

COURS DE PRÉPA

Physique-Chimie

Écrit par
Alexandre JOUANDIN

2013—2015
Écrit en L^AT_EX



28 décembre 2014

Table des matières

I	Physique	3
1	Thermodynamique	4
1.1	Définitions générales	4
1.2	Premier Principe	5
1.2.1	Transformation isochore	5
1.2.2	Transformation isobare	6
1.3	Deuxième Principe	7
1.4	Cas particulier du gaz parfait	7
1.5	Troisième Principe	8
1.6	Machines thermiques	8
1.7	Systèmes ouverts en régime stationnaire	9
1.7.1	Système ouvert	9
2	Statique des fluides	11
2.1	Champ de pression d'un fluide	11
2.2	Théorème d'ARCHIMÈDE	11
3	Électronique	12
3.1	Circuits linéaires dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)	12
3.1.1	THÉVENIN-NORTON	14
3.2	Régime transitoires	15
3.3	Amplificateur Opérationnel (AO)	15
3.4	Régimes sinusoïdaux	16
3.4.1	Puissance	17
3.5	Filtres	18
3.5.1	Fonctions de transfert usuelles	19
3.5.2	Diagrammes de Bode	19

4	Mécanique du Point	21
4.1	Étude cinétique	21
4.2	Approche Énergétique	22
4.2.1	Puissance et travail	22
4.2.2	Énergie cinétique	22
4.2.3	Énergie potentielle	23
4.3	Forces centrales	23
4.4	Dynamique en référentiel non galiléen	24
4.4.1	Loi de composition des vitesses	25
4.4.2	Loi de composition des accélérations	25
4.4.3	Forces d'inerties	25
5	Mécanique du solide	27
5.1	Préambule	27
5.1.1	Dérivée d'un vecteur	27
5.1.2	Dérivée en coordonnées polaires	27
5.2	Définitions	27
5.3	Théorèmes de Koënig	28
5.4	Moment d'inertie	29
5.5	Théorèmes de dynamique	29
5.6	Solides en contact	30
6	Optique	32
6.1	Optique géométrique	32
6.1.1	Stigmatisme et aplanétisme	32
6.1.2	Réflexion et réfraction	33
6.2	Optique ondulatoire	34
6.2.1	Généralités	34
6.2.2	Lumière monochromatique	35
6.2.3	Interférences	36
6.2.4	Diffraction	38
6.2.5	Réseaux	39
7	Électromagnétisme	40
7.1	Électrostatique	40
7.1.1	Loi de COULOMB	40
7.1.2	Propriétés du champ électrostatique	41
7.1.3	Circulation du champ électrostatique	41
7.1.4	Flux du champ électrostatique	42
7.1.5	Dipôle électrostatique	42
7.2	Magnétostatique	44
7.2.1	Champ magnétique	44
7.2.2	Dipôle Magnétique	45
7.3	Équations de MAXWELL	46
7.3.1	Principe de conservation de la charge	46
7.3.2	Les équations de MAXWELL	46
7.3.3	Equations de POISSON et de LAPLACE	48
7.4	Énergie électromagnétique	49
7.5	Induction	51
7.5.1	Loi d'Ohm généralisée	51
7.5.2	Auto-induction	52

7.5.3	Inductance mutuelle	53
7.5.4	Force électromotrice induite	53
7.6	Propagation et rayonnement	54
7.6.1	Dans le vide	54
7.6.2	Propagation dans un plasma	58
7.6.3	Propagation dans un conducteur ohmique	61
8	Diffusion Thermique	63
8.1	Conduction	63
8.2	Convection	66
9	Rayonnement Thermique	67
10	Annexe	70
10.1	Trigonométrie	70
10.1.1	Définition	70
10.1.2	Addition / Produit	70
10.1.3	Nombres complexes	70
10.2	Calcul vectoriel	71
10.3	Complément mathématique	71
10.3.1	Dérivée d'un vecteur	71
10.3.2	Équation différentielle	72
10.4	Repères en physique	72
10.4.1	Repère cartésien	72
10.4.2	Repère cylindrique	73
10.5	Analyse Vectorielle	74
10.5.1	Généralités sur les champs	74
10.5.2	Opérateurs sur les champs	74
10.5.3	STOKES et OSTROGRADSKI	75
10.6	Règles générales	76
10.6.1	Relations entre les grandeurs	76
10.6.2	Longueurs de références	76
II	Chimie	77
11	Première année	78
11.1	Configuration électronique	78
11.2	Représentation moléculaire	79
11.3	Cristallographie	79
12	Thermochimie	81
12.1	Grandeurs extensives	81
12.2	Équilibre d'une réaction	82
12.2.1	Enthalpie libre	82
12.2.2	Avancement	83
12.2.3	Loi d'action de masse	84
13	Diagramme Potentiel-pH	85
13.1	Rappels	85
13.2	Méthode	85

Liste des acronymes	88
Index	89

Première partie

Physique

Chapitre 1

Thermodynamique

Méthode

Formules

Premier principe	$\Delta U = Q + W$	(cf. équation (1.4a) page 5)
	$dU = \delta Q + \delta W$	(cf. équation (??) page ??)
	$dU = TdS - PdV$	(pour une transformation réversible)
Enthalpie	$dH = U + PV$	
	$dH = TdS + VdP$	(pour une transformation réversible)
Deuxième principe	$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$	(cf. équation (1.10) page 7)
Gaz parfait	$dU = C_V dT$	
	$dH = C_P dT$	
	$PV^\gamma = \text{constante}$	

1.1 Définitions générales

Définition 1 : Système

On appelle **système thermodynamique** le contenu d'une zone délimitée dans l'espace.

Les différents systèmes :

Type de système	Ouvert	Fermé	Isolé
Échange d'énergie avec l'extérieur	✓	✓	
Échange de matière avec l'extérieur	✓		

Définition 2 : Transfert thermique

Le **transfert thermique** est un apport de chaleur lors d'un transfert de température :

$$(1.1) \quad Q = C \Delta T \quad dQ = C dT$$

Où C est la capacité calorifique en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

Pour un corps pur, C est défini, sinon, pour un gaz parfait, il faudra prendre $C = C_V$ ou $C = C_P$ suivant qu'on se trouve à volume ou à pression constante.

(ATTENTION) Parfois, on utilise les valeurs molaires en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$: $C_{Vm} = \frac{C_V}{n}$ par exemple.

Définition 3 : Travail

Le travail reçu par un système thermodynamique est noté W .

Il prend en compte le travail des forces de pression $-P_{\text{ext}}dV$ et les autres forces W_u :

$$(1.2) \quad \delta W = -P_{\text{ext}}dV + \delta W_u$$

Définition 4 : Énergie interne

L'énergie interne U d'un système thermodynamique est définie microscopiquement par :

$$(1.3) \quad U = U_0 + E_c^* + \underbrace{E_p^*}_{\text{Énergie potentielle d'interaction}}$$

1.2 Premier Principe

Théorème 4.1 : Premier principe

La variation d'énergie $\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p$ est égal à la somme du travail reçu W et du transfert thermique reçu Q :

$$(1.4a) \quad \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W$$

Entre deux instants t et $t + dt$ très proches :

$$(1.4b) \quad dU + dE_c + dE_p = \delta Q + \delta W$$

1.2.1 Transformation isochore

Une transformation isochore est une transformation pendant laquelle le volume V reste constant.

Théorème 4.2

Pour une transformation **isochore** (à volume constant), on peut simplifier la variation

d'énergie interne :

$$(1.5) \quad dU_V = C_V dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à volume constant** :

$$(1.6) \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Preuve 4.2.1 On note U_V et Q_V respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à volume constant.

Si on néglige dE_c et dE_p , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_V &= \delta W + \delta Q_V \\ &= -P \underbrace{dV}_{\text{nul car } V=\text{cte}} + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_V \\ &= \delta Q_V \\ dU_V &= C_V dT \end{aligned}$$

1.2.2 Transformation isobare

On peut effectuer un raisonnement analogue à la preuve précédente en étudiant cette fois une transformation **isobare** (à pression constante)

Preuve 4.2.2 On note U_P et Q_P respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à pression constante.

Si on néglige dE_c et dE_p , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_P &= \delta W + \delta Q_P \\ &= -PdV + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_P \\ dU_P + PdV &= \delta Q_P \\ d(U + PV)_P &= \delta Q_P \\ &= C_P dT \end{aligned}$$

Cette quantité de chaleur est mise en jeu est l'enthalpie. On va maintenant la définir de manière générale :

Définition 5 : Fonction Enthalpie

On appelle **enthalpie** la fonction d'état H telle que :

$$(1.7) \quad H = U + PV$$

Théorème 5.1

Lors d'une transformation isobare, l'enthalpie s'exprime par :

$$(1.8) \quad dH_P = C_P dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à pression constante** :

$$(1.9) \quad C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

1.3 Deuxième Principe

Théorème 5.2 : Deuxième principe

Il existe une **fonction d'état** S **entropie**, **additive**, **extensive**, telle que :

$$(1.10) \quad dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}} \quad \text{avec} \quad \delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T}$$

Au final, $\delta S_{\text{créée}} \geq 0$.

Lorsqu'une transformation est **réversible**, on a $S_{\text{créée}} = 0$ et alors $dS = \frac{\delta Q}{T}$

1.4 Cas particulier du gaz parfait

Définition 6 : Gaz Parfait

Un gaz parfait est un gaz vérifiant

$$(1.11) \quad PV = nRT$$

Théorème 6.1 : Énergie interne d'un gaz parfait

L'énergie cinétique interne d'un gaz parfait ne varie pas. On démontre expérimentalement que l'énergie interne d'un gaz parfait est :

$$(1.12) \quad U_{\text{Gaz Parfait}} = U_0 + C_V T$$

La capacité thermique à volume constant C_V d'un gaz parfait est

$$(1.13) \quad C_V = \begin{cases} \frac{3}{2}nR & \text{pour un gaz parfait monoatomique} \\ \frac{5}{2}nR & \text{pour un gaz parfait polyatomique} \end{cases}$$

Théorème 6.2 : Capacité calorifique

On peut utiliser deux capacités calorifiques :

La capacité calorifique C_V à volume constant

$$(1.14a) \quad C_V = \frac{3}{2}nR$$

La capacité calorifique C_P à pression constante

$$(1.14b) \quad C_P = \frac{5}{2} nR$$

Ce qui donne la **relation de MAYER** :

$$(1.15) \quad C_P - C_V = R \qquad C_P - C_V = nR$$

Preuve 6.2.1

Si on est à volume constant :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \underbrace{Q_v}_{nC_V \Delta T} + \underbrace{W}_{PdV} \\ &= nC_V \Delta T + 0 \\ \Delta U &= nC_V \Delta T \end{aligned}$$

Donc l'énergie interne est proportionnelle à la variation de température.

Maintenant, si on est à pression constante, on va prendre l'enthalpie H :

$$\Delta H = \underbrace{\Delta U}_{Q + W} + \underbrace{PV}$$

Théorème 6.3 : Relations de LAPLACE

Au cours d'une transformation **adiabatique réversible** (donc isentropique), un gaz parfait vérifie :

$$(1.16a) \quad PV^\gamma = \text{constante}$$

$$(1.16b) \quad TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$(1.16c) \quad \begin{aligned} P^{1-\gamma} T^\gamma &= \text{constante} \\ &= P_{\text{eq}} V_{\text{eq}} \end{aligned}$$

$$\text{Où } \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Théorème 6.4 : Entropie d'un gaz parfait

1.5 Troisième Principe

Définition 7 : Troisième principe

À température nulle ($T = 0K$), l'entropie est nulle.

1.6 Machines thermiques

Théorème 7.1 : Énoncé des premiers et deuxièmes principes

Sur un cycle, les fonctions d'état reviennent à leur état initial. Donc le premier principe s'écrit :

$$(1.17) \quad W + \sum_i Q_i = \Delta U = 0$$

De même, le second principe s'écrit cette fois :

$$(1.18) \quad S_{\text{échangée}} = \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

On appelle ce second principe l'**inégalité de CLAUSIUS**.

Théorème 7.2 : Rendement

Le rendement r est :

$$(1.19a) \quad r = \frac{\text{Bénéfices}}{\text{Donné à la machine}}$$

$$(1.19b) \quad r_{\text{moteur}} = -\frac{W}{Q_c}$$

$$(1.19b) \quad r_{\text{réfrigérateur}} = -\frac{Q_f}{W}$$

$$(1.19c) \quad r_{\text{pompe à chaleur}} = -\frac{Q_c}{W}$$

1.7 Systèmes ouverts en régime stationnaire

1.7.1 Système ouvert

Définition 8 : Système ouvert

Un **système ouvert** est un système dont l'espace est traversé par de la matière.

Pour être conforme au programme, on n'étudie que l'écoulement dans le cas unidimensionnel.

Définition 9 : Régime stationnaire

Un système ouvert en **régime stationnaire** est un système pour lequel toutes les caractéristiques du fluide contenu à l'intérieur du système ne changent pas.

Définition 10 : Débits massiques

On se place dans le cas de systèmes ouverts en **régime stationnaire**. La masse étant une caractéristique du fluide, elle ne varie pas non plus.

C'est-à-dire que le débit de fluide massique entrant dm_e est égal au débit massique de fluide sortant dm_s , et on peut définir le **débit massique** D_m à travers le système comme étant $D_m = dm_e = dm_s$.

(1.20) Si dm est la masse de fluide entrée/sortie pendant un court instant dt :

$$D_m = \frac{dm}{dt}$$

Théorème 10.1 : Premier principe dans un système ouvert

Dans un système ouvert, le premier principe s'exprime sur les grandeurs massiques :

(1.21)

$$D_m \left(\Delta u + \Delta e_c + \Delta e_p \right) = D_m (q + w)$$

Chapitre 2

Statique des fluides

2.1 Champ de pression d'un fluide

Définition 11 : Définition générale

La pression et la masse volumique sont définies comme des champs scalaires fonctions des variables d'espace.

Théorème 11.1 : Relation fondamentale de la statique

Pour un champ de pesanteur \vec{g} , le champ de pesanteur P vérifie localement :

$$(2.1a) \quad \frac{dP}{dz} = \rho g$$

où ρ est la masse volumique locale. On l'intègre en :

$$(2.1b) \quad P(z) = P_0 + \rho g z$$

La norme d'une force \vec{F}_p exercée par une pression P sur une surface S est $F = P \cdot S$

2.2 Théorème d'ARCHIMÈDE

Théorème 11.2 : Poussée d'ARCHIMÈDE

Un corps entièrement immergé dans un liquide subit une force opposée au poids du volume du fluide déplacé. C'est à dire :

$$(2.2) \quad \vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

Chapitre 3

Électronique

Méthode

Résoudre

$$\text{Loi des nœuds} \quad \sum_{\text{Nœud}} i = 0$$

$$\text{Puissance} \quad \mathcal{P} = u \times i$$

$$\text{Inductance} \quad u = L \frac{di}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2} Li^2$$

$$\text{Loi des mailles} \quad \sum_{\text{Maille}} u = 0$$

$$\text{Énergie électrique reçue} \quad \Delta E = \int_{\Delta t} \mathcal{P}(t) dt$$

$$\text{Capacité} \quad i = C \frac{du}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2} Cu^2$$

Lois de KIRCHOFF

Pour ne pas avoir trop d'équations redondantes avec les lois de Kirchhoff, on pourra suivre la méthode suivante :

- On compte le nombre b de branches et n de nœuds.
- On écrit $(n - 1)$ lois des nœuds
- On écrit $((b - (n - 1)))$ lois des mailles
- On résout le système final

3.1 Circuits linéaires dans l'ARQS

— **Définition 12 : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)** —

On parle d'ARQS quand le courant se propage assez rapidement pour pouvoir considérer que son établissement est instantané.

