

COURS DE PRÉPA

---

# Mathématiques

---

Écrit par  
Alexandre JOUANDIN

Année  
2013—2015



19 avril 2015

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Première année</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>Géométrie</b>	<b>9</b>
1.1	Équations générales . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Calculs algébriques</b>	<b>10</b>
2.1	Somme des termes d'une suite arithmétique . . . . .	10
2.2	Coefficients binomiaux . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Suites</b>	<b>12</b>
3.1	Comparaison de suites . . . . .	12
3.2	Suites de Cauchy . . . . .	13
3.3	Suites usuelles . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>15</b>
4.1	Plan complexe . . . . .	15
4.2	Nombres complexes de module 1 . . . . .	15
<b>II</b>	<b>Structures algébriques usuelles</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Groupes et sous-groupes</b>	<b>19</b>
5.1	Groupes et sous-groupes . . . . .	19
5.1.1	Produit fini de groupes . . . . .	19
5.1.2	Sous-groupe . . . . .	19
5.2	Morphismes de groupes . . . . .	20
5.2.1	Définition . . . . .	20
5.2.2	Propriétés d'un morphisme de groupes . . . . .	21
5.2.3	Isomorphismes . . . . .	21
5.3	Groupes monogènes et cycliques . . . . .	22
5.4	Ordre d'un élément dans un groupe . . . . .	22
5.5	Classe d'équivalence . . . . .	23

<b>III</b>	<b>Algèbre</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Fonctions convexes</b>	<b>25</b>
6.1	Parties convexes d'un espace vectoriel réel . . . . .	25
6.1.1	Barycentre . . . . .	25
6.1.2	Partie convexe . . . . .	25
6.2	Fonctions convexes d'une variable réelle . . . . .	26
6.3	Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables . . . . .	28
6.3.1	Dérivabilité et convexité . . . . .	28
6.3.2	Position de la tangente . . . . .	28
6.3.3	Exemples d'inégalités de convexité . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Réduction des Endomorphismes</b>	<b>29</b>
7.1	Généralités . . . . .	30
7.1.1	Matrices carrées semblables . . . . .	30
7.1.2	Sous-espace stable par un endomorphisme . . . . .	31
7.2	Éléments propres d'un endomorphisme . . . . .	32
7.2.1	Éléments propres . . . . .	32
7.2.2	Éléments propres en dimension finie . . . . .	32
7.3	Polynôme Caractéristique . . . . .	34
7.4	Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables . . . . .	35
7.4.1	Endomorphisme diagonalisable . . . . .	35
7.4.2	Matrice diagonalisable . . . . .	36
7.5	Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables . . . . .	36
7.6	Endomorphismes nilpotents . . . . .	37
7.6.1	Définition . . . . .	37
7.6.2	Propriétés en dimension finie . . . . .	37
7.7	Polynômes d'un endomorphisme . . . . .	37
7.7.1	Polynôme minimal . . . . .	38
7.7.2	Valeur propre et polynôme annulateur . . . . .	38
7.7.3	CAYLEY-HAMILTON . . . . .	39
7.8	Lemme de décomposition des noyaux . . . . .	39
7.9	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité . . . . .	39
7.10	Endomorphismes à polynôme minimal scindé . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Topologie des espaces vectoriels normés</b>	<b>41</b>
8.1	Normes et espaces vectoriels normés . . . . .	41
8.1.1	Rappels . . . . .	41
8.1.2	Norme . . . . .	41
8.1.3	Distance . . . . .	42
8.1.4	Boules . . . . .	42
8.1.5	Parties, suites, fonctions bornées . . . . .	43
8.1.6	Produit scalaire . . . . .	43
8.1.7	Normes usuelles . . . . .	44
8.1.8	Produit fini d'espaces vectoriels normés . . . . .	44
8.2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé . . . . .	45
8.3	Comparaison des normes . . . . .	45
8.4	Topologie d'un espace normé . . . . .	46
8.5	Caractérisations séquentielles . . . . .	49
8.6	Applications linéaires continues . . . . .	49
8.7	Complets . . . . .	50

8.8	Parties compactes d'un espace normé . . . . .	50
8.9	Applications continues sur une partie compacte . . . . .	51
8.10	Connexité par arcs . . . . .	51
8.10.1	Convexité . . . . .	51
8.10.2	Connexité . . . . .	52
<b>9</b>	<b>Espaces Préhilbertiens réels</b>	<b>54</b>
9.1	Orthogonalité . . . . .	54
9.2	Automorphismes orthogonaux . . . . .	55
9.3	Isométries vectorielles d'un espace euclidien . . . . .	56
<b>10</b>	<b>Espaces Préhilbertiens complexes</b>	<b>58</b>
10.1	Structure Préhilbertienne complexe . . . . .	58
10.2	Orthogonalité . . . . .	58
10.3	Séries de FOURIER . . . . .	58
<b>IV</b>	<b>Analyse</b>	<b>62</b>
<b>11</b>	<b>Séries numériques et vectorielles</b>	<b>63</b>
11.1	Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie . . . . .	63
11.1.1	Convergence absolue . . . . .	64
11.1.2	Série À Termes Positifs . . . . .	64
11.2	Complément sur les séries numériques . . . . .	64
11.2.1	Règle de d'ALEMBERT . . . . .	64
11.2.2	Séries alternées . . . . .	65
11.2.3	Comparaison série intégrale . . . . .	65
11.2.4	Comparaison des Série À Termes Positifs (SATP) . . . . .	66
11.3	Hors programme . . . . .	68
<b>12</b>	<b>Familles sommables de nombres complexes</b>	<b>69</b>
12.1	Ensembles dénombrables . . . . .	69
12.2	Familles sommables . . . . .	70
12.2.1	Pour les réels positifs . . . . .	70
12.2.2	Pour les réels et les complexes . . . . .	71
<b>13</b>	<b>Suites de fonctions</b>	<b>73</b>
13.1	Convergence simple, convergence uniforme . . . . .	73
13.2	Continuité, double limite . . . . .	74
13.3	Convergence des Séries . . . . .	75
13.4	Propriétés de la somme . . . . .	76
13.5	Séries doubles . . . . .	76
<b>14</b>	<b>Séries Entières</b>	<b>78</b>
14.1	Généralités . . . . .	78
14.1.1	Rayon de Convergence . . . . .	78
14.1.2	D'ALEMBERT . . . . .	79
14.2	Série entière d'une variable réelle . . . . .	80
14.2.1	Primitivation . . . . .	80
14.2.2	Dérivation . . . . .	80
14.3	Fonctions développables en série entière . . . . .	81
14.4	Propriétés de la somme . . . . .	81

