

COURS DE PRÉPA

Physique-Chimie

Écrit par
Alexandre JOUANDIN

2013—2015
Écrit en L^AT_EX



21 avril 2015

Table des matières

I	Physique	7
1	Thermodynamique	8
1.1	Définitions générales	8
1.2	Premier Principe	9
1.2.1	Transformation isochore	9
1.2.2	Transformation isobare	10
1.3	Deuxième Principe	11
1.4	Cas particulier du gaz parfait	12
1.5	Troisième Principe	14
1.6	Machines thermiques	14
1.7	Systèmes ouverts en régime stationnaire	15
1.7.1	Système ouvert	15
1.7.2	Premier principe	15
1.7.3	Deuxième principe	17
2	Transferts thermique	18
2.1	Conduction	18
2.2	Convection	21
3	Statique des fluides	22
3.1	Champ de pression d'un fluide	22
3.2	Théorème d'ARCHIMÈDE	22
4	Électronique	23
4.1	Circuits linéaires dans l'ARQS	23
4.1.1	THÉVENIN-NORTON	24
4.2	Régime transitoires	25
4.3	Amplificateur Opérationnel (AO)	25
4.4	Régimes sinusoïdaux	26
4.4.1	Puissance	27
4.5	Filtres	28

4.5.1	Fonctions de transfert usuelles	29
4.5.2	Diagrammes de Bode	29
5	Traitement du signal	31
5.1	Signaux périodiques	31
5.2	Électronique numérique	32
6	Mécanique du Point	33
6.1	Étude cinétique	33
6.2	Loi de la quantité de mouvement	34
6.3	Approche Énergétique	34
6.3.1	Puissance et travail	34
6.3.2	Énergie cinétique	35
6.3.3	Énergie potentielle	35
6.4	Forces centrales	36
6.5	Dynamique en référentiel non galiléen	37
6.5.1	Loi de composition des vitesses	37
6.5.2	Loi de composition des accélérations	37
6.5.3	Forces d'inerties	38
7	Mécanique du solide	39
7.1	Préambule	39
7.1.1	Dérivée d'un vecteur	39
7.1.2	Dérivée en coordonnées polaires	39
7.2	Définitions	40
7.3	Théorèmes de Koënig	41
7.4	Moment d'inertie	41
7.5	Théorèmes de dynamique	42
7.6	Solides en contact	43
8	Optique	44
8.1	Optique géométrique	44
8.1.1	Stigmatisme et aplanétisme	44
8.1.2	Réflexion et réfraction	45
8.2	Optique ondulatoire	46
8.2.1	Modèle scalaire des ondes lumineuses	46
8.2.2	Superposition d'ondes lumineuses	48
8.2.3	Trous d'YOUNG	51
8.2.4	Interféromètre de MICHELSON	53
8.2.5	Diffraction	55
8.2.6	Réseaux	56
9	Électromagnétisme	58
9.1	Électrostatique	58
9.1.1	Loi de COULOMB	58
9.1.2	Propriétés du champ électrostatique	59
9.1.3	Circulation du champ électrostatique	59
9.1.4	Flux du champ électrostatique	60
9.1.5	Dipôle électrostatique	60
9.2	Magnétostatique	62
9.2.1	Champ magnétique	62

9.2.2	Dipôle Magnétique	63
9.3	Équations de MAXWELL	64
9.3.1	Principe de conservation de la charge	64
9.3.2	Les équations de MAXWELL	64
9.3.3	Equations de POISSON et de LAPLACE	66
9.4	Énergie électromagnétique	67
9.5	Induction	69
9.5.1	Loi d'Ohm généralisée	69
9.5.2	Auto-induction	70
9.5.3	Inductance mutuelle	70
9.5.4	Force electomotrice induite	71
9.6	Propagation et rayonnement	71
9.6.1	Dans le vide	72
9.6.2	Propagation dans un plasma	75
9.6.3	Propagation dans un conducteur ohmique	79
10	Rayonnement Thermique	81
11	Mécanique Quantique	84
11.1	Introduction à la mécanique quantique	84
11.1.1	Dualité onde-particule	84
11.1.2	Fonction d'onde et équation de SCHRÖDINGER	84
11.1.3	Équation de SCHRÖDINGER	85
11.1.4	Inégalité de HEISENBERG	86
11.2	Évolution d'une particule quantique libre	86
11.3	Évolution d'une particule quantique dans un potentiel	87
12	Thermodynamique statistique	88
12.1	Monde microscopique, monde macroscopique	88
12.2	Facteur de BOLTZMANN	88
12.2.1	Atmosphère isotherme	88
12.2.2	Poids de BOLTZMANN	90
12.3	Systèmes à spectres discret d'énergie	90
12.4	Capacités thermiques classiques des gaz et des solides	91
13	Annexe	92
13.1	Trigonométrie	92
13.1.1	Définition	92
13.1.2	Addition / Produit	92
13.1.3	Nombres complexes	92
13.2	Calcul vectoriel	93
13.3	Complément mathématique	93
13.3.1	Dérivée d'un vecteur	93
13.3.2	Équation différentielle	94
13.4	Repères en physique	94
13.4.1	Repère cartésien	94
13.4.2	Repère cylindrique	95
13.5	Analyse Vectorielle	96
13.5.1	Généralités sur les champs	96
13.5.2	Opérateurs sur les champs	96
13.5.3	STOKES et OSTROGRADSKI	98

13.6 Règles générales	98
13.6.1 Relations entre les grandeurs	98
13.6.2 Longueurs de références	98
II Chimie	99
14 Première année	100
14.1 Configuration électronique	100
14.2 Représentation moléculaire	101
14.3 Cinétique chimique	101
14.3.1 Avancement	101
14.3.2 Loi d'action de masse	103
14.4 Cristallographie	103
15 Thermochimie	104
15.1 Grandeurs extensives	104
15.2 Équilibre d'une réaction	105
15.2.1 Enthalpie libre	105
16 Premier principe appliqué à la transformation chimique	107
16.1 Enthalpie standard	107
16.2 Effets thermiques pour une transformation monobare	108
16.3 Relations de KIRCHHOFF	108
17 Diagramme Potentiel-pH	110
17.1 Rappels	110
17.2 Méthode	110
18 Cinétique de l'oxydoréduction	113
18.1 Cinétique des réactions d'oxydoréduction	113
18.2 Corrosion	113
19 Annexe	114
Liste des acronymes	116
Index	118

Table des figures

1.1	Étude thermodynamique d'un système ouvert	16
4.1	Équivalence THÉVENIN-NORTON	24
5.1	Spectre d'un signal périodique	31
5.2	Échantillonnage	32
6.1	Force de rappel d'un ressort	34
7.1	Coordonnées polaires	39
7.2	Moment d'une force	40
7.3	Moment cinétique	41
8.1	Système rigoureusement stigmatique	45
8.2	Système non stigmatique	45
8.3	Système rigoureusement aplanétique	45
8.4	Système non aplanétique	45
8.5	Trains d'onde dans le temps et dans l'espace	49
8.6	Dispositif des trous de YOUNG	51
8.7	Interféromètre de MICHELSON en lame d'air	54
8.8	Interféromètre de MICHELSON en coin d'air	55
8.9	Objet diffractant	56
8.10	Deux fentes O_n et O_{n+1} d'un réseau	57
9.1	Moment dipolaire	61
9.2	Polarisation rectiligne	76
10.1	Caractérisation des différents flux	82
13.1	Repère en coordonnées cartésiennes	95
13.2	Repère en coordonnées cylindriques	95
13.3	Ligne de champ	96
14.1	Tableau des sous-couches électroniques	100
17.1	Diagramme potentiel-pH du fer	112
19.1	Tableau périodique des éléments de MENDELEEV	115

Première partie

Physique

Chapitre 1

Thermodynamique

Méthode

Formules

Premier principe	$\Delta U = Q + W$	(cf. équation (1.4a) page 9)
	$dU = \delta Q + \delta W$	(cf. équation (1.4b) page 9)
	$dU = TdS - PdV$	(cf. équation (1.11) page 11)
Enthalpie	$dH = U + PV$	(cf. équation (1.7) page 10)
	$dH = TdS + VdP$	(cf. équation (1.12) page 12)
Deuxième principe	$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$	(cf. équation (1.10) page 11)
Gaz parfait	$dU = C_V dT$	
	$dH = C_P dT$	
	$PV^\gamma = \text{constante}$	

Les fonctions U , H et S sont des fonctions d'état. Ainsi, d'un point A à un point B d'une transformation, le calcul ne change pas qu'on passe par un chemin réversible ou non.

1.1 Définitions générales

Avant de commencer, un petit point sur la différence de notation entre d et δ , conformément au programme de deuxième année.

Signification	Petite	Grande
Variation	dH	ΔH
Quantité	δQ	Q

TABLE 1.1 – Différence entre d, δ , et Δ

Définition 1 : Système

On appelle **système thermodynamique** le contenu d'une zone délimitée dans l'espace.

Type de système	Ouvert	Fermé	Isolé
Échange d'énergie avec l'extérieur	✓	✓	
Échange de matière avec l'extérieur	✓		

TABLE 1.2 – Les différents systèmes

Définition 2 : Transfert thermique

Le **transfert thermique** est un apport de chaleur lors d'un transfert de température :

$$(1.1) \quad Q = C \Delta T \quad dQ = C dT$$

Où C est la capacité calorifique en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

Pour un corps pur, C est défini, sinon, pour un gaz parfait, il faudra prendre $C = C_V$ ou $C = C_P$ suivant qu'on se trouve à volume ou à pression constante.

(ATTENTION) Parfois, on utilise les valeurs molaires en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$: $C_{Vm} = \frac{C_V}{n}$ par exemple.

Définition 3 : Travail

Le travail reçu par un système thermodynamique est noté W .

Il prend en compte le travail des forces de pression $-P_{\text{ext}}dV$ et les autres forces W_u :

$$(1.2) \quad \delta W = -P_{\text{ext}}dV + \delta W_u$$

Définition 4 : Énergie interne

L'énergie interne U d'un système thermodynamique est définie microscopiquement par :

$$(1.3) \quad U = U_0 + E_c^* + \underbrace{E_p^*}_{\text{Énergie potentielle d'interaction}}$$

1.2 Premier Principe**Théorème 4.1 : Premier principe**

La variation d'énergie $\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p$ est égal à la somme du travail reçu W et du transfert thermique reçu Q :

$$(1.4a) \quad \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W$$

Entre deux instants t et $t + dt$ très proches :

$$(1.4b) \quad dU + dE_c + dE_p = \delta Q + \delta W$$

1.2.1 Transformation isochore

Une transformation isochore est une transformation pendant laquelle le volume V reste constant.

Théorème 4.2

Pour une transformation **isochore** (à volume constant), on peut simplifier la variation d'énergie interne :

$$(1.5) \quad dU_V = C_V dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à volume constant** :

$$(1.6) \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Preuve 4.2.1 On note U_V et Q_V respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à volume constant.

Si on néglige dE_c et dE_p , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_V &= \delta W + \delta Q_V \\ &= -P \underbrace{dV}_{\text{nul car } V=\text{cte}} + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_V \\ &= \delta Q_V \\ dU_V &= C_V dT \end{aligned}$$

1.2.2 Transformation isobare

On peut effectuer un raisonnement analogue à la preuve précédente en étudiant cette fois une transformation **isobare** (à pression constante)

Preuve 4.2.2 On note U_P et Q_P respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à pression constante.

Si on néglige dE_c et dE_p , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_P &= \delta W + \delta Q_P \\ &= -PdV + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_P \\ dU_P + PdV &= \delta Q_P \\ d(U + PV)_P &= \delta Q_P \\ &= C_P dT \end{aligned}$$

Cette quantité de chaleur mise en jeu est l'enthalpie. On va maintenant la définir de manière générale :

Définition 5 : Fonction Enthalpie

On appelle **enthalpie** la fonction d'état H telle que :

$$(1.7) \quad H = U + PV$$

Théorème 5.1

Lors d'une transformation isobare, l'enthalpie s'exprime par :

$$(1.8) \quad dH_P = C_P dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à pression constante** :

$$(1.9) \quad C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

1.3 Deuxième Principe

Théorème 5.2 : Deuxième principe

Il existe une **fonction d'état** S **entropie**, **additive**, **extensive**, telle que :

$$(1.10) \quad dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}} \quad \text{avec} \quad \delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T}$$

Au final, $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$.

Lorsqu'une transformation est **réversible**, on a $S_{\text{créée}} = 0$ et alors $dS = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$

Théorème 5.3 : Première identité thermodynamique

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **première identité thermodynamique** est vérifiée :

$$(1.11) \quad dU = TdS - PdV$$

Preuve 5.3.1 On étudie en premier lieu une transformation réversible. C'est-à-dire que $dS = \frac{\delta Q_{\text{réversible}}}{T}$.

Ainsi, $\begin{cases} \delta Q_{\text{réversible}} = TdS \\ \delta W_{\text{réversible}} = -PdV \end{cases}$. On peut maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique :

$$dU_{\text{réversible}} = TdS - PdV$$

Mais U est une **fonction d'état**. Donc peu importe le chemin parcouru par la transformation, qu'il soit réversible ou pas, on peut écrire :

$$dU = TdS - PdV$$

(ATTENTION)

On ne peut pas intégrer cette équation sur un chemin irréversible. Mais on peut substituer l'intégrale à celle d'un chemin réversible.

Théorème 5.4 : Deuxième identité thermodynamique

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **deuxième identité**

thermodynamique est vérifiée :

$$(1.12) \quad dH = TdS + VdP$$

1.4 Cas particulier du gaz parfait

Définition 6 : Gaz Parfait

Un gaz parfait est un gaz vérifiant l'équation d'état :

$$(1.13) \quad PV = nRT$$

Théorème 6.1 : Énergie interne d'un gaz parfait

L'énergie cinétique interne d'un gaz parfait ne varie pas. On démontre expérimentalement que l'énergie interne d'un gaz parfait est :

$$(1.14) \quad U_{\text{Gaz Parfait}} = U_0 + C_V T$$

La capacité thermique à volume constant C_V d'un gaz parfait est

$$(1.15) \quad C_V = \begin{cases} \frac{3}{2}nR & \text{pour un gaz parfait monoatomique} \\ \frac{5}{2}nR & \text{pour un gaz parfait polyatomique} \end{cases}$$

Théorème 6.2 : Capacité thermique

On peut utiliser deux **capacités thermiques** :

La capacité calorifique C_V à volume constant

$$(1.16a) \quad C_V = \frac{3}{2}nR$$

La capacité calorifique C_P à pression constante

$$(1.16b) \quad C_P = \frac{5}{2}nR$$

Définition 7

On défini γ comme le rapport des capacités calorifiques :

$$(1.17) \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Théorème 7.1 : Relation de MAYER

La **relation de MAYER** relie la capacité thermique à pression constante C_P à la

capacité thermique à volume constant C_V :

(1.18)

$$C_P - C_V = nR$$

$$C_{Pm} - C_{Vm} = R$$

On peut maintenant exprimer :

(1.19a)

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

(1.19b)

$$C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

Preuve 7.1.1 *La démonstration de la relation de MAYER ne semble pas être au programme.*

Pour le reste, les démonstrations sont assez simples :

$$C_P - C_V = nR$$

$$\gamma C_V - C_V = nR$$

$$(\gamma - 1)C_V = nR$$

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

La deuxième devient alors bien plus simple à démontrer :

$$C_P = \gamma C_V$$

$$C_P = \gamma \frac{nR}{\gamma - 1}$$

Théorème 7.2 : Relations de LAPLACE

Au cours d'une transformation **adiabatique réversible** (donc isentropique), un gaz parfait vérifie :

(1.20a)

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

(1.20b)

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

(1.20c)

$$\begin{aligned} P^{1-\gamma} T^\gamma &= \text{constante} \\ &= P_{\text{éq}} V_{\text{éq}} \end{aligned}$$

Preuve 7.2.1 *On part d'une des identités thermodynamiques. Peu importe laquelle, cela changera juste quelle relation de LAPLACE on obtient.*

Nous allons partir de $dH = TdS + VdP$.

$$dH = TdS + VdP$$

$$dS = \frac{dH}{T} - dP \frac{V}{T}$$

D'après l'équation d'état d'un gaz parfait (1.13) :

$$dS = \frac{dH}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

$$dS = C_P \frac{dT}{T} - (C_P - C_V) \frac{dP}{P}$$

$$dS = \gamma C_V \frac{dT}{T} - C_V(\gamma - 1) \frac{dP}{P}$$

$$dS = \gamma C_V \ln \frac{T_2}{T_1} - C_V(\gamma - 1) \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Or la transformation est isentropique, donc $dS = 0$, d'où :

$$\cancel{C_V}(\gamma - 1) \ln \frac{P_2}{P_1} = \gamma \cancel{C_V} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$(1 - \gamma) \ln \frac{P_1}{P_2} = \gamma \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

On a alors démontré l'équation (1.20c), et on peut passer facilement aux autres avec l'équation d'état des gaz parfait (1.13). \square

De la preuve précédente, on tire une dernière formule pour les gaz parfaits : le calcul de l'entropie.

Théorème 7.3 : Entropie d'un gaz parfait

Pour une transformation réversible, l'entropie d'un gaz parfait peut être calculée par la formule :

$$(1.21) \quad dS = \gamma C_V \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

1.5 Troisième Principe

Définition 8 : Troisième principe

À température nulle ($T = 0K$), l'entropie est nulle.

1.6 Machines thermiques

Théorème 8.1 : Énoncé des premiers et deuxièmes principes

Sur un cycle, les fonctions d'état reviennent à leur état initial. Donc le premier principe s'écrit :

$$(1.22) \quad W + \sum_i Q_i = \Delta U = 0$$

De même, le second principe s'écrit cette fois :

$$(1.23) \quad S_{\text{échangée}} = \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

On appelle ce second principe l'**inégalité de CLAUSIUS**.

Théorème 8.2 : Rendement

Le rendement r est :

$$(1.24a) \quad r = \frac{\text{Bénéfices}}{\text{Donné à la machine}}$$

$$r_{\text{moteur}} = -\frac{W}{Q_c}$$

$$(1.24b) \quad r_{\text{réfrigérateur}} = -\frac{Q_f}{W}$$

$$(1.24c) \quad r_{\text{pompe à chaleur}} = -\frac{Q_c}{W}$$

1.7 Systèmes ouverts en régime stationnaire

1.7.1 Système ouvert

Définition 9 : Système ouvert

Un **système ouvert** est un système dont l'espace est traversé par de la matière.

Pour être conforme au programme, on n'étudie que l'écoulement dans le cas unidimensionnel.

Définition 10 : Régime stationnaire

Un système ouvert en **régime stationnaire** est un système pour lequel toutes les caractéristiques du fluide contenu à l'intérieur du système ne changent pas.

Définition 11 : Débits massiques

On se place dans le cas de systèmes ouverts en **régime stationnaire**. La masse étant une caractéristique du fluide, elle ne varie pas non plus.

C'est-à-dire que le débit de fluide massique entrant D_{m_e} est égal au débit massique de fluide sortant D_{m_s} , et on peut définir le **débit massique** D_m à travers le système comme étant $D_m = D_{m_e} = D_{m_s}$.

Si dm est la masse de fluide entrée/sortie pendant un court instant dt :

$$(1.25) \quad D_m = \frac{dm}{dt}$$

Souvent, on a le débit massique, l'équation plus pertinente serait donc $dm = D_m \times dt$

1.7.2 Premier principe

Théorème 11.1 : Grandeur extensive en régime stationnaire

Soit Y une grandeur extensive quelconque (cf. définition (7) page 104). Si y est la grandeur massique associée telle que $Y = y dm$. Alors

$$(1.26) \quad dY_\Sigma = dm \Delta y \quad \text{avec } \Delta y = y_s - y_e$$

Preuve 11.1.1 On étudie le système Σ représenté par la zone colorée sur la figure 1.1.

Y est une grandeur extensive, donc on peut étudier le système aux différents instants :

$$\begin{aligned} Y(\Sigma_{AB}) &= \underbrace{Y(\Sigma_{AA'})}_{y_e dm_e} + Y(\Sigma_{A'B}) \\ Y(\Sigma_{AB}) &= y_e dm_e + Y(\Sigma_{A'B}) \\ Y(\Sigma_{A'B'}) &= Y(\Sigma_{A'B}) + \underbrace{Y(\Sigma_{BB'})}_{y_s dm_s} \\ Y(\Sigma_{A'B'}) &= Y(\Sigma_{A'B}) + y_s dm_s \end{aligned}$$

D'où la formule suivante :

$$\begin{aligned} dY_\Sigma &= Y_\Sigma(t + dt) - Y_\Sigma(t) \\ &= \left(\cancel{Y(\Sigma_{A'B})} + y_s dm_s \right) - \left(y_e dm_e + \cancel{Y(\Sigma_{A'B})} \right) \\ dY_\Sigma &= dm (y_s - y_e) \end{aligned}$$

En notant $\Delta y = y_s - y_e$, on retrouve l'équation recherchée. \square

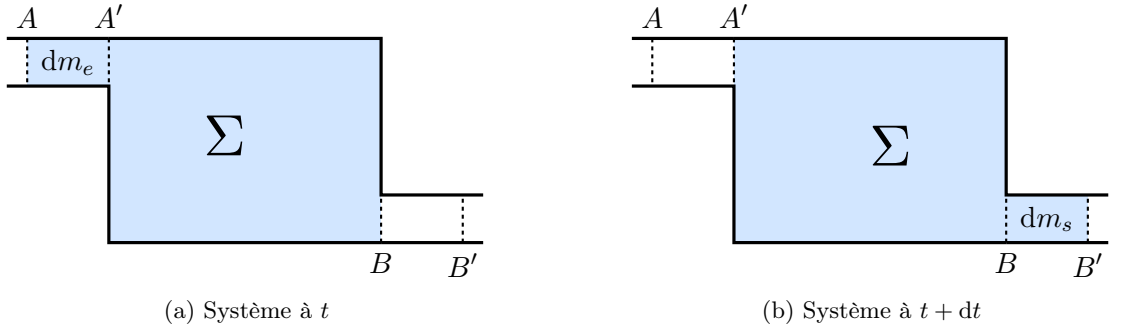


FIGURE 1.1 – Étude thermodynamique d'un système ouvert.