Ainsi, pour une Onde Électromagnétique (OEM) sinusoïdale de période temporelle T et de période spatiale λ , telle que $\lambda = c \cdot T$ (où c désigne la vitesse de l'onde), et pour un observateur

situé à une distance D d'un point quelconque du circuit, on est dans le cadre de l'ARQS si $D \ll \lambda$.

Définition 13

Un courant électrique résulte d'un déplacement de charges q . On peut dès lors définir l'intensité I et la tension U d'un dipôle :

$$(3.1) \quad I = \frac{dq}{dt} \quad U_{AB} = V_A - V_B$$

Théorème 13.1 : Loi d'Ohm

Loi d'Ohm Globale

$$(3.2) \quad u = Ri \quad i = Gu$$

3.1.1 THÉVENIN-NORTON

Théorème 13.2 : Équivalence de THÉVENIN-NORTON

Dans le modèle de THÉVENIN, un générateur de tension est la combinaison d'un générateur de tension idéal de *Force Électromotrice* E et d'une résistance interne R :

$$(3.3) \quad u = E - Ri$$

Ce générateur est équivalent, dans le modèle de NORTON, à la combinaison d'un générateur de courant idéal de *courant de court-circuit* $I_0 = \frac{E}{R}$ et d'une résistance R en parallèle (on prendra $G = \frac{1}{R}$) :

$$(3.4) \quad i = I_0 - Gu$$

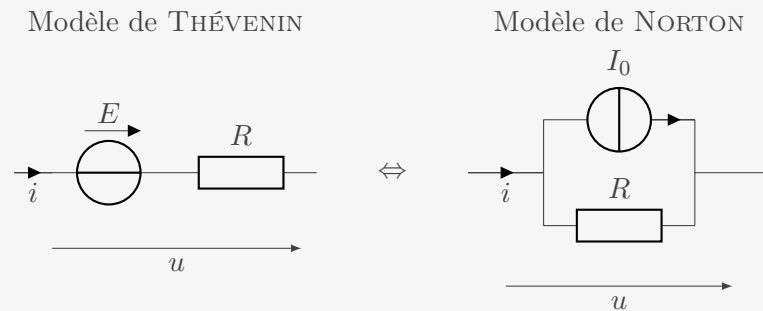
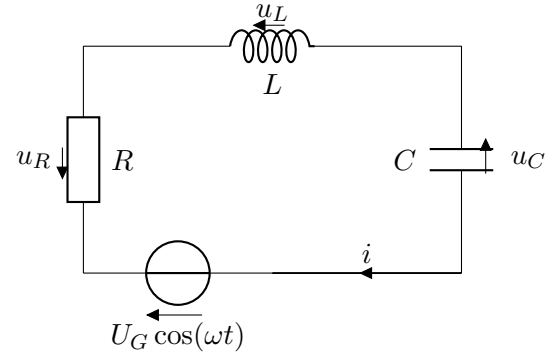


FIGURE 3.1 – Équivalence THÉVENIN-NORTON

3.2 Régime transitoires

Mise en équation :

$$\begin{cases} u_C + u_L + u_R = U_G \cos(\omega t) \\ u_R = Ri \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$$



3.3 Amplificateur Opérationnel (AO)

Définition 14 : L'Amplificateur Opérationnel

Un Amplificateur Opérationnel (AO) est un **circuit intégré** à huit bornes dont 5 sont utilisées en TP. C'est un composant **actif** qui doit être alimenté par un courant stable continu.

Propriétés

Les propriétés générales d'un AO :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation : $V_S \in [-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}]$
- L'intensité de sortie est limitée par une valeur de saturation : $I_S \in [-I_{\text{sat}}; I_{\text{sat}}]$

En régime linéaire (avec une boucle de **rétroaction négative**), on a :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est **presque nulle** : $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation : $V_S \in] - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}[$

Au contraire, en régime saturé (avec une boucle de **rétroaction positive**), on a :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont pratiquement nuls : $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est **quelconque** : $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est saturée du signe d' ε : $V_S \in \{ - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}} \}$

Enfin, l'Ao idéal a les propriétés suivantes :

- Les courants d'entrée I_- et I_+ sont nuls : $I_- = I_+ = 0$
- La tension d'entrée ($\varepsilon = V_+ - V_-$) est nulle en régime linéaire : $\varepsilon = 0$

3.4 Régimes sinusoïdaux

Méthode

Formules

Théorème de MILLMAN
$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

Puissance moyenne
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_0 I_0 \cos \varphi}{2}$$

Étudier un circuit électrique

Lorsqu'on doit étudier un circuit, il peut être utile de penser aux méthodes suivantes :

- Calculer les impédances équivalentes
- Utiliser des ponts diviseurs
- Appliquer les lois de KIRCHOFF
- Trouver des équivalences THÉVENIN-NORTON
- Appliquer la formule de Millman

Théorème 14.1 : Impédance des dipôles usuels

On donne, pour les dipôles usuels, leur impédance en complexes \underline{Z} :

Dipole	$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$	
Résistance	$\underline{u} = R \cdot \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Résistance}} = R$
Bobine	$\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Bobine}} = jL\omega$
Condensateur	$C \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$

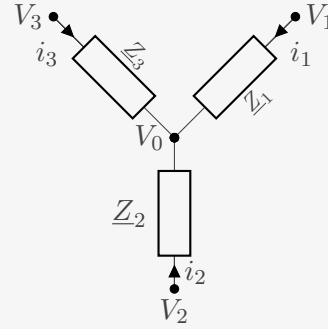
Preuve 14.1.1 On remarque que pour des fonction complexes, dériver $f = re^{j(\omega t + \varphi)}$ revient à multiplier f par $j\omega$. On obtient alors immédiatement toutes les formules précédentes en les exprimant bien sous la forme $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

Théorème 14.2 : MILLMAN

Le théorème de MILLMAN permet de calculer le potentiel d'un nœud

(3.5)

$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_k \frac{1}{Z_k}}$$



3.4.1 Puissance

Définition 15 : Puissance instantanée

La **puissance instantanée** est une fonction du temps :

(3.6)

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$$

En **convention récepteur**, c'est la puissance reçue par le dipôle.

En **convention générateur**, c'est la puissance cédée par le dipôle.

Définition 16 : Energie

L'**énergie** est l'intégrale de la puissance :

(3.7)

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt$$

Définition 17 : Puissance moyenne

On s'intéresse plus souvent à la **puissance moyenne** \mathcal{P}_m sur un intervalle de temps τ

(3.8)

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{P}(t)dt$$

En général, on prend $\tau = T$ la période d'une fonction sinusoïdale.

On définira la **valeur moyenne** d'une fonction du temps de cette même manière :

(3.9)

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Théorème 17.1 : Valeur efficace

La **valeur efficace** est la valeur continue qui fournirait la même énergie pendant un

même intervalle de temps. Pour une tension $u(t) = Ri(t)$:

$$(3.10) \quad U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

La valeur efficace est donc la racine carrée de la moyenne du carré, en anglais *Root Mean Square* (RMS).

Preuve 17.1.1 Par définition de la valeur efficace, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= U_{\text{RMS}} I_{\text{RMS}} \times T \\ \int_0^T u(t)i(t)dt &= U_{\text{RMS}} \frac{U_{\text{RMS}}}{R} T \\ \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt &= \frac{U_{\text{RMS}}^2}{R} T \\ U_{\text{RMS}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \end{aligned}$$

Pour un régime sinusoïdal, $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$, donc :

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

3.5 Filtres

Définition 18 : Fonction de transfert

La **fonction de transfert** \underline{H} d'un quadripôle de tension d'entrée \underline{v}_e et de tension de sortie \underline{v}_s est définie par :

$$(3.12) \quad \underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

Définition 19 : Filtre

Un **filtre** est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend de la pulsation ω

3.5.1 Fonctions de transfert usuelles

1 ^{er} ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
	Passe-haut	$\frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	
2 ^e ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$
	Passe-haut	$\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	
	Passe-bande	$\frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	
	Coupe-bande	$\frac{H_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	

3.5.2 Diagrammes de Bode

Définition 20 : Gain et phase d'un quadripôle

On peut écrire la fonction de transfert sous la forme polaire :

$$\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

On définit alors le **gain** $G(\omega)$ comme le rapport des amplitudes d'entrées et de sortie et la **phase** $\varphi(\omega)$ comme le déphasage entre ces mêmes signaux.

Ainsi :

$$(3.13) \quad G(\omega) = \sqrt{\underline{H}\overline{H}} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}\underline{H}}{\text{Re}\underline{H}}$$

Définition 21 : Diagramme de BODE

Le **diagramme de BODE** d'un quadripôle est l'ensemble des deux tracés en fonction de $\log(\omega)$:

- du gain en décibel $G_{\text{dB}} = 20 \log(G(\omega))$
- de la phase $\varphi(\omega)$

(ATTENTION)

Il est souvent commode d'avoir recours à une variable réduite comme $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où ω_0 est une constante qui permet de simplifier les calculs

Définition 22 : Pulsation de coupure à -3 dB

La **pulsation de coupure** ω_c correspond à la valeur de la pulsation pour laquelle le gain maximum G_{max} est divisé par $\sqrt{2}$:

(3.14)

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Chapitre 4

Mécanique du Point

Méthode

Formules Usuelles

Interactions fondamentales

Force Gravitationnelle $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_r$

Force Électrostatique $\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2}$

Forces usuelles

Poids $\vec{P} = m \vec{g}$

Force de LORENTZ $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Force de Rappel $\vec{F} = k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$

Énergies usuelles

Energie potentielle générale $E_p(A) - E_p(B) = W_{A \rightarrow B}$

Energie potentielle gravitationnelle $E_p = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r_{AB}}$

Energie potentielle de pesanteur $E_p = mgh$

Energie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Energie potentielle élastique $E_{p,e} = \frac{k(l - l_0)^2}{2}$

4.1 Étude cinétique

Définition 23 : Force de Rappel

Cette force est déterminée expérimentalement, au voisinage d'une longueur d'équilibre l_0 , par :

$$(4.1) \quad \vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$$

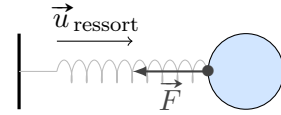


FIGURE 4.1 – Force de rappel d'un ressort

4.2 Approche Énergétique

Définition 24 : Système conservatif

Un **système conservatif** est un système dont l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ est constante.

Définition 25 : Force conservative

C'est une force dont le travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin emprunté.

4.2.1 Puissance et travail

Définition 26 : Puissance d'une force

La **puissance** caractérise la contribution d'une force \vec{F} sur un objet en mouvement à une vitesse \vec{v} .

$$(4.2) \quad \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Définition 27 : Travail d'une force

Le travail est la somme des contributions d'une force \vec{F} sur un objet en mouvement :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \delta W &= \mathcal{P} dt \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

4.2.2 Énergie cinétique

Définition 28 : Énergie cinétique

C'est la première énergie qu'on définit :

$$(4.5) \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Pour le **théorème de la puissance cinétique**, cf théorème 36.4 page 30. Le théorème de l'énergie cinétique a été vu en première* :

Théorème 28.1 : Théorème de l'énergie cinétique

Il dérive de l'expression de l'énergie mécanique :

$$(4.6) \quad \underbrace{\frac{dE_m(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action non conservatives}}} = \frac{dE_c(\Sigma)}{dt} + \underbrace{\frac{dE_p(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action conservatives}}}$$

Théorème 28.2

On peut déduire du théorème précédent que

$$(4.7) \quad \begin{array}{lll} \text{La variation d'énergie cinétique} & \text{est égale à} & \text{la somme des travaux des forces} \\ E_c(B) - E_c(A) & = & \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i) \\ dE_c & = & \delta W_{A \rightarrow B} \end{array}$$

(ATTENTION) Pour l'énergie cinétique, on prend toutes les forces en comptes. Conservatives ou non.

4.2.3 Énergie potentielle

Définition 29 : Énergie potentielle

L'énergie potentielle dérivant d'action conservatives, on peut la définir ainsi, en définissant un point O comme l'origine :

$$(4.8) \quad E_p(M) = E_p(O) - W_{O \rightarrow M}(\vec{P})$$

En pratique, sur Terre, $E_p = mgh$

4.3 Forces centrales

Définition 30 : Force centrale

Dans un référentiel \mathcal{R} donné, une force est **centrale** si elle pointe en permanence vers un point fixe de \mathcal{R} .

*. cf page 418 du livre *Physique !* de Jérôme MAJOU

Un champ de force centrale newtonien est défini par

$$(4.9) \quad \vec{F}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad E_p(r) = \frac{k}{r}$$

Théorème 30.1 : Loi des aires

Une force centrale présente un moment nul, donc le moment cinétique d'un objet soumis exclusivement à une force centrale est constant d'après le Théorème du Moment Cinétique (TMC) (théorème 36.3 page 30).

La trajectoire est alors plane et vérifie :

$$(4.10a) \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m} = C$$

D'où on déduit, en définissant \mathcal{V} comme étant la vitesse aréolaire d'un point de masse m :

$$(4.10b) \quad \boxed{\mathcal{V} = \frac{\sigma_O}{2m} = \frac{C}{2}}$$

Preuve 30.1.1 Les forces centrales ont un moment nul. Donc, d'après le TMC :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = 0$$

Donc $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{constante}}$. Or, par définition du moment cinétique (cf. équation (5.6) page 28) :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= mr \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Théorème 30.2 : Lois de KEPLER

Les trois lois de KEPLER ont été définies expérimentalement vers la fin du XVI^e siècle :

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont l'un des foyers est le soleil
- Pendant un même intervalle de temps t , l'aire balayée par la trajectoire d'une planète est constante (loi des aires)
- La période T de révolution d'une planète est liée au demi grand axe a de sa trajectoire elliptique :

$$(4.11) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_{\text{Soleil}}}$$

4.4 Dynamique en référentiel non galiléen

Définition 31 : Référentiel galiléen

On dit qu'un référentiel \mathcal{R} est **galiléen** si les interactions physiques suffisent à justifier les mouvements

(ATTENTION) Cette définition limite la caractérisation d'un référentiel galiléen à la précision de nos expérimentations

Définition 32 : Mouvement relatif de deux référentiels

Le mouvement d'un référentiel \mathcal{R}' relativement à un autre référentiel \mathcal{R} est caractérisé par une vitesse de translation ($\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$) et une vitesse angulaire de rotation ($\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$).