<b>15 Calcul Différentiel et Intégral</b>	<b>82</b>
15.1 Dérivation . . . . .	82
15.2 Intégration . . . . .	83
15.3 Primitive . . . . .	83
15.4 Accroissements finis . . . . .	84
15.4.1 Cas réel . . . . .	84
15.4.2 Cas vectoriel . . . . .	84
15.5 Formules de Taylor . . . . .	84
<b>16 Intégrales sur un intervalle</b>	<b>85</b>
16.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ . . . . .	87
16.1.1 Définition . . . . .	87
16.1.2 Propriétés de l'intégrale . . . . .	87
16.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ . . . . .	88
16.3 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ . . . . .	88
16.4 Intégration sur un intervalle quelconque . . . . .	89
16.4.1 Sur un intervalle semi-ouvert . . . . .	89
16.4.2 Sur un intervalle de la forme $]a, b[$ . . . . .	89
16.4.3 Sur un intervalle $I$ quelconque . . . . .	90
16.5 Intégration des relations de comparaison . . . . .	91
16.6 Passage à la limite sous l'intégrale . . . . .	92
16.6.1 Convergence dominée . . . . .	92
16.6.2 Intégration terme à terme . . . . .	92
16.7 Continuité d'une intégrale à paramètre . . . . .	93
16.8 Dérivation d'un intégrale à paramètre . . . . .	93
16.9 Intégrabilité (Ancienne version) . . . . .	94
16.10 Intégrales classiques . . . . .	94
16.11 Espaces vectoriels normés de fonction intégrables . . . . .	95
16.12 Fonction Gamma . . . . .	95
16.13 Intégrales doubles . . . . .	96
<b>17 Variables aléatoires discrètes</b>	<b>97</b>
17.1 Espace probabilisé . . . . .	97
17.2 Propriétés élémentaires des probabilités . . . . .	99
17.3 Probabilités conditionnelles et indépendance . . . . .	100
17.3.1 Probabilités conditionnelles . . . . .	100
17.3.2 Indépendance . . . . .	101
17.4 Variables aléatoires discrètes . . . . .	101
17.5 Couples de variables aléatoires . . . . .	102
17.5.1 Couple de variables aléatoires . . . . .	102
17.5.2 Variables aléatoires indépendantes . . . . .	102
17.6 Lois usuelles . . . . .	103
17.6.1 Loi binomiale . . . . .	103
17.6.2 Loi géométrique . . . . .	103
17.6.3 Loi de POISSON . . . . .	104
17.7 Espérance . . . . .	105
17.7.1 Définitions . . . . .	105
17.7.2 Propriétés de l'espérance . . . . .	105
17.8 Variance . . . . .	106
17.8.1 Moment . . . . .	106
17.8.2 Variance et écart-type . . . . .	107

17.8.3 Covariance . . . . .	108
17.9 Loi faible des grands nombres . . . . .	110
17.10 Fonctions génératrices . . . . .	110
<b>V Équations Différentielles</b>	<b>112</b>
<b>18 Équations Différentielles Linéaires</b>	<b>113</b>
18.1 Généralités . . . . .	113
18.1.1 Équation différentielle linéaire . . . . .	113
18.1.2 Problème de CAUCHY . . . . .	114
18.1.3 Équation scalaire linéaire d'ordre $n$ . . . . .	114
18.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire . . . . .	115
18.2.1 Théorème de CAUCHY . . . . .	115
18.2.2 Système fondamental de solutions . . . . .	115
18.3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice . . . . .	116
18.4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants . . . . .	117
18.5 Méthode de variation des constantes . . . . .	117
18.6 Équations différentielles scalaires du second ordre . . . . .	118
18.7 Équations Différentielles <b>Scalaire</b> s d'ordre 1 . . . . .	118
18.8 Équations Différentielles <b>Vectorielle</b> s d'ordre 1 . . . . .	119
18.9 Équations Différentielles linéaires du second ordre . . . . .	119
18.9.1 Coefficients constants . . . . .	121
18.9.2 Cas général . . . . .	121
<b>19 Équations Différentielles non linéaires</b>	<b>122</b>
19.1 Équations autonomes . . . . .	122
19.2 Équations non autonomes . . . . .	122
<b>20 Calcul différentiel</b>	<b>124</b>
20.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles . . . . .	124
20.2 Différentielle . . . . .	124
20.2.1 Application différentiable . . . . .	124
20.2.2 Jacobien, Jacobienne . . . . .	125
20.3 Opérations sur les applications différentiables . . . . .	125
20.4 Cas des applications numériques . . . . .	126
20.4.1 Gradient . . . . .	126
20.4.2 Représentation des formes linéaires . . . . .	126
20.4.3 Point critique . . . . .	126
20.5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie . . . . .	127
20.6 Applications de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	127
20.7 Applications de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	127
<b>21 Fonctions de plusieurs variables</b>	<b>128</b>
21.1 Différentielle, dérivée . . . . .	128
21.1.1 Différentielle . . . . .	128
21.1.2 Dérivée selon un vecteur . . . . .	128
21.2 Inversion locale . . . . .	129
21.3 Complément sur les courbes planes . . . . .	129

<b>VI</b>	<b>Géométrie</b>	<b>130</b>
21.4	Arcs Paramétrés . . . . .	131
21.5	Courbes Planes . . . . .	131
21.5.1	En polaire . . . . .	131
21.5.2	Étude d'une courbe paramétrée . . . . .	132
<b>VII</b>	<b>Annexe</b>	<b>133</b>
21.6	Équivalences . . . . .	134
21.7	Trigonométrie . . . . .	134
21.7.1	Définition . . . . .	134
21.7.2	Addition / Produit . . . . .	134
21.7.3	Dérivation . . . . .	134
21.7.4	Formule de MOIVRE . . . . .	135
21.8	Formules usuelles . . . . .	135
21.9	Espaces vectoriels . . . . .	135
21.10	Astuces . . . . .	135
	<b>Liste des acronymes</b>	<b>137</b>
	<b>Index</b>	<b>138</b>

Première partie

Première année



# Chapitre 1

## Géométrie

### 1.1 Équations générales

Type	Équation
Droite	$ax + by + c = 0$
Plan	$ax + by + cz + d = 0$
Cercle	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
Sphère	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

## Chapitre 2

# Calculs algébriques

### 2.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

#### Définition 1

Soit  $I$  un ensemble fini, et  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes.

