est solution du problème de Cauchy** (18.4) **si et seulement si** :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(a(u)\big(x(u)\big) + b(u)\Big)\mathrm{d}u \tag{18.5}$$

18.1.3 Équation scalaire linéaire d'ordre n

Définition 5 : Équation scalaire linéaire

Avec les notations précédentes, une équation de la forme

$$x' = a(t)x + b(t) \tag{18.6}$$

est scalaire si $n = \dim E = 1$.

Définition 6 : Équation différentielle linéaire d'ordre n

On appelle **équation différentielle d'ordre n** l'équation ($\mathscr{L}$) :

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t) \tag{$\mathscr{L}$}$$

$\big(a_0, \cdots, a_n\big)$ est dans $\Big(\mathcal{C}(I, \mathbb{R})\Big)^{n+1}$.
Cette équation est équivalente à un système différentiel linéaire de la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec $A \in \mathcal{C}\Big(I, M_n(\mathbb{R})\Big)$ et $B \in \mathcal{C}\big(I, \mathbb{R}^n\big)$

18.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème 6.1 : Théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire

Soit l'équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{E}$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathscr{L}(F)\right)$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall (t_0, x_0) \in (I, F), \exists!\ \varphi \text{ telle que } \left|\begin{array}{l} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right. \tag{18.7}$$

Cas des équations d'ordre n

18.3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

18.4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

18.5 Méthode de variation des constantes

18.6 Équations différentielles scalaires du second ordre

18.7 Équations Différentielles Scalaires d'ordre 1

Théorème 6.2 : Solution de l'équation différentielle scalaire

Si $y' = a(t)y + b(t)$, alors $S_I(\mathscr{L})$ est un sous-espace affine

Preuve 6.2.1 (Algorithmique) *Par hypothèse, $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, donc $a(t)$ admet une primitive $P(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$.*

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-P(t)}\, y(t)\right) &= -P'(t)\quad e^{-P(t)} y(t) + e^{-P(t)} \quad y'(t) \\ &= \overbrace{-a(t)}\quad y(t)\, e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \left(\overbrace{a(t)\, y(t) + b(t)}\right) \\ &= e^{-P(t)} b(t) \end{aligned}$$

Si c'est intégrable, $\exists\, C$ tel que :

$$\begin{aligned} e^{-P(t)}\, y(t) &= \int_{t_0}^{t} \left(e^{-P(u)}\, b(u)\, du + C\right) \\ y(t) &= \int_{t_0}^{t} \left(e^{-P(u)}\, b(u)\, du + C\right) e^{P(t)} \end{aligned}$$

est solution de l'équation.

18.8 Équations Différentielles Vectorielles d'ordre 1

Problème de Cauchy

Définition 7 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

$$(\mathscr{L}) \qquad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathscr{L}(F)\right)$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$.
Le **Problème de Cauchy** revient à trouver, pour tout $(t_0, x_0 = x(t_0))$ dans $I \times F$, une solution φ de $(\mathscr{L})$

(**Attention**) a est une application de I dans $\underline{\mathscr{L}(F)}$. Donc $a(t)$ est une application linéaire, pas un scalaire

Système fondamental

Définition 8 : Système Fondamental

Un **système fondamental** de solutions est une base dans l'espace $S_I(\mathcal{H})$ des solutions.

Propriétés

- Si $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ est une base de $S_I(\mathscr{L})$, alors, $\forall t \in I$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$

est une base dans F

Définition 9 : Wronskien

Le Wronskien est le déterminant d'un système fondamental de solution.

(**Wronskien**) $$W(t) = \det_{\mathcal{B}} \Big(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\Big)$$

(**Attention**) Le Wronskien est une fonction de t

Propriétés

- $W'(t) = \mathrm{tr}(a)\, W(t)$
- $W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(s)\, ds}$

Théorème 9.1 : Variation des constantes

Soit $\Big(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\Big)$ une base de $S_I(\mathcal{H})$.

Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$, $\begin{cases} \text{Il existe une } \underline{\text{unique}} \text{ famille } \overbrace{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}^{\text{dans } \mathcal{C}^1(I,F)} \text{ telle que } \varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi_i \\ \varphi \in S_I(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in I, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\, \varphi_i(t) = b(t)} \end{cases}$

Pour une équation à coefficients a et b constants $x' = ax + b(t)$, la solution générale est

$$\boxed{y(t) = e^{(t-t_0)a} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} b(s)\, ds}$$

18.9 Équations Différentielles linéaires du second ordre

Définition 10 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

($\mathscr{L}$) $$y''(t) + a(t)y'(t) + a(t)y(t) = \gamma(t)$$

L'équation homogène est

($\mathcal{H}$) $$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On note $f(r) = r^2 + a \times r + b$ son polynôme caractéristique

18.9.1 Coefficients constants

Théorème 10.1 : Résolution de l'équation

Dans le cas de l'équation homogène $(\mathcal{H})$, on calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution $y(t)$ pour l'équation homogène :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_\pm = \alpha \pm \beta$	$y(t) = e^{\alpha t}\left(A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t)\right)$
$\Delta < 0$	$r_\pm = \alpha \pm i\beta$	$y(t) = e^{\alpha t}\left(A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t)\right)$
$\Delta = 0$	r double	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Théorème 10.2

Si dans $(\mathscr{L})$, $\gamma(t) = P(t)e^{\lambda t}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, alors on peut donner une solution :

$$t \mapsto t^{\omega(\lambda)} Q(t) e^{\lambda t} \tag{18.9}$$

où $\omega(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine du polynome caractéristique de f et $Q \in \mathbb{C}[X]$ est de même degré que P.

18.9.2 Cas général

Théorème 10.3 : Théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire

Soit l'équation différentielle

$$y''(t) + a(t)y'(t) + a(t)y(t) = \gamma(t) \tag{$\mathscr{L}$}$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathscr{L}(F)\right)$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall \big(t_0, (x_0, x_0')\big) \in (I, \mathbb{K}^2), \exists!\, \varphi \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x_0' \end{array} \right.$$

Preuve 10.3.1

Le théorème est une conséquence du théorème 6.1 si on résout plutôt $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}(t)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$

Définition 11 : Wronskien

(**Wronskien**) Si u et v sont des I-solutions, le **Wronskien** est l'application définie par

$$W = uv' - u'v$$

Propriétés

Dans l'équation $(\mathcal{H}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$,

- $W + aW = 0$
- (u, v) libre $\Leftrightarrow \exists t_0$ tel que $W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t, W(t) \neq 0$

Théorème 11.1 : Méthode de variation des constantes

En connaissant (u, v) un système fondamental de solutions, on cherche une solution de la forme $y(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)u(t)$. On détermine c_1 et c_2 avec :

(**18.10**)
$$c_1' \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Chapitre 19

Équations Différentielles non linéaires

19.1 Équations autonomes

Définition 12 : Champ de Vecteur

On appelle **champ de vecteurs** l'application qui à un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe $\overrightarrow{V(M)}\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} U\in\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{C}^1} & \mathbb{R}^2 \\ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & \overrightarrow{V(M)}\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix}\end{array}$$

Définition 13 : Système Autonome

On appelle **système autonome** associé au champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ le système différentiel

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{V(M)}}$$

Le mot *autonome* témoigne de la non-dépendance en t du champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$

Théorème 13.1 : Cauchy-Lipshitz (*admis*)

Avec les données précédentes, pour tout couple $\big(t_0,(x_0,y_0)\big)\in(I\times U)$, il existe une unique I-solution <u>maximale</u> $\varphi : t\mapsto M(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, telle que $\left|\begin{array}{ccc} x(t_0) & = & x_0\\ y(t_0) & = & y_0\end{array}\right.$

Une **solution maximale** est une solution qui n'est la restriction d'aucune autre. Son intervalle de définition est l'intervalle maximal.

19.2 Équations non autonomes

Dans cette section on appelle **équation différentielle** :

$$(\mathcal{E}) \qquad x' = f(t, x)$$

où f est une fonction de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

Théorème 13.2 : Cauchy-Lipshitz (*admis*)

U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^2$, et en reprenant l'équation $(\mathcal{E})$:

$$\forall (t_0, x_0) \in U, \exists! \, \varphi \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ soit } \textbf{solution maximale} \text{ de l'équation } (\mathcal{E}) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Chapitre 20

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on se place dans (E, N) et (F, P), des espaces vectoriels normés de dimension finie. U est un ouvert de E

$$\begin{array}{cccc} f & : & U & \rightarrow & F \\ & & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

20.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition 14 : Dérivée selon un vecteur

Soit $f : U \rightarrow F$ la fonction définie précédemment.
Soit v un vecteur non nul de E, et t un réel tel que $a + tv \in U$.
On dit que f **admet une dérivée selon le vecteur v au point a** (ou admet une **dérivée directionnelle**) si la fonction réelle $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. Cette dérivée en a est notée $D_v f(a)$.
On a alors :

(20.1)
$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Définition 15 : Dérivées partielles dans une base