Théorème 32.1 : Dérivation d'un vecteur dans deux référentiels

Si $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ est le vecteur rotation de \mathcal{R} relativement à \mathcal{R}' , alors la dérivée temporelle d'un vecteur \vec{x} est

$$(4.12) \quad \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{x}$$

4.4.1 Loi de composition des vitesses

Théorème 32.2 : Composition des vitesses

La vitesse d'un point M s'exprime, dans un référentiel non galiléen \mathcal{R} en mouvement relativement à un autre référentiel \mathcal{R}' galiléen, par :

$$(4.13) \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{vitesse de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$$

4.4.2 Loi de composition des accélérations

Théorème 32.3 : Composition des accélérations

L'accélération d'un point M s'exprime, dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}' en mouvement relativement à un autre référentiel \mathcal{R} galiléen, par :

$$(4.14) \quad \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{a}(O')_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{Accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{Accélération de CORIOLIS}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge [\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}]$$

4.4.3 Forces d'inerties

Les forces d'inerties varient suivant le référentiel. On en distingue 4 :

Force d'inertie de translation	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{translation}} = -m \vec{a}(O)_{\mathcal{R}}$
Force d'inertie centrifuge	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{centrifuge}} = m \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 r \vec{u}_r$
Force d'inertie de rotation différentielle	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{différentielle}} = -m \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$
Force d'inertie complémentaire de CORIOLIS	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{coriolis}} = -2m \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$

Frottement solide

Théorème 32.4 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle \vec{T} en fonction du frottement solide et de la composante normale \vec{N} :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Statique} & \vec{T}_0 \leq \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \stackrel{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right.$$

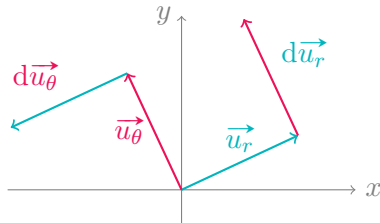
Chapitre 5

Mécanique du solide

5.1 Préambule

5.1.1 Dérivée d'un vecteur

Ce problème est courant quand on a les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ à dériver. Il suffit de les décomposer selon la base \vec{u}_x, \vec{u}_y en utilisant les fonctions cosinus et sinus. On obtient alors :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{d(\vec{u}_r)}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d(\vec{u}_\theta)}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{cases}$$


D'où, en utilisant que $\frac{d(\vec{u})}{dt} = \frac{d(\vec{u})}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$, le résultat $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}}{d\theta}$

5.1.2 Dérivée en coordonnées polaires

$$(5.2) \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

Théorème 32.5 : Relation de VARIGNON

Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir : la formule de « **Babar** »

$$(5.3) \quad \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

Rappel : La quantité de mouvement $\vec{P} = m \vec{v}$ se conserve. Cette idée est souvent utile en mécanique.

5.2 Définitions

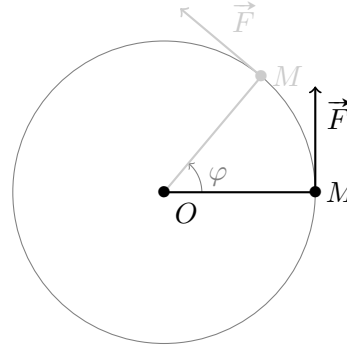
Définition 33 : Moment $\vec{\mathcal{M}}$ d'une force

On définit le **moment** $\vec{\mathcal{M}}$ (équivalent couple $\vec{\Gamma}$) d'une force \vec{F} appliquée en un point M sur

un levier de centre O :

(5.4)

$$\underset{\text{Moment}}{\vec{\mathcal{M}}} = \underset{\text{Couple}}{\vec{\Gamma}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$



Définition 34 : Torseur cinétique

C'est un torseur tout simple $[\vec{\sigma}, \vec{P}]$

(5.5)

$$\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}$$

d'où

$$\boxed{\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge M \vec{v}}$$

Rappel : La vitesse de rotation ω permet de déterminer la vitesse \vec{v} . Pour un solide en rotation autour d'un axe Δ :

$$\text{D'après Varignon, on a} \quad \vec{v}(M) = 0 + \vec{\omega}(\Sigma) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\text{D'où} \quad \vec{\omega}(\Sigma) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_{\Delta}$$

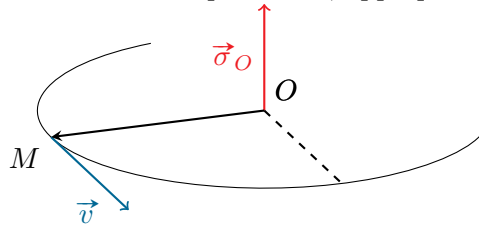
$$\text{Dans le mouvement précédent} \quad v(M) = \omega \cdot OM_{\text{rayon}}$$

Définition 35 : Moment cinétique $\vec{\sigma}_O$

Le moment cinétique caractérise le mouvement de rotation d'un point par rapport à un autre. Il suffit de prendre la relation de notre torseur précédent, appliqué en O sans mouvement :

(5.6)

$$\vec{\sigma}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$



5.3 Théorèmes de Koëinig

Théorème 35.1 : 1^e théorème de Koëinig

C'est le torseur cinétique appliquée en A par rapport à G le centre du référentiel barycentrique :

$$(5.7) \quad \vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}_{Br}}_{\text{Moment cinétique du référentiel barycentrique}} + \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}(G)$$

Moment cinétique du référentiel barycentrique

Théorème 35.2 : 2^e théorème de Koëinig

Une application du premier théorème à l'énergie cinétique :

$$(5.8) \quad E_{c,R} = E_{c,Br} + \frac{1}{2} M (\vec{v}(G))^2$$

5.4 Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide caractérise la répartition de la masse dans un solide.

Définition 36 : Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide Σ par rapport à un axe Δ est :

$$(5.9) \quad J_{\Delta} = \iiint_{P \in \Pi} r^2 dm_P$$

Théorème 36.1

On relie la vitesse de rotation d'un axe Δ du solide à J_{Δ} par

$$(5.10) \quad \boxed{\vec{\sigma} = J_{\Delta} \cdot \omega \vec{u}_{\Delta}}$$

et on peut alors calculer l'énergie cinétique :

$$(5.11) \quad E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$



5.5 Théorèmes de dynamique

Ce sont les 3 théorèmes les plus importants.

Théorème 36.2 : Théorème de la Résultante Cinétique (TRC)

C'est en réalité le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) qu'on voit en termi-

nale et en première, mais la version originale avec la quantité de mouvement.

$$(5.12) \quad \frac{d \overbrace{\vec{P}_{R_g}}^{m \vec{v}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \text{ est équivalent à } \sum \vec{F} = m \vec{a}$$

Théorème 36.3 : Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Pour un couple $\vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$ issu des forces extérieures appliquées en A et un moment cinétique $\vec{\sigma}(A)$ appliqué en un point A , on a :

$$(5.13a) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$(5.13b) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(A)$$

C'est un équivalent du PFD, mais qui prend en compte la rotation, c'est à dire le moment cinétique. Pour les définitions du moment d'une force et du moment cinétique, on se réfèrera à la formule (5.6). On est souvent amené à utiliser cette équation en conjonction avec l'équation (5.10) du moment d'inertie.

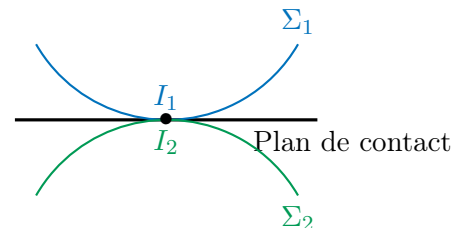
Théorème 36.4 : Théorème de la puissance cinétique

$$(5.14) \quad \frac{dE_c}{dt} = \underbrace{\sum_i P_i}_{\text{Puissances des forces qui travaillent}}$$

5.6 Solides en contact

On définit la **vitesse de glissement instantané** entre deux solides Σ_1 et Σ_2 par :

$$(5.15) \quad \boxed{\vec{v}_{\text{glissement}} = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)}$$



Définition 37 : Roulement sans glissement

Deux conditions :

- $\vec{v}_{\text{glissement}} = 0$
- $\vec{\omega}_{/\Sigma_2}(\Sigma_1)$ est parallèle au **plan de contact**

Théorème 37.1 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle \vec{T} en fonction du frottement solide et de la composante normale \vec{N} :

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} \text{Statique} & \vec{T}_0 = \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement \textbf{statique}}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \begin{array}{l} \geq \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement \textbf{dynamique}}} \times \vec{N} \\ \underset{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement \textbf{dynamique}}} \times \vec{N} \end{array} \end{array} \right.$$

Chapitre 6

Optique

6.1 Optique géométrique

Méthode

Formules de conjugaison

$$\begin{array}{l} \text{Miroir} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \\ \quad \quad \quad \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \\ \text{Lentille} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \end{array}$$

Techniques

- Les dessins miroirs peuvent être « développés » pour obtenir la représentation d'une lentille
- Règles de construction pour les dioptrés et les miroirs
 - Un rayon passant par le centre n'est pas dévié
 - Un rayon incident parallèle à l'axe passe, après son passage par le système optique, par le foyer image
 - Un rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique
 - Deux rayons parallèles à l'axe se croisent au foyer image
 - Deux rayons se croisant au foyer objet ressortent parallèles du système optique
- Ne pas oublier le principe de retour inverse de la lumière

6.1.1 Stigmatisme et aplanétisme

Définition 38 : Système stigmatique

Un système optique est dit **rigoureusement stigmatique** pour le couple de points $(A; A')$ si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir été déviés par le système. Si A' est une tâche assez petite au lieu d'un point, on parle de **stigmatisme approché**

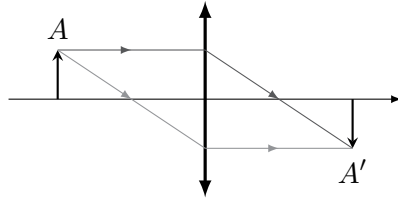


FIGURE 6.1 – Système rigoureusement stigmatique

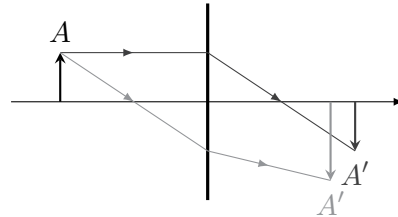


FIGURE 6.2 – Système non stigmatique

Définition 39 : Système aplanétique

Soit (S) un système optique. Soient A et A' deux points de l'axe optique conjugués par (S) et soit B un point du plan transverse de A . Le système est dit **aplanétique** pour A si B' , le conjugué de B par (S) , est dans le plan transverse de A' .

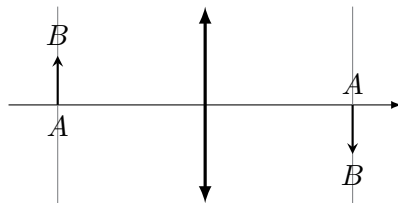


FIGURE 6.3 – Système rigoureusement aplanétique

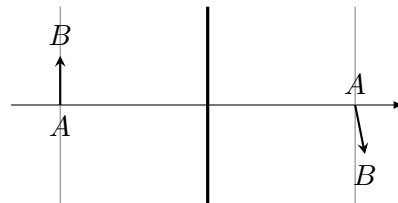


FIGURE 6.4 – Système non aplanétique

Définition 40 : Conditions de GAUSS

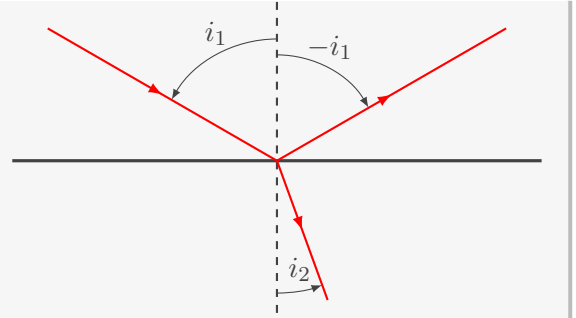
Les conditions de GAUSS permettent de vérifier l'aplanétisme et le stigmatisme approchés :

- Les rayons lumineux font un **angle petit** avec l'axe du système
On parle de **rayons paraxiaux**
- Les rayons lumineux rencontrent les dioptrés ou les miroirs au **voisinage de leur sommet**
- L'angle d'incidence des rayons sur les dioptrés ou les miroirs est **petit**

6.1.2 Réflexion et réfraction

Théorème 40.1 : Loi de DESCARTES

La loi de DESCARTES stipule que l'angle de réflexion est le même que l'angle d'incidence. De plus, la loi permet de calculer l'angle du rayon réfracté :



(6.1)

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

6.2 Optique ondulatoire

Méthode

Définitions

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Périodicité temporelle $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Périodicité spatiale $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$c = \lambda\nu$ $\lambda = cT$

Vibration Complexe $\underline{s}(M, t) = A(M) e^{i(\varphi(M) - \omega t)}$

Amplitude Complexe $\underline{a}(M) = A(M) e^{i\varphi(M)}$

Éclairement (cf. (6.3)) $\mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$

Propriétés

$$s(M, t) = \text{Re}(\underline{s}(M, t))$$

$$A(M) = |\underline{a}(M)| = |\underline{s}(M, t)|$$

$$\varphi(M) = \arg(\underline{a}(M))$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} K |\underline{a}(M)|^2 = \frac{1}{2} K |\underline{s}(M, t)|^2$$

6.2.1 Généralités

Définition 41 : Onde Électromagnétique (OEM)

Une OEM est le couple (\vec{E}, \vec{B}) . C'est l'oscillation couplée du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} .

Définition 42 : Vibration lumineuse

Le modèle ondulatoire de la lumière étant plus vieux que les OEMs, la **vibration lumineuse** $s(M, t)$ est une composante quelconque du champ électromagnétique. C'est-à-dire que $s(M, t) = \vec{E}$ ou \vec{B} .

Théorème 42.1 : Superposition

On admet que la vibration lumineuse en un point M à l'instant t est la somme des toutes les vibrations lumineuses en ce point :

$$(6.2) \quad s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

Les récepteurs de lumière (comme l'œil et les capteurs CDD) sont sensibles à une valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent. Il convient alors de définir l'éclairement pour décrire ce que l'on voit.

Définition 43 : Éclairement

Les capteurs photo-sensibles ayant un taux de rafraîchissement lent relativement à la vitesse de la lumière et à sa pulsation ω , ils font une moyenne sur une période de la vibration reçue. C'est alors qu'on définit l'**éclairement** :

$$(6.3) \quad \mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

6.2.2 Lumière monochromatique

Définition 44 : Lumière monochromatique

La **lumière monochromatique** est la forme la plus idéale de vibration. Elle est « purement » sinusoïdale :

$$(6.4) \quad s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Cette vibration présente une périodicité temporelle et une périodicité spatiale :

- Périodicité temporelle :

caractérisée par la **période** T , la fréquence $\nu = \frac{1}{T}$, et la **pulsation** ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Périodicité spatiale :

caractérisée par la **longueur d'onde** λ (période spatiale), le **nombre d'onde** $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ (fréquence spatiale), et le **module d'onde** (pulsation spatiale) k :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On les relie avec la vitesse de propagation :

Pour la lumière dans le vide :

$$(6.5) \quad \lambda_0 = cT$$

Chemin optique

Définition 45 : Chemin optique

Soit un rayon lumineux passant par les points M et N en un temps t_{MN} . Le **chemin optique** (MN) parcouru par la lumière est :

$$(6.6) \quad (MN) = c \cdot t_{MN}$$

En milieu homogène où l'onde se déplace à une vitesse v , si MN est la distance parcourue, $t_{MN} = \frac{MN}{v}$.