La somme des  $x_i$  est notée  $\sum_{i \in I} x_i$

Le produit des  $x_i$  est noté  $\prod_{i \in I} x_i$

#### Théorème 1.1 : Somme des entiers de 1 à $n$

Pour tout  $n$  de 1 à  $n$  :

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n-1)}{2}$$

#### Preuve 1.1.1

$$(2.2) \quad \begin{array}{rcl} S & = & 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n \\ + S & = & n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S & = & n + 1 + n + 1 + \cdots + n + 1 + n + 1 \end{array}$$

$$d'où 2S = n \times (n + 1), \text{ et } S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

#### Théorème 1.2 : Somme des premières puissances

Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on a :

$$(2.3a) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(2.3b) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$$

Les démonstrations de ces formules se font par récurrence (en connaissant le résultat), ou en primitivant.

## 2.2 Coefficients binomiaux

### Définition 2

Pour  $E$  un ensemble fini de  $n$  éléments, on note  $\binom{n}{p}$  le nombre de sous-parties de  $E$  à  $p$  éléments.

$$(2.4) \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

# Chapitre 3

## Suites

### Définition 3 : Borne supérieure

On appelle **borne supérieure** d'une partie  $F$  d'un ensemble ordonné fini  $E$  le plus petit des majorants de  $F$ .

En d'autres termes,

$$(3.1) \quad a = \sup F \Leftrightarrow \forall y \in F, \left[ a \leq y \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \leq y) \right]$$

### Théorème 3.1 : Théorème de la suite monotone

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Si  $(u_n)$  est majorée, alors elle converge vers sa borne supérieure.

Sinon, si  $(u_n)$  n'est pas majorée, alors elle admet  $+\infty$  pour limite.

## 3.1 Comparaison de suites

### Définition 4 : Suites équivalentes

Deux suites  $u_n$  et  $v_n$  sont dites **équivalentes** en l'infini s'il existe une suite  $w_n$  tendant vers 1 en l'infini telle que  $u_n = w_n \times v_n$ .

Autrement dit :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \exists w_n \xrightarrow{+\infty} 1 \text{ tq } u_n = w_n v_n$$

### Définition 5 : $O(\dots)$ et $o(\dots)$

Si  $x_n$  est une suite de  $(E, N)^{\mathbb{N}}$  et  $(\alpha_n)$  une suite de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x_n &= O(\alpha_n), \text{ si } \forall M \in \mathbb{R}^+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq M|\alpha_n| \\ x_n &= o(\alpha_n), \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq \varepsilon|\alpha_n| \end{aligned}$$

### Définition 6 : $O(\dots)$ et $o(\dots)$ dans $\mathbb{R}$

Si  $(\alpha_n)_n$  est une suite à valeurs dans  $\mathbb{R}^*$ ,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \text{ est bornée.} \\ x_n &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

(ATTENTION) Une suite ne peut pas, à notre niveau, être  $\sim 0$ , en  $o(0)$  ou  $O(0)$ , car la définition dirait que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

## 3.2 Suites de Cauchy

### Définition 7 : Suite de CAUCHY

Une suite  $(x_n)_n$  dans  $(E, N)$  est dite de Cauchy si

$$(3.5) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_0 \implies \boxed{N(x_{n+p} - x_n) < \varepsilon}$$

## 3.3 Suites usuelles

### Méthode

#### Suite récurrente du premier ordre

Soit une suite récurrente linéaire  $u_n$  de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. On cherche  $\lambda$  un point fixe :  $\lambda = a\lambda + b$ . On trouve  $\lambda = \frac{b}{1-a}$ .
2. On montre que la suite  $v_n = (u_n - \lambda)$  est une suite géométrique de raison  $a$ .
3. Ainsi,  $v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - \lambda)$ . D'où  $u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda$ .

#### Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit une suite récurrente linéaire  $u_n$  de la forme :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

1. On pose la fonction caractéristique :  $f(r) = r^2 - ar + b$

2. On calcule son déterminant  $\Delta = (-a)^2 - 4b$ . Deux cas se présentent :

- $\Delta = 0$ , alors  $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $u_n = (\lambda + \mu n) \left(\frac{a}{2}\right)^n$
- $\Delta \neq 0$ , alors  $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

## Chapitre 4

# Nombres complexes

### 4.1 Plan complexe

#### Définition 8 : Corps complexe $(\mathbb{C}, +, \times)$

Un **nombre complexe** est un élément  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . L'ensemble des nombres complexes est noté  $\mathbb{C}$ , c'est un corps muni des lois suivantes :

**Addition**  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$   
de neutre  $(0, 0)$

**Multiplication**  $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$   
de neutre  $(1, 0)$

#### Théorème 8.1

$(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps (*cf. tableau 4.1 page 18 pour la définition d'un corps*)

#### Définition 9 : Module

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe. On appelle **module** la valeur  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

### 4.2 Nombres complexes de module 1

#### Définition 10

On note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des nombres complexes de module 1.  
Le disque unité est l'ensemble de ses points.

### Propriétés

- $\mathcal{U}$  est stable par le produit  $\times$
- $z \in \mathcal{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$



Deuxième partie

Structures algébriques usuelles

		Groupe	Groupe Abélien	Anneau	Corps
Loi $(+/*)$	Neutre $e$ (ou $0$ )	✓	✓	✓	✓
	Assossiative	✓	✓	✓	✓
	Symétrique (admet $a^{-1}$ )	✓	✓	✓	✓
	Commutative		✓	✓	✓
Loi $\times$	Neutre $1$			✓	✓
	Associative			✓	✓
	Distributive de la loi $+$			✓	✓
	Commutative				✓
	Inversible				✓

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des définitions

# Chapitre 5

## Groupes et sous-groupes

### 5.1 Groupes et sous-groupes

#### Définition 1 : Groupe

On appelle **groupe** le couple  $(G, *)$  où  $G$  est un ensemble muni d' $*$ , une Loi de Composition Interne (LCI) associative, symétrique, et admettant un neutre.

#### 5.1.1 Produit fini de groupes

#### Définition 2 : Groupe Produit

Soient  $(G, *)$  et  $(G', \circ)$  deux groupes.  
Le groupe  $(G \times G', \square)$  tel que

$$(x, x') \square (y, y') = (x * y, x' \circ y')$$

est un groupe appelé **groupe produit** de  $G$  et  $G'$

#### Exemple : Groupe de KLEIN

Le groupe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  est appelé **groupe de KLEIN**. C'est un groupe produit, il n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , et il a la spécificité de ne pas être cyclique.