Le système est représenté en deux instants. À l'instant t , il se trouve entre les points A et B , et en $t + dt$, il se trouve entre les points A' et B' . La zone entre A' et B (le système interne) sera notée $\Sigma_{A'B}$.

Théorème 11.2 : Premier principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **premier principe** s'écrit :

$$(1.27) \quad dm \left(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p \right) = dm (q + w_u) \quad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Toutes ces grandeurs **se rapportent au fluide** qui traverse le système et sont **massiques**. w_u est le travail massique utile à l'intérieur du système, par exemple une hélice, et ne prend pas en compte le travail des forces de pression.

(ATTENTION)

Ça ressemble beaucoup au premier principe, mais c'est l'enthalpie qui rentre en jeu, car elle inclut u et le travail des forces de pression qui se trouvaient dans le membre de droite de l'équation.

Preuve 11.2.1 On étudie le système Σ représenté par la zone colorée sur la figure 1.1.

On peut considérer l'évolution de Σ comme le passage d'un système fermé à un autre : on part du système fermé Σ_{AB} à l'instant t , pour arriver au système ouvert $\Sigma_{A'B'}$ à l'instant $t + dt$. On applique alors le premier principe (équation (1.4b) page 9) :

$$\begin{aligned} dU + dE_c + dE_p &= \delta W + \delta Q \\ dU + dE_c + dE_p &= \delta W_u + \delta W_{pression} + \delta Q \end{aligned}$$

Or en appliquant la formule (1.26) précédente :

$$dU + dE_c + dE_p = dm(\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_p)$$

Ainsi :

$$dm (\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_p) = dm (w_u - Pv + q)$$

Et on reconnaît $h = u + Pv$, d'où l'équation finale :

$$dm (\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = dm (w_u + q).$$

□

1.7.3 Deuxième principe

Théorème 11.3 : Deuxième principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **second principe** s'écrit :

$$(1.28) \quad \Delta s = s_{\text{échangée}} + s_{\text{créée}} \quad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Comme pour le premier principe, ces grandeurs sont celles du fluide traversant le système et sont massiques.

Chapitre 2

Transferts thermique

2.1 Conduction

C'est le phénomène à petite échelle qui se produit sans mouvement des particules lors d'une diffusion de chaleur. C'est un processus très lent.

Définition 12 : Vecteur densité de flux thermique

Le transfert thermique passant à travers une surface fermée $d\vec{S}_M$ sera caractérisé par le vecteur densité de flux thermique \vec{j}_{th} . La quantité d'énergie qui traverse une surface orientée $d\vec{S}_M$ entre t et $t + dt$ est :

$$(2.1a) \quad \delta^2 Q = \vec{j}_{th} d\vec{S} dt$$

En notant $d\vec{S}_M = dS \vec{n}_M$:

$$(2.1b) \quad \varphi_{\vec{n}_M}(M, t) = \vec{j} \cdot \vec{n}_M$$

Définition 13 : Flux Thermique

On appelle **flux thermique** la puissance d'un transfert thermique :

$$(2.2) \quad \delta Q = \Phi dt$$

On prendra φ tel que $\Phi = \varphi S$

Théorème 13.1

Le flux thermique $\Phi(t)$ traversant une surface $d\vec{S}_M$ est :

$$(2.3) \quad \Phi(t) = \iint_{M \in S_M} \vec{j}_{th}(M, t) \cdot d\vec{S}_M$$

C'est le flux du champ de vecteurs $\vec{j}_{th}(M, t)$.

Théorème 13.2 : Loi de FOURIER

C'est une loi empirique qui donne la densité volumique de courant thermique \vec{j}_{th} en fonction d'un champ de températures T :

(Fourier)

$$\vec{j}_{th} = - \underbrace{\lambda}_{\text{Conductivité Thermique}} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

\vec{j}_{th} est en $W \cdot m^{-2}$,
 λ est en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

Conformément au programme, la loi de FOURIER doit être interprétée :

Théorème 13.3 : Premier principe de Thermodynamique

Le premier principe de thermodynamique (équation (1.4a) page 9) s'énonce, en diffusion, avec :

(2.4)

$$dU = \delta Q + \mathcal{P}_{\text{prod}} dt$$

Souvent, $\mathcal{P}_{\text{prod}} = \iiint \mathcal{P}_V dV$

Théorème 13.4 : Bilan local d'énergie

Pour un système Σ de matière dans un volume \mathcal{V} quelconque, de capacité thermique massique c et de masse volumique μ ,

(2.5)

$$\mu c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{th}(M, t) = \mathcal{P}_V(M, t)$$

Preuve 13.4.1 (Bilan à une dimension) On suppose que la température ne dépend que d'une dimension, x par exemple. On compte appliquer le premier principe sous la forme :

$$d^2U = \delta^2Q + \delta^2W$$

On étudie un cylindre de longueur dx , de section S (donc de volume $\mathcal{V} = Sdx$). Si μ est la masse volumique du cylindre et c sa capacité thermique massique, alors la capacité thermique du cylindre étudié est $C = mc = \mu \mathcal{V} c = \mu S c dx$. On peut alors exprimer d^2U et δ^2Q :

$$d^2U = C \Delta T$$

Donc :

$$\begin{aligned} d^2U &= \mu S c dx (T(x, t + dt) - T(x, t)) \\ &= \mu S c dx dt \frac{T(x, t + dt) - T(x, t)}{dt} \\ d^2U &= \mu c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} S dx dt \end{aligned}$$

Finalement, puisqu'ici $\delta^2 W = 0$, on retrouve :

$$d^2 U = \delta^2 Q + 0$$

soit :

$$\begin{aligned} \mu c \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz &= - \frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} dxdydz \\ \mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Qui est l'expression (2.5) □

Preuve 13.4.2 (Cas général) On utilise le premier principe de thermodynamique vu plus haut. D'après un DL au premier ordre, on détermine :

$$\begin{aligned} dU &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c (T(M, t + dt) - T(M, t)) dV \\ &= \left(\iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c \left(\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right) \right) dt \end{aligned}$$

Le transfert thermique est, par définition de \vec{j} :

$$\delta Q = \left(- \oint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

Qui est, d'après l'équation d'OSTROGRADSKI (Ostrogradski) page 98

$$= \left(- \iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div } j_{th} dV \right) dt$$

Et enfin :

$$\mathcal{P}_{prod} dt = \left(\iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_V dV \right) dt$$

Puisque le volume est constant et le même pour toutes les intégrales, on peut dire que : $\mu c \left(\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right) = -\text{div } j_{th} + \mathcal{P}_V$ □

Théorème 13.5 : Équation de diffusion thermique

Pour un champ T de températures, on a l'équation :

$$(2.6) \quad \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \overbrace{\Delta T}^{\text{Laplacien de } T} + P_v$$

avec c la capacité calorifique massique à volume constant, μ la masse volumique, et λ définit comme précédemment.

Définition 14 : Résistance thermique

C'est la grandeur R_{th} telle que :

$$(T_1 - T_2) = \Phi_{1 \rightarrow 2} R_{th}$$

Théorème 14.1 : Résistances usuelles

Pour deux plaques parallèles de surfaces S distantes de L :

$$(2.8) \quad R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Pour deux cylindres coaxiaux de hauteur H , de rayons R_1 et R_2

$$(2.9) \quad R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda H}$$

2.2 Convection

Bien plus rapide que la conduction, c'est quand la diffusion thermique est accompagnée d'un mouvement de particules (par exemple quand on ouvre une fenêtre)

Définition 15

Encore une loi empirique, la loi phénoménologique de NEWTON :

$$(2.10) \quad \varphi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_s - T_f)$$

Cette équation permet surtout de donner : $\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = hS(T_s - T_f)$

Par définition de R_{th} et par identification, l'interface entre un solide et un fluide a donc pour résistance $R_{th} = \frac{1}{hS}$

Chapitre 3

Statique des fluides

3.1 Champ de pression d'un fluide

Définition 16 : Définition générale

La pression et la masse volumique sont définies comme des champs scalaires fonctions des variables d'espace.

Théorème 16.1 : Relation fondamentale de la statique

Pour un champ de pesanteur \vec{g} , le champ de pesanteur P vérifie localement :

$$(3.1a) \quad \frac{dP}{dz} = \rho g$$

où ρ est la masse volumique locale. On l'intègre en :

$$(3.1b) \quad P(z) = P_0 + \rho g z$$

La norme d'une force \vec{F}_p exercée par une pression P sur une surface S est $F = P \cdot S$

3.2 Théorème d'ARCHIMÈDE

Théorème 16.2 : Poussée d'ARCHIMÈDE

Un corps entièrement immergé dans un liquide subit une force opposée au poids du volume du fluide déplacé. C'est à dire :

$$(3.2) \quad \vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

Chapitre 4

Électronique

Méthode

Résoudre

Loi des nœuds	$\sum_{\text{Nœud}} i = 0$	Loi des mailles	$\sum_{\text{Maille}} u = 0$
Puissance	$\mathcal{P} = u \times i$	Énergie électrique reçue	$\Delta E = \int_{\Delta t} \mathcal{P}(t) dt$
Inductance	$u = L \frac{di}{dt}$ $E = \frac{1}{2} Li^2$	Capacité	$i = C \frac{du}{dt}$ $E = \frac{1}{2} Cu^2$

Lois de KIRCHOFF

Pour ne pas avoir trop d'équations redondantes avec les lois de Kirchhoff, on pourra suivre la méthode suivante :

- On compte le nombre b de branches et n de nœuds.
- On écrit $(n - 1)$ lois des nœuds
- On écrit $((b - (n - 1)))$ lois des mailles
- On résout le système final

4.1 Circuits linéaires dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

Définition 17 : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

On parle d'ARQS quand le courant se propage assez rapidement pour pouvoir considérer que son établissement est instantané.

Ainsi, pour une Onde Électromagnétique (OEM) sinusoïdale de période temporelle T et de

période spatiale λ , telle que $\lambda = c \cdot T$ (où c désigne la vitesse de l'onde), et pour un observateur situé à une distance D d'un point quelconque du circuit, on est dans le cadre de l'ARQS si $D \ll \lambda$.

Définition 18

Un courant électrique résulte d'un déplacement de charges q . On peut dès lors définir l'intensité I et la tension U d'un dipôle :

$$(4.1) \quad I = \frac{dq}{dt} \quad U_{AB} = V_A - V_B$$

Théorème 18.1 : Loi d'Ohm

Loi d'Ohm Globale

$$(4.2) \quad u = Ri \quad i = Gu$$

4.1.1 THÉVENIN-NORTON

Théorème 18.2 : Équivalence de THÉVENIN-NORTON

Dans le modèle de THÉVENIN, un générateur de tension est la combinaison d'un générateur de tension idéal de *Force Électromotrice* E et d'une résistance interne R :

$$(4.3) \quad u = E - Ri$$

Ce générateur est équivalent, dans le modèle de NORTON, à la combinaison d'un générateur de courant idéal de *courant de court-circuit* $I_0 = \frac{E}{R}$ et d'une résistance R en parallèle (on prendra $G = \frac{1}{R}$) :

$$(4.4) \quad i = I_0 - Gu$$

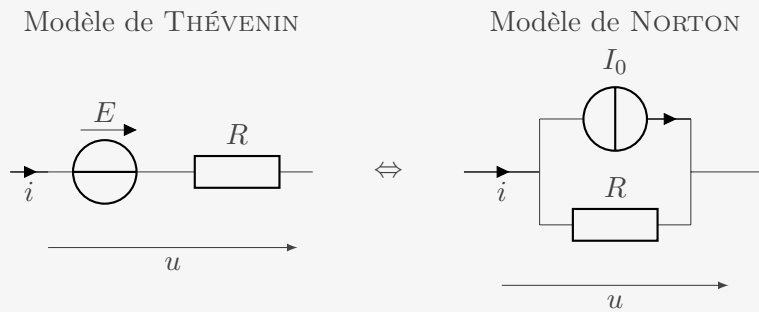
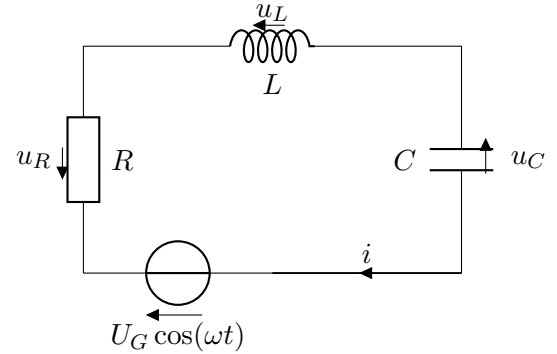


FIGURE 4.1 – Équivalence THÉVENIN-NORTON

4.2 Régime transitoires

Mise en équation :

$$\begin{cases} u_C + u_L + u_R = U_G \cos(\omega t) \\ u_R = Ri \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$$



4.3 Amplificateur Opérationnel (AO)

Définition 19 : L'Amplificateur Opérationnel

Un Amplificateur Opérationnel (AO) est un **circuit intégré** à huit bornes dont 5 sont utilisées en TP. C'est un composant **actif** qui doit être alimenté par un courant stable continu.

Propriétés

Les propriétés générales d'un AO :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation : $V_S \in [-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}]$
- L'intensité de sortie est limitée par une valeur de saturation : $I_S \in [-I_{\text{sat}}; I_{\text{sat}}]$

En régime linéaire (avec une boucle de **rétroaction négative**), on a :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est **presque nulle** : $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation : $V_S \in] - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}} [$

Au contraire, en régime saturé (avec une boucle de **rétroaction positive**), on a :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est **quelconque** : $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est saturée du signe d' ε : $V_S \in \{ - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}} \}$

Enfin, l'A.O idéal a les propriétés suivantes :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont nuls : $I_- = I_+ = 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est nulle en régime linéaire : $\varepsilon = 0$

4.4 Régimes sinusoïdaux

Méthode

Formules

Théorème de MILLMAN
$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_k \frac{1}{Z_k}}$$

Puissance moyenne
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_0 I_0 \cos \varphi}{2}$$

Étudier un circuit électrique

Lorsqu'on doit étudier un circuit, il peut être utile de penser aux méthodes suivantes :

- Calculer les impédances équivalentes
- Utiliser des ponts diviseurs
- Appliquer les lois de KIRCHOFF
- Trouver des équivalences THÉVENIN-NORTON
- Appliquer la formule de Millman

Théorème 19.1 : Impédance des dipôles usuels

On donne, pour les dipôles usuels, leur impédance en complexes \underline{Z} :

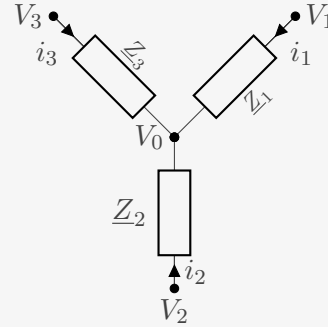
Dipole	$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$	
Résistance	$\underline{u} = R \cdot \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Résistance}} = R$
Bobine	$\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Bobine}} = jL\omega$
Condensateur	$C \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$

Preuve 19.1.1 On remarque que pour des fonction complexes, dériver $f = re^{j(\omega t + \varphi)}$ revient à multiplier f par $j\omega$. On obtient alors immédiatement toutes les formules précédentes en les exprimant bien sous la forme $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

Théorème 19.2 : MILLMAN

Le théorème de MILLMAN permet de calculer le potentiel d'un nœud

$$(4.5) \quad V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_k \frac{1}{Z_k}}$$



4.4.1 Puissance

Définition 20 : Puissance instantanée

La **puissance instantanée** est une fonction du temps :

$$(4.6) \quad \mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$$

En **convention récepteur**, c'est la puissance reçue par le dipôle.

En **convention générateur**, c'est la puissance cédée par le dipôle.

Définition 21 : Energie

L'**énergie** est l'intégrale de la puissance :

$$(4.7) \quad \mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt$$

Définition 22 : Puissance moyenne

On s'intéresse plus souvent à la **puissance moyenne** \mathcal{P}_m sur un intervalle de temps τ

$$(4.8) \quad \mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{P}(t)dt$$

En général, on prend $\tau = T$ la période d'une fonction sinusoïdale.

On définira la **valeur moyenne** d'une fonction du temps de cette même manière :

$$(4.9) \quad \langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Théorème 22.1 : Valeur efficace

La **valeur efficace** est la valeur continue qui fournirait la même énergie pendant un

même intervalle de temps. Pour une tension $u(t) = Ri(t)$:

$$(4.10) \quad U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

La valeur efficace est donc la racine carrée de la moyenne du carré, en anglais *Root Mean Square* (RMS).

Preuve 22.1.1 Par définition de la valeur efficace, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= U_{\text{RMS}} I_{\text{RMS}} \times T \\ \int_0^T u(t)i(t)dt &= U_{\text{RMS}} \frac{U_{\text{RMS}}}{R} T \\ \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt &= \frac{U_{\text{RMS}}^2}{R} T \\ U_{\text{RMS}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \end{aligned}$$

Pour un régime sinusoïdal, $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$, donc :

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

4.5 Filtres

Définition 23 : Fonction de transfert

La **fonction de transfert** \underline{H} d'un quadripôle de tension d'entrée \underline{v}_e et de tension de sortie \underline{v}_s est définie par :

$$(4.12) \quad \underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

Définition 24 : Filtre

Un **filtre** est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend de la pulsation ω

4.5.1 Fonctions de transfert usuelles

1 ^{er} ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
	Passe-haut	$\frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	
2 ^e ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$
	Passe-haut	$\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	
	Passe-bande	$\frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	
	Coupe-bande	$\frac{H_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	

4.5.2 Diagrammes de Bode

Définition 25 : Gain et phase d'un quadripôle

On peut écrire la fonction de transfert sous la forme polaire :

$$\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

On définit alors le **gain** $G(\omega)$ comme le rapport des amplitudes d'entrées et de sortie et la **phase** $\varphi(\omega)$ comme le déphasage entre ces mêmes signaux.

Ainsi :

$$(4.13) \quad G(\omega) = \sqrt{\underline{H}\overline{H}} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}\underline{H}}{\text{Re}\underline{H}}$$

Définition 26 : Diagramme de BODE

Le **diagramme de BODE** d'un quadripôle est l'ensemble des deux tracés en fonction de $\log(\omega)$:

- du gain en décibel $G_{\text{dB}} = 20 \log(G(\omega))$
- de la phase $\varphi(\omega)$

(ATTENTION)

Il est souvent commode d'avoir recours à une variable réduite comme $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où ω_0 est une constante qui permet de simplifier les calculs

Définition 27 : Pulsation de coupure à -3 dB

La **pulsation de coupure** ω_c correspond à la valeur de la pulsation pour laquelle le gain maximum G_{max} est divisé par $\sqrt{2}$:

(4.14)

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Chapitre 5

Traitement du signal

5.1 Signaux périodiques

Définition 28 : Signal périodique

On appelle **signal périodique** de période T_s un signal sous la forme tel que :

$$(5.1) \quad s(t + T_s) = s(t)$$

Remarque : Pour le moment, notre signal a une forme quelconque, il n'est pas, *a priori*, sinusoïdal.

Théorème 28.1 : Développement en série de FOURIER

Tout signal périodique de fréquence f_s peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_s (sous la forme nf_s). C'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$(5.2) \quad s(t) = A_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes.

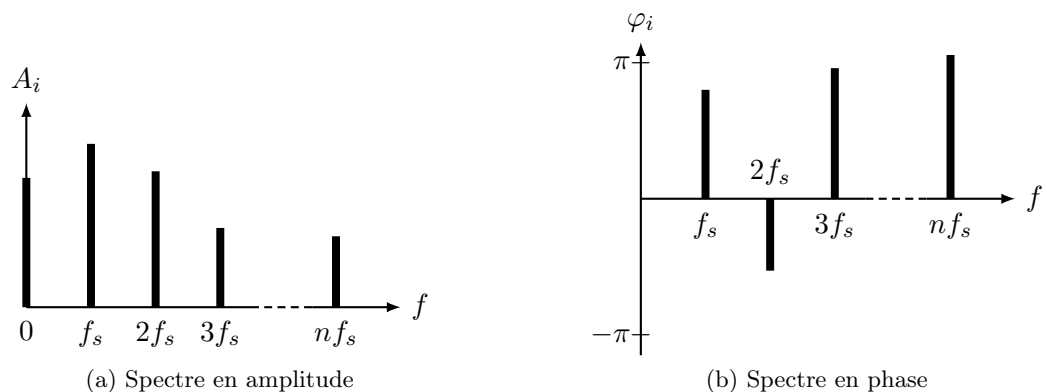


FIGURE 5.1 – Spectre d'un signal périodique

5.2 Électronique numérique

Définition 29 : Échantillonnage

L'**échantillonnage** d'un signal consiste à prélever à intervalles de temps réguliers T_e la valeur d'un signal analogique $s(t)$.

Le signal s_n^* obtenu est alors une suite, et $s_n^* = s(n T_e)$.

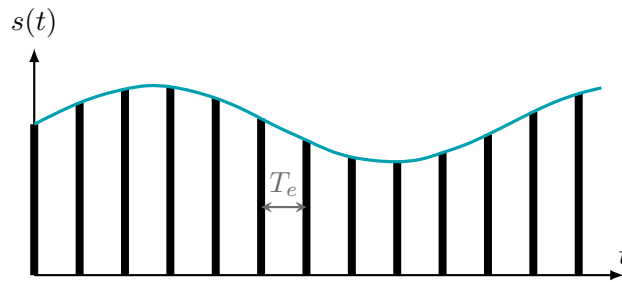


FIGURE 5.2 – Échantillonnage

Théorème 29.1 : Condition de NYQUIST-SHANNON

Pour que l'échantillonnage d'un signal ne modifie pas son spectre, il faut que la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$ soit supérieure au double de la plus grande fréquence f_{\max} contenue dans ce spectre :

(5.3)

$$f_e > 2f_{\max}$$

Chapitre 6

Mécanique du Point

Méthode

Formules Usuelles

Intéractions fondamentales

Force Gravitationnelle $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_r$

Force Électrostatique $\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2}$

Forces usuelles

Poids $\vec{P} = m \vec{g}$

Force de LORENTZ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Force de Rappel $\vec{F} = k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$

Énergies usuelles

Energie potentielle générale $E_p(A) - E_p(B) = W_{A \rightarrow B}$

Energie potentielle gravitationnelle $E_p = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r_{AB}}$

Energie potentielle de pesanteur $E_p = mgh$

Energie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Energie potentielle élastique $E_{p,e} = \frac{k(l - l_0)^2}{2}$

6.1 Étude cinétique

Définition 30 : Force de Rappel

Cette force est déterminée expérimentalement, au voisinage d'une longueur d'équilibre l_0 , par :

$$(6.1) \quad \vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$$

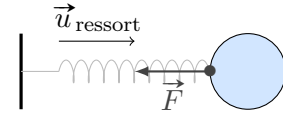


FIGURE 6.1 – Force de rappel d'un ressort

6.2 Loi de la quantité de mouvement

Définition 31 : Quantité de mouvement

Un point M de masse m de vecteur vitesse \vec{v} possède une **quantité de mouvement** définie par la formule :

$$(6.2) \quad \vec{p}(M) = m \vec{v}(M)$$

Théorème 31.1

La **quantité de mouvement** d'un système Σ fermé de centre d'inertie G est

$$(6.3) \quad \vec{p}(\Sigma) = m \vec{v}(G)$$

6.3 Approche Énergétique

Définition 32 : Système conservatif

Un **système conservatif** est un système dont l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ est constante.