6.2.3 Interférences

Interférences entre deux sources

Prenons deux sources S_1 et S_2 , de vibrations respectives $s_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$ et $s_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$.

Théorème 45.1 : Interférences entre deux sources

Pour le système ainsi définit, on a :

$$(6.7) \quad \begin{aligned} s(M, t) &= s_1(M, t) + s_2(M, t) \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \underbrace{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}_{\text{Nul si } \omega_1 \neq \omega_2} \end{aligned}$$

Ainsi, le terme d'interférence $2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$ n'est valable que si :

- Les ondes 1 et 2 doivent être de même pulsation (i.e $\omega_1 = \omega_2$)
- Les sources S_1 et S_2 doivent être cohérentes
- Le déphasage ne doit pas dépasser la longueur de cohérence l_c

Preuve 45.1.1 On exprime l'éclairement \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= K \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle \\ &= K \langle (s_1(M, t))^2 \rangle + K \langle (s_2(M, t))^2 \rangle + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \\ &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \end{aligned}$$

Étudions ce deuxième terme $2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle$:

$$\begin{aligned} s_1(M, t) s_2(M, t) &= 2K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \times 2K \left(\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \right) \end{aligned}$$

D'après la formule de trigonométrie (10.3) page 70 ($\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$).

On sait de plus que $\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle = 0$ car $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$,
et $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle = 0 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$.

Trous de YOUNG

Étudions le dispositif suivant : deux fentes (F_1) et (F_2) sont éclairées par une source S à l'infini formant un angle α_0 avec l'origine.

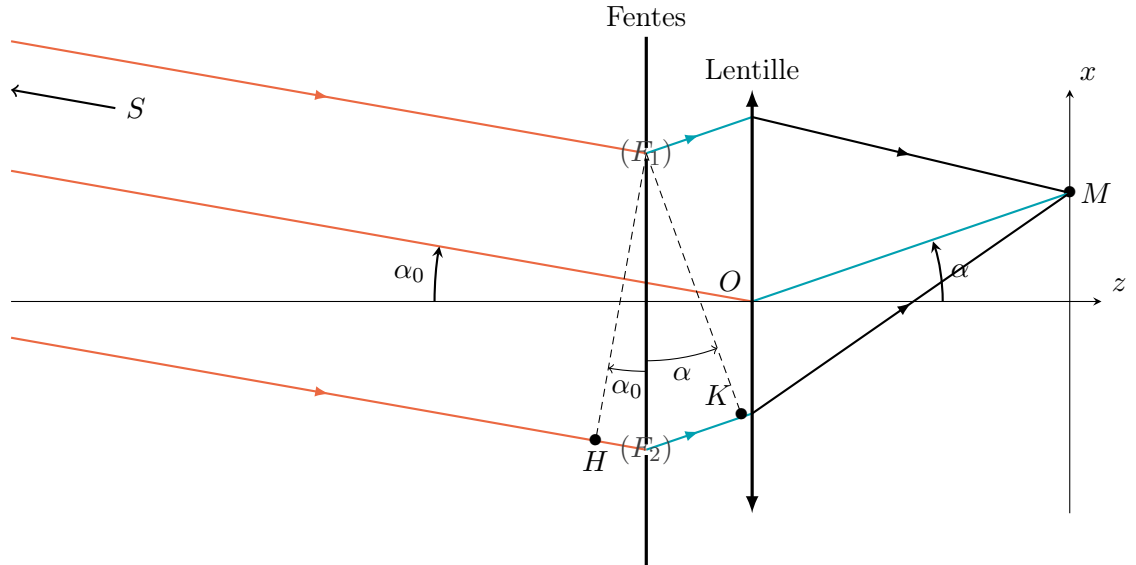


FIGURE 6.5 – Dispositif des trous de YOUNG

Quelques remarques : Puisque M est dans le plan transversal du foyer de la lentille, on sait que les rayons de cette couleur sont parallèles avant de passer par la lentille.

De plus, la présence de la lentille F' impose que l'on soit dans les conditions de GAUSS pour l'angle α (cf. définition 40 page 33 pour les conditions de GAUSS).

Ainsi, on peut écrire l'approximation

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

avec f' la distance focale de la lentille F' .

Pour nous aider dans les calculs, on note H et K les projetés orthogonaux de (F_1). Calculons la différence de marche $\delta(M)$:

$$\begin{aligned} \delta(M) &= (SF_2M) - (SF_1M) \\ &= (SH) + (HF_2) + (F_2K) + (KM) - ((SF_1) + (F_1M)) \end{aligned}$$

Les chemins optiques en couleur se soustraient. Il nous reste :

$$\delta(M) = (HF_2) + (F_2K)$$

(ATTENTION)

Il ne faut pas omettre de préciser pourquoi (KM) et (F_1M) sont identiques. En effet : H et (F_1) sont dans le même plan d'onde car ils viennent directement de S qui est à l'infini et qui émet une onde plane. Mais le plan contenant K et (F_1) n'est pas *a priori* un plan d'onde.

du fait que les ondes issues des fentes ne sont plus planes. Pour raisonner, on dira que M étant une image à l'infini, les plans d'ondes relatifs à M sont les plans perpendiculaires à ses rayons. Maintenant, en remarquant qu'on peut reporter les angles α et α_0 (*cf.* le schéma), les calculs de (HF_2) et (F_2K) se font facilement :

$$\begin{aligned}(HF_2) &= n_{\text{air}} HF_2 \\ &= n_{\text{air}} a(-\sin \alpha_0) \\ &= -n_{\text{air}} a \sin \alpha_0 \\ &\approx -n_{\text{air}} a \alpha_0 (HF_2)\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(F_2K) &= n_{\text{air}} a \sin \alpha \\ &\approx n_{\text{air}} a \alpha \\ (F_2K) &\approx n_{\text{air}} a \frac{x}{f'}\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat :

$$\begin{aligned}\delta(M) &\approx n_{\text{air}} a \left(\frac{x}{f'} - \alpha_0 \right) \\ i &= \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}} a}\end{aligned}$$

6.2.4 Diffraction

Définition 46 : Principe d'HUYGENS-FRESNEL

Tout point P d'une surface Π issu d'une même source \mathcal{S} agit comme une source secondaire d'amplitude proportionnelle à celle de la source.

La vibration lumineuse en un point donné est la somme des vibrations émises par l'ensemble des sources secondaires.

$$(6.10) \quad \underline{a(M)} = \mathcal{C}_0 \iint_{P \in \Pi} \frac{a(P)}{PM} e^{i \overbrace{k_0 PM}^{\varphi(M)}}$$

Théorème 46.1 : Diffraction de FRAUNHOFER

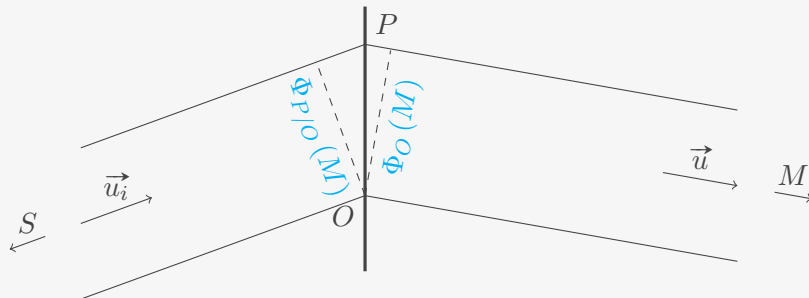


FIGURE 6.6 – Objet diffractant

$$(6.11) \quad \Phi_{P/O}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP} + \underbrace{\arg(\underline{t}(p))}_{\text{Si l'objet est quelconque}}$$

En remaniant l'équation (6.10) d'HUYGENS-FRESNEL avec cette nouvelle phase :

$$(6.12) \quad \underline{a}(M) = \frac{\mathcal{C}_0}{OM} A(P) e^{i\Phi_O(M)} \iint \underline{t}(P) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \vec{OP}}$$

(ATTENTION) Ne pas oublier le $\frac{2\pi}{\lambda_0}$!

6.2.5 Réseaux

Théorème 46.2 : Formule des réseaux

Dans un réseau

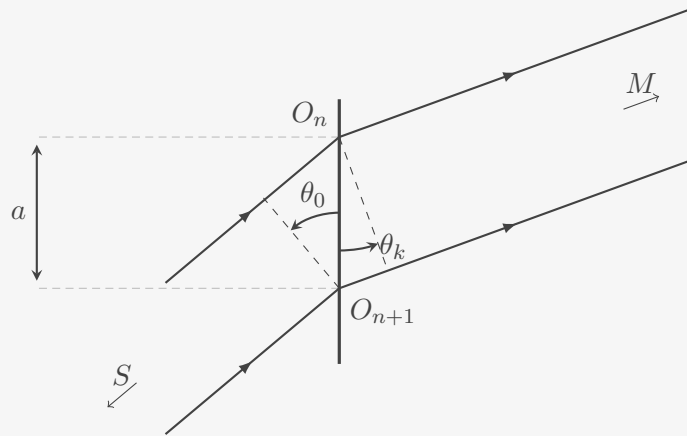


FIGURE 6.7 – Deux fentes O_n et O_{n+1} d'un réseau

$$(6.13) \quad \sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$$

k est appelé **ordre de diffraction**

Chapitre 7

Électromagnétisme

Méthode

Champ électrostatique

Pour trouver le champ \vec{E} :

1. Appliquer le théorème de Gauss
2. Appliquer les formule de Coulomb (7.2a)

7.1 Électrostatique

7.1.1 Loi de COULOMB

Définition 47 : Force de COULOMB

C'est la force électromagnétique entre deux charges q_A et q_B

$$(7.1) \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

Théorème 47.1

On peut définir la force de COULOMB comme $\vec{F} = q_B \vec{E}(B)$ où :

$$(7.2a) \quad \vec{E}(B) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}$$

Mais on retiendra :

$$\begin{aligned}
 (7.2b) \quad \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{dV}{\|\vec{PM}\|^3} & \rho(M) &= \frac{dQ(M)}{dV} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \frac{dS}{\|\vec{PM}\|^3} & \sigma(M) &= \frac{dQ(M)}{dS} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \lambda \frac{dl}{\|\vec{PM}\|^3} & \lambda(M) &= \frac{dQ(M)}{dl}
 \end{aligned}$$

7.1.2 Propriétés du champ électrostatique

Théorème 47.2 : Principe de superposition

Soient n particules A_1, A_2, \dots, A_n immobiles dans l'espace.

Le champ électrostatique résultant est la somme des champs engendrés par ces particules :

$$(7.3) \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{A_i}(M)$$

Théorème 47.3 : Symétries

Le champ \vec{E} est symétrique pour une distribution symétrique des charges.

On en déduit que le champ \vec{E} est colinéaire aux plans de symétries des distributions des charges, et orthogonal aux plans d'anti-symétrie.

7.1.3 Circulation du champ électrostatique

Théorème 47.4 : Circulation d'un champ

Soit q_A une charge située en A . Soit \vec{E}_A le champ électrostatique créé par q_A .

La circulation de \vec{E}_A le long d'un chemin $C \rightarrow D$ est

$$(7.4a) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\vec{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\vec{D}}$$

D'après le théorème de superposition, on peut dire que la circulation d'un champ créé par une **distribution quelconque de charges** est

$$(7.4b) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\vec{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\vec{D}}$$

La circulation de \vec{E} ne dépend donc pas du chemin emprunté, mais seulement des points de départs et d'arrivée. On va pouvoir définir un potentiel

Définition 48 : Potentiel Electrostatique

Le potentiel $V(M)$ en un point M est défini tel que

$$\mathcal{C}_{M \rightarrow N}(\vec{E}) = V(M) - V(N)$$

Ainsi, **potentiel électrostatique** $V(M)$ créé par une charge q_A en un point A est donné par

(7.5)
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} + \text{constante}$$

Théorème 48.1 : Potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique** $V(M)$ est lié au champ $\vec{E}(M)$ par la relation :

(7.6)
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

(ATTENTION) Pour un champ $\vec{E}(M)$ donné, $V(M)$ n'est pas unique.

Théorème 48.2 : Energie potentielle

L'**énergie potentielle** d'une charge ponctuelle q soumise à la force exercée par un champ \vec{E} de potentiel V est

(7.7)
$$E_p(M) = qV(M)$$

7.1.4 Flux du champ électrostatique

Théorème 48.3 : Équation de MAXWELL-GAUSS

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Gauss).

Le flux de \vec{E} à travers la surface orientée d'un volume est proportionnelle à la charge contenue dans ce volume :

(7.8)
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

L'objectif est de trouver un volume tel que \vec{E} ne dépende d'aucune variable de l'intégrale $\oiint_S d\vec{S}$. Par exemple, $\oiint_{\theta,z} E \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$, où on peut sortir $E \vec{u}_r$. En général, ce

théorème est très utile avec les symétries.

(ATTENTION) Ce sont des surfaces qu'on étudie avec le théorème de GAUSS. Pas des volumes...

7.1.5 Dipôle électrostatique

Définition 49 : Dipôle électrostatique

On appelle **dipôle électrostatique** le système de deux charges ponctuelles opposées (q et $-q$) situées en deux points N et P tels que $\|\overrightarrow{NP}\|$ soit très petit devant les autres distances envisagées.

Définition 50 : Moment dipolaire

Le **moment dipolaire** p d'un dipôle est défini par :

$$(7.9) \quad \vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$



FIGURE 7.1 – Moment dipolaire

Théorème 50.1 : Potentiel électrostatique d'un dipôle

Le potentiel électrostatique créé en M par un dipôle électrostatique est

$$(7.10) \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right)$$

Théorème 50.2 : Potentiel créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire p :

$$(7.11) \quad V(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

Théorème 50.3 : Champ électrique créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire p :

$$(7.12) \quad \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta}{r^3}$$

Théorème 50.4 : Force et moment d'un champ uniforme sur un dipôle

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle électrostatique est

$$(7.13) \quad \vec{F} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P)$$

Quand le champ est uniforme, $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$, donc $\vec{F} = 0$, et la résultante des forces est nulle.

Il y a néanmoins un couple \mathcal{M}_0 qui s'applique sur le dipôle en son centre 0 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 &= q \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} \right) \wedge \vec{E} \\ &= q \overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \\ \mathcal{M}_0 &= \vec{p} \wedge \vec{E}\end{aligned}$$

Le dipôle électrostatique va donc chercher à s'aligner avec le champ \vec{E} .

7.2 Magnétostatique

7.2.1 Champ magnétique

Définition 51 : Densité Volumique de Courant

La **densité volumique de courant** décrit le mouvement d'ensemble des particules de charges q passant à travers une surface élémentaire orientée dS_M .

Pour une surface élémentaire dS décrite par son vecteur normal $d\vec{S}$, le courant électrique di à travers cette surface est relié à \vec{j} par

$$di = \vec{j} \cdot d\vec{S} \qquad i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Un courant électrique est un débit de charges électriques à travers une surface orientée. Si on note n le nombre de charges q par unité de volume :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v}$$

Ou encore, la troisième définition qu'on peut déduire :

$$d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M dt$$

Théorème 51.1 : BIOT et SAVART

La formules de BIOT et SAVART permet de calculer des champs \vec{B} de manière plus directe qu'avec les équations de Maxwell. La contribution au champ \vec{B} d'un circuit est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{Circuit}} \frac{i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

(ATTENTION) Ce théorème est désormais hors-programme

Théorème 51.2 : Équation de MAXWELL-AMPÈRE

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Ampère).