#### 5.1.2 Sous-groupe

#### Définition 4 : Sous-groupe

Soit  $(G, *)$  un groupe, et soit  $H$  une partie de  $G$

On dit que  $H$  est un **sous-groupe** de  $G$  si, muni de la LCI  $*$ ,  $H$  est un groupe stable par  $*$ .

### Théorème 4.1 : Caractérisation d'un sous-groupe

Avec les notations précédentes,  $H$  est un sous-groupe de  $G$  si :

- $H$  n'est pas vide
- $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$ .

En général, pour vérifier que  $H$  est non vide, on vérifie que le neutre  $e$  de  $G$  est aussi dans  $G$ .

### Théorème 4.2 : Intersection de sous-groupes

Soit  $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille de sous-groupes.

Alors  $H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i$  est un sous-groupe.

**Preuve 4.2.1** Avec les notations précédentes, montrons que  $H$  est un sous-groupe :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, e \in H_i &\implies e \in H \\ \forall (x, y) \in H^2, \forall i \in \mathbb{N}, (x, y) \in H_i^2, \text{ donc } x * y^{-1} \in H_i &\implies x * y^{-1} \in H \end{aligned}$$

Ainsi,  $H$  respecte les propriétés de caractérisation d'un sous-groupe, donc  $H$  est un sous-groupe.  $\square$

### Définition 5 : Sous-groupe engendré

Soit  $G$  un groupe, et soit  $A$  une partie de  $G$ .

L'intersection des sous-groupes de  $G$  contenant  $A$  est le plus petit sous-groupe contenant  $A$ .

On le note  $\langle A \rangle$ , et on dit que c'est le **sous-groupe engendré** par  $A$ .

### Théorème 5.1 : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Pour tout sous-groupe  $H$  de  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $H = n\mathbb{Z}$

**Preuve 5.1.1** Soit  $H$  un sous-groupe. Si  $H = \{0\}$ , alors  $H = 0\mathbb{Z}$ .

Supposons maintenant que  $H$  contient au moins un entier.

Soit  $n$  le plus petit entier de  $H$ . Il convient de dire que  $n\mathbb{Z} \in H$ .

Soit  $m$  un entier quelconque de  $H$ . Effectuons sa division euclidienne par  $n$  :

$$m = nq + r \quad 0 \leq r < n$$

$$nq \in H, m \in H \implies \boxed{r \in H}$$

Or  $n$  étant le plus petit entier dans  $H$ ,  $r$  dans  $H$  étant inférieur à  $n$ ,  $r = 0$ , donc  $m = nq$   $\square$

## 5.2 Morphismes de groupes

### 5.2.1 Définition

### Définition 6 : Morphisme de groupes

On appelle **morphisme** d'un groupe  $(G, *)$  à un groupe  $(H, \times)$  l'application  $f$  telle que

$$(5.1) \quad \forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \times f(y)$$

### 5.2.2 Propriétés d'un morphisme de groupes

#### Théorème 6.1 : Image et image réciproque d'un sous-groupe

L'image d'un sous-groupe par un morphisme est un sous groupe.

L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe

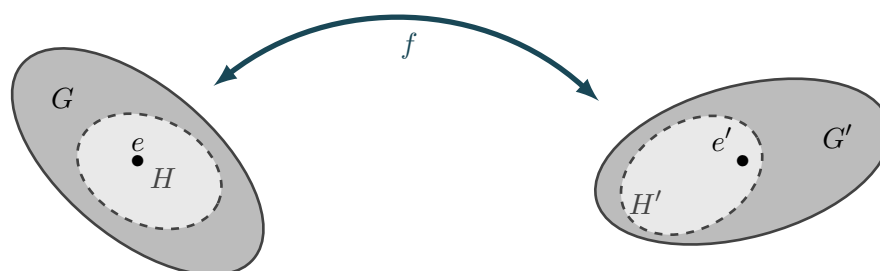


FIGURE 5.1 – Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme  $f$

#### Théorème 6.2 : Condition d'injectivité d'un morphisme

Soit  $f$  un morphisme de groupes de  $(G, *)$  dans  $(H, \times)$ . Alors :

$f$  est **injective**  $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{e\}$

$f$  est **surjective**  $\Leftrightarrow \text{Im } f = H$

#### Propriétés

Soit  $f : G \rightarrow G'$  un morphisme de groupes de neutres respectifs  $e$  et  $e'$ . Alors :

- $f(e) = e'$
- $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

### 5.2.3 Isomorphismes

#### Définition 7 : Isomorphisme

Un morphisme de groupe bijectif est appelé **isomorphisme**

#### Théorème 7.1 : Réciproque d'un isomorphisme

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

### 5.3 Groupes monogènes et cycliques

#### Définition 8 : Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Un élément de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est la classe des éléments ayant tous le même reste par la division euclidienne par  $n$ .

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  est un groupe.

E.g. : Dans  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , l'élément  $\bar{1}$  est la classe des éléments de  $\mathbb{Z}$  ayant tous le même reste  $\bar{1}$  dans leur division par 3.

#### Théorème 8.1 : Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les éléments générateurs du groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  sont les classes  $\bar{k}$  où  $k \wedge n = 1$ .

#### Définition 9 : Groupe monogène

$G$  est un **groupe monogène** s'il est engendré par un seul élément  $a$ , c'est-à-dire si  $G = \langle a \rangle$ .

#### Définition 10 : Groupe cyclique

Un groupe monogène fini est appelé **groupe cyclique**.

Plus visuellement, un groupe monogène est cyclique  $G = \langle a \rangle$  s'il peut s'écrire sous la forme :

$$G = \{e, a, a^2, \dots, a^n\}$$

#### Théorème 10.1

Tout groupe monogène infini est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$ .

Tout groupe monogène fini de cardinal  $n$  (groupe cyclique d'ordre  $n$ ) est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

### 5.4 Ordre d'un élément dans un groupe

#### Définition 11 : Ordre d'un groupe

L'**ordre** d'un groupe fini est son cardinal  $n$ .

#### Définition 12 : Ordre d'un élément dans un groupe

Soit  $a \in G$ . Si  $\langle a \rangle$  est fini, l'**ordre de  $a$**  est le cardinal de ce sous-groupe.

### Théorème 12.1 : Théorème de LAGRANGE

Dans un groupe fini, l'ordre d'un sous-groupe est un diviseur de l'ordre du groupe.