Soit $f : U \rightarrow F$ la fonction définie précédemment.
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On appelle **dérivée partielle** de f dans $(e_n)_n$ ses dérivées par rapport aux vecteurs. La i-ième dérivée partielle en a est notée $D_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ainsi :

(20.2)
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

20.2 Différentielle

20.2.1 Application différentiable

Définition 16 : Application différentiable au point a

Soit $f : U \to F$ la fonction définie précédemment.
On dit que f est **différentiable** au point a s'il existe une fonction linéaire $\mathrm{d}f(a) : E \to F$ telle que :

(20.3) $$\forall h \in E,\ f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(h)$$

(**Attention**) $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(E,F)$ est une application linéaire de E dans F. On l'applique sur un vecteur h en notant $\mathrm{d}f(a)(h)$ ou $\mathrm{d}f(a) \cdot h$

Théorème 16.1 : f dérivable en a

Soit f la fonction définie précédemment.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et est dérivable en a selon tout vecteur. Sa dérivée selon le vecteur v est alors :

(20.4) $$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$$

20.2.2 Jacobien, Jacobienne

Définition 17 : Jacobienne, Jacobien

Soient $(e_i)_i$ et $(e'_i)_i$ deux bases de respectivement E et F.
Soit $f = (f_j)_j$ la fontion définie précédemment telle que $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_i f_i(x_i) \cdot e'_i$. On définit la **Jacobienne** $\mathcal{J}_a(f)$ comme la matrice de terme général $j_{i,j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = D_j f_i(a)$.
Le **Jacobien** est le déterminant de cette matrice.

Exemple : La Jacobienne de la fonction polaire (qui à (r,θ) associe $(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$) est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$. Son Jacobien est donc $r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r$

20.3 Opérations sur les applications différentiables

Théorème 17.1 : Différentielle d'une composée d'applications

Soient E,F et G trois espaces vectoriels **normés réels** de **dimension finie**.
Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\begin{array}{lllll} f & : & E & \to & F \\ g & : & & & F \to G \end{array}$$

Alors, la fonction $g \circ f$ est différentiable sur un ouvert de E et :

(20.5) $$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a)$$

20.4 Cas des applications numériques

20.4.1 Gradient

Définition 18 : Gradient

Soit E un espace euclidien, et f une application allant de U un ouvert de E à $\mathbb{R}$.
On appelle **gradient** de f en a l'unique vecteur de E, noté $\operatorname{Grad} f(a)$, tel que :

(20.6) $$\forall v \in E, \qquad \mathrm{d}f(a) \cdot v = (\operatorname{Grad} f(a) | u)$$

Expression dans une base orthonormé

Remarque : Parfois, le gradient de f en a, $\operatorname{Grad} f(a)$, est aussi noté $\nabla f(a)$

20.4.2 Représentation des formes linéaires

Définition 19 : Dual d'un Espace Vectoriel (ev) réel

Soit E un espace euclidien.
On appelle **dual** de E, et on note $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ ou E^*, l'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Théorème 19.1 : Représentation des formes linéaires

Soit E un espace euclidien.
Pour toute forme linéaire f de $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$:

(20.7) $$\exists! y, \forall x \in E, \qquad f(x) = (x|y)$$

Preuve 19.1.1 *Pour tout $y \in E$, on peut associer l'application $\theta_y : x \mapsto (x|y)$. Cette application est linéaire. L'application*

$$\begin{array}{|cccc} \theta & : & E & \to & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ & & y & \mapsto & \theta_y \end{array}$$

*est également linéaire. Son noyau $\operatorname{Ker}(\theta)$ étant nul, θ est injective. Mais E et $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ étant de même dimension, elle est donc **bijective**.*
Toute forme linéaire a donc un antécédant par θ. $\square$

20.4.3 Point critique

Définition 20 : Point critique

On appelle **point critique** d'une application différentiable $f : E \to \mathbb{R}$ tout point de E tel que

(20.8) $$\mathrm{d}f(a) = 0$$

Définition 21 : Extremum local

Soit E un espace euclidien, et soit $f : E \to \mathbb{R}$.

On dit que f présente un **extremum local** en un point a si pour tout voisinage de a :

(**20.9a**) $$\forall x \in V, f(x) \leq f(a) \qquad \text{(Maximum local)}$$

(**20.9b**) $$\forall x \in V, f(x) \geq f(a) \qquad \text{(Minimum local)}$$

Théorème 21.1 : Condition nécessaire d'éxistence d'extremum

Soit E un espace euclidien, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une **fonction différentiable**.
Si f présente un extremum local en un point a, alors $\mathrm{d}f(a) = 0$.