(ATTENTION) Elle n'est valable que si le deuxième terme $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}\right)$ est nul ou négligeable!

(7.17)

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{Enlacé}}$$

Définition 52 : Force de LORENTZ

C'est la force subit par un charge q de vitesse \vec{v} dans des champs \vec{E} et \vec{B}

(7.18)

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Théorème 52.1 : Force de LAPLACE

On la revoit au théorème 57.5 page 52.

La force de LAPLACE existe sous deux formes, et on voit ici la forme intégrale qui caractérise les effets d'un champs \vec{B} sur un circuit, elle vient de la force de LORENTZ cf. équation (7.18) page 45

(7.19)

$$\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = \int_{M \in \text{Circuit}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

7.2.2 Dipôle Magnétique

Définition 53 : Moment magnétique

Le **moment magnétique** $\vec{\mathcal{M}}$ d'une distribution de courant d'intensité I , de surface S et de vecteur normal \vec{n} est :

(7.20)

$$\vec{\mathcal{M}} = I S \vec{n}$$

Son unité est en $A \cdot m^2$

Définition 54 : Dipôle magnétique

Un **dipôle magnétique** est une distribution de courant tel que :

- $\vec{\mathcal{M}}$ non nul
- La taille caractéristique a est infiniment petite devant les autres longueurs

Action du dipôle magnétique sur l'extérieur

Théorème 54.1 : Potentiel vecteur et champ magnétique

Le potentiel vecteur créé par un dipôle en M est, en notant $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$(7.21) \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Le champ magnétique créé par ce même dipôle en M est

$$(7.22) \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}}}{r^5}$$

$$(7.23) \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

Théorème 54.2

Un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ plongé dans un champ \vec{B}_{ext} est soumis à un couple de moment

$$(7.24) \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

L'énergie potentielle qui en résulte est :

$$(7.25) \quad E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

7.3 Équations de MAXWELL

7.3.1 Principe de conservation de la charge

Théorème 54.3 : Équation de conservation de la charge

Il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique. Ce postulat donne lieu à l'équation de conservation de la charge :

$$(7.26) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

7.3.2 Les équations de MAXWELL

Ces 4 équations sont les plus importantes. À elles 4 elles permettent de retrouver intégralement le programme de première année.

Théorème 54.4 : Les Équations de MAXWELL

(Maxwell-Gauss)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Maxwell-Flux)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(Maxwell-Faraday)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Maxwell-Ampère)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Grâce aux formules de STOKES ([Stokes](#)) et d'OSTROGRADSKI ([Ostrogradski](#)) de la page 76, on peut obtenir les versions intégrales des équations de MAXWELL. On a aussi la loi de FARADAY ([7.41](#)) de la page 51.

Définition 55 : Célérité de la lumière dans le vide

On définit la célérité c de la manière suivante :

(7.27)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

C'est la vitesse de la lumière

Équations de propagation

Théorème 55.1 : Équation de d'ALEMBERT

Dans le vide, en l'absence de charges ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les champs électrique et magnétique vérifient l'équation de d'ALEMBERT

(7.28)

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Preuve 55.1.1 *Démontrons le cas pour \vec{B} , la démonstration pour \vec{E} est analogue.*

On part de l'équation (Maxwell-Ampère) :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Comme dans beaucoup de démonstration, on applique un deuxième $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On peut intervertir les opérateurs ∂ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}}{\partial t}$$

Sachant que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{B}) - \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\underbrace{\text{div } \vec{B}}_0 \right) - \underbrace{\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})}_{\Delta \vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Théorème 55.2 : Potentiels

Au champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$, on peut associer un couple de potentiels $(V(M, t), \vec{A}(M, t))$ tel que :

$$(7.29) \quad \begin{cases} \vec{B} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}(V) \end{cases}$$

Preuve 55.2.1 Comme $\text{div } \vec{B} = 0$ (Équation 3 de Maxwell (Maxwell-Faraday)), on sait que \vec{B} est un champ rotationnel. Donc il existe \vec{A} tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Maintenant, en prenant l'équation 2 de Maxwell (Maxwell-Flux), $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})}{\partial t}$. En intervertissant les opérateurs, et en faisant tout passer à gauche :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Donc on sait que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champ à gradient. D'où il existe V tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

7.3.3 Equations de POISSON et de LAPLACE

Théorème 55.3

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'**équation de Poisson** :

$$(7.30) \quad \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

(ATTENTION)

$\Delta V(M)$ est le **laplacien** de $V(M)$. Ce n'est pas la variation Δ .

Lorsqu'une zone est en plus vide de charge, $\rho(M) = 0$ et l'équation devient l'**équation de LAPLACE** :

$$(7.31) \quad \Delta V(M) = 0$$

Preuve 55.3.1 Il suffit d'injecter $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$ à l'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) page 47 :

$$(7.32) \quad \text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V \right) (M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Or, par définition, $\text{div} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} f \right) = -\Delta f$. □

7.4 Énergie électromagnétique

Sur une particule chargée, la majorité des forces sont négligeables devant la force de LORENTZ. C'est ainsi qu'on peut appliquer le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) (équation (5.12) page 30)

Théorème 55.4 : Densité volumique de force

La **densité volumique de force électromagnétique** est :

$$(7.33a) \quad \vec{f}_V(M, t) = \rho(M, t) \vec{E}(M, t) + \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Cette force est volumique, donc elle s'exerce sur les charges d'un volume dV tel que :

$$(7.33b) \quad d\vec{F} = \vec{f}_V(M, t) dV$$

Preuve 55.4.1 On part de la force de LORENTZ (7.18) page 45 :

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En infinitésimal :

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = dq\vec{E} + dq\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On injecte $dq = \rho dV$

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = \left[\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \wedge \vec{B} \right] dV$$

D'où la force volumique : $\vec{f}_V = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$

□

Définition 56 : Puissance volumique

La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière est

$$(7.34) \quad \mathcal{P}_v(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

Avec la loi d'Ohm locale (7.38) page 50 :

$$\mathcal{P}_V(M, t) = \frac{\vec{j}^2(M, t)}{\gamma}$$

Définition 57

Le **vecteur de POYNTING** $\vec{\Pi}(M, t)$ est tel que l'énergie électromagnétique traversant la surface $d\vec{S}$ autour de M est :

$$(7.35) \quad d^2 U_{em} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} dt$$

On admet les expressions suivantes :

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est

$$(7.36) \quad u_{em}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2(M, t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M, t)}{2\mu_0}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie, ou **vecteur de POYNTING** est

$$(7.37) \quad \vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Théorème 57.1 : Loi d'Ohm locale

Elle relie, en un point M , la densité volumique de courant $\vec{j}(M, t)$ au champ électrique $\vec{E}(M, t)$:

$$(7.38) \quad \vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

Théorème 57.2 : Équation locale de POYNTING

L'équation locale de POYNTING est un bilan d'énergie. Elle donne :

$$(7.39) \quad \frac{\partial u_{em}}{\partial t}(M, t) + \text{div } \vec{\Pi}(M, t) = - \left(\vec{j} \cdot \vec{E} \right)(M, t)$$

Preuve 57.2.1 La bilan d'énergie électromagnétique pour une surface \mathcal{S} est :

$$(7.40) \quad \frac{dU_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_{sortant} - \mathcal{P}_{perdue}$$

Exprimons ces grandeurs :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{perdue} &= \iiint \mathcal{P}_V dV \\
 &= \iiint (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV \\
 \mathcal{P}_{sortant} &= \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_P \\
 &= \iiint \operatorname{div}(\vec{\Pi}) dV \\
 \frac{dU_{em}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint u_{em} dV \\
 &= \iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne, pour un volume d'intégration \mathcal{V}_M quelconque :

$$\iiint_{\mathcal{V}_M} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV + \iiint_{\mathcal{V}_M} \operatorname{div}(\vec{\Pi}) dV = \iiint_{\mathcal{V}_M} -(\vec{j} \cdot \vec{E}) dV$$

d'où le résultat. □

7.5 Induction

Théorème 57.3 : Loi de FARADAY

Elle caractérise la force électromotrice e induit par un flux Φ_B

(7.41)

$$e = \oint_S \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

7.5.1 Loi d'Ohm généralisée

Théorème 57.4

On considère un conducteur formé d'un fil de longueur L , de section s , constitué d'un matériau dont la conductivité électrique est γ , est branché entre un point A et un deuxième point B . La loi d'Ohm pour ce conducteur, dite généralisée, donne :

(7.42)

$$V(A, t) - V(B, t) = Ri + \overbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}}^{-e}$$

avec $R = \frac{L}{\gamma s}$.

C'est bien sûr l'équation 3.2 de la page 14.

Preuve 57.4.1

On part de

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

D'après la définition du $\overrightarrow{\text{grad}}$,

$$- \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M = - (V(B, t) - V(A, t)) = V(A, t) - V(B, t)$$

D'autre part, avec la loi d'Ohm locale (équation 7.38 page 50),

$$\begin{aligned} \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{1}{\gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \\ &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{R s}{L} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \end{aligned}$$

Si on reprend la définition de \vec{j} de l'équation (7.15c) (définition 51 page 44), et qu'on prend $d\vec{l}_M = d\vec{\tau}_M dl_M$ ($d\vec{\tau}_M$ est orienté dans le sens de \vec{j}) :

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = Ri = [V(A, t) - V(B, t)] - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

En approximant :
$$- \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = - \oint_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = - \frac{d\Phi_B}{dt} = e \text{ d'où}$$

$$V(A, t) - V(B, t) = Ri - e$$

La force de LAPLACE est la résultante des forces du champ magnétique $\vec{B}(M)$ sur des charges en M

Théorème 57.5 : Force de Laplace

$$d\vec{F}_{v \text{ LAPLACE}} = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Cette force est bien volumique, car elle s'exprime en fonction de $\vec{j}(M)$. On retiendra surtout :

(7.43)

$$\boxed{d\vec{F}_{\text{Laplace}} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)}$$

(ATTENTION)

I et $d\vec{l}$ doivent être colinéaires

7.5.2 Auto-induction

Définition 58 : Inductance propre

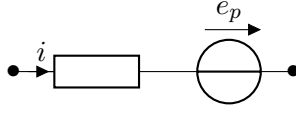
Pour un circuit électrique fixe et indéformable parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ crée un flux propre $\Phi_p(t)$ proportionnel à $i(t)$ dans les conditions d'ARQS

$$(7.44) \quad \Phi_p(t) = L i(t)$$

Cette relation définit L , le coefficient d'**inductance propre** du circuit.

Remarque : Dans la loi d'OHM vu précédemment (cf. équation (7.42) page 51), on peut prendre, en l'absence d'un champ magnétique extérieur, $-e = \frac{d\Phi_p}{dt} = L \frac{di}{dt}$, et alors :

$$V_A - V_B = Ri + L \frac{di}{dt}$$



7.5.3 Inductance mutuelle

Théorème 58.1 : Inductance mutuelle entre deux circuits

Pour deux circuits 1 et 2 parcourus respectivement par les courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, l'inductance mutuelle M d'un circuit sur un autre est proportionnelle à $i_*(t)$:

$$(7.45) \quad \begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M i_1(t) \\ \Phi_{2 \rightarrow 1}(t) = M i_2(t) \end{cases}$$

On admettra le **théorème de NEUMANN** qui donne

$$(7.46) \quad M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

7.5.4 Force électromotrice induite

Définition 59 : Champ électromoteur

Lorsqu'on déplace un conducteur à une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B}_0 stationnaire, il crée un **champ électrique électromoteur** \vec{E}_m

$$(7.47) \quad \vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}_0(M)$$

Théorème 59.1 : Force électromotrice induite

La **force électromotrice** e_{AB} **induite** par \vec{E}_m est, comme dans l'équation (7.41) de

(7.48)

FARADAY :

$$e_{AB} = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{l}_M$$

7.6 Propagation et rayonnement

Méthode

Relations de structure

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

Relations de Passage

$$E_2(A, t) - E_1(A, t) = \frac{\sigma(A, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{sortant}}$$

$$B_2(A, t) - B_1(A, t) = \mu_0 \vec{j}(A, t) \wedge \vec{n}_{\text{sortant}}$$

7.6.1 Dans le vide

On se place dans une zone où il n'y a **ni charge, ni courant**. C'est à dire que $\rho = 0$ et alors $\vec{j} = 0$. Lorsqu'on reprend les équations de MAXWELL, les équations (Maxwell-Gauss) et (Maxwell-Ampère) sont modifiées :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Onde Plane Progressive

Définition 60 : Onde plane

Une **onde plane** est une solution non constante de l'équation de d'ALEMBERT qui prend des valeurs uniformes sur les plans perpendiculaires à une direction \vec{k} .

Une onde plane de pulsation ω se décrit de la manière suivante :

(OP)

$$U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) + g(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + vt)$$

Définition 61 : Onde plane progressive

Une **onde progressive** est une solution de l'équation de d'ALEMBERT qui s'écrit sous la forme $U(z, t) = f(z - vt)$. Elle se propage dans le sens positif de l'axe Oz

La forme générale d'une **Onde Plane Progressive (OPP)** de pulsation ω se propageant uniquement selon une direction \vec{k} est :

(OPP)

$$U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt)$$

Obtenir la solution des équations de d'ALEMBERT du théorème 55.1 permet de trouver la forme générale d'une onde. C'est ainsi qu'on peut déterminer la forme d'une OPP électromagnétique :

Théorème 61.1 : Onde électromagnétique

La forme générale d'une Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans le vide dans la direction de \vec{u}_z est :

$$(7.49) \quad \vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(z - ct) \\ f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c}f_x(z - ct) \\ \frac{1}{c}f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la composante en \vec{u}_z des champs \vec{E} et \vec{B} sont nulles. Les champs \vec{E} et \vec{B} , qui sont donc perpendiculaires à la propagation de l'onde, sont dis **transversaux**. L'onde est appelée **transversale**

Preuve 61.1.1 Une OPP doit vérifier l'équation de d'ALEMBERT comme on l'a vu au théorème 55.1 page 47. Donc pour une onde se propageant selon \vec{u}_z , \vec{E} et \vec{B} sont de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(t - \frac{z}{c}) \\ f_y(t - \frac{z}{c}) \\ f_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} h_x(t - \frac{z}{c}) \\ h_y(t - \frac{z}{c}) \\ h_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix}$$

L'équation de MAXWELL-GAUSS (**Maxwell-Gauss**) (la version où $\rho = 0$ car dans

le vide il n'y a pas de charge) donne :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial f_x(t - \frac{z}{c})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(t - \frac{z}{c})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} &= 0 \\ 0 + 0 + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) &= 0\end{aligned}$$

Et nécessairement, $\frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} = 0$ implique que f_z est constante. Donc f_z est nulle. De même, l'équation de MAXWELL-Flux nous donne que h_z est nulle.