#### Définition 13 : Éléments nilpotents

Un élément est **nilpotent** si, composé par lui même, il peut être nul :

$$(5.2) \quad \begin{cases} a \text{ nilpotent} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } a^p = 0$$

## 5.5 Classe d'équivalence

#### Définition 14 : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est une relation binaire caractérisée de la manière suivante :

$$(5.3) \quad \left| \begin{array}{ll} \forall x \in E, & x\mathcal{R}x & \text{(Réflexivité)} \\ \forall (x, y) \in E^2, & x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x & \text{(Symétrie)} \\ \forall (x, y, z) \in E^3, & (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z & \text{(Transitivité)} \end{array} \right.$$

#### Définition 15 : Relation d'ordre

Une relation d'ordre  $\mathcal{R}$  est également une relation binaire. Elle se caractérise de la manière suivante :

$$(5.4) \quad \left| \begin{array}{ll} \forall x \in E, & x\mathcal{R}x & \text{(Réflexivité)} \\ \forall (x, y) \in E^2, & (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y & \text{(Anti-symétrie)} \\ \forall (x, y, z) \in E^3, & (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z & \text{(Transitivité)} \end{array} \right.$$

(ATTENTION) Bien savoir ce que signifient Symétrie et Anti-symétrie

#### Théorème 15.1 : Indicatrice d'EULER

C'est la fonction  $\varphi$  telle que

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\})$$

Troisième partie

*Algèbre*



# Chapitre 6

## Fonctions convexes

### 6.1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

#### 6.1.1 Barycentre

##### Définition 1 : Barycentre

Soit  $(x_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille finie de points pondérés telle que la somme des coefficients  $\sum_i \alpha_i \neq 0$ . On appelle **barycentre** des points  $x_i$  le point  $G$  tel que :

$$(6.1) \quad G = \frac{\sum_i \alpha_i x_i}{\sum_i \alpha_i}$$

Rajouter les propriétés des barycentres

#### 6.1.2 Partie convexe

La partie suivante est copiée de la sous-section 8.10.1 page 51 :

##### Définition 2 : Convexe

Un ensemble  $E$  est **convexe** si :

$$(6.2) \quad \forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], \boxed{tx + (1 - t)y \in E}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

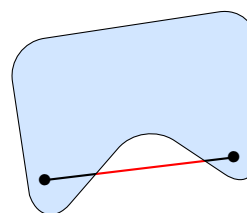


FIGURE 6.1 – Un ensemble non convexe

##### Théorème 2.1 : Intersection de convexes

L'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe.

**Remarque :** Ce théorème est même valable pour une famille infinie.

### Théorème 2.2 : Convexe dans $\mathbb{R}$

$I$  de  $\mathbb{R}$  est convexe si et seulement si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$

### Théorème 2.3 : Caractérisation à l'aide de barycentres

Une partie  $X$  de  $E$  est convexe si et seulement si le barycentre  $G$  de toute famille pondérée finie  $(x_i, \alpha_i)_i$  telle que  $\alpha_i \geq 0 \forall i$  appartient à  $X$  :

$$(6.3) \quad G \in X$$

(Bien sûr, on a toujours  $\sum \alpha_i \neq 0$ .)

## 6.2 Fonctions convexes d'une variable réelle

La définition suivante est copiée de la définition 43 page 52.

### Définition 3 : Fonction convexe

Une fonction  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  est dite **convexe** si :

$$(6.4) \quad \forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in ]0, 1[, \boxed{f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)}$$

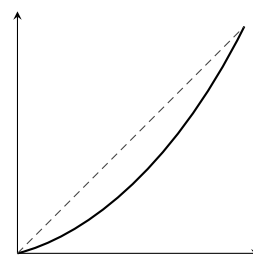


FIGURE 6.2 – Une fonction convexe

### Théorème 3.1 : Position relative du graphe

Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de son graphe est situé en-dessous de la corde correspondante.

### Définition 4 : Épigraphe

Soit  $f$  une fonction de graphe  $\Gamma_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$ .

On appelle **épigraphe** de  $f$  l'ensemble  $\Gamma_f^+$  des points situés au dessus du graphe  $\Gamma_f$ . C'est-à-dire :

$$(6.5) \quad \Gamma_f^+ = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

### Théorème 4.1 : Convexité de l'épigraphe

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

### Théorème 4.2 : Inégalité de JENSEN

Soit  $f$  une fonction **convexe** sur un intervalle  $I$ .  
 Soit  $n \geq 2$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$  une famille de points de  $I$ .  
 Pour toute famille de **réels positifs**  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$  telle que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

l'**inégalité de JENSEN** donne :

$$(6.6) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration  
épi-  
graphe

### Théorème 4.3

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un intervalle  $I$  non vide et non réduit à un singleton.

Pour tout  $x \in I$ , soit  $\Phi_x$  la fonction :

$$(6.7) \quad \Phi_x : t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si, pour tout  $x \in I$ ,  $\Phi_x$  est croissante sur  $I \setminus \{x\}$ .

### Théorème 4.4 : Inégalité des pentes

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie sur un **ouvert**  $I \subset \mathbb{R}$  tel que  $I$  n'est pas réduit à un singleton.

Si  $f$  est convexe, alors  $f$  est dérivable en tout point de  $I$  à gauche et à droite, et pour tout  $(x, y) \in I^2$  tel que  $x < y$  :

$$(6.8) \quad f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

**Remarque :** On déduit de la dérivabilité que  $f$  est continue sur  $I$ .

### Définition 5 : Fonction concave

Une fonction  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  est dite **concave** si son opposée  $-f$  est une fonction convexe.

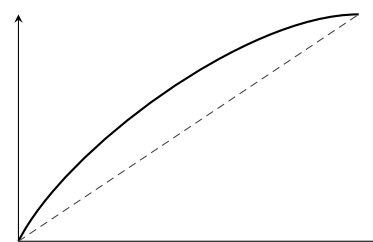


FIGURE 6.3 – Une fonction concave

## 6.3 Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

### 6.3.1 Dérivabilité et convexité

#### Théorème 5.1 : Caractérisation par la dérivabilité

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .  
 $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si sa dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ .

**Preuve 5.1.1** Si  $f$  est convexe, d'après le théorème 4.4 de l'inégalité des pentes, pour  $x < y$ , on a  $f'(x) \leq f'(y)$ . Donc  $f'$  est croissante.