Définition 33 : Force conservative

C'est une force dont le travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin emprunté.

6.3.1 Puissance et travail

Définition 34 : Puissance d'une force

La **puissance** caractérise la contribution d'une force \vec{F} sur un objet en mouvement à une vitesse \vec{v} .

$$(6.4) \quad \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Définition 35 : Travail d'une force

Le travail est la somme des contributions d'une force \vec{F} sur un objet en mouvement :

$$\begin{aligned} (6.5) \quad \delta W &= \mathcal{P} dt \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$(6.6) \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

6.3.2 Énergie cinétique

Définition 36 : Énergie cinétique

C'est la première énergie qu'on définit :

$$(6.7) \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Pour le **théorème de la puissance cinétique**, cf théorème 44.4 page 43. Le théorème de l'énergie cinétique a été vu en première année* :

Théorème 36.1

Il dérive de l'expression de l'énergie mécanique :

$$(6.8) \quad \underbrace{\frac{dE_m(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action non conservatives}}} = \frac{dE_c(\Sigma)}{dt} + \underbrace{\frac{dE_p(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action conservatives}}}$$

Théorème 36.2 : Théorème de l'énergie cinétique

On peut déduire du théorème précédent que

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \text{La variation d'énergie cinétique} & \text{ est égale à } \text{la somme des travaux des forces} \\ E_c(B) - E_c(A) &= \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i) \\ dE_c &= \delta W_{A \rightarrow B} \end{aligned}$$

(ATTENTION) Pour l'énergie cinétique, on prend toutes les forces en comptes. Conservatives ou non.

6.3.3 Énergie potentielle

Définition 37 : Énergie potentielle

L'énergie potentielle dérivant d'action conservatives, on peut la définir ainsi, en définissant un point O comme l'origine :

*. cf page 418 du livre *Physique !* de Jérôme MAJOU

$$(6.10) \quad E_p(M) = E_p(O) - W_{O \rightarrow M}(\vec{P})$$

En pratique, sur Terre, $E_p = mgh$

6.4 Forces centrales

Définition 38 : Force centrale

Dans un référentiel \mathcal{R} donné, une force est **centrale** si elle pointe en permanence vers un point fixe de \mathcal{R} .

Un champ de force centrale newtonien est défini par

$$(6.11) \quad \vec{F}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad E_p(r) = \frac{k}{r}$$

Théorème 38.1 : Loi des aires

Une force centrale présente un moment nul, donc le moment cinétique d'un objet soumis exclusivement à une force centrale est constant d'après le Théorème du Moment Cinétique (TMC) (théorème 44.3 page 42).

La trajectoire est alors plane et vérifie :

$$(6.12a) \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m} = C$$

D'où on déduit, en définissant \mathcal{V} comme étant la vitesse aréolaire d'un point de masse m :

$$(6.12b) \quad \boxed{\mathcal{V} = \frac{\sigma_O}{2m} = \frac{C}{2}}$$

Preuve 38.1.1 Les forces centrales ont un moment nul. Donc, d'après le TMC :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = 0$$

Donc $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{constante}}$. Or, par définition du moment cinétique (cf. équation (7.6) page 41) :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= mr \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Théorème 38.2 : Lois de KEPLER

Les trois lois de KEPLER ont été définies expérimentalement vers la fin du XVI^e siècle :

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont l'un des foyers est le soleil
- Pendant un même intervalle de temps t , l'aire balayée par la trajectoire d'une planète est constante (loi des aires)
- La période T de révolution d'une planète est liée au demi grand axe a de sa trajectoire elliptique :

$$(6.13) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G m_{\text{Soleil}}}$$

6.5 Dynamique en référentiel non galiléen

Définition 39 : Référentiel galiléen

On dit qu'un référentiel \mathcal{R} est **galiléen** si les interactions physiques suffisent à justifier les mouvements

(ATTENTION) Cette définition limite la caractérisation d'un référentiel galiléen à la précision de nos expérimentations

Définition 40 : Mouvement relatif de deux référentiels

Le mouvement d'un référentiel \mathcal{R}' relativement à un autre référentiel \mathcal{R} est caractérisé par une vitesse de translation ($\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$) et une vitesse angulaire de rotation ($\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$).

Théorème 40.1 : Dérivation d'un vecteur dans deux référentiels

Si $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le vecteur rotation de \mathcal{R} relativement à \mathcal{R}' , alors la dérivée temporelle d'un vecteur \vec{x} est

$$(6.14) \quad \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{x}$$

6.5.1 Loi de composition des vitesses

Théorème 40.2 : Composition des vitesses

La vitesse d'un point M s'exprime, dans un référentiel non galiléen \mathcal{R} en mouvement relativement à un autre référentiel \mathcal{R}' galiléen, par :

$$(6.15) \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{vitesse de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{OM}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$$

6.5.2 Loi de composition des accélérations

Théorème 40.3 : Composition des accélérations

L'accélération d'un point M s'exprime, dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}' en mouvement relativement à un autre référentiel \mathcal{R} galiléen, par :

$$(6.16) \quad \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{a}(O')_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{Accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{Accélération de CORIOLIS}}$$

6.5.3 Forces d'inerties

Les forces d'inerties varient suivant le référentiel. On en distingue 4 :

Force d'inertie de translation	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{translation}} = -m \vec{a}(O)_{\mathcal{R}}$
Force d'inertie centrifuge	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{centrifuge}} = m \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 r \vec{u}_r$
Force d'inertie de rotation différentielle	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{différentielle}} = -m \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$
Force d'inertie complémentaire de CORIOLIS	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{coriolis}} = -2m \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$

Remarque : La force d'inertie de rotation différentielle est maintenant hors-programme, car on ne se place que dans des cas où la rotation est uniforme.

Frottement solide

Théorème 40.4 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle \vec{T} en fonction du frottement solide et de la composante normale \vec{N} :

$$(6.17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Statique} & \vec{T}_0 \leq \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \stackrel{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right.$$

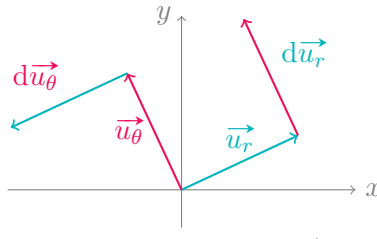
Chapitre 7

Mécanique du solide

7.1 Préambule

7.1.1 Dérivée d'un vecteur

Ce problème est courant quand on a les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ à dériver. Il suffit de les décomposer selon la base \vec{u}_x, \vec{u}_y en utilisant les fonctions cosinus et sinus. On obtient alors :

$$(7.1) \quad \begin{cases} \frac{d(\vec{u}_r)}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d(\vec{u}_\theta)}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{cases}$$


D'où, en utilisant que $\frac{d(\vec{u})}{dt} = \frac{d(\vec{u})}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$, le résultat $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}}{d\theta}$

7.1.2 Dérivée en coordonnées polaires

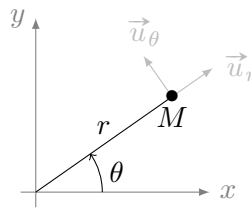


FIGURE 7.1 – Coordonnées polaires

Théorème 40.5 : Vitesse et accélération en coordonnées polaires

Soit $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, comme représenté sur la figure 7.1.

$$(7.2) \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Preuve 40.5.1 Il suffit de dériver \overrightarrow{OM} :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \\ \vec{v} &= \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

Théorème 40.6 : Relation de **VARIGNON**

Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir : la formule de « **Babar** »

$$(7.3) \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}_B = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

Rappel : La quantité de mouvement $\vec{P} = m\vec{v}$ se conserve. Cette idée est souvent utile en mécanique.

7.2 Définitions

Définition 41 : Moment $\vec{\mathcal{M}}$ d'une force

On définit le **moment** $\vec{\mathcal{M}}$ (équivalent couple $\vec{\Gamma}$) d'une force \vec{F} appliquée en un point M sur un levier de centre O :

$$(7.4) \quad \underset{\text{Moment}}{\vec{\mathcal{M}}} = \underset{\text{Couple}}{\vec{\Gamma}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

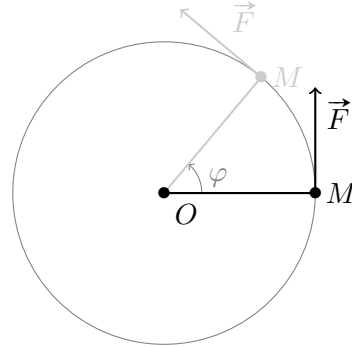


FIGURE 7.2 – Moment d'une force

Définition 42 : Torseur cinétique

C'est un torseur tout simple $[\vec{\sigma}, \vec{p}]$

$$(7.5) \quad \vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}}$$

Rappel : La vitesse de rotation ω permet de déterminer la vitesse \vec{v} . Pour un solide en rotation autour d'un axe Δ :

$$\text{D'après Varignon, on a} \quad \vec{v}(M) = \omega \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\text{D'où} \quad \vec{\omega}(\Sigma) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\Delta$$

$$\text{Dans le mouvement précédent} \quad v(M) = \omega \cdot OM_{\text{rayon}}$$

Définition 43 : Moment cinétique $\vec{\sigma}_O$

Le moment cinétique caractérise le mouvement de rotation d'un point par rapport à un autre. Il suffit de prendre la relation de notre torseur précédent, appliqué en O sans mouvement :

(7.6)

$$\vec{\sigma}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

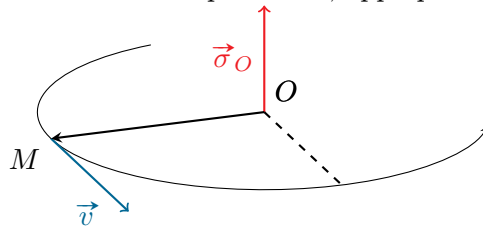


FIGURE 7.3 – Moment cinétique

7.3 Théorèmes de Koënig

Théorème 43.1 : 1^e théorème de Koënig

C'est le torseur cinétique appliquée en A par rapport à G le centre du référentiel barycentrique :

(7.7)

$$\vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}_{Br}}_{\text{Moment cinétique du référentiel barycentrique}} + \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}(G)$$

Moment cinétique du référentiel barycentrique

Théorème 43.2 : 2^e théorème de Koënig

Une application du premier théorème à l'énergie cinétique :

(7.8)

$$E_{c,R} = E_{c,Br} + \frac{1}{2} M (\vec{v}(G))^2$$

7.4 Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide caractérise la répartition de la masse dans un solide.

Définition 44 : Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide Σ par rapport à un axe Δ est :

$$(7.9) \quad J_{\Delta} = \iiint_{P \in \Sigma} d(P, \Delta)^2 dm = \iiint_{P \in \Sigma} d(P, \Delta)^2 \rho dV_P$$

Où $d(x, \Delta)^2$ est la distance à l'axe Δ d'un volume élémentaire dV de masse volumique ρ dans le solide Σ .

Théorème 44.1

On relie la vitesse de rotation d'un axe Δ du solide à J_{Δ} par

$$(7.10) \quad \boxed{\vec{\sigma} = J_{\Delta} \cdot \omega \vec{u}_{\Delta}}$$

et on peut alors calculer l'énergie cinétique :

$$(7.11) \quad E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$



7.5 Théorèmes de dynamique

Ce sont les 3 théorèmes les plus importants.

Théorème 44.2 : Théorème de la Résultante Cinétique (TRC)

C'est en réalité le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) qu'on voit en terminale et en première, mais la version originale avec la quantité de mouvement.

$$(7.12) \quad \frac{d \overbrace{\vec{P}_{Rg}}^{m \vec{v}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \text{ est équivalent à } \sum \vec{F} = m \vec{a}$$

Théorème 44.3 : Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Pour un couple $\vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$ issu des forces extérieures appliquées en A et un moment cinétique $\vec{\sigma}(A)$ appliqué en un point A , on a :

$$(7.13a) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$(7.13b) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(A)$$

C'est un équivalent du PFD, mais qui prend en compte la rotation, c'est à dire le

moment cinétique. Pour les définitions du moment d'une force et du moment cinétique, on se référera à la formule (7.6). On est souvent amené à utiliser cette équation en conjonction avec l'équation (7.10) du moment d'inertie.

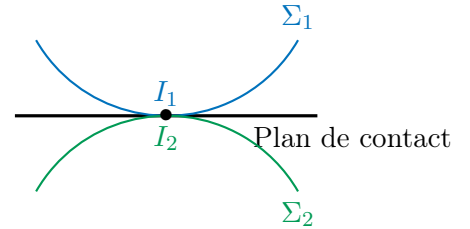
Théorème 44.4 : Théorème de la puissance cinétique

$$(7.14) \quad \frac{dE_c}{dt} = \underbrace{\sum_i P_i}_{\text{Puissances des forces qui travaillent}}$$

7.6 Solides en contact

On définit la **vitesse de glissement instantané** entre deux solides Σ_1 et Σ_2 par :

$$(7.15) \quad \vec{v}_{\text{glissement}} = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)$$



Définition 45 : Roulement sans glissement

Deux conditions :

- $\vec{v}_{\text{glissement}} = 0$
- $\vec{\omega}_{/\Sigma_2}(\Sigma_1)$ est parallèle au **plan de contact**

Théorème 45.1 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle \vec{T} en fonction du frottement solide et de la composante normale \vec{N} :

$$(7.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Statique} \quad \vec{T}_0 = \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} \quad \vec{T} \left| \begin{array}{l} \geq \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \\ \underset{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Chapitre 8

Optique

8.1 Optique géométrique

Méthode

Formules de conjugaison

$$\begin{array}{ll} \text{Miroir} & \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \\ & \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \\ \text{Lentille} & \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \end{array}$$

Techniques

- Les dessins miroirs peuvent être « développés » pour obtenir la représentation d'une lentille
- Règles de construction pour les dioptrés et les miroirs
 - Un rayon passant par le centre n'est pas dévié
 - Un rayon incident parallèle à l'axe passe, après son passage par le système optique, par le foyer image
 - Un rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique
 - Deux rayons parallèles à l'axe se croisent au foyer image
 - Deux rayons se croisant au foyer objet ressortent parallèles du système optique
- Ne pas oublier le principe de retour inverse de la lumière

8.1.1 Stigmatisme et aplanétisme

Définition 46 : Système stigmatique

Un système optique est dit rigoureusement **stigmatique** pour le couple de points $(A; A')$ si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir été déviés par le système.

Si A' est une tâche assez petite au lieu d'un point, on parle de **stigmatisme approché**

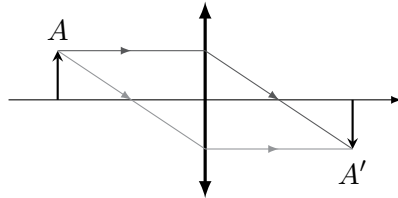


FIGURE 8.1 – Système rigoureusement stigmatique

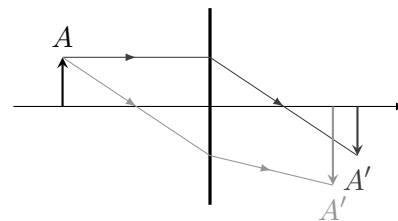


FIGURE 8.2 – Système non stigmatique

Définition 47 : Système aplanétique

Soit (S) un système optique. Soient A et A' deux points de l'axe optique conjugués par (S) et soit B un point du plan transverse de A . Le système est dit **aplanétique** pour A si B' , le conjugué de B par (S) , est dans le plan transverse de A' .

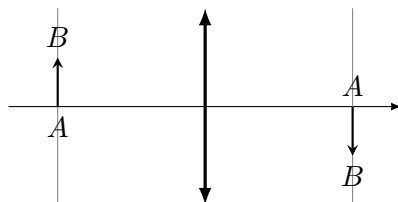


FIGURE 8.3 – Système rigoureusement aplanétique

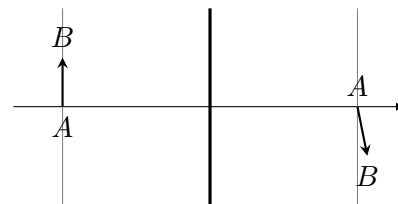


FIGURE 8.4 – Système non aplanétique

Définition 48 : Conditions de GAUSS

Les **conditions de GAUSS** permettent de vérifier l'aplanétisme et le stigmatisme approchés :

- Les rayons lumineux font un **angle petit** avec l'axe du système
On parle de **rayons paraxiaux**
- Les rayons lumineux **rencontres** les dioptries ou les miroirs **au voisinage de leur sommet**
- L'**angle d'incidence** des rayons sur les dioptries ou les miroirs est **petit**

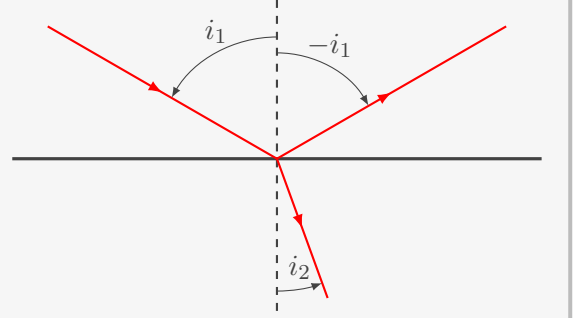
8.1.2 Réflexion et réfraction

Théorème 48.1 : Loi de DESCARTES

La loi de DESCARTES stipule que l'angle de réflexion est le même que l'angle d'incidence. De plus, la loi permet de calculer l'angle du rayon réfracté :

(8.1)

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



8.2 Optique ondulatoire

Méthode

Définitions

$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$			
Périodicité temporelle	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	Vibration Complexe	$\underline{s(M, t)} = A(M) e^{i(\varphi(M) - \omega t)}$
Périodicité spatiale	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Amplitude Complexe	$\underline{a(M)} = A(M) e^{i\varphi(M)}$
$c = \lambda\nu$	$\lambda = cT$	Éclairement (cf. (8.8))	$\mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$

Propriétés

$$s(M, t) = \text{Re}(\underline{s(M, t)}) \quad \left| \quad \varphi(M) = \arg(\underline{a(M)}) \right.$$

$$A(M) = |\underline{a(M)}| = |\underline{s(M, t)}| \quad \left| \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} K |\underline{a(M)}|^2 = \frac{1}{2} K |\underline{s(M, t)}|^2 \right.$$

8.2.1 Modèle scalaire des ondes lumineuses

Définition 49 : Onde Électromagnétique (OEM)

Une OEM est le couple (\vec{E}, \vec{B}) . C'est l'oscillation couplée du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} .

Définition 50 : Vibration lumineuse

Le modèle ondulatoire de la lumière étant plus vieux que les OEMs, la **vibration lumineuse** $s(M, t)$ est une composante quelconque du champ électromagnétique. C'est-à-dire que $s(M, t) = \vec{E}$ ou \vec{B} .

Théorème 50.1 : Superposition

On admet que la vibration lumineuse en un point M à l'instant t est la somme des toutes les vibrations lumineuses en ce point :

$$(8.2) \quad s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

Chemin optique

Définition 51 : Chemin optique

Soit un rayon lumineux passant par les points M et N en un temps t_{MN} . Le **chemin optique** (MN) parcouru par la lumière est :

$$(8.3) \quad (MN) = c \cdot t_{MN}$$

En milieu homogène où l'onde se déplace à une vitesse v , si MN est la distance parcourue, on a $t_{MN} = \frac{MN}{v}$.

Théorème 51.1 : Déphasage dû à la propagation

Soient deux point M et N de chemin optique (MN) . Le **retard de phase** en N par rapport à la phase au point M est :

$$(8.4) \quad \varphi(N) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) = \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN)$$

Preuve 51.1.1 Le retard en temps accumulé en N est de t_{MN} . Donc :

$$s(N, t) = \underbrace{s(M, t - t_{MN})}_{\text{Vibration en } M, t_{MN} \text{ secondes plus tôt}}$$

Donc :

$$A(N) \cos(\omega t - \varphi(N)) = A(M) \cos\left(\omega(t - t_{MN}) - \varphi(M)\right)$$

Ce qui implique :

$$-\varphi(N) = -\omega t_{MN} - \varphi(M)$$

Or par définition de (8.3) : $t_{MN} = \frac{(MN)}{c}$, d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN) \\ &= \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) \end{aligned}$$

Avec $\lambda_0 = cT = c \frac{2\pi}{\omega}$ la longueur d'onde dans le vide. □

Théorème 51.2 : Réflexion métallique

La lumière subit un déphasage de π lors de sa réflexion dans un matériau. Le chemin optique se voit modifié de $\frac{\lambda_0}{2}$:

$$(8.5a) \quad \varphi (\text{Avant réflexion}) = \varphi (\text{Après réflexion}) + \pi$$

$$(8.5b) \quad \varphi (\text{Avant réflexion}) = \varphi (\text{Après réflexion}) + \frac{\lambda_0}{2}$$

Trains d'onde

Le modèle de train d'onde considère une onde lumineuse comme un ensemble de trains d'ondes émis aléatoirement. Il y a donc, pour chaque train d'onde, un temps et une longueur « de cohérence » pendant lequel un autre train d'onde peut interférer.