Avec l'équation de MAXWELL-FARADAY (Maxwell-Faraday), on trouve finalement que

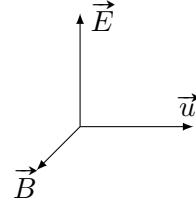
$$\begin{aligned}\frac{1}{c} f'_y &= -h'_x \\ \frac{1}{c} f'_x &= h'_y\end{aligned}$$

Et on obtient les équations de propagation d'une onde électromagnétique. \square

Théorème 61.2 : Relations de structure

On structure les OPPs de la manière suivante :

- Le trièdre $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct
- La famille $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ est orthogonale
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$



Qui peuvent se résumer dans les relations de structure :

$$(7.50) \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \qquad c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

Onde Plane Progressive Monochromatique

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) de pulsation ω se décrit de la manière suivante :

$$(OPPM) \quad U(M, t) = U_0 \cos \left(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_0 \right)$$

Définition 62 : Vitesse de Phase

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) se propage selon une direction $\vec{u} =$

$$(7.51) \quad \left| \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \right|. \text{ On définit sa vitesse de phase :}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Remarque : Dans le vide, $v_\varphi = c$, donc $k = \frac{\omega}{c}$.

Notation complexe

Opérateurs	Maxwell
$\frac{\partial}{\partial t} \bullet \Leftrightarrow i\omega \times \bullet$	(Maxwell-Gauss) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$
$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{U} \Leftrightarrow -i\vec{k} \times \underline{U}$	(Maxwell-Flux) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$
$\text{div} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Faraday) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$
$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Ampère) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \frac{1}{c^2} \underline{\vec{E}}$

Théorème 62.1 : Relations de structure d'une OPPM

De même que les relations de structure (7.50) d'une OPP, on obtient rapidement, avec la forme complexe des équations de MAXWELL :

$$(7.52) \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

Preuve 62.1.1 *D'après l'équation (Maxwell-Faraday) en complexes (en prenant la partie réelle) :*

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

Il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} i\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} &= i\vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \end{aligned}$$

De même, en partant de l'équation (Maxwell-Ampère) en complexes (et toujours en prenant la partie réelle) :

$$i\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega \frac{1}{c^2} \vec{E}$$

Qui donne, immédiatement :

$$i\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B}$$

Ces équations sont homologues à celles vues précédemment, car $k = \frac{\omega}{c}$

Polarisation

On considère une OPP *transverse*, donc qui s'écrit :

$$(7.53) \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_{0x} \cos(\omega t - kz) + \vec{E}_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

On appelle **onde polarisée rectilignement** une onde sous la forme

$$(7.54) \quad \vec{E} = E_0(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz)$$

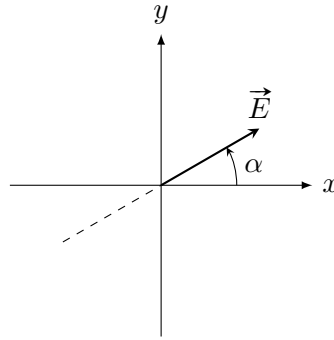


FIGURE 7.2 – Polarisation rectiligne

7.6.2 Propagation dans un plasma

Définition 63 : Plasma

Un **plasma** est un conducteur constitué d'ions et d'électrons pour une charge globale neutre. Les conditions suivantes soient vérifiées

- Les ions positifs sont immobiles
- Il est peu dense, c'est à dire qu'on néglige les interactions électromagnétiques.

Théorème 63.1 : Densité volumique de courant

Il existe dans le plasma une densité volumique de courant :

$$(7.55) \quad \underline{j} = -i\frac{n_0 e^2}{m\omega}\underline{E}(M, t)$$

Preuve 63.1.1 Si on note \vec{f}_e et \vec{f}_m respectivement les forces de LORENTZ électrostatique et magnétostatique, alors on remarque que :

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{\| -e \vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e \vec{E} \|} \sim \frac{v}{c}$$

Or v est la vitesse de l'électron dans le milieu, et $v \ll c$ car l'électron est dit « non relativiste ». Donc $f_m \ll f_e$, et on peut négliger \vec{f}_e dans un PFD :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \approx -e\vec{E}(M, t)$$

On passe en notation complexe, et le mouvement d'oscillation de l'électron est $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0} \exp(i\omega t)$. D'où la nouvelle expression du PFD :

$$m_e(i\omega) \underline{\vec{v}} \approx -e\vec{E}(M, t)$$

soit

$$\underline{\vec{v}} = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}(M, t)$$

Et on obtient \vec{j} avec $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$ □

On peut donc définir une pulsation plasma ω_p

Définition 64 : Pulsation plasma

On définit la **pulsation plasma** par

$$(7.56a) \quad \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}}$$

Et alors :

$$(7.56b) \quad \underline{\vec{j}} = -i \frac{n_0 e^2}{\omega m} \underline{\vec{E}} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$$

Théorème 64.1 : Relation de dispersion

Dans un plasma, on établit une relation de dispersion :

$$(7.57) \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_P^2)$$

Preuve 64.1.1 On utilise les equations (Maxwell-Faraday) et (Maxwell-Ampère) en complexes, ainsi que la formule du double produit vectoriel (10.5a) page 71. On part de l'équation de MAXWELL (Maxwell-Faraday), à laquelle on effectue le

produit vectoriel par $-i\vec{k}$ des deux cotés :

$$\begin{aligned} \cancel{i\vec{k}} \wedge (-i\vec{k} \wedge \vec{E}) &= \cancel{i\vec{k}} \wedge (-i\omega\vec{B}) \\ -i(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0 \text{ car orthogonaux}})\vec{k} + i(\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} &= \omega\vec{k} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

D'où :

$$ik^2\vec{E} = \omega\vec{k} \wedge \vec{B}$$

On injecte l'équation de MAXWELL (Maxwell-Ampère) :

$$ik^2\vec{E} = \omega\left(\mu_0\vec{j} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E}\right)$$

D'après l'équation (7.56b) de la définition précédente : $\vec{j} = -i\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\vec{E}$

$$\begin{aligned} ik^2\vec{E} &= \omega\left(-i\mu_0\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\vec{E} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E}\right) \\ k^2 &= \varepsilon_0\mu_0(\omega^2 - \omega_p^2) \end{aligned}$$

$$D'où k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$$

□

Vitesse de phase et dispersion

Définition 65 : Vitesse de phase

La **vitesse de phase** v_φ est la vitesse de propagation d'une OPPM.

Théorème 65.1 : Vitesse de phase dans un plasma

Dans un plasma, avec les hypothèses précédentes, la vitesse de phase est égale à :

$$(7.58) \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Définition 66 : Phénomène de dispersion

On dit qu'il y a **dispersion** quand la vitesse de phase dépend de la pulsation ω de l'OPPM

Fréquence et pulsation de coupure

Définition 67 : Fréquence de coupure

On appelle **fréquence de coupure** la fréquence f_c pour laquelle une onde ne se propage plus. La pulsation associée ω_c est appelée **pulsation de coupure**

Théorème 67.1 : Pulsation de coupure du plasma

La pulsation plasma ω_P est une pulsation de coupure :

$$(7.59) \quad \omega_c = \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

Preuve 67.1.1 Deux cas :

- Si $\omega > \omega_P$, alors $k^2 > 0 \implies k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}$.
- Sinon, si $\omega < \omega_P$, alors k^2 est négatif et il n'y a pas de propagation (une solution imaginaire n'est pas possible pour une onde).

□

Propagation d'un paquet d'onde

On se place, dans un premier temps, dans un milieu dispersif quelconque.

Définition 68 : Paquet d'onde

Un **paquet d'onde** est la superposition de plusieurs OPPM de pulsations proches et de pulsation moyenne ω_0 :

$$(7.60) \quad \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - k z)} d\omega$$

Cette intégrale est valable de 0 à $+\infty$, car on considère des ondes dont la pulsation ω est comprise dans un intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$, où $\delta\omega \ll \omega_0$

7.6.3 Propagation dans un conducteur ohmique

Définition 69 : Conducteur ohmique

Le **conducteur ohmique** est un métal pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées :

- Les ions positifs sont immobiles
- Il est **dense**, et les électrons, de densité particulière n_0 , sont libres de se déplacer.

On remarque qu'un conducteur ohmique est comme un plasma (cf. définition 63 page 58). Sa seule différence est d'être dense. On prend alors en compte les interactions entre électrons et ions sous la forme d'une force de frottement.

Théorème 69.1 : Relation de dispersion

Dans un conducteur ohmique, on établit, comme pour le plasma, une relation de dis-

persion :

$$(7.61) \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$$

Cette équation n'est pas réelle, et conduit à un **module d'onde complexe**. On note :

$$(7.62) \quad \underline{k} = k' - ik''$$

Théorème 69.2 : Effet de peau

Dans un conducteur ohmique, la distance caractéristiques de d'atténuation d'une OPPM de pulsation $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$ est :

$$(7.63) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

Réflexion d'une OPPM

Chapitre 8

Diffusion Thermique

8.1 Conduction

C'est le phénomène à petite échelle qui se produit sans mouvement des particules lors d'une diffusion de chaleur. C'est un processus très lent.

Définition 70 : Flux Thermique

On le définira de la façon suivante :

$$(8.1) \quad \delta Q = \Phi dt$$

On prendra φ tel que $\Phi = \varphi S$

Définition 71

Le transfert thermique passant à travers une surface fermée \vec{S} sera caractérisé par le vecteur \vec{j}_{th} . On le définit :

$$(8.2a) \quad \delta^2 Q = \vec{j}_{th} d\vec{S} dt$$

En notant $d\vec{S}_M = dS \vec{n}_M$:

$$(8.2b) \quad \varphi_{\vec{n}_M}(M, t) = \vec{j} \cdot \vec{n}_M$$

Théorème 71.1 : Loi de FOURIER

C'est une loi empirique qui donne la densité volumique de courant thermique \vec{j}_{th} en fonction de T un champ de températures :

(Fourier)

$$\vec{j}_{th} = - \underbrace{\lambda}_{\text{Conductivité Thermique}} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

Théorème 71.2 : Premier principe de Thermodynamique

Le premier principe de thermodynamique (équation (1.4a) page 5) s'énonce, en diffu-

sion, avec :

$$(8.3) \quad dU = \delta Q + \mathcal{P}_{\text{prod}} dt$$

$$\text{Souvent, } \mathcal{P}_{\text{prod}} = \iiint \mathcal{P}_V dV$$

Théorème 71.3 : Bilan local d'énergie

Pour un système Σ de matière dans un volume \mathcal{V} quelconque,

$$(8.4) \quad \mu c_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}}(M, t) = \mathcal{P}_V(M, t)$$

Preuve 71.3.1 On utilise le premier principe de thermodynamique vu plus haut. D'après un DL au premier ordre, on détermine :

$$\begin{aligned} dU &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c_v (T(M, t + dt) - T(M, t)) dV \\ &= \left(\iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c_v \left(\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right) \right) dt \end{aligned}$$

Le transfert thermique est, par définition de \vec{j} :

$$\delta Q = \left(- \oint \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

Et enfin :

$$\mathcal{P}_{\text{prod}} dt = \left(\iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_V dV \right) dt$$

Théorème 71.4 : Équation de diffusion thermique

Pour un champ T de températures, on a l'équation :

$$(8.5) \quad \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \overbrace{\Delta T}^{\text{Laplacien de } T} + P_v$$

avec c_v la capacité calorifique massique à volume constant, μ la masse volumique, et λ définit comme précédemment.

Définition 72 : Résistance thermique

C'est la grandeur R_{th} telle que :

$$(T_1 - T_2) = \Phi_{1 \rightarrow 2} R_{th}$$

Théorème 72.1 : Résistances usuelles

Pour deux plaques parallèles de surfaces S distantes de L :

$$(8.7) \quad R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Pour deux cylindres coaxiaux de hauteur H , de rayons R_1 et R_2

$$(8.8) \quad R_{th} = \frac{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi\lambda H}$$

8.2 Convection

Bien plus rapide que la conduction, c'est quand la diffusion thermique est accompagnée d'un mouvement de particules (par exemple quand on ouvre une fenêtre)

Définition 73

Encore une loi empirique, la loi phénoménologique de NEWTON :

(8.9)

$$\varphi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_s - T_f)$$

Cette équation permet surtout de donner : $\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = hS(T_s - T_f)$

Par définition de R_{th} et par identification, l'interface entre un solide et un fluide a donc pour résistance $R_{\text{th}} = \frac{1}{hS}$

Chapitre 9

Rayonnement Thermique

Méthode

Calculer un flux thermique

Relation entre les flux $d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$

Relation de STEFAN-BOLTZMANN $\varphi^0(T) = \sigma T^4$

Loi de PLANCK (*non exigible*) cf théorème 75.1

Définition 74 : Flux Thermique

La **densité surfacique d'énergie** est définie telle que la puissance électromagnétique reçue par un objet dans l'enceinte sous dS soit

$$(9.1) \quad d\Phi = \varphi^0 dS$$

L'exposant 0 est là pour rappeler que φ ne dépend ni de la position, ni de dS : il ne dépend que de T .

D'ici, on définit la **densité spectrale en longueur d'onde de flux surfacique** (notée φ_{λ}^0) de manière analogue : elle est telle que la contribution à φ^0 des photons de longueur d'onde comprises entre $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ soit

$$(9.2) \quad d\varphi^0 = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda$$

Pour résumer, on se rapportera à la figure 9.1 (page 68) et à la simple formule :

$$d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$$

Définition 75 : Énergie d'un photon

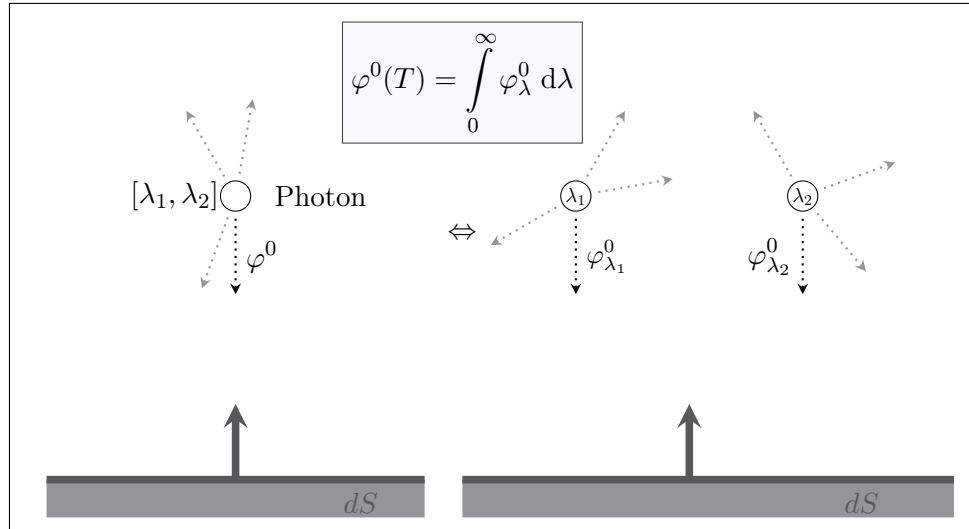


FIGURE 9.1 – Caractérisation des différents flux

(9.4)

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Théorème 75.1 : Loi de PLANCK

La loi de PLANCK n'est pas exigible, mais elle permet de calculer la densité spectrale en longueur d'onde

$$\varphi^\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{\frac{hc}{e\lambda k_B T} - 1}$$

avec :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Théorème 75.2 : STEFAN-BOLTZMANN

(9.6)

$$\varphi^0(T) = \sigma T^4$$

où σ est la constante de STEFAN : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ C'est aussi le flux émis par un corps noir.