Réciproquement, supposons  $f'$  croissante, et prenons deux points  $x$  et  $y$  de  $I$  tels que  $x < y$ . Soient  $a$  et  $b$  tels que  $y = ax + b$  est l'équation de la droite joignant  $x$  et  $y$ . Soit  $g(t) = f(t) - (at + b)$ , de dérivée  $g'(t) = f'(t) - a$  croissante. D'après le théorème 21.2 des accroissements finis (page 84),  $\exists c \in ]x, y[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = a$ , c'est-à-dire tel que  $g'(c) = 0$ .  $g'$  étant croissante, elle est négative sur  $[x, c]$ , et positive sur  $[c, y]$ . On en déduit le tableau de variation :

$t$	$x$	$c$	$y$
$g'$	—	0	+
$g$	0		0
		$\searrow$	$\nearrow$

Donc  $g$  est toujours négative, donc  $f(t) \leq (at + b)$  implique que la courbe est toujours en dessous de sa corde, donc  $f$  est convexe sur  $I$ .

Ainsi,  $f$  convexe  $\iff f'$  est croissante. □

#### Théorème 5.2 : Caractérisation par la dérivée double

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$ .  
 $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si sa dérivée double  $f''$  est positive sur  $I$  :

$$(6.9) \quad f \text{ convexe sur } I \iff \forall x \in I, f''(x) > 0$$

### 6.3.2 Position de la tangente

#### Théorème 5.3 : Tangentes

Le graphe d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes

### 6.3.3 Exemples d'inégalités de convexité

## Chapitre 7

# Réduction des Endomorphismes

### Méthode

#### Valeurs propres

Pour montrer que  $\lambda$  est une valeur propre d'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$ , on peut :

- Revenir à la définition, et trouver un vecteur propre  $x$  tel que  $u(x) = \lambda x$
- Montrer que l'application  $f - \lambda \text{Id}_E$  est non-injective, c'est-à-dire que

$$\det(f - \lambda \text{Id}_E) = 0$$

- Montrer que  $\lambda$  est une racine du polynôme caractéristique  $\chi_u$  de  $u$
- On sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace

#### Polynôme caractéristique

Si on cherche le polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $u$ , ces étapes peuvent permettre d'avancer sa détermination :

- Prendre le polynôme dont les racines sont les valeurs propres de  $u$ . C'est à dire le polynôme  $\prod (X - \lambda_i)$
- Reconnaître les coefficients de degré  $n - 1$  et  $0$  (*cf.* théorème 12.2 page 34).
- Si la matrice est triangulaire, faire le produit des éléments diagonaux.

#### Polynôme minimal

Si on cherche le polynôme minimal d'un endomorphisme  $u$  dans l'espace  $E$  de dimension finie, on peut avoir recours aux affirmations suivantes :

- Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
- Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont des valeurs propres distinctes de  $u$  d'ordre de multiplicité  $m_i$ , alors le polynôme minimal est la valeur minimale des  $m'_i$  tels que

$$\Pi_u(u) = \left( X - \lambda_i \right)^{m'_i} (u) = 0$$

- Si on a un polynôme annulateur  $P$ , on peut le factoriser pour obtenir les racines. Puisque le polynôme minimal  $\Pi_u$  divise  $P$ , il reste à essayer de combiner ces racines pour obtenir le polynôme de plus petit degré qui annule  $u$ .

## Théorème de décomposition des noyaux

En général, dès qu'on voit une somme directe, on utilise le théorème de décomposition des noyaux. Si on a  $P$ , un polynôme annulateur de  $u$  tel que  $P(u) = 0$ , alors on a  $\text{Ker} P(u) = E$ , et si  $P(u)$  est le produit de plusieurs polynômes, par exemple  $A$  et  $B$ , on peut écrire

$$E = \text{Ker} A(u) \oplus \text{Ker} B(u)$$

## Diagonalisation

Pour vérifier qu'une diagonalisation est possible, se rapporter au théorème 14.1 page 35 sur la caractérisation de la diagonalisation. Une fois vérifiée, la diagonalisation peut s'effectuer à l'aide des astuces suivantes :

- Chercher un vecteur propre évident, par exemple  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  si les lignes sont toutes de même somme ;
- Utiliser des opérations sur des lignes ou des colonnes et développer pour obtenir un déterminant plus simple à calculer ;
- Faire un pivot de GAUSS pour obtenir une matrice triangulaire (ou éventuellement triangulaire par blocs) ;
- Calculer le polynôme caractéristique avec la méthode de SARRUS.

## 7.1 Généralités

### 7.1.1 Matrices carrées semblables

#### Définition 6 : Matrices semblables

Deux matrices sont dites **semblables** si elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

### Théorème 6.1

Deux matrices sont **semblables** si et seulement si il existe une matrice  $P$  inversible telle que

$$(7.1) \quad A_1 = PA_2P^{-1}$$

### Théorème 6.2 : Trace et déterminant

Deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant. Ce sont des **invariants de similitude**.

C'est ce dernier théorème qui permet de confirmer l'unicité de la trace et du déterminant d'un endomorphisme.

### 7.1.2 Sous-espace stable par un endomorphisme

#### Définition 7 : Sous-espace stable

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $u$  si :

$$(7.2) \quad \forall x \in F, u(x) \in F$$

On écrit alors que  $u(F) \subset F$ .

La restriction de  $u$  à  $F$  au départ et à l'arrivée est l'**endomorphisme induit**.

(ATTENTION) La simple restriction de  $u$  à  $F$  ( $u|_F$ ) est une application de  $F$  dans  $E$  et ce n'est pas un endomorphisme, alors que l'endomorphisme induit va de  $F$  à  $F$ .

### Traduction matricielle

On va maintenant voir, conformément au programme, la traduction en termes de matrices. On se place donc dans  $E$  qui est cette fois de **dimension finie**  $n$ .

Si on reprend le sous-espace  $F$ , on peut trouver une base  $(e_1, \dots, e_p)$ . Cette base peut être complétée en une base de  $n$  vecteurs de  $E$  :  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  s'écrit :

$$\begin{matrix} & e_1 & \dots & e_p & | & \dots & e_n \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ \hline \vdots \\ e_n \end{matrix} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{où } B \text{ est la matrice de l'endomorphisme induit.}$$

## 7.2 Éléments propres d'un endomorphisme

### Théorème 7.1 : Droite stable

Une droite est stable par un endomorphisme  $u$  ssi elle est engendrée par un vecteur propre de  $u$ .

### 7.2.1 Éléments propres

#### Définition 8 : Valeur propre, vecteur propre

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Un scalaire  $\lambda$  est appelé **valeur propre** de  $u$  s'il existe un vecteur  $x$  non nul de  $E$  tel que

$$(7.3) \quad u(x) = \lambda x$$

Si un tel vecteur  $x$  existe, on l'appellera **vecteur propre**.