Théorème 51.3 : Temps de cohérence

Les atomes émettent la lumière par trains d'ondes de durée limitée τ_c telle que :

$$(8.6) \quad \Delta\nu \sim \frac{1}{\tau_c}$$

La durée moyenne des trains d'ondes est appelée **temps de cohérence**.

Définition 52 : Longueur de cohérence

La **longueur de cohérence** l_c est la distance que parcourt la lumière dans le vide pendant τ_c :

$$(8.7) \quad l_c = c \tau_c$$

l_c représente la longueur moyenne d'un train d'onde.

Éclairement et intensité

Les récepteurs de lumière (comme l'œil et les capteurs CCD) sont sensibles à une valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent. Il convient alors de définir l'éclairement pour décrire ce que l'on voit.

Définition 53 : Éclairement

Les capteurs photo-sensibles ayant un taux de rafraîchissement lent relativement à la vitesse de la lumière et à sa pulsation ω , ils font une moyenne sur une période de la vibration reçue. C'est alors qu'on définit l'**éclairement** :

$$(8.8) \quad \mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

8.2.2 Superposition d'ondes lumineuses

Lumière monochromatique

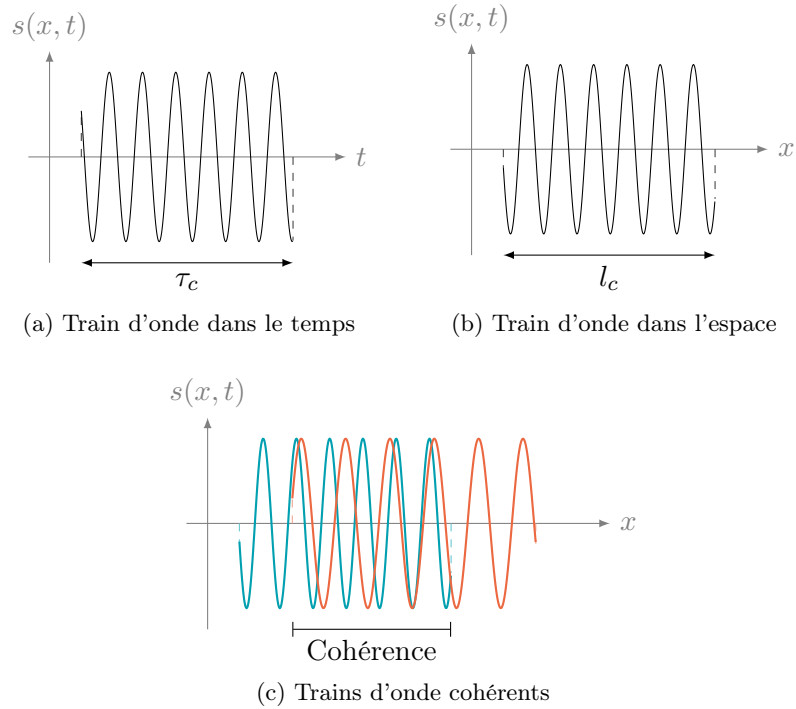


FIGURE 8.5 – Trains d'onde dans le temps et dans l'espace

Définition 54 : Lumière monochromatique

La **lumière monochromatique** est la forme la plus idéale de vibration. Elle est « purement » sinusoïdale :

$$(8.9) \quad s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Cette vibration présente une périodicité temporelle et une périodicité spatiale :

- Périodicité temporelle :

caractérisée par la **période** T , la fréquence $\nu = \frac{1}{T}$, et la **pulsation** ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Périodicité spatiale :

caractérisée par la **longueur d'onde** λ (période spatiale), le **nombre d'onde** $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ (fréquence spatiale), et le **module d'onde** (pulsation spatiale) k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On les relie avec la vitesse de propagation :

Pour la lumière dans le vide :

$$(8.10) \quad \lambda_0 = cT$$

Interférences

Prenons deux sources S_1 et S_2 , de vibrations respectives $s_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$ et $s_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$.

Théorème 54.1 : Formule de FRESNEL

Pour le système ainsi défini, l'éclairement résultant d'interférences est donné par la **formule de FRESNEL** :

$$(8.11) \quad \begin{aligned} s(M, t) &= s_1(M, t) + s_2(M, t) \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \underbrace{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}_{\text{Nul si } \omega_1 \neq \omega_2} \end{aligned}$$

Ainsi, le terme d'interférence $2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$ n'est valable que si :

- Les ondes 1 et 2 doivent être de même pulsation (i.e $\omega_1 = \omega_2$)
- Les sources S_1 et S_2 doivent être cohérentes
- Le déphasage ne doit pas dépasser la longueur de cohérence l_c
- Le déphasage doit être quasiment constant sur une durée du temps de réponse du détecteur utilisé

Preuve 54.1.1 On exprime l'éclairement total en M , $\mathcal{E}(M)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= K \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle \\ &= K \langle (s_1(M, t))^2 \rangle + K \langle (s_2(M, t))^2 \rangle + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \\ &= \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \end{aligned}$$

Étudions ce deuxième terme $\mathcal{E}_{12}(M) = 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle$:

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

D'après la formule de trigonométrie (13.3) page 92 ($\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(M) &= \frac{1}{2} \times 2K A_1(M) A_2(M) \left(\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \right) \end{aligned}$$

La valeur moyenne d'un cosinus étant nulle, on sait de plus que :

$$\begin{aligned} \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle &= 0 \text{ car } \omega_1 + \omega_2 \neq 0, \text{ et que} \\ \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle &\neq 0 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0. \end{aligned}$$

Si on considère que $\omega_1 - \omega_2 = 0$, alors le deuxième terme $\mathcal{E}_{12}(M)$ devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{12}(M) &= K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \\ &= 2 \sqrt{\frac{K}{2} A_1(M)^2} \sqrt{\frac{K}{2} A_2(M)^2} \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \\ &= 2 \sqrt{\mathcal{E}_1(M) \mathcal{E}_2(M)} \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle\end{aligned}$$

Comme précédemment, $\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ est constant.

Alors, $\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle = \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$ □

Remarque : en complexe, ça va beaucoup plus vite.

Contraste

Définition 55 : Contraste, visibilité

Sur une figure d'interférence, on appelle **contraste** ou **visibilité** le rapport :

$$(8.12) \quad C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Théorème 55.1

Le contraste est maximal lorsque $I_1 = I_2$ dans la formule de FRESNEL (8.11)

8.2.3 Trous d'YOUNG

Étudions le dispositif suivant : deux fentes (F_1) et (F_2) sont éclairées par une source S à l'infini formant un angle α_0 avec l'origine.

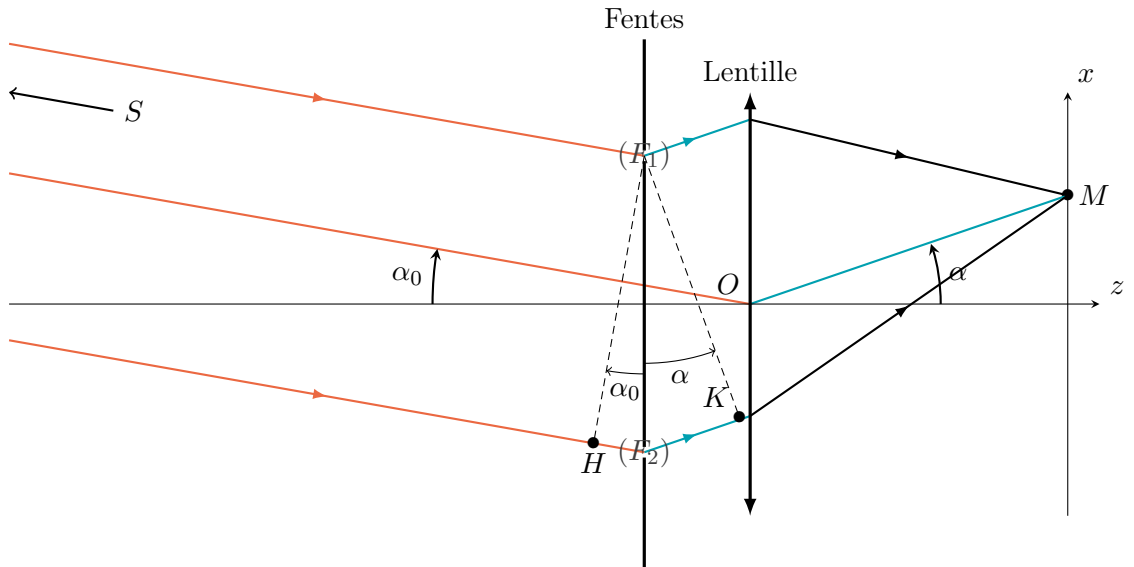


FIGURE 8.6 – Dispositif des trous de YOUNG

Quelques remarques : Puisque M est dans le plan transversal du foyer de la lentille, on sait que les rayons bleus sont parallèles avant de passer par la lentille.

De plus, la présence de la lentille F' impose que l'on soit dans les conditions de GAUSS pour l'angle α (cf. définition 48 page 45 pour les conditions de GAUSS). Ainsi, on peut écrire l'approximation

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

avec f' la distance focale de la lentille F' .

Pour nous aider dans les calculs, on note H et K les projetés orthogonaux de (F_1) . Calculons la différence de marche $\delta(M)$:

$$\begin{aligned} \delta(M) &= (SF_2M) - (SF_1M) \\ &= (SH) + (HF_2) + (F_2K) + (KM) - ((SF_1) + (F_1M)) \end{aligned}$$

Les chemins optiques en couleur se soustraient. Il nous reste :

$$\delta(M) = (HF_2) + (F_2K)$$

(ATTENTION)

Il ne faut pas omettre de préciser pourquoi (KM) et (F_1M) sont identiques.

En effet : H et (F_1) sont dans le même plan d'onde car ils viennent directement de S qui est à l'infini et qui émet une onde plane. Mais le plan contenant K et (F_1) n'est pas *a priori* un plan d'onde du fait que les ondes issues des fentes ne sont plus planes. Pour raisonner, on dira que l'onde issue de M est sphérique, donc après passage par la lentille, elle devient plane. Ainsi, (F_1) et K sont bien sur le même plan d'onde.

Maintenant, en remarquant qu'on peut reporter les angles α et α_0 (cf. le schéma), les calculs de (HF_2) et (F_2K) se font facilement :

$$\begin{aligned} (HF_2) &= n_{\text{air}} HF_2 \\ &= n_{\text{air}} a(-\sin \alpha_0) \\ &= -n_{\text{air}} a \sin \alpha_0 \\ &\approx -n_{\text{air}} a \alpha_0 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (F_2K) &= n_{\text{air}} a \sin \alpha \\ &\approx n_{\text{air}} a \alpha \\ (F_2K) &\approx n_{\text{air}} a \frac{x}{f'} \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat :

$$(8.13a) \quad \delta(M) \approx n_{\text{air}} a \left(\frac{x}{f'} - \alpha_0 \right)$$

$$(8.13b) \quad i = \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}} a}$$

Pour décrire au mieux ce que l'on observe, on définit l'ordre d'interférence.

Définition 56 : Ordre d'interférence

L'ordre d'interférence $p(M)$ est défini par :

$$(8.14) \quad p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda}$$

— **Théorème 56.1** —

Plus l'ordre d'interférence p est proche d'un entier $m \in \mathbb{Z}$, plus l'interférence est constructive, et plus il y a d'intensité lumineuse. À l'inverse, l'interférence est destructive en $m + \frac{1}{2}$.

8.2.4 Interféromètre de MICHELSON

L'interféromètre de MICHELSON est un exemple de dispositif interférométrique à division d'amplitude.

Configuration en lame d'air

— **Définition 57 : Lame d'air** —

Dans le dispositif de MICHELSON, lorsque les miroirs M_1 et M_2 sont perpendiculaires, on dit que le dispositif est configuré en **lame d'air**.

M'_1 , le symétrique de M_1 (cf. figure 8.7), est alors à une distance e de M_2 et forme une « lame d'air ».

Théorème 57.1

Pour un interféromètre de MICHELSON réglé en **lame d'air**, en utilisant les notations de la figure 8.7 page 54, on démontre les formules suivantes :

- Différence de marche :

$$(8.15a) \quad \delta(M) = 2ne \cos i$$

- Déphasage :

$$(8.15b) \quad \Delta\varphi(M) = \frac{4\pi ne \cos i}{\lambda_0}$$

- Ordre d'interférences :

$$(8.15c) \quad p(M) = \frac{2ne \cos i}{\lambda_0}$$

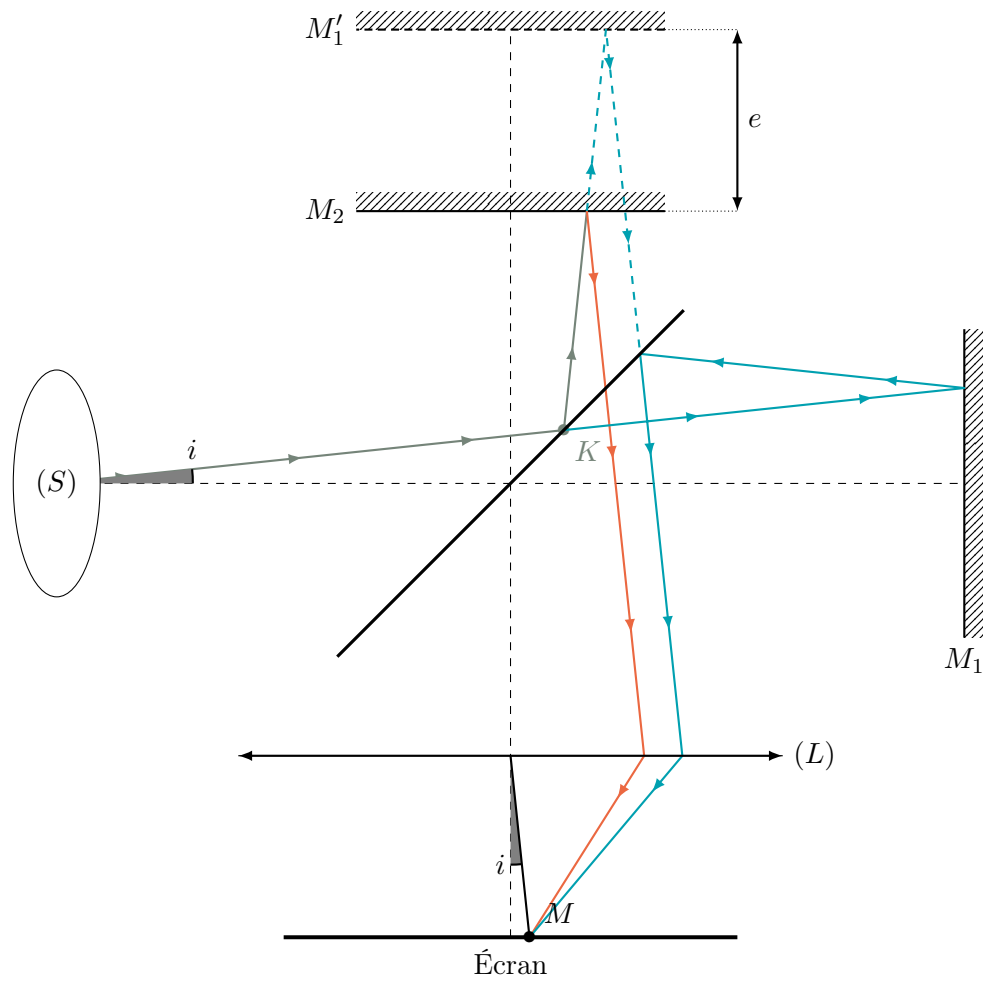


FIGURE 8.7 – Interféromètre de MICHELSON en lame d'air

Configuration en coin d'air

Définition 58 : Configuration en coin d'air

Dans le dispositif de MICHELSON, lorsque les miroirs M_1 et M_2 ne sont pas perpendiculaires, on dit que le dispositif est configuré en **coin d'air**.

M'_1 , le symétrique de M_1 (cf. figure 8.8), est alors incliné d'un angle α par rapport à M_2 et forme un « coin d'air ».

Théorème 58.1

Pour un interféromètre de MICHELSON réglé en **coin d'air**, on démontre les formules suivantes :

- Différence de marche :

$$(8.16a) \quad \delta(M) = 2ne$$

- Déphasage :

$$(8.16b) \quad \Delta\varphi(M) = \frac{4\pi ne}{\lambda_0}$$

- Ordre d'interférences :

$$(8.16c) \quad p(M) = \frac{2ne}{\lambda_0}$$

Ce théorème est admis.

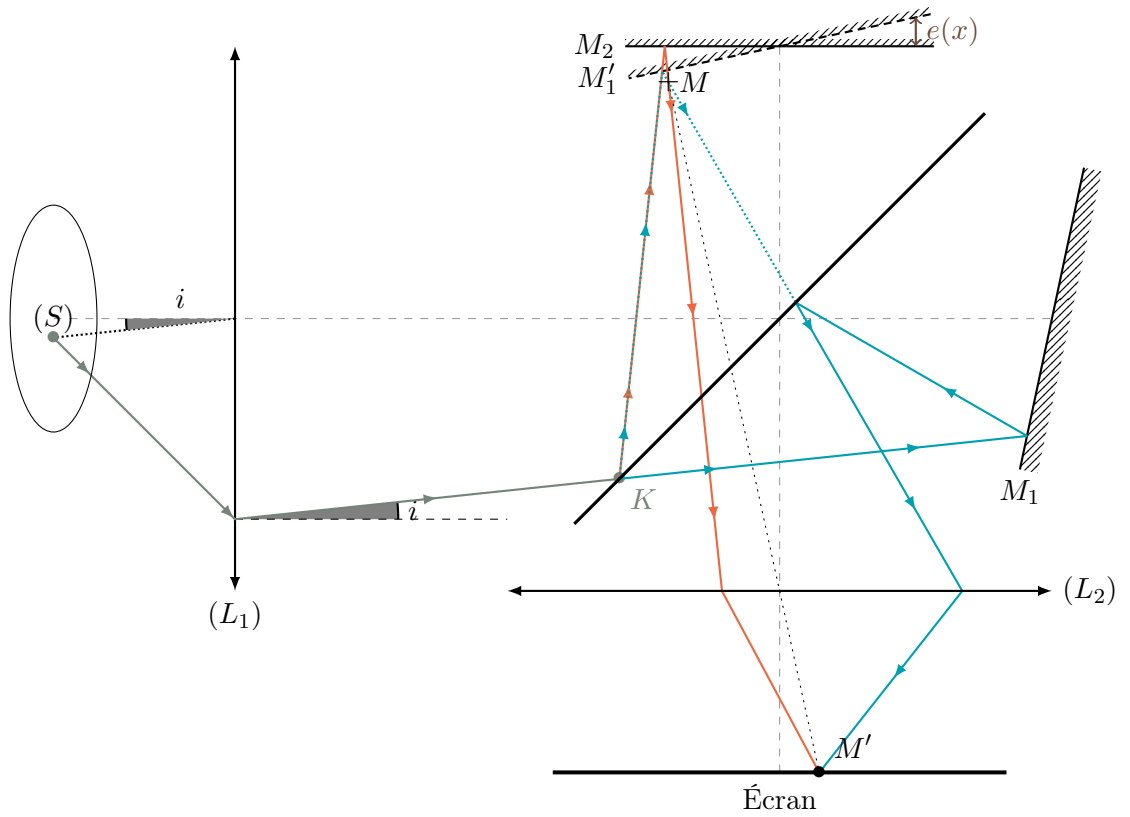


FIGURE 8.8 – Interféromètre de MICHELSON en coin d'air. La lentille (L_1) permet d'obtenir une source étendue à l'infinie. La lentille (L_2) conjugue M à M' .

Théorème 58.2

Si on note x l'abscisse de la réflexion sur le miroir, et α l'inclinaison du miroir, alors $e(M)$ est donné par :

$$(8.17) \quad e(M) = |\alpha x|$$

8.2.5 Diffraction

Théorème 58.3 : Ouverture d'un faisceau

On trouve expérimentalement que l'angle θ_m d'ouverture d'un faisceau projeté sur un trou de diamètre D vérifie :

$$(8.18) \quad \sin \theta_m = 1,22 \frac{\lambda_0}{D}$$

Définition 59 : Principe d'HUYGENS-FRESNEL

Tout point P d'une surface Π issu d'une même source \mathcal{S} agit comme une source secondaire d'amplitude proportionnelle à celle de la source.

La vibration lumineuse en un point donné est la somme des vibrations émises par l'ensemble des sources secondaires.

$$(8.19) \quad \underline{a(M)} = \mathcal{C}_0 \iint_{P \in \Pi} \frac{\underline{a(P)}}{PM} e^{i \overbrace{k_0 PM}^{\varphi(M)}}$$

Théorème 59.1 : Diffraction de FRAUNHOFER

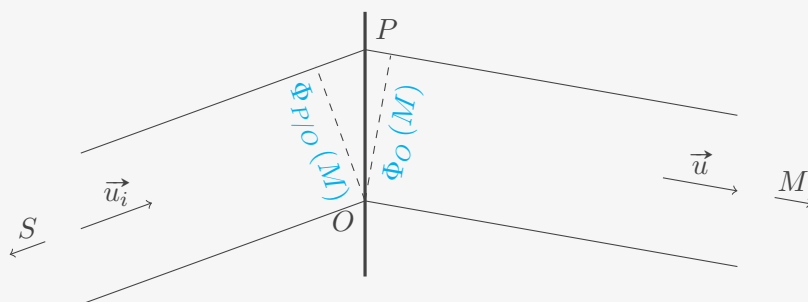


FIGURE 8.9 – Objet diffractant

$$(8.20) \quad \Phi_{P/O}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP} + \underbrace{\arg(t(p))}_{\text{Si l'objet est quelconque}}$$

En remaniant l'équation (8.19) d'HUYGENS-FRESNEL avec cette nouvelle phase :

$$(8.21) \quad \underline{a(M)} = \frac{\mathcal{C}_0}{OM} A(P) e^{i\Phi_O(M)} \iint \underline{t(P)} e^{-i \frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}}$$

(ATTENTION) Ne pas oublier le $\frac{2\pi}{\lambda_0}$!