La densité spectrale en longueur d'onde du flux (φ_λ^0) passe par un maximum pour une longueur d'onde λ_m . On l'obtient avec la loi de WIEN :

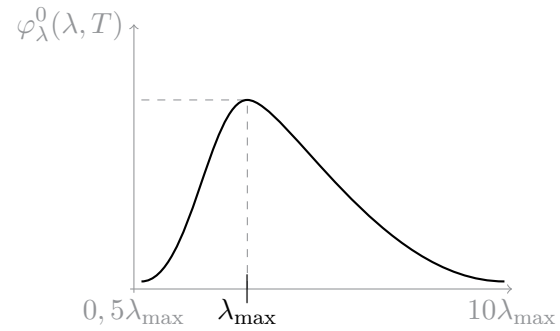
Théorème 75.3 : Loi de WIEN

(9.7)

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$$

Pour retenir : $\lambda_{\max} T = 2900 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

Remarque : Le domaine spectral d'émission est compris dans $[0, 5\lambda_{\max}, 10\lambda_{\max}]$



Théorème 75.4 : Flux surfacique radiatif

En un point P , le flux surfacique cédé par un corps noir opaque est :

(9.8)

$$\varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = \sigma T(P)^4 - \varphi_{\text{reçu}}(P)$$

et alors, le flux radiatif suit une loi de NEWTON $\varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = h(T(P) - T_0)$ dont le coefficient est

(9.9)

$$h^{\text{rad}} = 4\sigma T_0^4$$

Chapitre 10

Annexe

10.1 Trigonométrie

10.1.1 Définition

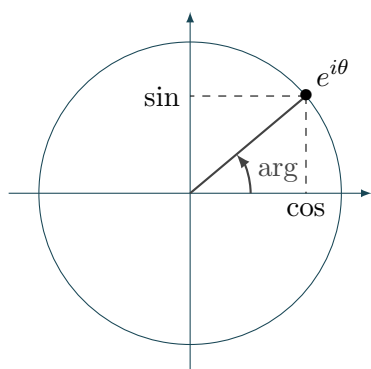
On aura souvent besoin de trigonométrie en Physique. Surtout les règles sur les sinus et cosinus. Bien sûr, la première chose à ne jamais oublier, c'est leur définition en exponentielle :

$$(10.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array} \right. (10.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

10.1.2 Addition / Produit

$$(10.3) \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \end{array} \right.$$

10.1.3 Nombres complexes

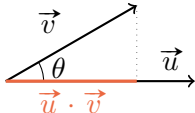


Opérations en complexes

	Forme exponentielle	Module	Argument
Produit	$z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$	$ zz' = z z' $	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
Quotient	$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
Exposant	$z^n = r^n e^{in\theta}$	$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) = n \times \arg z \quad [2\pi]$
Conjugué	$\bar{z} = r e^{-i\theta}$	$ \bar{z} = z $	$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$

10.2 Calcul vectoriel

On a deux types de calculs vectoriels. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$. En physique, on les définit comme suit :

$$(10.4) \quad \left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u \cdot v \cdot \cos \theta \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= u \cdot v \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ avec : } \begin{array}{c} \vec{v} \\ \theta \\ \vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$


(ATTENTION)

Il ne faut **pas oublier** que le produit scalaire renvoie un **scalaire**, et que le produit vectoriel renvoie un **vecteur perpendiculaire** au plan formé des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Propriétés Produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v}$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif

Formules du double produit vectoriel :

$$(10.5a) \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$(10.5b) \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

10.3 Complément mathématique

10.3.1 Dérivée d'un vecteur

$$(10.6) \quad \frac{dx_i \vec{i}}{dt} = x_i \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

10.3.2 Équation différentielle

En général, on résout l'équation homogène, on trouve une solution particulière, puis la combinaison linéaire des deux donne la solution générale.

Au premier ordre

Dans le cas d'une équation de la forme :

$$y'(t) = ay(t) + b$$

La solution générale est

$$(10.7) \quad Ae^{ax} - \frac{b}{a}$$

Au second Ordre

Dans le cas de l'équation homogène suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution $y(t)$ pour l'équation homogène :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm \beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t))$
$\Delta < 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t))$
$\Delta = 0$	$r \text{ double} \quad y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

(ATTENTION)

Pour déterminer la **solution particulière** quand le second membre n'est pas constant, on suppose que la solution est sinusoïdale et de même pulsation. Alors il n'y a plus qu'à réinjecter la solution dans l'équation différentielle pour déterminer les constantes restantes.

10.4 Repères en physique

10.4.1 Repère cartésien

Dans un repère en **coordonnées cartésiennes** (cf. figure 10.1), le point M est repéré par la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:

$$(10.8) \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

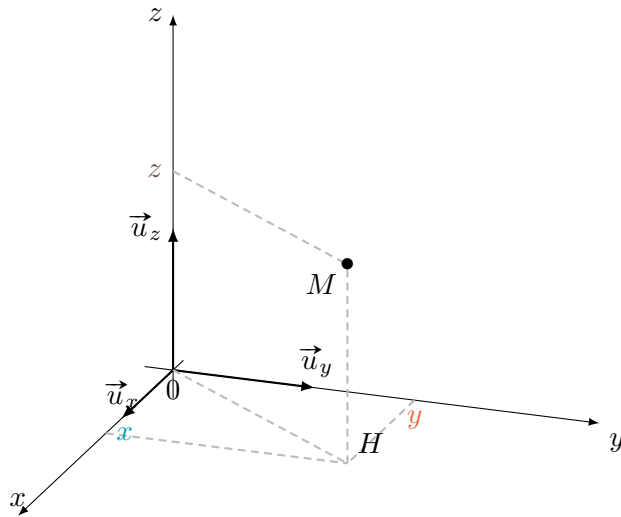


FIGURE 10.1 – Repère en coordonnées cartésiennes

10.4.2 Repère cylindrique

Dans un repère en **coordonnées cylindriques** (cf. figure 10.2), le point M est repéré par la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$(10.9) \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$$

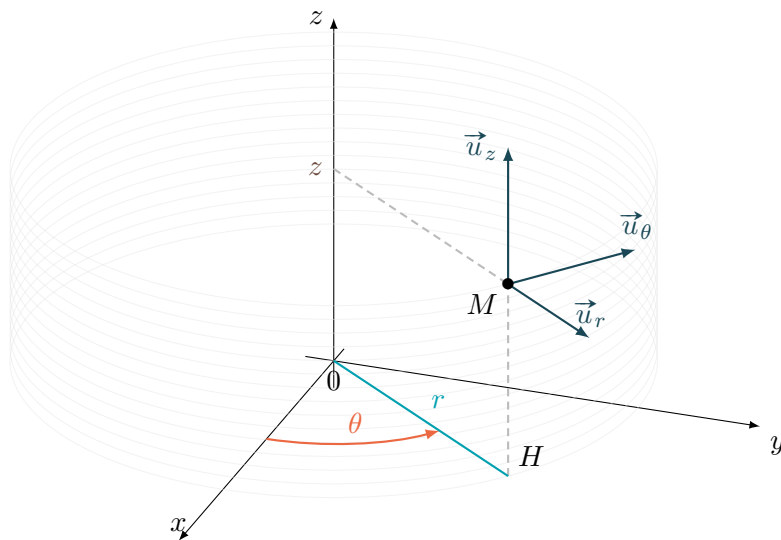


FIGURE 10.2 – Repère en coordonnées cylindriques

(ATTENTION) r se mesure sur le projeté : $r = \|\overrightarrow{OH}\|$, et non \overrightarrow{OM}

10.5 Analyse Vectorielle

10.5.1 Généralités sur les champs

Coordonnées	Déplacement élémentaire	Circulation élémentaire
Cartésiennes	$dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$
Cylindriques	$dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_z dz$
Sphériques	$dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin \theta d\varphi$

Définition 76 : Lignes et tubes de champ

Pour un champ de vecteurs $\vec{A}(M)$, une **ligne de champ** est une courbe sur laquelle, en tout point M , $\vec{A}(M)$ est tangent.

Si on note $d\vec{M}$ le déplacement élémentaire, une ligne de champ vérifie :

(10.10)

$$d\vec{M} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

On appelle **tube de champ** un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

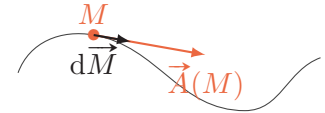


FIGURE 10.3 – Ligne de champ

10.5.2 Opérateurs sur les champs

Définition 77 : Gradient

Soit $U(M)$ un champ scalaire. La variation dU est lié au déplacement élémentaire $d\vec{l}_M$ par le **gradient** :

(10.11)

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U(M)) \cdot d\vec{l}_M = dU$$

Ses expressions sont :

	Coordonnées	Expressions
Cartésiennes	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	
Cylindriques	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	
Sphériques	$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$	

Définition 78 : Divergence

Soit un volume élémentaire dV_M autour d'un point M et un champ de vecteur $\vec{A}(M)$. En notant $d\Phi$ le flux de $\vec{A}(M)$ traversant la surface entourant dV_M , la **divergence** est définie

par :

$$(10.12) \quad \operatorname{div}(\vec{A}(M)) \cdot dV_M = d\Phi(M)$$

Ses expressions sont :

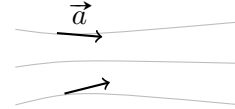
Coordonnées

Expressions

Cartésiennes	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Définition 79 : Circulation

Soit \vec{a} un champ de vecteur.



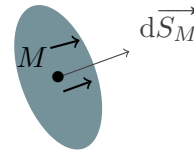
La **circulation élémentaire** du champ \vec{a} de vecteurs sur le déplacement élémentaire $d\vec{l}_M$ autour d'un point M est

$$(10.13) \quad d\mathcal{C} = \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}_M$$

Alors, la **circulation** le long d'un chemin Γ_{AB} est :

$$(10.14) \quad \mathcal{C}_a = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{l}_M$$

On va maintenant définir le flux passant à travers une surface :



Définition 80 : Flux

Le **flux élémentaire** du champs \vec{a} de vecteurs à travers une surface élémentaire $d\vec{S}_M$ autour d'un point M est

$$(10.15) \quad d\Phi = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Alors, le **flux** le long d'un chemin Γ_{AB} est :

$$(10.16) \quad \Phi_a = \iint_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{S}_M$$

10.5.3 STOKES et OSTROGRADSKI

Théorème 80.1 : Formules de STOKES et d'OSTROGRADSKI

(Ostrogradski)

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \cdot \vec{dV} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (\text{Flux})$$

(Stokes)

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{E}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad (\text{Contour fermé})$$

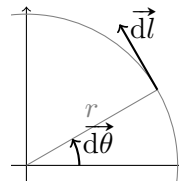
10.6 Règles générales

10.6.1 Relations entre les grandeurs

$$\text{Puissance} = \frac{d \text{ Travail}}{dt}$$

10.6.2 Longueurs de références

$$\vec{dl} = r d\vec{\theta}$$



Deuxième partie

Chimie

Chapitre 11

Première année

11.1 Configuration électronique

Définition 1 : Les nombres quantiques

Pour caractériser un électron, on définit :

- n , le **nombre quantique principal**, définit la couche sur laquelle un électron est rangé
- $l \in [0, n - 1]$, le **nombre quantique azimutal**, précise la sous-couche sur laquelle un électron est rangé
- $m_l \in [-l; l]$, le **nombre quantique magnétique**, définit le nombre d'orbitales possibles. Chaque orbitale est appelée “case quantique”.
- $m_s \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$, **nombre quantique de spin**, définit le sens de rotation des électrons d'une même case quantique.

Théorème 1.1 : Principe d'exclusion de PAULI

Deux électrons ne peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques

Théorème 1.2 : Règle de stabilité de KLECHKOWSY

Le remplissage des orbitales atomiques se fait par ordre des $(n + l)$ croissants.

Théorème 1.3 : Règle de remplissage de HUND

Lorsqu'un niveau d'énergie est **dégénéré** — c'est à dire pour deux orbitales de même nombre quantique principal n — et que le nombre d'électrons n'est pas suffisant pour sauter le niveau :

- L'état de plus basse énergie est obtenu en utilisant un maximum d'orbitales
- Les spins des électrons non appariés (les électrons célibataires) d'une même orbitale étant parallèles

n \ 1	1	2	3	4
1	1s ²			
2	2s ²	2p ⁶		
3	3s ²	3p ⁶	3d ¹⁰	
4	4s ²	4p ⁶	4d ¹⁰	4f ¹⁴

FIGURE 11.1 – Tableau des sous-couches électroniques

11.2 Représentation moléculaire

Méthode

Représentation de LEWIS

La **charge formelle** d'un atome est déterminée par :

$$(11.1) \quad CF_A = n_{\text{Atome}}(e^-) - n_{\text{Molécule}}(e^-)$$

1. On compte le nombre N d'électrons pour connaître le nombre $\frac{N}{2}$ de doublets à répartir
2. On minimise le nombre de charges formelles en multipliant les liaisons
3. On distribue les charges formelles par ordre d'électronégativité

Méthode VSEPR

Le **moment dipolaire** $\vec{\mu}$ est le vecteur caractérisant une liaison entre deux charges $(-\delta e)$ et $(+\delta e)$ distancées de d . Ses caractéristiques sont :

Direction Celle de la liaison

Sens Du $-$ au $+$ (donc de $(-\delta e)$ vers $(+\delta e)$)

Norme $\|\vec{\mu}\| = \delta e \times d$

La notation VSEPR s'exprime par :

$$(VSEPR) \quad A X_m E_n$$

où m est le nombre d'atomes liés à l'atome central et n est le nombre d'entités non liantes (doublets ou électron célibataire).

11.3 Cristallographie

Définition 2 : Cristal

Un cristal est défini par une **maille** et un **motif**. Un motif est une translation de la maille selon un vecteur \vec{t} .

Définition 3 : Compacité

En considérant les atomes comme des sphères, la **compacité** C se définit dans une maille par :

(11.2)
$$C = \frac{\text{Volume des atomes de la maille}}{\text{Volume de la maille}}$$

Chapitre 12

Thermochimie

Méthode

Enthalpie	$H = U + PV$	Capacité thermique molaire à volume constant	$c_v = \frac{(\partial U_m)}{\partial T}$
Energie libre	$F = U - TS$	Capacité thermique molaire à pression constante	$c_v = \frac{(\partial H_m)}{\partial T}$
Enthalpie libre	$G = H - TS$	Avancement	$\xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$
		Vitesse de réaction	$v = \frac{d\xi}{dt} = k \prod_i c_i$

12.1 Grandeurs extensives

Définition 4 : Grandeure intensive/extensive

Une grandeur extensive est une grandeur proportionnelle à la taille du système qu'elle caractérise.

Propriétés

- extensive \times intensive = extensive
- $\frac{\text{extensive}}{\text{extensive}} = \text{intensive}$
- $J_{\text{extensive}}(\alpha n, \alpha V) = \alpha J(n, V)$

Définition 5

Pour toute grandeur extensive J , on définit :

$$(12.1) \quad \Delta_r J = \left(\frac{\partial J}{\partial \xi} \right)_{T, P \text{ fixés}}$$

Théorème 5.1

$$(12.2) \quad \Delta_r J = \sum_{\text{Produits}} J_m - \sum_{\text{Réactifs}} J_m$$

Définition 6 : Variance

La **variance** d'un système est le nombre maximal de paramètres intensifs que l'on peut choisir sans remettre en cause l'équilibre du système étudié.