#### Définition 9 : Sous-espace propre

Avec les notations précédentes, on appellera **sous-espace propre (s-ep)** associé à une valeur propre  $\lambda$  le sous-espace vectoriel  $E_\lambda$  :

$$(7.4) \quad E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$$

C'est donc le sous-espace de  $E$  contenant 0 et tous les vecteurs propres de  $u$ .

### 7.2.2 Éléments propres en dimension finie

(ATTENTION) On se place dans un espace  $E$  de dimension finie. Les théorèmes et définitions qui suivent ne sont valables (au programme) que dans ces conditions.

#### Définition 10 : Spectre

Le spectre d'un endomorphisme  $u$  de  $E$ , noté  $\text{sp}(u)$ , est l'ensemble de ses valeurs propres.

### Théorème 10.1 : Famille finie de s-ep

La somme d'une famille finie de sous-espace propre (s-ep)  $E_{\lambda_i}$  de valeurs propres  $\lambda_i$  deux à deux distinctes est directe :

$$(7.5) \quad \sum_i E_{\lambda_i} = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$$

Le programme officiel précise le corollaire qui va avec :

### Théorème 10.2 : Famille de vecteurs propres



Toute famille de vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont deux à deux distinctes est libre.

### Théorème 10.3

Pour  $u$  un endomorphisme de  $E$  de dimension finie  $n$ , le **spectre** de  $u$  est fini, et de cardinal au plus  $n$ .

### Théorème 10.4

Deux matrices semblables ont même spectre.

### Théorème 10.5 : Endomorphismes commutant

Soient  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes d'un espace  $E$  de dimension finie. Si  $u$  et  $v$  commutent, alors tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

**Preuve 10.5.1** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , et  $E_\lambda$  l'espace propre associé. On a :

$$E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda I)$$

Soit  $x_\lambda$  de  $E_\lambda$ .  $x_\lambda$  est un vecteur propre de  $u$ . Pour montrer qu'un sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ , il faut montrer que  $v(x_\lambda) \in \text{Ker}(u - \lambda I)$ . Or :

$$\begin{aligned} (u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) &= u \circ v(x_\lambda) - \lambda v(x_\lambda) \\ &= v \circ u(x_\lambda) - v(\lambda x_\lambda) \\ &= v(u(x_\lambda) - \lambda x_\lambda) \end{aligned}$$

D'où :

$$(u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) = 0$$

Donc  $v$  est stable par tout s-ep de  $u$ . □

### Définition 11 : Éléments propres d'une matrice

Soit  $A$  une matrice carrée de  $E$  un espace de dimension finie.

On appelle **valeur propre** de  $A$  un scalaire  $\lambda$  pour lequel il existe  $X$  tel que :

$$(7.6) \quad AX = \lambda X$$

Si ce vecteur  $X$  existe, on l'appelle **vecteur propre** de la matrice  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

Par extension, on définit le s-ep d'une matrice de manière similaire à la définition 9 page 32. L'ensemble des valeurs propres d'une matrice forme son spectre  $\text{sp}(A)$ .

### 7.3 Polynôme Caractéristique

Pour une matrice carrée  $M$ , on cherche un polynôme dont les valeurs propres sont les racines. C'est alors qu'est né le polynôme caractéristique.

#### Définition 12 : Polynôme caractéristique

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $M$  sa matrice dans une base associée  $\mathcal{B}$ .

Le **polynôme caractéristique** de  $u$ , noté  $\chi_u$ , est le déterminant de l'application  $(u - X \text{Id}_E)$ . De même, le **polynôme caractéristique** de la matrice  $M$ , noté  $\chi_M$ , est le déterminant de la matrice  $(M - X I_n)$

$$(7.7) \quad \chi_u = \det(u - X \text{Id}_E) \quad \chi_M = \det(M - X I_n)$$

Ce polynôme est de degré  $n$ . Le polynôme caractéristique doit être unitaire. Bien sûr, on a :

$$(7.8) \quad \chi_u = \chi_M$$

#### Théorème 12.1

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

##### Preuve 12.1.1 (Facile)

Soient  $A$  et  $A'$  nos deux matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme  $u$  dans des bases différentes. Donc

$$\begin{cases} \chi_u &= \chi_A \\ \chi_u &= \chi_{A'} \end{cases}$$

D'où  $\chi_A = \chi_{A'}$ . □

#### Théorème 12.2 : Valeurs des coefficients de degrés 0 et $n - 1$

Pour une matrice  $M$  de rang  $n$ , on peut obtenir quelques coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(M) \times X^{n-1} + \dots + \det(M)$$

Pour une matrice de rang 2, le polynôme caractéristique est donc donné par

$$\chi_M = X^2 - \text{tr}(M) X + \det(M)$$

**Preuve 12.2.1** Il suffit de développer le polynôme caractéristique, en sachant que les valeurs propres sont les racines, puis d'identifier.

#### Théorème 12.3 : Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$  une matrice triangulaire supérieure.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$(7.10) \quad \chi_A = \det(A - X I_n) = \prod (a_{i,i} - X)$$

#### Théorème 12.4 : Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit de  $u$  divise  $\chi_u$ .

## 7.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

### 7.4.1 Endomorphisme diagonalisable

#### Définition 13 : Endomorphisme diagonalisable

On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est **diagonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

On verra au théorème 14.1 que cette base  $\mathcal{B}$  est constituée des vecteurs propres.

#### Définition 14 : Quelques définitions

Quelques définitions portant sur les polynômes :

**Racine simple** Une racine  $\alpha$  du polynôme  $P$  est dite simple si elle n'est pas multiple. On dit que son ordre de multiplicité est égal à 1.

**Polynôme scindé**  $P$  est scindé s'il peut s'écrire comme le produit de polynômes du premier degré.

#### Théorème 14.1 : Caractérisation de la diagonalisation

On donne des équivalences à " $u$  diagonalisable" :

- i.  $E$  admet une base formée des vecteurs propres de  $u$  ;
- ii.  $E$  est somme directe des espaces propres de  $u$  :  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp}(u)} E_\lambda$  ;
- iii.  $\dim E = \sum \dim E_\lambda$  ;
- iv. le polynôme caractéristique  $\chi_u$  de  $u$  est scindé, et  $\omega(\lambda) = \dim(E_\lambda)$  ;
- v. le polynôme minimal  $\Pi_u$  de  $u$  est scindé à racines simples ;

- vi.  $u$  possède au moins un polynôme annulateur scindé à racines simples ;
- vii.  $u$  admet pour matrice une matrice diagonalisable.