8.2.6 Réseaux

Théorème 59.2 : Formule des réseaux

Dans un réseau

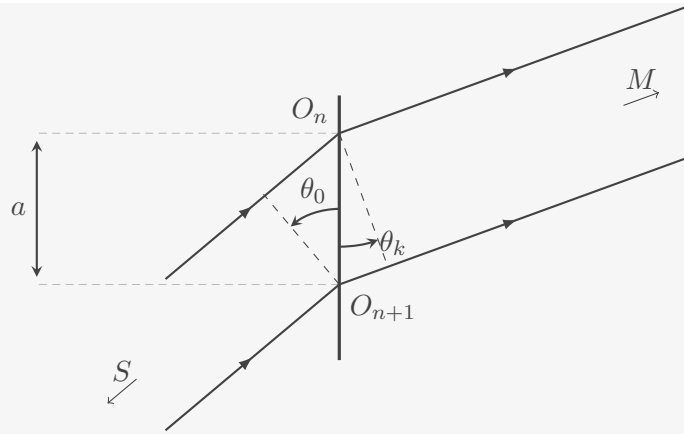


FIGURE 8.10 – Deux fentes O_n et O_{n+1} d'un réseau

(8.22)

$$\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$$

k est appelé **ordre de diffraction**

Preuve 59.2.1 Calculons la différence de marche $\delta_d(M)$ entre deux rayons O_n et O_{n+1} :

$$\delta_d(M) = a \sin \theta_k - a \sin \theta_0$$

On a alors l'ordre d'interférences : $p(M) = \frac{\delta_d(M)}{\lambda_0} = \frac{a}{\lambda_0} (\sin \theta_k - \sin \theta_0)$.

Pour que les N ondes qui interfèrent créent des interférences constructives, il faut que l'ordre entre deux ondes n et $n+1$ soit un entier k relatif.

Avec cette condition, $p(M) = k$, d'où $\sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$ □

Chapitre 9

Électromagnétisme

Méthode

Champ électrostatique

Pour trouver le champ \vec{E} :

1. Appliquer le théorème de Gauss
2. Appliquer les formule de Coulomb (9.2a)

9.1 Électrostatique

9.1.1 Loi de COULOMB

Définition 60 : Force de COULOMB

C'est la force électromagnétique entre deux charges q_A et q_B

$$(9.1) \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

Théorème 60.1

On peut définir la force de COULOMB comme $\vec{F} = q_B \vec{E}(B)$ où :

$$(9.2a) \quad \boxed{\vec{E}(B) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}}$$

Mais on retiendra :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{dV}{\|\vec{PM}\|^3} & \rho(M) &= \frac{dQ(M)}{dV} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \frac{dS}{\|\vec{PM}\|^3} & \sigma(M) &= \frac{dQ(M)}{dS} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \lambda \frac{dl}{\|\vec{PM}\|^3} & \lambda(M) &= \frac{dQ(M)}{dl}
 \end{aligned}
 \tag{9.2b}$$

9.1.2 Propriétés du champ électrostatique

Théorème 60.2 : Principe de superposition

Soient n particules A_1, A_2, \dots, A_n immobiles dans l'espace.

Le champ électrostatique résultant est la somme des champs engendrés par ces particules :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{A_i}(M)
 \tag{9.3}$$

Théorème 60.3 : Symétries

Le champ \vec{E} est symétrique pour une distribution symétrique des charges.

On en déduit que le champ \vec{E} est colinéaire aux plans de symétries des distributions des charges, et orthogonal aux plans d'anti-symétrie.

9.1.3 Circulation du champ électrostatique

Théorème 60.4 : Circulation d'un champ

Soit q_A une charge située en A . Soit \vec{E}_A le champ électrostatique créé par q_A .

La circulation de \vec{E}_A le long d'un chemin $C \rightarrow D$ est

$$\mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\vec{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\vec{D}}
 \tag{9.4a}$$

D'après le théorème de superposition, on peut dire que la circulation d'un champ créé par une **distribution quelconque de charges** est

$$\mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\vec{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\vec{D}}
 \tag{9.4b}$$

La circulation de \vec{E} ne dépend donc pas du chemin emprunté, mais seulement des points de départ et d'arrivée. On va pouvoir définir un potentiel

Définition 61 : Potentiel Electrostatique

Le potentiel $V(M)$ en un point M est défini tel que

$$\mathcal{C}_{M \rightarrow N}(\vec{E}) = V(M) - V(N)$$

Ainsi, **potentiel électrostatique** $V(M)$ créé par une charge q_A en un point A est donné par

$$(9.5) \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} + \text{constante}$$

Théorème 61.1 : Potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique** $V(M)$ est lié au champ $\vec{E}(M)$ par la relation :

$$(9.6) \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

(ATTENTION) Pour un champ $\vec{E}(M)$ donné, $V(M)$ n'est pas unique.

Théorème 61.2 : Energie potentielle

L'**énergie potentielle** d'une charge ponctuelle q soumise à la force exercée par un champ \vec{E} de potentiel V est

$$(9.7) \quad E_p(M) = qV(M)$$

9.1.4 Flux du champ électrostatique

Théorème 61.3 : Équation de MAXWELL-GAUSS

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Gauss).

Le flux de \vec{E} à travers la surface orientée d'un volume est proportionnelle à la charge contenue dans ce volume :

$$(9.8) \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

L'objectif est de trouver un volume tel que \vec{E} ne dépende d'aucune variable de l'intégrale $\oint_S d\vec{S}$. Par exemple, $\oint_{\theta,z} E \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$, où on peut sortir $E \vec{u}_r$. En général, ce

théorème est très utile avec les symétries.

(ATTENTION) Ce sont des surfaces qu'on étudie avec le théorème de GAUSS. Pas des volumes...

9.1.5 Dipôle électrostatique

Définition 62 : Dipôle électrostatique

On appelle **dipôle électrostatique** le système de **deux charges ponctuelles opposées** (q et $-q$) situées en deux points N et P tels que $\|\overrightarrow{NP}\|$ soit très petit devant les autres

distances envisagées.

Définition 63 : Moment dipolaire

Le **moment dipolaire** p d'un dipôle est défini par :

$$(9.9) \quad \vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$



FIGURE 9.1 – Moment dipolaire

Théorème 63.1 : Potentiel électrostatique d'un dipôle

Le potentiel électrostatique créé en M par un dipôle électrostatique est

$$(9.10) \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right)$$

Théorème 63.2 : Potentiel créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire p :

$$(9.11) \quad V(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

Théorème 63.3 : Champ électrique créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire p :

$$(9.12) \quad \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta}{r^3}$$

Théorème 63.4 : Force et moment d'un champ uniforme sur un dipôle

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle électrostatique est

$$(9.13) \quad \vec{F} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P)$$

Quand le champ est uniforme, $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$, donc $\vec{F} = 0$, et la résultante des forces est nulle.

Il y a néanmoins un couple \mathcal{M}_0 qui s'applique sur le dipôle en son centre 0 :

$$(9.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= q \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} \right) \wedge \vec{E} \\ &= q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \\ \mathcal{M}_0 &= \vec{p} \wedge \vec{E} \end{aligned}$$

Le dipôle électrostatique va donc chercher à s'aligner avec le champ \vec{E} .

9.2 Magnétostatique

9.2.1 Champ magnétique

Définition 64 : Densité Volumique de Courant

La **densité volumique de courant** décrit le mouvement d'ensemble des particules de charges q passant à travers une surface élémentaire orientée dS_M .

Pour une surface élémentaire dS décrite par son vecteur normal $d\vec{S}$, le courant électrique di à travers cette surface est relié à \vec{j} par

$$(9.15a) \quad di = \vec{j} \cdot d\vec{S} \qquad i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Un courant électrique est un débit de charges électriques à travers une surface orientée. Si on note n le nombre de charges q par unité de volume :

$$(9.15b) \quad \vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v}$$

Ou encore, la troisième définition qu'on peut déduire :

$$(9.15c) \quad d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M dt$$

Théorème 64.1 : BIOT et SAVART

La formules de BIOT et SAVART permet de calculer des champs \vec{B} de manière plus directe qu'avec les équations de Maxwell. La contribution au champ \vec{B} d'un circuit est

$$(9.16) \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{Circuit}} \frac{i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

(ATTENTION) Ce théorème est désormais hors-programme

Théorème 64.2 : Équation de MAXWELL-AMPÈRE

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Ampère).

(ATTENTION) Elle n'est valable que si le deuxième terme $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}\right)$ est nul ou négligeable !

$$(9.17) \quad \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{Enlacé}}$$

Définition 65 : Force de LORENTZ

C'est la force subit par un charge q de vitesse \vec{v} dans des champs \vec{E} et \vec{B}

$$(9.18) \quad \vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Théorème 65.1 : Force de LAPLACE

On la revoit au théorème 70.6 page 70.

La force de LAPLACE existe sous deux formes, et on voit ici la forme intégrale qui caractérise les effets d'un champ \vec{B} sur un circuit, elle vient de la force de LORENTZ cf. équation (9.18) page 62

$$(9.19) \quad \vec{F}_{\text{LAPLACE}} = \int_{M \in \text{Circuit}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

9.2.2 Dipôle Magnétique

Définition 66 : Moment magnétique

Le **moment magnétique** $\vec{\mathcal{M}}$ d'une distribution de courant d'intensité I , de surface S et de vecteur normal \vec{n} est :

$$(9.20) \quad \vec{\mathcal{M}} = I S \vec{n}$$

Son unité est en $A \cdot m^2$

Définition 67 : Dipôle magnétique

Un **dipôle magnétique** est une distribution de courant tel que :

- $\vec{\mathcal{M}}$ non nul
- La taille caractéristique a est infiniment petite devant les autres longueurs

Action du dipôle magnétique sur l'extérieur

Théorème 67.1 : Potentiel vecteur et champ magnétique

Le potentiel vecteur créé par un dipôle en M est, en notant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$(9.21) \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Le champ magnétique créé par ce même dipôle en M est

$$(9.22) \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}}}{r^5}$$

$$(9.23) \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

Théorème 67.2

Un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ \vec{B}_{ext} est

soumis à un couple de moment

$$(9.24) \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

L'énergie potentielle qui en résulte est :

$$(9.25) \quad E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

9.3 Équations de MAXWELL

9.3.1 Principe de conservation de la charge

Théorème 67.3 : Équation de conservation de la charge

Il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique. Ce postulat donne lieu à l'équation de conservation de la charge :

$$(9.26) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

9.3.2 Les équations de MAXWELL

Ces 4 équations sont les plus importantes. À elles 4 elles permettent de retrouver intégralement le programme de première année.

Théorème 67.4 : Les Équations de MAXWELL

$$(\text{Maxwell-Gauss}) \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$(\text{Maxwell-Flux}) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$(\text{Maxwell-Faraday}) \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(\text{Maxwell-Ampère}) \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Grâce aux formules de STOKES ([Stokes](#)) et d'OSTROGRADSKI ([Ostrogradski](#)) de la page 98, on peut obtenir les versions intégrales des équations de MAXWELL. On a aussi la loi de FARADAY ([9.41](#)) de la page 69.

Définition 68 : Célérité de la lumière dans le vide

On définit la célérité c de la manière suivante :

$$(9.27) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

C'est la vitesse de la lumière

Équations de propagation

Théorème 68.1 : Équation de d'ALEMBERT

Dans le vide, en l'absence de charges ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les champs électrique et magnétique vérifient l'équation de d'ALEMBERT

$$(9.28) \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Preuve 68.1.1 *Démontrons le cas pour \vec{B} , la démonstration pour \vec{E} est analogue.*

On part de l'équation (Maxwell-Ampère) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Comme dans beaucoup de démonstration, on applique un deuxième $\vec{\text{rot}}$

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On peut intervertir les opérateurs ∂ et $\vec{\text{rot}}$:

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\text{rot}} \vec{E}}{\partial t}$$

Sachant que $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \text{div} (\vec{\text{grad}} \vec{B})$

$$\vec{\text{grad}} \left(\underbrace{\text{div} \vec{B}}_0 \right) - \underbrace{\text{div} (\vec{\text{grad}} \vec{B})}_{\Delta \vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Théorème 68.2 : Potentiels

Au champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$, on peut associer un couple de potentiels $(V(M, t), \vec{A}(M, t))$ tel que :

$$(9.29) \quad \begin{cases} \vec{B} &= \vec{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}(V) \end{cases}$$

Preuve 68.2.1 *Comme $\text{div} \vec{B} = 0$ (Équation 3 de Maxwell (Maxwell-Faraday)),*

on sait que \vec{B} est un champ rotationnel. Donc il existe \vec{A} tel que

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Maintenant, en prenant l'équation 2 de Maxwell (Maxwell-Flux), $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial (\text{rot } \vec{A})}{\partial t}$.
En intervertissant les opérateurs, et en faisant tout passer à gauche :

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Donc on sait que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champ à gradient. D'où il existe V tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

9.3.3 Equations de POISSON et de LAPLACE

En statique, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$, ce qui équivaut à l'existence d'un potentiel $V(M)$ tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ (c'est l'équation (9.6) qu'on voit en électrostatique page 60).

Théorème 68.3

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'équation de POISSON :

$$(9.30) \quad \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

(ATTENTION)

$\Delta V(M)$ est le laplacien de $V(M)$. Ce n'est pas la variation Δ .

Lorsqu'une zone est en plus vide de charge, $\rho(M) = 0$ et l'équation devient l'équation de LAPLACE :

$$(9.31) \quad \Delta V(M) = 0$$

Preuve 68.3.1 Il suffit d'injecter $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$ à l'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) page 64 :

$$(9.32) \quad \text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V \right) (M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Or, par définition, $\text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} f \right) = -\Delta f$. □

(ATTENTION)

Le potentiel n'existe que quand $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$. En général, c'est en statique ou en régime permanent. Mais écrire $V(M, t)$ est absurde !

9.4 Énergie électromagnétique

Sur une particule chargée, la majorité des forces sont négligeables devant la force de LORENTZ. C'est ainsi qu'on peut appliquer le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) (équation (7.12) page 42)

Théorème 68.4 : Densité volumique de force

La **densité volumique de force électromagnétique** est :

$$(9.33a) \quad \vec{f}_V(M, t) = \rho(M, t)\vec{E}(M, t) + \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Cette force est volumique, donc elle s'exerce sur les charges d'un volume dV tel que :

$$(9.33b) \quad d\vec{F} = \vec{f}_V(M, t) dV$$

Preuve 68.4.1 On part de la force de LORENTZ (9.18) page 62 :

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En infinitésimal :

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = dq\vec{E} + dq\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On injecte $dq = \rho dV$

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = [\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \wedge \vec{B}] dV$$

D'où la force volumique : $\vec{f}_V = \rho\vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ □

Définition 69 : Puissance volumique

La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière est

$$(9.34) \quad \mathcal{P}_v(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

Avec la loi d'Ohm locale (9.38) page 68 :

$$\mathcal{P}_V(M, t) = \frac{\vec{j}^2(M, t)}{\gamma}$$

Définition 70

Le **vecteur de POYNTING** $\vec{\Pi}(M, t)$ est tel que l'énergie électromagnétique traversant la surface $d\vec{S}$ autour de M est :

$$(9.35) \quad d^2U_{\text{em}} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} dt$$

On admet les expressions suivantes :

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est

$$(9.36) \quad u_{\text{em}}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2(M, t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M, t)}{2\mu_0}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie, ou **vecteur de POYNTING** est

$$(9.37) \quad \vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Théorème 70.1 : Loi d'Ohm locale

Elle relie, en un point M , la densité volumique de courant $\vec{j}(M, t)$ au champ électrique $E(M, t)$:

$$(9.38) \quad \vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

Théorème 70.2 : Équation locale de POYNTING

L'équation locale de POYNTING est un bilan d'énergie. Elle donne :

$$(9.39) \quad \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M, t) + \text{div } \vec{\Pi}(M, t) = -(\vec{j} \cdot \vec{E})(M, t)$$

Preuve 70.2.1 *Le bilan d'énergie électromagnétique pour une surface \mathcal{S} est :*

$$(9.40) \quad \frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{sortant}} - \mathcal{P}_{\text{perdue}}$$

Exprimons ces grandeurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{perdue}} &= \iiint \mathcal{P}_V dV \\ &= \iiint (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV \\ \mathcal{P}_{\text{sortant}} &= \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_P \\ &= \iiint \text{div}(\vec{\Pi}) dV \\ \frac{dU_{\text{em}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint u_{\text{em}} dV \\ &= \iiint \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} dV \end{aligned}$$

ce qui nous donne, pour un volume d'intégration \mathcal{V}_M quelconque :

$$\iiint_{\mathcal{V}_M} \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} dV + \iiint_{\mathcal{V}_M} \text{div}(\vec{\Pi}) dV = \iiint_{\mathcal{V}_M} -(\vec{j} \cdot \vec{E}) dV$$

d'où le résultat.

□

9.5 Induction

Théorème 70.3 : Loi de FARADAY

Elle caractérise la force électromotrice e induit par un flux Φ_B

(9.41)

$$e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Théorème 70.4 : Loi de LENZ

Les effets de l'induction s'opposent à la cause qui les a produits.

9.5.1 Loi d'Ohm généralisée

Théorème 70.5

On considère un conducteur formé d'un fil de longueur L , de section s , constitué d'un matériau dont la conductivité électrique est γ , est branché entre un point A et un deuxième point B . La loi d'Ohm pour ce conducteur, dite généralisée, donne :

(9.42)

$$V(A, t) - V(B, t) = Ri + \overbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}}^{-e}$$

avec $R = \frac{L}{\gamma s}$.

C'est bien sûr l'équation 4.2 de la page 24.

Preuve 70.5.1

On part de

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

D'après la définition du $\overrightarrow{\text{grad}}$,

$$- \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M = - (V(B, t) - V(A, t)) = V(A, t) - V(B, t)$$

D'autre part, avec la loi d'Ohm locale (équation 9.38 page 68),

$$\begin{aligned} \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{1}{\gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \\ &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{Rs}{L} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \end{aligned}$$

Si on reprend la définition de \vec{j} de l'équation (9.15c) (définition 64 page 62), et qu'on prend $d\vec{l}_M = d\vec{\tau}_M dl_M$ ($d\vec{\tau}_M$ est orienté dans le sens de \vec{j}) :

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = Ri = [V(A, t) - V(B, t)] - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

En approximant : $-\int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = -\oint_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = -\frac{d\Phi_B}{dt} = e$ d'où

$$V(A, t) - V(B, t) = Ri - e$$

La force de LAPLACE est la résultante des forces du champ magnétique $\vec{B}(M)$ sur des charges en M

Théorème 70.6 : Force de Laplace

$$d\vec{F}_{v \text{ LAPLACE}} = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Cette force est bien volumique, car elle s'exprime en fonction de $\vec{j}(M)$. On retiendra surtout :

(9.43)

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

(ATTENTION)

I et $d\vec{l}$ doivent être colinéaires

9.5.2 Auto-induction

Définition 71 : Inductance propre

Pour un circuit électrique fixe et indéformable parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ crée un flux propre $\Phi_p(t)$ proportionnel à $i(t)$ dans les conditions d'ARQS

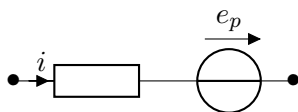
(9.44)

$$\Phi_p(t) = L i(t)$$

Cette relation définit L , le coefficient d'**inductance propre** du circuit.

Remarque : Dans la loi d'OHM vu précédemment (cf. équation (9.42) page 69), on peut prendre, en l'absence d'un champ magnétique extérieur, $-e = \frac{d\Phi_p}{dt} = L \frac{di}{dt}$, et alors :

$$V_A - V_B = Ri + L \frac{di}{dt}$$



9.5.3 Inductance mutuelle

Théorème 71.1 : Inductance mutuelle entre deux circuits

Pour deux circuits 1 et 2 parcourus respectivement par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, l'inductance mutuelle M d'un circuit sur un autre est proportionnelle à $i_*(t)$:

$$(9.45) \quad \begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M i_1(t) \\ \Phi_{2 \rightarrow 1}(t) = M i_2(t) \end{cases}$$

On admettra le **théorème de NEUMANN** qui donne

$$(9.46) \quad M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

9.5.4 Force électromotrice induite

Définition 72 : Champ électromoteur

Lorsqu'on déplace un conducteur à une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B}_0 stationnaire, il crée un **champ électrique électromoteur** \vec{E}_m

$$(9.47) \quad \vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}_0(M)$$

Théorème 72.1 : Force électromotrice induite

La **force électromotrice** e_{AB} **induite** par \vec{E}_m est, comme dans l'équation (9.41) de FARADAY :

$$(9.48) \quad e_{AB} = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{l}_M$$

9.6 Propagation et rayonnement

Méthode

Relations de structure

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

Relations de Passage

$$(9.49a) \quad E_2(A, t) - E_1(A, t) = \frac{\sigma(A, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{sortant}}$$

$$(9.49b) \quad B_2(A, t) - B_1(A, t) = \mu_0 \vec{j}(A, t) \wedge \vec{n}_{\text{sortant}}$$

9.6.1 Dans le vide

On se place dans une zone où il n'y a **ni charge, ni courant**. C'est à dire que $\rho = 0$ et alors $\vec{j} = 0$. Lorsqu'on reprend les équations de MAXWELL, les équations (Maxwell-Gauss) et (Maxwell-Ampère) sont modifiées :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Onde Plane Progressive

Définition 73 : Onde plane

Une **onde plane** est une solution **non constante** de l'équation de d'ALEMBERT qui prend des valeurs uniformes sur les plans perpendiculaires à une direction \vec{k} .