Théorème 6.1 : Règle de GIBBS

La règle de GIBBS permet de déterminer la **variance** v d'un système en connaissant :

- i. Le nombre φ de phases distinctes
- ii. Le nombre c de constituants
- iii. Le nombre r de réactions chimiques

Alors, on a :

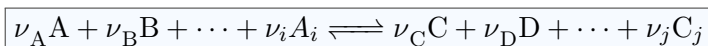
$$(12.3) \quad v = c - r + 2 - \varphi$$

(ATTENTION)

Il faut faire attention en comptant φ dans un système : les phases doivent être distinctes. Par exemple, $\varphi = 2$ pour un liquide et un gaz, $\varphi = 2$ pour deux états solides (car ils sont non miscibles), et $\varphi = 1$ pour deux liquides ou deux gaz miscibles

12.2 Équilibre d'une réaction

On considère une réaction du type :



Les ν_i et les ν_j sont les coefficients stoechiométriques associés à chaque constituant i . Ceux des réactifs (les ν_i) sont comptés négativement.

Les n_k sont les quantités de matière associées à chaque constituant P_k de la réaction.

12.2.1 Enthalpie libre

Définition 7 : Enthalpie libre de réaction

L'**enthalpie libre** G est une fonction d'état associée au deuxième principe de la thermodynamique :

$$(12.5a) \quad \begin{aligned} G &= H - TS \\ \boxed{G &= U + PV - TS} \end{aligned}$$

La version différentielle :

$$(12.5b) \quad dG = Vdp - SdT + \delta W_{\text{rév}}$$

Et G étant une fonction d'état extensive :

$$(12.5c) \quad \Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

$\Delta_r G^\circ$ caractérise l'équilibre de réaction, et $\Delta_r G$ son sens.

$$(12.6) \quad \begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= -RT \ln K \\ \Delta_r G &= \Delta_r G^\circ + RT \ln Q \\ &= RT \ln \frac{Q}{K} \\ \Delta_r G \leq 0 &\Leftrightarrow \text{Sens direct} \end{aligned}$$

À l'équilibre, $Q = K$, donc $\Delta_r G = 0$.

12.2.2 Avancement

Définition 8 : Avancement

L'**avancement** d'une réaction est défini par

$$(12.7) \quad \xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$$

Où n_i est la quantité molaire du constituant A_i , n_i° sa quantité molaire initiale, et ν_i son coefficient stœchiométrique.

ξ est en mol

Définition 9 : Vitesse de réaction

La vitesse de réaction est la variation de l'avancement :

$$(12.8) \quad v_{\text{réaction}} = \frac{d\xi}{dt}$$

Dans les systèmes à volumes constants, on parle de **vitesse volumique de réaction** :

$$v_{\text{vol}} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt}$$

Théorème 9.1 : Loi de vitesse

On peut relier la vitesse de réaction à la constante de vitesse k et les concentrations c_i :

(12.9a)
$$v = k \cdot f(c_i)$$

où $f(c_i)$ est une fonction des concentrations. Souvent, on a :

(12.9b)
$$v = k \prod_i c_i$$

12.2.3 Loi d'action de masse

Théorème 9.2 : Loi d'action de masse

La **loi d'action de masse**, aussi appelée **Loi de GULDERG et WAAGE**, permet de calculer la constante K :

(12.10)
$$K = \prod_i a_i^{\nu_i}$$

Chapitre 13

Diagramme Potentiel-pH

Pour un couple Oxydant-Réducteur, le diagramme potentiel-pH représente l'évolution du potentiel d'oxydo-réduction en fonction du pH.

13.1 Rappels

Le **produit ionique de l'eau** K_e est le coefficient de réaction d'autoprotolyse de l'eau.

$$(13.1a) \quad K_e = [\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]$$

Le pK_e est son potentiel :

$$(13.1b) \quad \begin{aligned} pK_e &= -\log K_e \\ pK_e &= p\text{OH} + p\text{H} \end{aligned}$$

À 25°C, $K_e = 10^{-14}$.

13.2 Méthode

On va prendre pour exemple le fer : $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})/\text{Fe}(\text{s})$, à une concentration de tracé $c_{\text{tra}} = 10^{-2} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

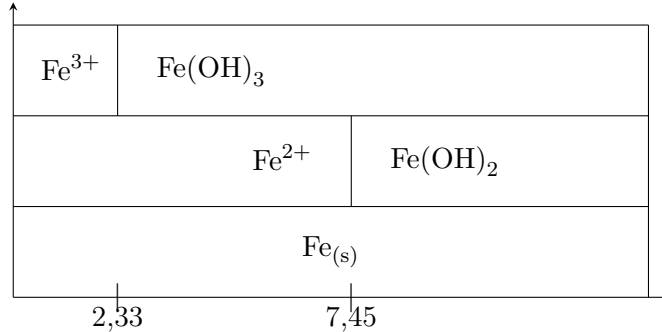
1. Créer un diagramme de situation

- Calculer les **nombre d'oxydation** ($\sum q = \sum n_0$)
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}^{3+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s}) & / & \text{Fe}^{2+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s}) & / & \text{Fe}(\text{s}) \\ +III & & +III & & +II & & +II & & 0 \end{array}$$
- Pour un même nombre d'oxydation, on regarde les gammes de pH.
 - (a) Avec la concentration de tracé $c_{\text{tra}} = [\text{Fe}^{2+}]$, on écrit une équation, par exemple
$$\text{Fe}^{2+} + 2 \text{OH}^- = \text{Fe}(\text{OH})_2$$
 - (b) On utilise la loi d'action de masse pour trouver le pH en connaissant le $K_e = 10^{-14}$ et le $K_{s2} = [\text{OH}^-]^2[\text{Fe}^{2+}]$

$$\begin{aligned}
K_{s_2} &= [\text{OH}^-]^2 [\text{Fe}^{2+}] \\
pH &= -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \\
&= -\log \left(\frac{K_e}{[\text{OH}^-]} \right) \\
&= -\log \left(\frac{K_e}{\sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}}} \right) = pK_e + \log \left(\sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}} \right)
\end{aligned}$$

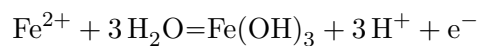
Les données renvoient les frontières $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2$ et $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3$ respectivement à 7,5 et 2,3

- On en déduit un diagramme de situation :



2. On étudie, pour les frontières existantes, l'équation de la droite

- Pour les équations ne faisant pas intervenir H^+ , comme par exemple à la frontière $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{s})$ où l'équation est $\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Fe}$, ou à la frontière $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+}$, la frontière sera horizontale, d'équation E°
- Pour les autres, on applique simplement NERNST pour exprimer E en fonction du pH. Par exemple :



Alors,

$$\begin{aligned}
E &= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 (3 \log [\text{H}^+] - \log [\text{Fe}^{2+}]) \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}] - 0,18\text{pH}
\end{aligned}$$

$E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}]$ étant constant, on peut le déterminer par continuité avec la frontière de Fe^{2+} et Fe^{3+} à $\text{pH} = 2,3$

3. On trace le diagramme Potentiel-pH

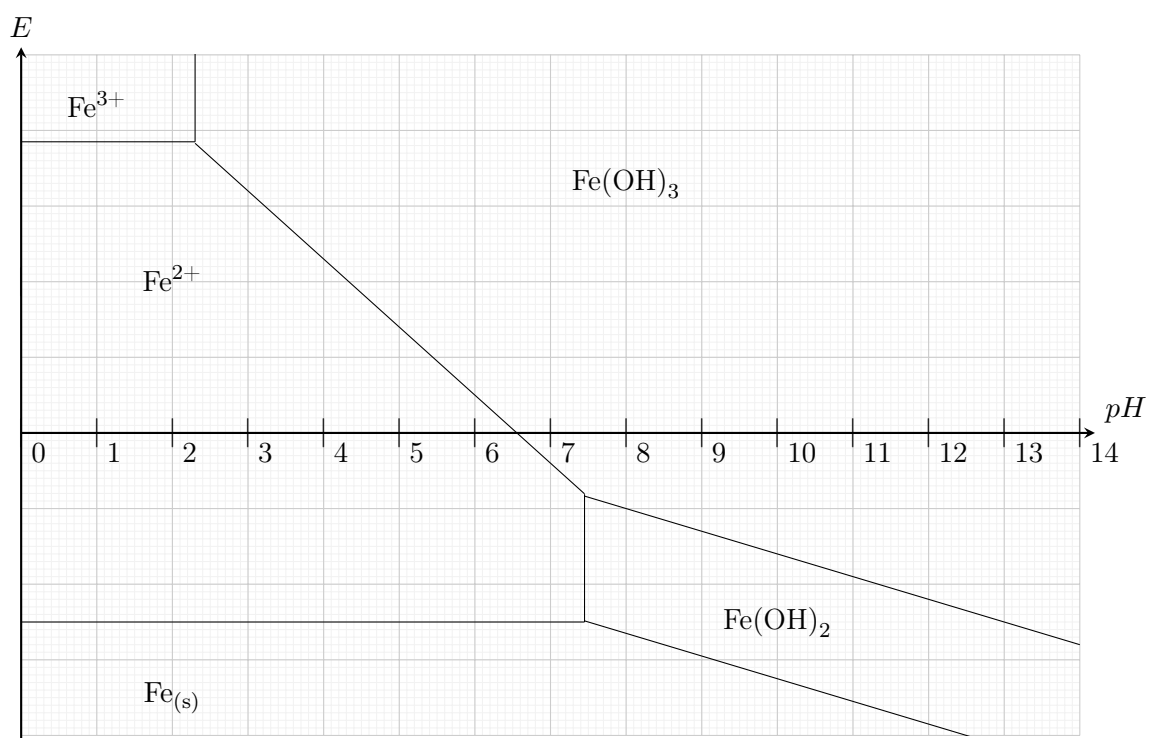


FIGURE 13.1 – Diagramme potentiel-pH du fer

Liste des acronymes

AO	Amplificateur Opérationnel. 15
ARQS	Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires. 12, 89
FEM	Force Électromotrice. 14
OEM	Onde Électromagnétique. 12, 34
OPP	Onde Plane Progressive. 54, 55, 56, 57, 58
OPPM	Onde Plane Progressive Monochromatique. 56, 57, 60, 61, 62
PFD	Principe Fondamental de la Dynamique. 29, 30, 58
TMC	Théorème du Moment Cinétique. 24, 30
TRC	Théorème de la Résultante Cinétique. 29, 49

Index

- D'ALEMBERT, 50
- Aplanétisme, 36
- ARCHIMÈDE, 14
- ARQS, 16
- Avancement, 86
- Biot et Savart, 47
- BODE, 23
- Capacité calorifique, 10
- Capacité thermique
 - à pression constante, 10
 - à volume constant, 9
- Champ
 - électromoteur, 56
- Charge formelle, 82
- Chemin optique, 39
- Circulation, 78
- Cirulation
 - élémentaire, 78
- CLAUSIUS
 - inégalité, 12
- Compacité, 83
- Conducteur ohmique, 64
- Constante
 - STEFAN, 71
- Coordonnées
 - cartésiennes, 75
 - cylindriques, 76
- Dégénéré, 81
- Densité
 - spectrale d'onde de flux surfacique, 70
 - surfacique
 - d'énergie, 70
 - volumique d'énergie électromagnétique, 53
 - volumique de force électromagnétique, 52
- DESCARTES, 36
- Deuxième principe, 10
- Diagramme
 - potentiel-pH, 88
- Dipôle
 - magnétique, 48
- Dipôle
 - électrostatique, 46
- Dispersion, 63
- Divergence, 77
- Éclairement \mathcal{E} , 38
- Energie
 - d'un dipôle, 20
- Énergie
 - cinétique, 26
 - potentielle, 26
- Enthalpie, 9
 - libre, 86
- Entropie, 10
- Équilibre de Réaction, 86
- Grandeur Extensive, 84
- FARADAY, 54
- Filtre, 21
- Flux, 78
 - élémentaire, 78
 - radiatif, 72
 - thermique, 66
- Fonction
 - de transfert, 21
- Force
 - centrale, 26
 - conservative, 25
 - de CORIOLIS, 29
 - de COULOMB, 43
 - électromotrice induite, 56
 - de LAPLACE, 48, 55
 - de LORENTZ, 48
 - de rappel, 25
- FRAUNHOFFER, 41
- Fréquence
 - de coupure, 63

Gain, 22
 GALILÉEN, 28
 Gradient, 77

 HUND, 81
 HUYGENS-FRESNEL, 41

 Impédance, 19
 Inductance
 propre, 56
 Isobare, 9
 Isochore, 8

 \vec{j} (Densité Volumique de Courant), 47

 KEPLER, 27
 KLECHKOWSY, 81

 LAPLACE, 52
 LEWIS, 82
 Ligne de champ, 77
 Loi
 d'action de masse, 87
 de COULOMB, 29, 34
 de FOURIER, 66
 de GULDERG et WAAGE, 87
 de KIRCHOFF, 15
 des mailles, 15
 des nœuds, 15
 de PLANCK, 71
 de STEFAN-BOLTZMANN, 71
 de WIEN, 72
 Longueur d'onde λ , 38

 Masse
 volumique, 14
 MAXWELL
 AMPÈRE, 48
 GAUSS, 45
 MAYER, 11
 MILLMAN, 20
 Module d'onde k , 38
 Moment
 cinétique, 31
 dipolaire, 82
 dipolaire(Electrostatique), 46
 d'une force, 30
 d'inertie, 32
 magnétique, 48
 Lumière monochromatique, 38

 NEUMANN, 56
 Nombre d'onde σ , 38

 Nombre quantique, 81
 azimutal l , 81
 magnétique m_l , 81
 principal n , 81
 de spin m_s , 81
 NORTON, 17

 Loi d'OHM
 Globale, 54
 Onde
 électromagnétique, 37
 plane, 57
 polarisée rectilignement, 61
 progressive, 58
 transversale, 58
 Ostrogradski, 79

 Paquet d'onde, 64
 Paraxial(rayon), 36
 PAULI, 81
 Période, 38
 Phase, 22
 Plasma, 61
 POISSON, 52
 Potentiel
 électrostatique, 45
 POYNTING
 équation locale, 53
 vecteur, 53
 Premier principe, 8
 Pression, 14
 Puissance
 d'une force, 25
 instantanée, 20
 moyenne, 20
 Pulsation
 de coupure, 63
 de coupure, 23
 plasma, 62
 Pulsation ω , 38

 Régime
 stationnaire (Thermodynamique), 12
 Rétroaction, 18

 Stigmatisme
 approché, 36
 rigoureux, 36
 Stokes, 79
 Système
 conservatif, 25
 ouvert, 12

thermodynamique, 7
THÉVENIN, 17
Torseur
 cinétique, 31
Transfert thermique, 8
Transverse, 58
Travail d'une force, 25
Troisième principe, 11
Tube de champ, 77

Valeur
 efficace, 20
 moyenne, 20
Variance, 85
VARIGNON, 30
Vibration lumineuse, 37
Vitesse
 de phase, 63