(**Attention**) La réciproque de ce théorème est fausse

20.5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

20.6 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

20.7 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Chapitre 21

Fonctions de plusieurs variables

Méthode

Étude d'une fonction à deux variables

Passer en polaire

Dans ce chapitre, on se place dans (E, N) et (F, P), des espaces vectoriels normés de dimension finie. U est un ouvert de E

$$f : \begin{array}{ccc} U & \to & F \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

21.1 Différentielle, dérivée

21.1.1 Différentielle

Définition 22 : Différentielle

Il existe au plus un élément φ de $\mathscr{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

φ est appelée la **différentielle** de f. On la note $df(a)$

Remarque : a et h sont des vecteurs. Donc sous la forme $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. De plus, $\varphi(h)$ est une application linéaire : $\varphi(h) \in \mathscr{L}\big(E, F\big)$

21.1.2 Dérivée selon un vecteur

Définition 23 : Dérivée en un point

On note $\varphi_h : t \mapsto f(a+th)$.
f admet une dérivée en a selon h si $\underline{\varphi_h \text{ est dérivable en } 0}$.
Alors, on note cette dérivée $D_h f(a) = \varphi_h'$. Si elle existe :

$$\boxed{D_h f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}}$$

On a alors la dérivée pour tout a définie par la fonction $D_h f : a \mapsto D_h f(a)$

Définition 24 : Application de classe $\mathcal{C}^1$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si $\forall j \in [1, n], D_j f$ existe et est continue sur U

Définition 25 : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

f (bijective) est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** si elle et son inverse sont $\mathcal{C}^k$. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(U, V) \\ f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, U) \end{cases}$$

21.2 Inversion locale

Théorème 25.1 : Théorème d'inversion locale *(admis)*

$f \in \mathcal{C}(U, F)$ injective est $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

$\Leftrightarrow$

$\forall a \in U, df(a)$ isomorphisme de E dans F

21.3 Complément sur les courbes planes

Théorème 25.2 : Formule de Green-Riemann

Un compact D délimitée par un une courbe plane Γ positivemment orientée et $\mathcal{CM}^1$. Soient P et Q deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert dans lequel Γ est tracé. On admet la formule de Green-Riemann :

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right](x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\Gamma P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y \tag{21.2}$$

Sixième partie

Géométrie

21.4 Arcs Paramétrés

Définition 1 : Arc Paramétré

On appelle **arc paramétré** de classe $\mathcal{C}^k$ un couple (I, f) avec $\begin{cases} I & \text{un intervalle de } \mathbb{R} \\ f & \text{une application de } \mathcal{C}^k(I, E) \end{cases}$

Définition 2

Quelques autres définitions :

Valeur Régulière	t_0	— $f'(t_0) \neq 0$
Valeur Birégulière	t_0	— $\left(f'(t_0), f''(t_0)\right)$ est libre
Abscisse Curviligne	s	— $s' = N_2\left(f'(t)\right)$ sur un intervalle
Paramétrage normal	(J, g)	—

Exemple d'abscisse curviligne : $s : t \mapsto \sinh(t)$ car $N_2(s(t)) = \sqrt{\int |\sinh(t)|^2} = \sinh'(t) = \cosh(t)$. L'avantage d'une abscisse curvligne est de pouvoir simplifier l'étude d'une courbe.

21.5 Courbes Planes

21.5.1 En polaire

Définition 3 : Fonction arg

$\boxed{\theta \mapsto e^{i\theta} \text{ est une bijection de }]-\pi, \pi[\text{ sur } \mathbb{U}\backslash\{-1\}}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$
Sa réciproque est l'application $u \mapsto \arg(u)$
Si on prend $u \in \mathbb{U}$, en notant $u = x + iy$, alors $\arg(u) = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+1}\right)$

Théorème 3.1 : Théorème du Relèvement

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{U})$ (avec $n \neq 0$).
$\exists\, \theta \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ tel que $f(t) = e^{i\theta(t)}$. θ est appelé **relèvement** de f.

Preuve 3.1.1 *Si elle existe, θ n'est pas unique ($t \mapsto \theta(t) + 2\pi$ convient aussi).*
Donc $f'(t) = i\theta' f(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = -i\dfrac{f'(t)}{f(t)}$.