Une onde plane de pulsation ω se décrit de la manière suivante :

$$(OP) \quad U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) + g(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + vt)$$

Définition 74 : Onde plane progressive

Une **onde progressive** est une solution de l'équation de d'ALEMBERT qui s'écrit sous la forme $U(z, t) = f(z - vt)$. Elle se propage dans le sens positif de l'axe Oz

La forme générale d'une **Onde Plane Progressive (OPP)** de pulsation ω se propageant uniquement selon une direction \vec{k} est :

$$(OPP) \quad U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt)$$

Obtenir la solution des équations de d'ALEMBERT du théorème 68.1 permet de trouver la forme générale d'une onde. C'est ainsi qu'on peut déterminer la forme d'une OPP électromagnétique :

Théorème 74.1 : Onde électromagnétique

La forme générale d'une Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans le vide

dans la direction de \vec{u}_z est :

$$(9.50) \quad \vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(z - ct) \\ f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c}f_x(z - ct) \\ \frac{1}{c}f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la composante en \vec{u}_z des champs \vec{E} et \vec{B} sont nulles. Les champs \vec{E} et \vec{B} , qui sont donc perpendiculaires à la propagation de l'onde, sont dis **transversaux**. L'onde est appelée **transversale**

Preuve 74.1.1 Une OPP doit vérifier l'équation de D'ALEMBERT comme on l'a vu au théorème 68.1 page 65. Donc pour une onde se propageant selon \vec{u}_z , \vec{E} et \vec{B} sont de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(t - \frac{z}{c}) \\ f_y(t - \frac{z}{c}) \\ f_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} h_x(t - \frac{z}{c}) \\ h_y(t - \frac{z}{c}) \\ h_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix}$$

L'équation de MAXWELL-GAUSS (**Maxwell-Gauss**) (la version où $\rho = 0$ car dans le vide il n'y a pas de charge) donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial f_x(t - \frac{z}{c})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(t - \frac{z}{c})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} &= 0 \\ 0 + 0 + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Et nécessairement, $\frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} = 0$ implique que f_z est constante. Donc f_z est nulle. De même, l'équation de MAXWELL-Flux nous donne que h_z est nulle.

Avec l'équation de MAXWELL-FARADAY (**Maxwell-Faraday**), on trouve finalement que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} f'_y &= -h'_x \\ \frac{1}{c} f'_x &= h'_y \end{aligned}$$

Et on obtient les équations de propagation d'une onde électromagnétique. \square

Théorème 74.2 : Relations de structure

On structure les OPPs de la manière suivante :

- Le trièdre $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est **direct**
- La famille $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est **orthogonale**
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

Qui peuvent se résumer dans les **relations de structure** :

(9.51) $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \qquad c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$

Onde Plane Progressive Monochromatique

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) de pulsation ω se décrit de la manière suivante :

(OPPM) $U(M, t) = U_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_0)$

Définition 75 : Vitesse de Phase

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) se propage selon une direction $\vec{u} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$. On définit sa vitesse de phase :

(9.52) $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

Remarque : Dans le vide, $v_\varphi = c$, donc $k = \frac{\omega}{c}$.

Notation complexe

Opérateurs	Maxwell
$\frac{\partial}{\partial t} \bullet \Leftrightarrow i\omega \times \bullet$	(Maxwell-Gauss) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$
$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{U} \Leftrightarrow -i\vec{k} \times \underline{U}$	(Maxwell-Flux) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$
$\text{div} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Faraday) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$
$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Ampère) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \frac{1}{c^2} \underline{\vec{E}}$

Théorème 75.1 : Relations de structure d'une OPPM

De même que les relations de structure (9.51) d'une OPP, on obtient rapidement, avec

la forme complexe des équations de MAXWELL :

$$(9.53) \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

Preuve 75.1.1 D'après l'équation (Maxwell-Faraday) en complexes (en prenant la partie réelle) :

$$i \vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

Il vient immédiatement :

$$i \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = i \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

De même, en partant de l'équation (Maxwell-Ampère) en complexes (et toujours en prenant la partie réelle) :

$$i \vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega \frac{1}{c^2} \vec{E}$$

Qui donne, immédiatement :

$$i \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -i \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

Ces équations sont homologues à celles vues précédemment, car $k = \frac{\omega}{c}$

Polarisation

On considère une OPP *transverse*, donc qui s'écrit :

$$(9.54) \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_{0x} \cos(\omega t - kz) + \vec{E}_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

On appelle **onde polarisée rectilignement** une onde sous la forme

$$(9.55) \quad \vec{E} = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz)$$

9.6.2 Propagation dans un plasma

Définition 76 : Plasma

Un **plasma** est un conducteur constitué d'ions et d'électrons pour une charge globale neutre. Les conditions suivantes soient vérifiées

- Les ions positifs sont immobiles
- Il est peu dense, c'est à dire qu'on néglige les interactions électromagnétiques.

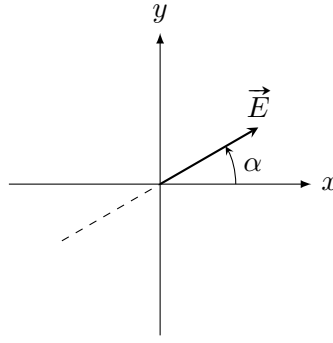


FIGURE 9.2 – Polarisation rectiligne

Théorème 76.1 : Densité volumique de courant

Il existe dans le plasma une densité volumique de courant :

$$(9.56) \quad \underline{j} = -i \frac{n_0 e^2}{m \omega} \underline{E}(M, t)$$

Preuve 76.1.1 Si on note \vec{f}_e et \vec{f}_m respectivement les forces de LORENTZ électrostatique et magnétostatique, alors on remarque que :

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{\| -e \vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e \vec{E} \|} \sim \frac{v}{c}$$

Or v est la vitesse de l'électron dans le milieu, et $v \ll c$ car l'électron est dit « non relativiste ». Donc $f_m \ll f_e$, et on peut négliger \vec{f}_e dans un PFD :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \approx -e \vec{E}(M, t)$$

On passe en notation complexe, et le mouvement d'oscillation de l'électron est $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0} \exp(i\omega t)$. D'où la nouvelle expression du PFD :

$$m_e(i\omega) \underline{\vec{v}} \approx -e \underline{\vec{E}}(M, t)$$

soit

$$\underline{\vec{v}} = i \frac{e}{m_e \omega} \underline{\vec{E}}(M, t)$$

Et on obtient \underline{j} avec $\underline{j} = -n_0 e \underline{\vec{v}}$ □

On peut donc définir une pulsation plasma ω_p

Définition 77 : Pulsation plasma

On définit la **pulsation plasma** par

$$(9.57a) \quad \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}}$$

Et alors :

$$(9.57b) \quad \underline{\vec{j}} = -i \frac{n_0 e^2}{\omega m} \underline{\vec{E}} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$$

Théorème 77.1 : Relation de dispersion

Dans un plasma, on établit une relation de dispersion :

$$(9.58) \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_P^2)$$

Preuve 77.1.1 On utilise les equations (Maxwell-Faraday) et (Maxwell-Ampère) en complexes, ainsi que la formule du double produit vectoriel (13.5a) page 93. On part de l'équation de MAXWELL (Maxwell-Faraday), à laquelle on effectue le produit vectoriel par $-i \vec{k}$ des deux cotés :

$$\begin{aligned} \cancel{i \vec{k}} \wedge (-i \vec{k} \wedge \vec{E}) &= \cancel{i \vec{k}} \wedge (-i \omega \vec{B}) \\ -i(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0 \text{ car orthogonaux}}) \vec{k} + i(\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{E} &= \omega \vec{k} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

D'où :

$$ik^2 \vec{E} = \omega \vec{k} \wedge \vec{B}$$

On injecte l'équation de MAXWELL (Maxwell-Ampère) :

$$ik^2 \vec{E} = \omega \left(\mu_0 \vec{j} + i \omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} \right)$$

D'après l'équation (9.57b) de la définition précédente : $\underline{\vec{j}} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$

$$\begin{aligned} ik^2 \vec{E} &= \omega \left(-i \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E} + i \omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} \right) \\ k^2 &= \varepsilon_0 \mu_0 (\omega^2 - \omega_p^2) \end{aligned}$$

$$D'où \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_P^2)$$

□

Vitesse de phase et dispersion

Définition 78 : Vitesse de phase

La **vitesse de phase** v_φ est la vitesse de propagation d'une OPPM.

Théorème 78.1 : Vitesse de phase dans un plasma

Dans un plasma, avec les hypothèses précédentes, la vitesse de phase est égale à :

$$(9.59) \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Définition 79 : Phénomène de dispersion

On dit qu'il y a **dispersion** quand la vitesse de phase dépend de la pulsation ω de l'OPPM

Fréquence et pulsation de coupure

Définition 80 : Fréquence de coupure

On appelle **fréquence de coupure** la fréquence f_c pour laquelle une onde ne se propage plus. La pulsation associée ω_c est appelée **pulsation de coupure**

Théorème 80.1 : Pulsation de coupure du plasma

La pulsation plasma ω_P est une pulsation de coupure :

$$(9.60) \quad \omega_c = \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

Preuve 80.1.1 Deux cas :

- Si $\omega > \omega_P$, alors $k^2 > 0 \implies k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}$.
- Sinon, si $\omega < \omega_P$, alors k^2 est négatif et il n'y a pas de propagation (une solution imaginaire n'est pas possible pour une onde).

□

Propagation d'un paquet d'onde

On se place, dans un premier temps, dans un milieu dispersif quelconque.

Définition 81 : Paquet d'onde

Un **paquet d'onde** est la superposition de plusieurs OPPM de pulsations proches et de pulsation moyenne ω_0 :

$$(9.61) \quad \int_0^{+\infty} \underline{A}(M) e^{i(\omega t - kz)} d\omega$$

Cette intégrale est valable de 0 à $+\infty$, car on considère des ondes dont la pulsation ω est comprise dans un intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$, où $\delta\omega \ll \omega_0$

Théorème 81.1 : Vitesse de groupe d'un paquet d'ondes

Par la généralisation de l'étude d'un paquet formé de deux ondes sinusoïdales, on admet que la vitesse de groupe v_g d'un paquet d'onde centré sur une pulsation ω_0 est :

$$(9.62) \quad v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0} = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}}$$

où k_0 est une approximation au premier ordre du centre des vecteurs d'ondes : les $k(\omega)$ des ondes dans le paquet d'ondes sont comprises dans $\left[k_0 - \frac{\delta k}{2}, k_0 + \frac{\delta k}{2}\right]$

9.6.3 Propagation dans un conducteur ohmique

Définition 82 : Conducteur ohmique

Le **conducteur ohmique** est un métal pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées :

- Les ions positifs sont immobiles
- Il est **dense**, et les électrons, de densité particulière n_0 , sont libres de se déplacer.

On remarque qu'un conducteur ohmique est comme un plasma (cf. définition 76 page 75). Sa seule différence est d'être dense. On prend alors en compte les interactions entre électrons et ions sous la forme d'une force de frottement.

Théorème 82.1 : Relation de dispersion

Dans un conducteur ohmique, on établit, comme pour le plasma, une relation de dispersion :

$$(9.63) \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$$

Cette équation n'est pas réelle, et conduit à un **module d'onde complexe**. On note :

$$(9.64) \quad \underline{k} = k' - ik''$$

Théorème 82.2 : Effet de peau

Dans un conducteur ohmique, la **distance caractéristique d'atténuation** d'une OPPM dans l'approximation des basses fréquences $\left(\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)$ est :

$$(9.65) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Preuve 82.2.1 Dans l'approximation des basses fréquences, on néglige le terme $\frac{\omega^2}{c^2}$ par rapport à $\mu_0 \gamma \omega$, c'est-à-dire qu'on prend :

$$\omega \ll \mu_0 c^2 \gamma = \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

La relation de dispersion devient alors $\underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma \omega$. On résout :

$$\underline{k} = \sqrt{-i\mu_0 \gamma \omega}$$

Or $-2i = (1 - i)^2$, d'où :

$$\underline{k} = (1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$$

Puisqu'on a choisi $\underline{k} = k' - ik''$, on trouve que $k' = k'' = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$.

La distance caractéristique de pénétration est alors $\delta = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. □

Réflexion d'une OPPM

On considère les ondes réfléchies et transmises issues d'une OPPM polarisée rectilignement dans la direction de \vec{u}_x . L'onde s'écrit :

$$\vec{E}_i(M, t) = \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_i(M, t) = -\frac{1}{c} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_y$$

La propagation, avant le contact avec le conducteur ohmique, s'effectue dans le vide, donc $k = \frac{\omega}{c}$.

On admettra l'expression des champs réfléchis :

$$\vec{E}_r(M, t) = \underline{r} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_r(M, t) = -\frac{1}{c} \underline{r} \underline{E}_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{u}_y$$

On admettra également l'expression des champs transmis :

$$\vec{E}_t(M, t) = \underline{t} \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_t(M, t) = -\frac{1-i}{\delta \omega} \underline{t} \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right) \vec{u}_y$$

Où \underline{r} et \underline{t} se calculent avec les relations de passage (cf. page 72). Dans un conducteur ohmique parfait, les conditions de continuité des champs imposent $\underline{r} = -1$ et $\underline{t} = 0$.

Chapitre 10

Rayonnement Thermique

Méthode

Calculer un flux thermique

Relation entre les flux $d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$

Relation de STEFAN-BOLTZMANN $\varphi^0(T) = \sigma T^4$

Loi de PLANCK (*non exigible*) cf théorème 84.1

Définition 83 : Flux Thermique

La **densité surfacique d'énergie** est définie telle que la puissance électromagnétique reçue par un objet dans l'enceinte sous dS soit

$$(10.1) \quad d\Phi = \varphi^0 dS$$

L'exposant 0 est là pour rappeler que φ ne dépend ni de la position, ni de dS : il ne dépend que de T .

D'ici, on définit la **densité spectrale en longueur d'onde de flux surfacique** (notée φ_{λ}^0) de manière analogue : elle est telle que la contribution à φ^0 des photons de longueur d'onde comprises entre $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ soit

$$(10.2) \quad d\varphi^0 = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda$$

Pour résumer, on se rapportera à la figure 10.1 (page 82) et à la simple formule :

$$d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$$

Définition 84 : Énergie d'un photon

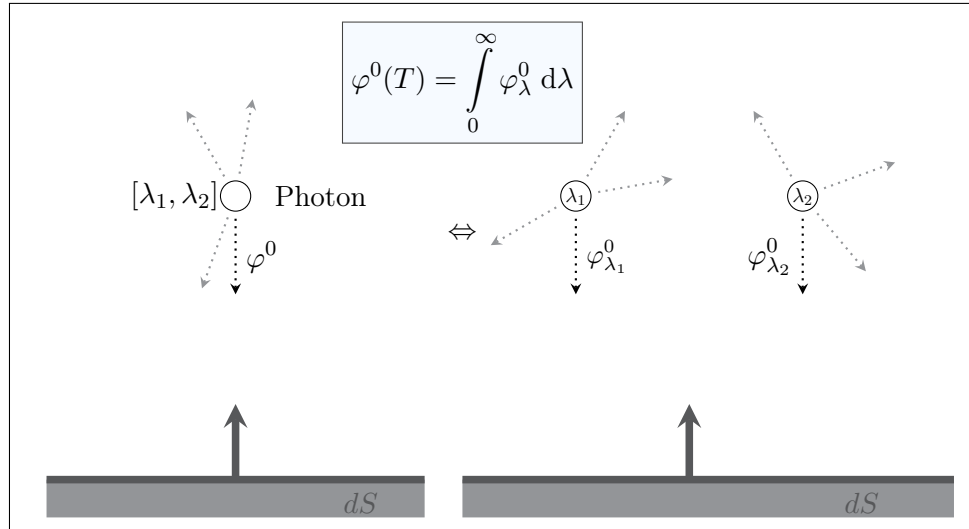


FIGURE 10.1 – Caractérisation des différents flux

(10.4)

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Théorème 84.1 : Loi de PLANCK

La loi de PLANCK n'est pas exigible, mais elle permet de calculer la densité spectrale en longueur d'onde

$$\varphi^\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{\frac{hc}{e\lambda k_B T} - 1}$$

avec :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Théorème 84.2 : STEFAN-BOLTZMANN

(10.6)

$$\varphi^0(T) = \sigma T^4$$

où σ est la constante de STEFAN : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ C'est aussi le flux émis par un corps noir.

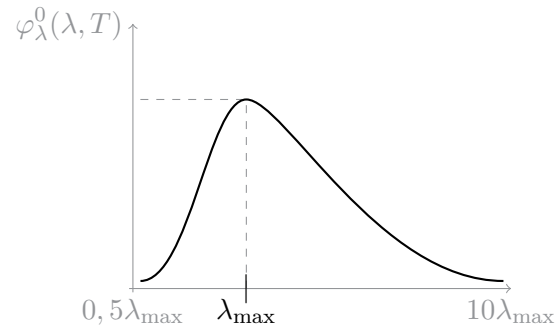
La densité spectrale en longueur d'onde du flux (φ^λ_0) passe par un maximum pour une longueur d'onde λ_m . On l'obtient avec la loi de WIEN :

Théorème 84.3 : Loi de WIEN

$$(10.7) \quad \lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Pour retenir : $\lambda_{\max} T = 2900 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

Remarque : Le domaine spectral d'émission est compris dans $[0, 5\lambda_{\max}, 10\lambda_{\max}]$



Théorème 84.4 : Flux surfacique radiatif

En un point P , le flux surfacique cédé par un corps noir opaque est :

$$(10.8) \quad \varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = \sigma T(P)^4 - \varphi_{\text{reçu}}(P)$$

et alors, le flux radiatif suit une loi de NEWTON $\varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = h(T(P) - T_0)$ dont le coefficient est

$$(10.9) \quad h^{\text{rad}} = 4\sigma T_0^4$$

Chapitre 11

Mécanique Quantique

11.1 Introduction à la mécanique quantique

11.1.1 Dualité onde-particule

Définition 85 : Relation de PLANCK-EINSTEIN

Pour une onde de fréquence $\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$, l'énergie E_{photon} et la quantité de mouvement p_{photon} d'un photon sont donnés par la **relation de PLANCK-EINSTEIN** :

$$(11.1a) \quad E_{\text{photon}} = h\nu$$

$$(11.1b) \quad p_{\text{photon}} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

où h est la constante de PLANCK

On donne la valeur de la constante de PLANCK :

$$h \approx 6,62606957 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$h \approx 4,1343359 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

La constante de PLANCK réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ sera également utilisée :

$$\hbar \approx 1,054571726 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$\hbar \approx 6,58211928 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

Théorème 85.1 : Relation de DE BROGLIE

À une particule matérielle de quantité de mouvement de norme p , la relation de DE BROGLIE associe une longueur d'onde λ_{DB} :

$$(11.2) \quad \lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p}$$

11.1.2 Fonction d'onde et équation de SCHRÖDINGER

Définition 86 : Probabilité de présence

La probabilité de présence d'une particule t entre x et $x + dx$ est donné par la relation :

$$(11.3) \quad dP(x, t) = \Psi(x, t) \overline{\Psi(x, t)} dx = |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Théorème 86.1 : Condition de normalisation

Soit \mathcal{D} le domaine de l'espace accessible à la particule. La condition de normalisation traduit le fait que la particule se trouve de façon certaine dans le domaine \mathcal{D} :

$$(11.4) \quad \int_{\mathcal{D}} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

11.1.3 Équation de SCHRÖDINGER

Définition 87 : Équation de SCHRÖDINGER

On considère le mouvement unidirectionnel d'une particule quantique de masse m . L'interaction de la particule avec les autres éléments du système sera réunie dans une énergie potentielle $V(x)$ indépendante du temps (conformément au programme).

L'**équation de SCHRÖDINGER** donne :

$$(11.5) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \Psi(x, t)$$

(ATTENTION) $V(x)$ est une énergie potentielle. On l'appelle parfois « potentiel », mais ça ne concerne pas seulement les interactions électromagnétiques.

Définition 88 : État stationnaire

On appelle **état stationnaire** un état du système caractérisé par une fonction d'onde factorisée sous la forme

$$(11.6) \quad \Psi(x, t) = \varphi(x) f(t)$$

où f et φ sont *a priori* deux fonctions à valeur complexe.

Théorème 88.1 : Équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps

Pour une fonction d'onde à l'état stationnaire sous la forme $\Psi(x, t) = \varphi(x) e^{i\alpha(t)}$ où $\alpha(t)$ est une fonction du temps, l'équation de SCHRÖDINGER se met sous la forme :

$$(11.7) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

où $E = -\hbar \frac{d\alpha(t)}{dt}$. En notant $\omega = -\dot{\alpha}(t)$, on a $E = \hbar\omega$.

Théorème 88.2 : Caractérisation d'un état stationnaire

Un état stationnaire est caractérisé par une densité de probabilité $\frac{dP}{dx} = |\Psi(x, t)|^2$ indépendante du temps.

11.1.4 Inégalité de HEISENBERG

Théorème 88.3 : Inégalité spatiale

Il existe une limitation à la définition de la position (d'indétermination Δx) et de la quantité de mouvement (d'indétermination Δp_x) imposée par l'**inégalité d'HEISENBERG** :

$$(11.8) \quad \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Théorème 88.4 : Inégalité temps-énergie

La pulsation, d'incertitude $\Delta\omega$, et la durée, caractérisé par τ , la durée caractéristique d'évolution d'un signal sont limités dans leur définition par :

$$(11.9a) \quad \tau \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2}$$

En utilisant la relation $E = \hbar\omega$ du théorème 88.1 page 85 :

$$(11.9b) \quad \tau \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

11.2 Évolution d'une particule quantique libre

Dans cette section, on considère le mouvement d'une particule lorsque $V(x) = 0$, c'est-à-dire qui évolue dans le vide sans interaction. L'équation (11.5) de SCHRÖDINGER devient alors :

$$(11.10) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

Théorème 88.5 : Relation de dispersion et vitesse de phase

La résolution de l'équation (11.10) conduit à la relation de dispersion suivante :

$$(11.11a) \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

On peut alors en déduire une vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$:

$$(11.11b) \quad v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m}$$

11.3 Évolution d'une particule quantique dans un potentiel

Dans cette partie, nous nous limiterons à des solutions stationnaires de l'équation (11.5) de SCHRÖDINGER. On pourra donc résoudre l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps (11.7) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

On se place dans le cas où la longueur d'onde de DE BROGLIE des particules quantiques est très inférieure à la longueur caractéristique des variations du potentiel $V(x)$. On modélise alors la marche de potentiel de la manière suivante :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Définition 89 : Coefficients de transmission et de réflexion

En ayant définis des vecteurs densité de courant de probabilité \vec{j}_i , \vec{j}_r et \vec{j}_t , respectivement pour les ondes incidente, réfléchie, et transmise, on peut définir les probabilités de réflexion R et de transmission T :

(11.12)

$$R = \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} \qquad T = \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|}$$

Chapitre 12

Thermodynamique statistique

12.1 Monde microscopique, monde macroscopique

Définition 90 : Échelles microscopique, mésoscopique, et macroscopique

L'**échelle macroscopique** est notre échelle. Une longueur microscopique est de l'ordre du mètre (ou bien plus grande).

L'**échelle microscopique** est l'échelle des molécules. Une longueur microscopique est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des molécules.

L'**échelle mésoscopique** est une échelle à la fois très petite devant l'échelle macroscopique et très grande devant l'échelle microscopique.

12.2 Facteur de BOLTZMANN

12.2.1 Atmosphère isotherme

Théorème 90.1 : Équation fondamentale de l'hydrostatique

À une altitude z , la variation de la pression $P(z)$ s'exprime en fonction de la masse volumique $\mu(z)$ d'un système :

$$(12.1) \quad \frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g$$

Preuve 90.1.1 On étudie un gaz situé dans un cylindre de section S entre z et $z + dz$.

On applique un PFD à notre cylindre entre z et $z + dz$, à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\underbrace{-\mu(z)Sdz g \vec{u}_z}_{\text{Poids}} + \underbrace{P(z)S \vec{u}_z}_{\text{Pression sur la tranche inférieure}} + \underbrace{(-P(z+dz)S \vec{u}_z)}_{\text{Pression sur la tranche supérieure}} = \vec{0}$$

En projetant sur \vec{u}_z et en simplifiant :

$$-\mu(z)g dz + P(z) - P(z + dz) = 0$$

D'où, puisque $P(z + dz) = P(z) + \frac{dP(z)}{dz}dz$: $\frac{dP(z)}{dz} = -\mu(z)g$ □

Théorème 90.2

La solution à l'équation différentielle précédente est :

(12.2)
$$P(z) = P_0 e^{-\frac{zMg}{RT}}$$

$H = \frac{RT}{Mg}$ est la distance caractéristique de la variation de la pression.

Preuve 90.2.1 On étudie un gaz situé dans un cylindre de section S entre z et $z + dz$.

D'après l'équation (1.13) d'état des gaz parfaits :

$$P(z) dV = dn(z) RT$$

Or, en notant $\mu(z)$ la masse volumique du gaz en z :

$$dn(z) = \frac{dm(z)}{M} = \frac{\mu(z)Sdz}{M}$$

On réinjecte :

$$P(z) dV = \frac{\mu(z)Sdz}{M} RT$$

et sachant que $\frac{dV}{S} = dz$, on a :

$$\mu(z) = \frac{P(z) M}{RT}$$

Depuis l'équation fondamentale de l'hydrostatique (équation (12.1)), on obtient une équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{dP(z)}{dz} &= -\frac{M}{RT}P(z)g \\ \frac{dP(z)}{dz} + \frac{Mg}{RT}P(z) &= 0 \end{aligned}$$

La solution à cette équation est donc $P(z) = P_0 e^{-\frac{z Mg}{RT}}$ □

Puisque $PV = nRT$, on peut utiliser cette équation pour déterminer l'expression de grandeurs comme la masse volumique $\mu(z)$ ou $dn(z)$:

$$\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{z Mg}{RT}}$$

Théorème 90.3

La probabilité $dp(z)$ pour une molécule de se trouver entre les cotes z et $z + dz$ est proportionnelle au **facteur de BOLTZMANN** :

$$(12.3) \quad dp(z) = A e^{-\frac{E_p(z)}{k_B T}}$$

Cette probabilité est appelée le **poids de BOLTZMANN**
 dp est une probabilité ! Pas une pression !

(ATTENTION)

12.2.2 Poids de BOLTZMANN d'une particule indépendante à l'équilibre avec un thermostat

On va généraliser ce qu'on vient de voir au cas d'un système constitué de particules indépendantes, c'est-à-dire qui n'interagissent pas entre elles.

Théorème 90.4

La probabilité $dp(E_i)$ qu'une particule microscopique **indépendante** soit dans un état quantique d'énergie E_i est **proportionnelle** au **facteur de BOLTZMANN** :

$$(12.4) \quad dp(E_i) = A e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

12.3 Systèmes à spectres discret d'énergie

Pour déterminer la constante A , on utilise le théorème suivant de condition de normalisation :

Théorème 90.5 : Condition de normalisation

La somme des probabilités est égale à 1. Autrement dit :

$$(12.5) \quad \sum_i p(E_i) = 1$$

Définition 91 : Probabilité d'occupation

Si N est le nombre total de particules, le nombre moyen $\langle N_i \rangle$ de particules du système à l'état E_i , appelé **probabilité d'occupation** de l'état quantique E_i , est donné par :

$$(12.6) \quad \langle N_i \rangle = N \times p(E_i) = \frac{N}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Définition 92 : Énergie moyenne

L'énergie moyenne d'une particule, notée $\langle E_{\text{Particule}} \rangle$, est l'espérance de son énergie :

$$(12.7a) \quad \langle E_{\text{Particule}} \rangle = \sum_i E_i p(E_i)$$

$$(12.7b) \quad \langle E_{\text{Particule}} \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Voir dans le cours de mathématiques, section 17.7.1 page 109 pour plus d'informations sur l'espérance.

Définition 93 : Écart quadratique moyen

Les fluctuations de l'énergie d'une particule sont caractérisées par la variance, qu'on appelle aussi "écart quadratique moyen" :

$$(12.8a) \quad \text{Var}(E_{\text{Particule}}) = \langle E_{\text{Particule}}^2 \rangle - \langle E_{\text{Particule}} \rangle^2$$

$$(12.8b) \quad \text{Var}(E_{\text{Particule}}) = \sum_i E_i^2 p(E_i) - \left(\sum_i E_i p(E_i) \right)^2$$

Voir dans le cours de mathématiques, section 17.8.2 page 111 pour plus d'informations sur la variance et l'écart-type.

Définition 94 : Énergie d'un système

L'énergie d'un système est la somme des énergies des particules qui le composent. Sa valeur moyenne est :

$$(12.9) \quad \langle E_{\text{Système}} \rangle = N \langle E_{\text{Particule}} \rangle$$

Théorème 94.1

Les fluctuations d'énergie régressent quand la taille du système augmente

12.4 Capacités thermiques classiques des gaz et des solides

Théorème 94.2

L'énergie interne U du système est égale à l'énergie moyenne du système :

$$(12.10) \quad U = \langle E_{\text{Système}} \rangle = N \langle E_{\text{Particule}} \rangle$$

Chapitre 13

Annexe

13.1 Trigonométrie

13.1.1 Définition

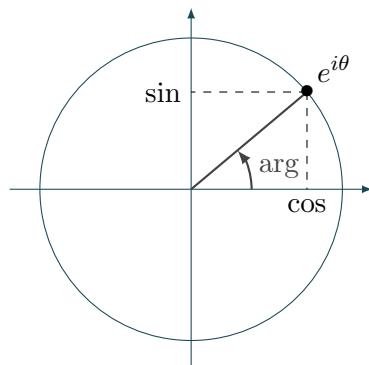
On aura souvent besoin de trigonométrie en Physique. Surtout les règles sur les sinus et cosinus. Bien sûr, la première chose à ne jamais oublier, c'est leur définition en exponentielle :

$$(13.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array} \right. (13.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

13.1.2 Addition / Produit

$$(13.3) \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \end{array} \right.$$

13.1.3 Nombres complexes

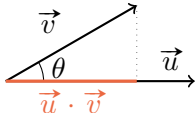


Opérations en complexes

	Forme exponentielle	Module	Argument
Produit	$z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$	$ zz' = z z' $	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
Quotient	$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
Exposant	$z^n = r^n e^{in\theta}$	$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) = n \times \arg z \quad [2\pi]$
Conjugué	$\bar{z} = r e^{-i\theta}$	$ \bar{z} = z $	$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$

13.2 Calcul vectoriel

On a deux types de calculs vectoriels. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$. En physique, on les définit comme suit :

$$(13.4) \quad \left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u \cdot v \cdot \cos \theta \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= u \cdot v \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ avec : } \begin{array}{c} \vec{v} \\ \theta \\ \vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$


(ATTENTION) Il ne faut **pas oublier** que le produit scalaire renvoie un **scalaire**, et que le produit vectoriel renvoie un **vecteur perpendiculaire** au plan formé des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Propriétés Produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v}$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif

Formules du double produit vectoriel :

$$(13.5a) \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$(13.5b) \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

13.3 Complément mathématique

13.3.1 Dérivée d'un vecteur

$$(13.6) \quad \frac{dx_i \vec{i}}{dt} = x_i \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

13.3.2 Équation différentielle

En général, on résout l'équation homogène, on trouve une solution particulière, puis la combinaison linéaire des deux donne la solution générale.

Au premier ordre

Dans le cas d'une équation de la forme :

$$y'(t) = ay(t) + b$$

La solution générale est

$$(13.7) \quad Ae^{ax} - \frac{b}{a}$$

Au second Ordre

Dans le cas de l'équation homogène suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution $y(t)$ pour l'équation homogène :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm \beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t))$
$\Delta < 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t))$
$\Delta = 0$	$r \text{ double} \quad y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

(ATTENTION)

Pour déterminer la **solution particulière** quand le second membre n'est pas constant, on suppose que la solution est sinusoïdale et de même pulsation. Alors il n'y a plus qu'à réinjecter la solution dans l'équation différentielle pour déterminer les constantes restantes.

13.4 Repères en physique

13.4.1 Repère cartésien

Dans un repère en **coordonnées cartésiennes** (cf. figure 13.1), le point M est repéré par la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$(13.8) \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

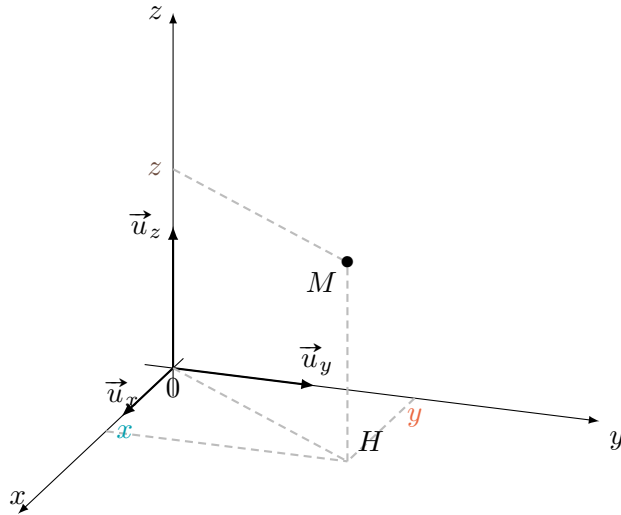


FIGURE 13.1 – Repère en coordonnées cartésiennes

13.4.2 Repère cylindrique

Dans un repère en **coordonnées cylindriques** (cf. figure 13.2), le point M est repéré par la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$(13.9) \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$$

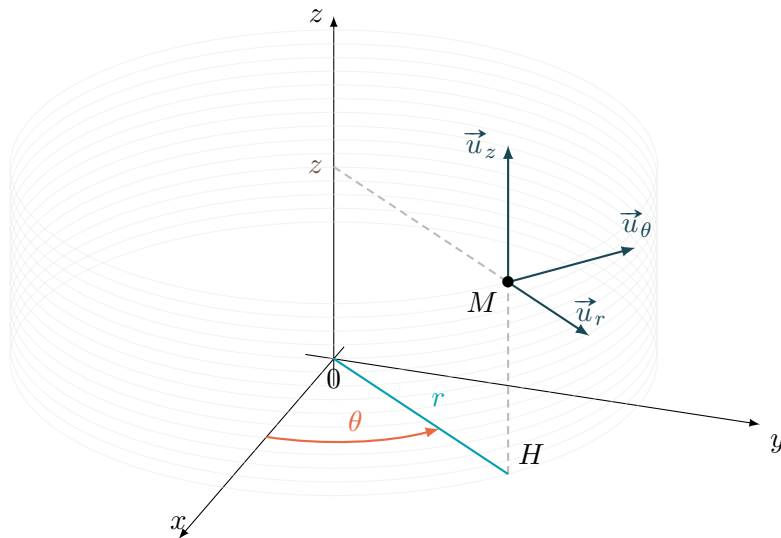


FIGURE 13.2 – Repère en coordonnées cylindriques

(ATTENTION) r se mesure sur le projeté : $r = \|\overrightarrow{OH}\|$, et non \overrightarrow{OM}

13.5 Analyse Vectorielle

13.5.1 Généralités sur les champs

Coordonnées	Déplacement élémentaire	Circulation élémentaire
Cartésiennes	$dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$
Cylindriques	$dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_z dz$
Sphériques	$dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin\theta d\varphi$

Définition 95 : Lignes et tubes de champ

Pour un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$, une **ligne de champ** est une courbe sur laquelle, en tout point M , $\vec{A}(M)$ est **tangent**.

Si on note $d\vec{M}$ le déplacement élémentaire, une ligne de champ vérifie :

$$(13.10) \quad d\vec{M} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

On appelle **tube de champ** un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

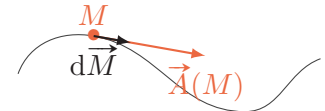


FIGURE 13.3 – Ligne de champ

13.5.2 Opérateurs sur les champs

Définition 96 : Gradient

Soit $U(M)$ un champ scalaire. La variation dU est lié au déplacement élémentaire $d\vec{l}_M$ par le **gradient** :

$$(13.11) \quad \overrightarrow{\text{grad}}(U(M)) \cdot d\vec{l}_M = dU$$

Ses expressions sont :

Coordonnées	Expressions
Cartésiennes	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
Cylindriques	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$
Sphériques	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

Définition 97 : Divergence

Soit un volume élémentaire dV_M autour d'un point M et un champ de vecteur $\vec{A}(M)$. En notant $d\Phi$ le flux de $\vec{A}(M)$ traversant la surface entourant dV_M , la **divergence** est définie

par :

$$(13.12) \quad \operatorname{div}(\vec{A}(M)) \cdot dV_M = d\Phi(M)$$

Ses expressions sont :

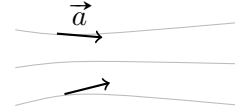
Coordonnées

Expressions

Cartésiennes	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} +$	$\frac{\partial A_y}{\partial y} +$	$\frac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot A_r)}{\partial r} +$	$\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} +$	$\frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} +$	$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} +$	$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Définition 98 : Circulation

Soit \vec{a} un champ de vecteur.



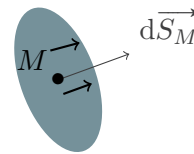
La **circulation élémentaire** du champ \vec{a} de vecteurs sur le déplacement élémentaire $d\vec{l}_M$ autour d'un point M est

$$(13.13) \quad d\mathcal{C} = \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}_M$$

Alors, la **circulation** le long d'un chemin Γ_{AB} est :

$$(13.14) \quad \mathcal{C}_a = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{l}_M$$

On va maintenant définir le flux passant à travers une surface :



Définition 99 : Flux

Le **flux élémentaire** du champs \vec{a} de vecteurs à travers une surface élémentaire $d\vec{l}_M$ autour d'un point M est

$$(13.15) \quad d\Phi = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Alors, le **flux** le long d'un chemin Γ_{AB} est :

$$(13.16) \quad \Phi_a = \iint_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{S}_M$$

13.5.3 STOKES et OSTROGRADSKI

Théorème 99.1 : Formules de STOKES et d'OSTROGRADSKI

(Ostrogradski)

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \cdot \vec{dV} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (\text{Flux})$$

(Stokes)

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{E}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad (\text{Contour fermé})$$

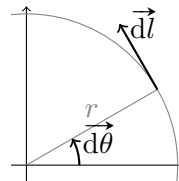
13.6 Règles générales

13.6.1 Relations entre les grandeurs

$$\text{Puissance} = \frac{d \text{Travail}}{dt}$$

13.6.2 Longueurs de références

$$\vec{dl} = r \vec{d\theta}$$



Deuxième partie

Chimie

Chapitre 14

Première année

14.1 Configuration électronique

Définition 1 : Les nombres quantiques

Pour caractériser un électron, on définit :

- n , le **nombre quantique principal**, définit la couche sur laquelle un électron est rangé
- $l \in [0, n - 1]$, le **nombre quantique azimutal**, précise la sous-couche sur laquelle un électron est rangé
- $m_l \in [-l; l]$, le **nombre quantique magnétique**, définit le nombre d'orbitales possibles. Chaque orbitale est appelée "case quantique".
- $m_s \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$, **nombre quantique de spin**, définit le sens de rotation des électrons d'une même case quantique.

Théorème 1.1 : Principe d'exclusion de PAULI

Deux électrons ne peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques

Théorème 1.2 : Règle de stabilité de KLECHKOWSY

Le remplissage des orbitales atomiques se fait par ordre des $(n + l)$ croissants.

$\begin{smallmatrix} & 1 \\ n & \end{smallmatrix}$	1	2	3	4
1	$1s^2$			
2	$2s^2$	$2p^6$		
3	$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
4	$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$

FIGURE 14.1 – Tableau des sous-couches électroniques

Théorème 1.3 : Règle de remplissage de HUND

Lorsqu'un niveau d'énergie est **dégénéré** — c'est à dire pour deux orbitales de même nombre quantique principal n — et que le nombre d'électrons n'est pas suffisant pour sauter le niveau :

- L'état de plus basse énergie est obtenu en utilisant un maximum d'orbitales
- Les spins des électrons non appariés (les électrons célibataires) d'une même orbitale étant parallèles

14.2 Représentation moléculaire

Méthode

Représentation de LEWIS

La **charge formelle** d'un atome est déterminée par :

$$(14.1) \quad CF_A = n_{\text{Atome}}(e^-) - n_{\text{Molécule}}(e^-)$$

1. On compte le nombre N d'électrons pour connaître le nombre $\frac{N}{2}$ de doublets à répartir
2. On minimise le nombre de charges formelles en multipliant les liaisons
3. On distribue les charges formelles par ordre d'électronégativité

Méthode VSEPR

Le **moment dipolaire** $\vec{\mu}$ est le vecteur caractérisant une liaison entre deux charges $(-\delta e)$ et $(+\delta e)$ distancées de d . Ses caractéristiques sont :

Direction Celle de la liaison

Sens Du $-$ au $+$ (donc de $(-\delta e)$ vers $(+\delta e)$)

Norme $\|\vec{\mu}\| = \delta e \times d$

La notation VSEPR s'exprime par :

$$(VSEPR) \quad A X_m E_n$$

où m est le nombre d'atomes liés à l'atome central et n est le nombre d'entités non liantes (doublets ou électron célibataire).

14.3 Cinétique chimique

14.3.1 Avancement

Définition 2 : Avancement

L'**avancement** d'une réaction est défini par

$$(14.2) \quad \xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$$

Où n_i est la quantité molaire du constituant A_i , n_i° sa quantité molaire initiale, et ν_i son coefficient stœchiométrique.

ξ est en mol

Définition 3 : Vitesse de réaction

La vitesse de réaction est la variation de l'avancement :

$$(14.3) \quad v_{\text{réaction}} = \frac{d\xi}{dt}$$

Dans les systèmes à volumes constants, on parle de **vitesse volumique de réaction** :

$$v_{\text{vol}} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt}$$

Définition 4 : Loi de vitesse

Une réaction chimique **admet un ordre** si on peut relier la vitesse de réaction à la constante de vitesse k et aux concentrations $[A_k]$:

$$(14.4a) \quad v = k \cdot f([A_k])$$

où $f([A_k])$ est une fonction des concentrations. Souvent, on a :

$$(14.4b) \quad \boxed{v = k \prod_i [A_k]^{\alpha_i}}$$

α_i est appelé **ordre partiel** de la réaction par rapport à

Théorème 4.1 : Loi d'ARRHENIUS

On dit qu'une réaction associée à une équation stœchiométrique admettant un ordre suit la **loi d'ARRHENIUS** si sa constante de vitesse k suit :

$$(14.5) \quad k(T) = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$$

14.3.2 Loi d'action de masse

Théorème 4.2 : Loi d'action de masse

La **loi d'action de masse**, aussi appelée **Loi de GULDERG et WAAGE**, permet de calculer la constante K :

$$(14.6) \quad K = \prod_i a_i^{\nu_i}$$

14.4 Cristallographie

Définition 5 : Cristal

Un cristal est défini par une **maille** et un **motif**. Un motif est une translation de la maille selon un vecteur \vec{t} .

Définition 6 : Compacité

En considérant les atomes comme des sphères, la **compacité** C se définit dans une maille par :

$$(14.7) \quad C = \frac{\text{Volume des atomes de la maille}}{\text{Volume de la maille}}$$

Chapitre 15

Thermochimie

Méthode

Enthalpie	$H = U + PV$	Capacité thermique molaire à volume constant	$c_v = \frac{(\partial U_m)}{\partial T}$
Energie libre	$F = U - TS$	Capacité thermique molaire à pression constante	$c_v = \frac{(\partial H_m)}{\partial T}$
Enthalpie libre	$G = H - TS$	Avancement	$\xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$
		Vitesse de réaction	$v = \frac{d\xi}{dt} = k \prod_i c_i$

15.1 Grandeurs extensives

Définition 7 : Grandeur intensive/extensive

Une **grandeur extensive** est une grandeur proportionnelle à la taille du système qu'elle caractérise.

De manière générale, si S_1 et S_2 sont deux systèmes disjoints, on dit que Y est une grandeur extensive si :

(15.1)
$$Y(S_1) + Y(S_2) = Y(S_1 \cup S_2)$$

Une **grandeur intensive** est le contraire d'une grandeur extensive.

Propriétés

- extensive \times intensive = extensive
- $\frac{\text{extensive}}{\text{extensive}} = \text{intensive}$

$$\bullet J_{\text{extensive}}(\alpha n, \alpha V) = \alpha J(n, V)$$

Définition 8 : Variance

La **variance** d'un système est le nombre maximal de paramètres intensifs que l'on peut choisir sans remettre en cause l'équilibre du système étudié.

Théorème 8.1 : Règle de GIBBS

La règle de GIBBS permet de déterminer la **variance** v d'un système en connaissant :

- i. Le nombre φ de phases distinctes
- ii. Le nombre c de constituants
- iii. Le nombre r de réactions chimiques

Alors, on a :

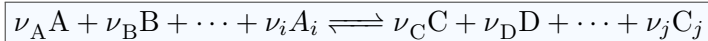
$$(15.2) \quad v = c - r + 2 - \varphi$$

(ATTENTION)

Il faut faire attention en comptant φ dans un système : les phases doivent être distinctes. Par exemple, $\varphi = 2$ pour un liquide et un gaz, $\varphi = 2$ pour deux états solides (car ils sont non miscibles), et $\varphi = 1$ pour deux liquides ou deux gaz miscibles

15.2 Équilibre d'une réaction

On considère une réaction du type :



Les ν_i et les ν_j sont les coefficients stœchiométriques associés à chaque constituant i . Ceux des réactifs (les ν_i) sont comptés négativement.