On peut alors intégrer : $\theta(t) = C - i\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du$*, et il ne reste plus qu'à prouver l'existence en ayant cette expression de* $\theta(t)$

Définition 4 : Tangente

Si θ est une valeur régulière, on note V l'angle $\left(\overrightarrow{u_\theta}, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_\theta}}{\mathrm{d}\theta}\right)$, et on définit $\boxed{\tan(V) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}}$

21.5.2 Étude d'une courbe paramétrée

Méthode

Étude de courbes paramétrées

Quelques conseils :

- On essaye, si possible, de **passer en polaire**
- Ne pas oublier de vérifier les **ensembles de définition**
- Lors de l'étude **au voisinage d'un point**, il suffit d'étudier les dérivées successives grâce à un développement limité

On a l'expression de x et y en fonction de t : $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Pour étudier la courbe :

1. Ensemble de **définition** $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \bigcup \mathcal{D}_g$
2. Étude des **variations** : on étudie x', y' et $\dfrac{y'}{x'}$
3. **Branches infinies**
   - $x = \lim f$ ou $y = \lim g$ sont des asymptotes (avec $\lim f$ et $\lim g$ des limites finies)
   - Si, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ les deux fonctions tendent simultanément vers l'infini, on **étudie** $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y}{x}$

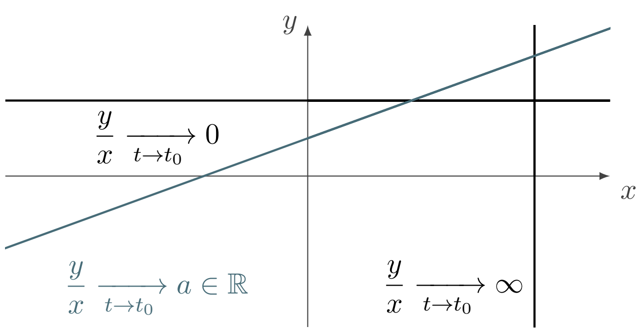


FIGURE 21.1 – Différents types d'asymptotes en fonction de $\dfrac{y}{x}$

Dans le cas où $\dfrac{y}{x} \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R}$, on peut déterminer b de l'équation $y = ax + b$ en examinant $y - ax$

Septième partie

Annexe

21.6 Équivalences

Pour une définition de l'équivalence, *cf.* définition 4 page 12

Formule de Stirling $\boxed{n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

Équivalence de ln $\frac{\ln(u)}{t^\alpha} \sim t^{\frac{\alpha+1}{2}}$

Équivalents usuels en 0

$\sin(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cos(u)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$	$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$
$\sinh(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cosh(u)-1 \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$	$e^u-1 \underset{0}{\sim} u$

21.7 Trigonométrie

21.7.1 Définition

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos x &=& \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x &=& \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{array}\right. \tag{21.3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cosh x &=& \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\\ \sinh x &=& \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\end{array}\right. \tag{21.4}$$

21.7.2 Addition / Produit

$$\begin{array}{rl|rl} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b & \cos(a+b)+\cos(a-b) &= 2\cos a\cos b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b & \cos(a+b)-\cos(a-b) &= 2\sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b & \sin(a+b)+\sin(a-b) &= 2\sin a\cos b\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b & \sin(a+b)-\sin(a-b) &= 2\cos a\sin b \end{array} \tag{21.5}$$

21.7.3 Dérivation

Dérivées des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \tan' x &= \frac{1}{1+\cos^2 x} = 1+\tan^2 x\\ \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

21.7.4 Formule de Moivre

(21.6) $$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Généralités

Conjugué $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Convexité La fonction **exponentielle** est **convexe**, la fonction **logarithme** est **concave**

Inégalités

Modules $$\left\|\sum_i x_i\right\| \leq \sum_i \|x_i\|$$

Module d'intégrales $$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| \qquad (17.12)$$

Inégalité de la Moyenne $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \qquad (16.2)$$

21.8 Formules usuelles

$$a^k - b^k = (a-b)\left(\sum_{p=0}^{k-1} a^p b^{k-1-p}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

21.9 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels normés usuels :
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathbb{C}_n[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}),$

21.10 Astuces

Primitives de 1 Dans une IPP, on peut primitiver 1 par $1+x$ pour enlever un terme au dénominateur. *Exemple :* $(\ln(1+x))^n$

Fontion k-lipschitzienne Il suffit de montrer que $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\boxed{|f'(t)| \leq k}$

Inverse d'une Matrice 2×2 Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{da - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dérivée de $\boldsymbol{a^x}$ On a $a^x = e^{x\ln(a)}$, donc sa dérivée est $\boxed{\ln(a) \times a^x}$

Liste des acronymes

CNS	Condition Nécessaire et Suffisante. 41, 50, 80, 88, 89, 93
DL	Développement Limité. 57
DSE	Développement en Série Entière. 80, 84
ev	Espace Vectoriel. 108
LCI	Loi de Composition Interne. 18
s-ep	sous-espace propre. 31, 32
SATP	Série À Termes Positifs. 4, 58, 59, 60, 78

Index