Les n_k sont les quantités de matière associées à chaque constituant P_k de la réaction.

15.2.1 Enthalpie libre

Définition 9 : Enthalpie libre de réaction

L'**enthalpie libre** G est une fonction d'état associée au deuxième principe de la thermodynamique :

$$G = H - TS$$

(15.4a)

$$G = U + PV - TS$$

La version différentielle :

(15.4b)

$$dG = Vdp - SdT + \delta W_{\text{rév}}$$

(15.4c)

Et G étant une fonction d'état extensive :

$$\Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

$\Delta_r G^\circ$ caractérise l'équilibre de réaction, et $\Delta_r G$ son sens.

(15.5)

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K$$

$$\Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT \ln Q$$

$$= RT \ln \frac{Q}{K}$$

$$\Delta_r G \leq 0 \Leftrightarrow \text{Sens direct}$$

À l'équilibre, $Q = K$, donc $\Delta_r G = 0$.

Chapitre 16

Premier principe appliqué à la transformation chimique

16.1 Enthalpie standard

Définition 10 : État standard

L'**état standard** d'un constituant est défini par son état physique stable à la température T , sous la pression standard : $P^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

Définition 11 : Enthalpie standard de réaction

L'**enthalpie standard de réaction** $\Delta_r H_{(T,P)}$ correspond à la variation d'enthalpie du mélange réactionnel pour $\xi = 1$ mole d'avancement de la réaction en cours, dans l'**état standard**.

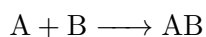
La réaction est alors dite, suivant le signe de $\Delta_r H^\circ$:

- **endothermique** (pour $\Delta_r H^\circ > 0$) :
dans le sens direct, la réaction consomme de la chaleur
- **exothermique** (pour $\Delta_r H^\circ < 0$) :
dans le sens direct, la réaction dégage de la chaleur

Définition 12 : Enthalpie standard de formation

On appelle **enthalpie standard de formation**, en on note $\Delta H_f^\circ(\text{AB})$, la variation d'enthalpie lors de la formation d'un constituant AB.

C'est donc l'enthalpie standard de formation $\Delta_r H^\circ$ de la réaction :



Remarque : Les composants simples comme le carbone C ou l'hydrogène H ont une enthalpie standard de formation nulle. Idem pour les composés stables comme le dioxygène O_2 ou le diazote N_2 : leur enthalpie standard de formation est nulle.

$$\Delta H_f^\circ(\text{O}_2) = \Delta H_f^\circ(\text{N}_2) = \Delta H_f^\circ(\text{C}) = \Delta H_f^\circ(\text{H}) = 0$$

Définition 13 : Grandeur de réaction

Pour toute grandeur extensive J dans une réaction d'avancement ξ , on définit sa grandeur de réaction $\Delta_r J$:

$$(16.1) \quad \Delta_r J = \left(\frac{\partial J}{\partial \xi} \right)_{T, P \text{ fixés}}$$

$\Delta_r J$ est une grandeur intensive

Théorème 13.1 : Loi de HESS

En conditions standards, les grandeurs de réactions obéissent à la **loi de HESS** :

$$(16.2) \quad \Delta_r J^\circ = \sum_{\substack{\text{Produits} + \\ \text{Réactifs} -}} \nu_i \Delta J_{f,i}^\circ$$

où $\Delta J_{f,i}^\circ$ est une grandeur standard de formation.

16.2 Effets thermiques pour une transformation monobare

Le programme préconise plutôt une transformation isobare, mais monobare est une condition suffisante.

Définition 14 : Transformation monobare

Une transformation **monobare** est une transformation s'effectuant à pression extérieure P_{ext} constante, et telle que la pression initiale P_{initiale} du système soit la même que la pression finale P_{finale} :

$$(16.3) \quad P_{\text{finale}} = P_{\text{initiale}} = P_{\text{ext}} \quad P_{\text{ext}} = \text{constante}$$

La pression du système peut varier pendant la transformation (et c'est là la différence avec une transformation **isobare**), mais elle doit toujours revenir à la pression extérieure à la fin.

Théorème 14.1 : Application du premier principe

Lors d'une réaction **monobare** et **monotherme**, le transfert thermique causé par la transformation se relie à l'enthalpie standard de réaction :

$$(16.3) \quad \Delta H = Q_P = \xi \Delta_r H^\circ$$

16.3 Relations de KIRCHHOFF

— **Théorème 14.2 : Relations de KIRCHHOFF** —

Les **relations de KIRCHHOFF** permettent d'exprimer les variations de l'énergie interne standard de réaction $\Delta_r U^\circ$, de l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$, ou encore de l'entropie standard de réaction $\Delta_r S^\circ$ en fonction de la température T .

- Pour une réaction à température et volume constants :

$$(16.4a) \quad \frac{d\Delta_r U^\circ}{dT} = \Delta_r C_V^\circ$$

$$(16.4b) \quad \frac{d\Delta_r S^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r C_V^\circ}{T}$$

- Pour une réaction à température et pression constantes :

$$(16.5a) \quad \frac{d\Delta_r H^\circ}{dT} = \Delta_r C_P^\circ$$

$$(16.5b) \quad \frac{d\Delta_r S^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r C_P^\circ}{T}$$

Chapitre 17

Diagramme Potentiel-pH

Pour un couple Oxydant-Réducteur, le diagramme potentiel-pH représente l'évolution du potentiel d'oxydo-réduction en fonction du pH.

17.1 Rappels

Le **produit ionique de l'eau** K_e est le coefficient de réaction d'autoprotolyse de l'eau.

$$(17.1a) \quad K_e = [\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]$$

Le pK_e est son potentiel :

$$(17.1b) \quad \begin{aligned} pK_e &= -\log K_e \\ pK_e &= p\text{OH} + p\text{H} \end{aligned}$$

À 25°C, $K_e = 10^{-14}$.

17.2 Méthode

On va prendre pour exemple le fer : $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})/\text{Fe}(\text{s})$, à une concentration de tracé $c_{\text{tra}} = 10^{-2} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

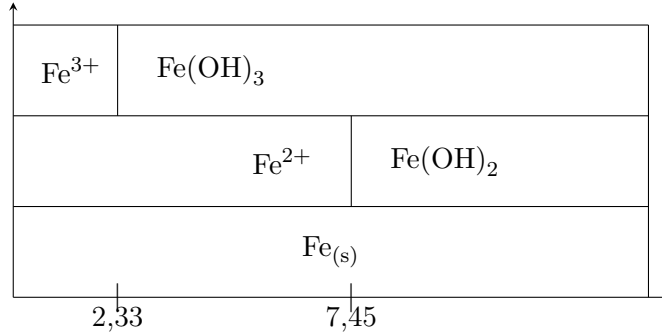
1. Créer un diagramme de situation

- Calculer les **nombre d'oxydation** ($\sum q = \sum n_0$)
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}^{3+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s}) & / & \text{Fe}^{2+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s}) & / & \text{Fe}(\text{s}) \\ +III & & +III & & +II & & +II & & 0 \end{array}$$
- Pour un même nombre d'oxydation, on regarde les gammes de pH.
 - (a) Avec la concentration de tracé $c_{\text{tra}} = [\text{Fe}^{2+}]$, on écrit une équation, par exemple
$$\text{Fe}^{2+} + 2 \text{OH}^- = \text{Fe}(\text{OH})_2$$
 - (b) On utilise la loi d'action de masse pour trouver le pH en connaissant le $K_e = 10^{-14}$ et le $K_{s2} = [\text{OH}^-]^2[\text{Fe}^{2+}]$

$$\begin{aligned}
K_{s2} &= [\text{OH}^-]^2 [\text{Fe}^{2+}] \\
pH &= -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \\
&= -\log \left(\frac{K_e}{[\text{OH}^-]} \right) \\
&= -\log \left(\frac{K_e}{\sqrt{\frac{K_{s2}}{[\text{Fe}^{2+}]}}} \right) = pK_e + \log \left(\sqrt{\frac{K_{s2}}{[\text{Fe}^{2+}]}} \right)
\end{aligned}$$

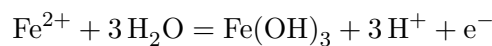
Les données renvoient les frontières $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2$ et $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3$ respectivement à 7,5 et 2,3

- On en déduit un diagramme de situation :



2. On étudie, pour les frontières existantes, l'équation de la droite

- Pour les équations ne faisant pas intervenir H^+ , comme par exemple à la frontière $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{s})$ où l'équation est $\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Fe}$, ou à la frontière $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+}$, la frontière sera horizontale, d'équation E°
- Pour les autres, on applique simplement NERNST pour exprimer E en fonction du pH. Par exemple :



Alors,

$$\begin{aligned}
E &= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 (3 \log[\text{H}^+] - \log[\text{Fe}^{2+}]) \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log[\text{Fe}^{2+}] - 0,18\text{pH}
\end{aligned}$$

$E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log[\text{Fe}^{2+}]$ étant constant, on peut le déterminer par continuité avec la frontière de Fe^{2+} et Fe^{3+} à $\text{pH} = 2,3$

3. On trace le diagramme Potentiel-pH

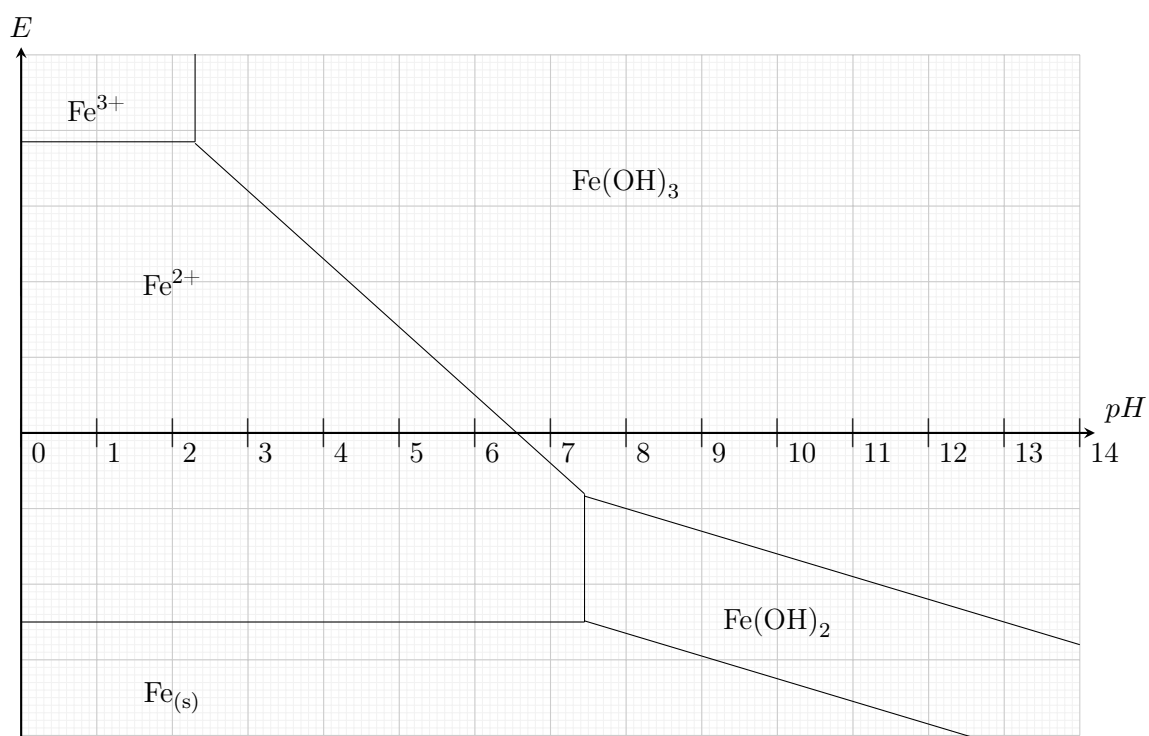


FIGURE 17.1 – Diagramme potentiel-pH du fer

Chapitre 18

Cinétique de l'oxydoréduction

18.1 Cinétique des réactions d'oxydoréduction

18.2 Corrosion

Chapitre 19

Annexe

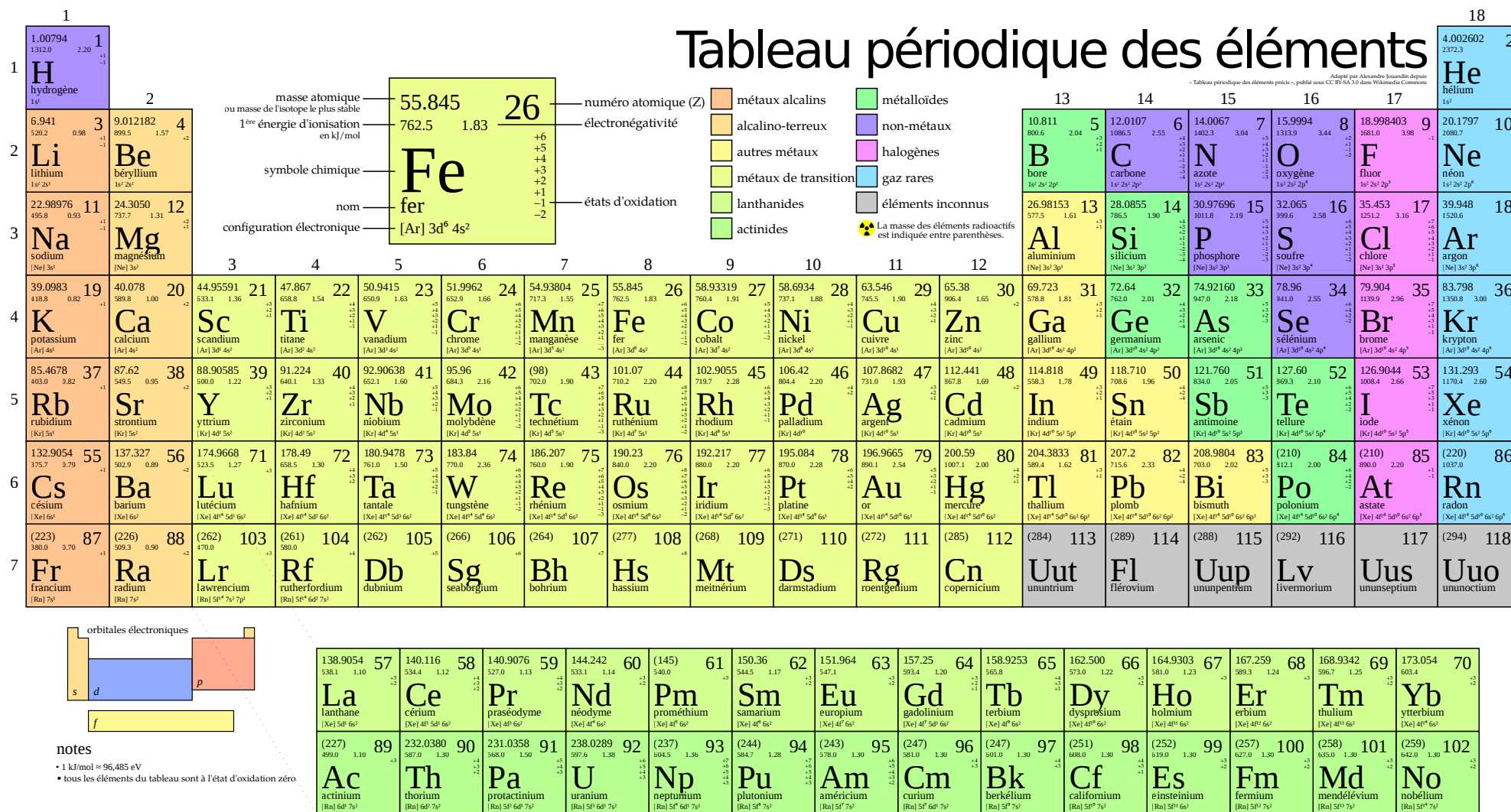


FIGURE 19.1 – Tableau périodique des éléments de MENDELEEV

Liste des acronymes

AO Amplificateur Opérationnel. 2, 25

ARQS Approximation des Régimes
Quasi-Stationnaires. 2, 23, 118

FEM Force Électromotrice. 24

OEM Onde Électromagnétique. 23, 46

OPP Onde Plane Progressive. 72, 73, 74, 75

OPPM Onde Plane Progressive Monochromatique.
74, 77, 78, 79, 80

PFD Principe Fondamental de la Dynamique. 42,
76, 88

TMC Théorème du Moment Cinétique. 36, 42

TRC Théorème de la Résultante Cinétique. 42, 66

Index

- D'ALEMBERT, 65
- Aplanétisme, 45
- ARCHIMÈDE, 22
- ARQS, 23
- Avancement, 102

- Biot et Savart, 62
- BODE, 30

- Capacité thermique, 12
 - à pression constante, 11
 - à volume constant, 10
- Champ
 - électromoteur, 71
- Charge formelle, 101
- Chemin optique, 47
- Circulation, 97
- Cirulation
 - élémentaire, 97
- CLAUSIUS
 - inégalité, 15
- Compacité, 103
- Conducteur ohmique, 79
- Constante
 - STEFAN, 82
- Contraste, 51
- Coordonnées
 - cartésiennes, 94
 - cylindriques, 95

- Débit massique, 15
- Dégénéré, 101

- Densité
 - spectrale d'onde de flux surfacique, 81
 - surfacique
 - d'énergie, 81
 - volumique d'énergie électromagnétique, 68
 - volumique de force électromagnétique, 67
- DESCARTES, 45
- Deuxième principe, 11
- Diagramme
 - potentiel-pH, 110
- Dipôle
 - magnétique, 63
- Dipôle
 - électrostatique, 60
- Dispersion, 78
- Divergence, 96

- Échantillonnage, 32
- Éclairement \mathcal{E} , 48
- Endothermique, 107
- Energie
 - d'un dipôle, 27
- Énergie
 - cinétique, 35
 - potentielle, 35
- Enthalpie, 10
 - de formation, 107
 - libre, 105
 - standard de réaction, 107

Entropie, 11
 Équation
 de SCHRÖDINGER, 85
 Équilibre de Réaction, 106
 État
 standard, 107
 Exothermique, 107
 Grandeur extensive, 104

 Facteur de BOLTZMANN, 90
 FARADAY, 69
 Filtre, 28
 Flux, 97
 élémentaire, 97
 radiatif, 83
 thermique, 18
 Fonction
 de transfert, 28
 Force
 centrale, 36
 conservative, 34
 de CORIOLIS, 38
 de COULOMB, 58
 électromotrice induite, 71
 de LAPLACE, 63, 70
 de LORENTZ, 62
 de rappel, 34
 FRAUNHOFER, 56
 Fréquence
 de coupure, 78
 FRESNEL, 50

 Gain, 29
 GALILÉEN, 37
 Gradient, 96

 HUND, 101
 HUYGENS-FRESNEL, 56

 Impédance, 26
 Inductance
 propre, 70

Inégalité
 d'HEISENBERG, 86
 Grandeur intensive, 104
 Isobare, 10, 108
 Isochore, 10

 \vec{j} (Densité Volumique de Courant), 62

 KEPLER, 37
 KLECHKOWSY, 100

 LAPLACE, 66
 LENZ, 69
 LEWIS, 101
 Ligne de champ, 96
 Loi
 d'action de masse, 103
 d'ARRHENIUS, 102
 de COULOMB, 38, 43
 de FOURIER, 19
 de GULDERG et WAAGE, 103
 de HESS, 108
 de KIRCHOFF, 23
 des mailles, 23
 des nœuds, 23
 de PLANCK, 82
 de STEFAN-BOLTZMANN, 82
 de WIEN, 83
 Longueur
 de cohérence, 48
 Longueur d'onde λ , 49

 Masse
 volumique, 22
 MAXWELL
 AMPÈRE, 62
 GAUSS, 60
 MAYER, 12
 michelson
 MICHELSON
 coin d'air, 54
 lame d'air, 53

MILLMAN, 27
 Module d'onde k , 49
 Moment
 cinétique, 41
 dipolaire, 101
 dipolaire (Electrostatique), 61
 d'une force, 40
 d'inertie, 41
 magnétique, 63
 Monobare, 108
 Lumière monochromatique, 49

 NEUMANN, 71
 Nombre d'onde σ , 49
 Nombre quantique, 100
 azimutal l , 100
 magnétique m_l , 100
 principal n , 100
 de spin m_s , 100
 NORTON, 24
 NYQUIST-SHANNON, 32

 Loi d'OHM
 Globale, 69
 Onde
 électromagnétique, 46
 plane, 72
 polarisée rectilignement, 75
 progressive, 72
 transversale, 73
 Ordre d'interférence, 52
 Ordre partiel, 102
 Ostrogradski, 98

 Paquet d'onde, 79
 Paraxial (rayon), 45
 PAULI, 100
 Période, 49
 Phase, 29
 PLANCK-EINSTEIN, 84
 Plasma, 75
 Poids de BOLTZMANN, 90

 POISSON, 66
 Potentiel
 électrostatique, 60
 POYNTING
 équation locale, 68
 vecteur, 68
 Premier principe, 9
 Pression, 22
 Probabilité
 d'Occupation, 90
 Puissance
 d'une force, 34
 instantanée, 27
 moyenne, 27
 Pulsation
 de coupure, 78
 de coupure, 30
 plasma, 77
 Pulsation ω , 49

 Quantité de mouvement, 34

 Régime
 stationnaire (Thermodynamique), 15
 Relation(s)
 de KIRCHHOFF, 109
 Retard de phase, 47
 Rétroaction, 25

 Signal
 périodique, 31
 Stigmatisme
 approché, 45
 rigoureux, 45
 Stokes, 98
 Système
 conservatif, 34
 ouvert, 15
 thermodynamique, 8

 Temps de cohérence, 48
 THÉVENIN, 24

Torseur

 cinétique, 40

Transfert thermique, 9

Transverse, 73

Travail d'une force, 35

Troisième principe, 14

Tube de champ, 96

Valeur

 efficace, 27

 moyenne, 27

Variance, 105

VARIGNON, 40

Vibration lumineuse, 46

Vitesse

 de phase, 77