Enfin, une condition juste suffisante pour diagonaliser un endomorphisme :

**Théorème 14.2 : Condition suffisante de diagonalisation**

Si  $u$  admet  $n = \dim E$  valeurs propres distinctes deux à deux, alors  $u$  est diagonalisable.

### 7.4.2 Matrice diagonalisable

**Définition 15 : Matrice diagonalisable**

Une matrice carrée  $A$  est dite **diagonalisable** si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé est diagonalisable.

On se servira plutôt du théorème suivant comme définition :

**Théorème 15.1**

Une matrice carrée  $A$  est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale  $D$  :

$$(7.11) \quad \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A = PDP^{-1}$$

$P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  à une base de vecteurs propres de  $A$ .

On peut alors traduire matriciellement tous les théorèmes vus dans la section précédente, notamment le théorème 14.1 page 35 qui caractérise la diagonalisation.

## 7.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

**Définition 16 : Endomorphisme trigonalisable**

On dit qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  est **trigonalisable** s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.

**Définition 17 : Matrice trigonalisable**

Une matrice carrée  $A$  est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure  $T$  :

$$(7.12) \quad \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad A = PTP^{-1}$$

**Théorème 17.1 : Autre “définition”**

Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé est trigonalisable.

### Théorème 17.2 : Caractérisation de la trigonalisation

Un endomorphisme  $u$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique ou son polynôme annulateur est scindé.

Plus généralement,  $u$  est trigonalisable si et seulement si  $u$  possède au moins un polynôme annulateur scindé.

### Théorème 17.3 : Trigonalisation dans $\mathbb{C}$

Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

Ces deux théorèmes peuvent également se traduire matriciellement.

## 7.6 Endomorphismes nilpotents

### 7.6.1 Définition

#### Définition 18 : Endomorphisme nilpotent

On dit qu'un endomorphisme  $u$  est **nilpotent** d'indice  $p \geq 1$  si  $u^p = 0$  avec  $u^{p-1} \neq 0$ .

### 7.6.2 Propriétés en dimension finie

#### Théorème 18.1 : Endomorphisme nilpotent trigonalisable

Un endomorphisme  $u$  dans un espace  $E$  de dimension finie est nilpotent si et seulement si  $u$  est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre.

#### Théorème 18.2 : Majoration de l'indice de nilpotence

Dans un espace  $E$  de dimension  $n$ , l'indice de nilpotence d'un endomorphisme ne dépasse pas  $n$ .

Si  $u$  est nilpotent d'indice  $n$ , il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme :

$$(7.13) \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

## 7.7 Polynômes d'un endomorphisme

#### Définition 19 : Polynôme d'un endomorphisme

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Pour tout polynôme  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ , on définit l'endomorphisme

$$(7.14) \quad P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k$$

$P(u)$  est appelé **polynôme de l'endomorphisme**  $u$ .

### Théorème 19.1 : Morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$

Pour  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , l'application  $P \mapsto P(u)$  est un morphisme d'algèbre de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

Noyau  
et Image  
de ce  
mor-  
phisme

### 7.7.1 Polynôme minimal

#### Définition 20 : Polynôme minimal

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle **polynôme minimal** l'unique polynôme  $\Pi_u$  unitaire et non nul, s'il existe, tel que  $\Pi_u$  annule  $u$  et soit de plus petit degré ( $\forall Q$  diviseur de  $\Pi_u$  distinct de  $\Pi_u$ ,  $Q(u) \neq 0$ ).

### Théorème 20.1

Si  $d$  est le degré du polynôme minimal  $P_u$  de  $u$ , alors la famille  $(u^k)_{k \in [0, d-1]}$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .

**Preuve 20.1.1** Soit  $d$  le degré minimal du polynôme minimal  $P_u$ . La famille  $(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{d-1})$  est libre.

### 7.7.2 Valeur propre et polynôme annulateur

#### Théorème 20.2

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ ,  $P(\lambda)$  est une valeur propre de  $P(u)$ .

#### Preuve 20.2.1

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda x &\implies u^k(x) = \lambda^k x \\ &\implies P(u)(x) = \sum_k a_k u^k(x) = P(\lambda)x \end{aligned}$$

On remarque que le vecteur propre associé à  $\lambda$  est aussi associé à  $P(\lambda)$ .  $\square$

### Théorème 20.3

Si  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est une racine de  $P$ .

**Preuve 20.3.1** On se sert du théorème précédent :

$$\begin{aligned} P(u) = 0 &\implies P(u)(x) = 0 \\ &\implies P(\lambda)x = P(u)(x) = 0 \end{aligned}$$

Puisque  $x \neq 0$ , on retrouve que  $\lambda$  est racine de  $P$ . □

## 7.7.3 CAYLEY-HAMILTON

### Théorème 20.4 : CAYLEY-HAMILTON

Si  $u$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel fini, alors le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

Le polynôme caractéristique est donc un multiple du polynôme minimal.

## 7.8 Lemme de décomposition des noyaux

### Théorème 20.5 : Théorème de décomposition des noyaux

Soient deux polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{K}[X]$ . Pour  $P$  et  $Q$  premiers entre eux :

$$(7.15a) \quad \text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}[P(u)] \oplus \text{Ker}[Q(u)]$$

Maintenant, on va voir le théorème dans une forme plus générale, qu'on déduit par récurrence sur le théorème précédent.

### Théorème 20.6 : Théorème de décomposition des noyaux

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

Si  $A_1, \dots, A_p$  sont des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  premiers deux à deux, alors :

$$(7.15b) \quad \text{Ker}\left((A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(A_i(u))$$

## 7.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Bouger

GRASSMAN

### Théorème 20.7 : Formule de GRASSMAN

Si  $V$  et  $W$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie de  $E$  alors :

$$(7.16) \quad \dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

## 7.10 Endomorphismes à polynôme minimal scindé

### Définition 21 : Sous-espace caractéristique

Soit  $u$  un endomorphisme trigonalisable de  $E$ . Son polynôme caractéristique  $\chi_u$  est scindé :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{m_i}$$

On appelle **sous-espace caractéristique** de  $u$  les sous-espaces :

(7.17) 
$$F_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}$$

### Théorème 21.1 : Décomposition avec les sous-espaces caractéristiques

Soit  $u$  un endomorphisme pour lequel il existe un polynôme annulateur scindé (c'est-à-dire  $u$  est trigonalisable).

L'endomorphisme  $u_i : F_{\lambda_i} \rightarrow F_{\lambda_i}$  induit par  $u$  dans  $F_{\lambda_i}$  est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

**Preuve 21.1.1** On a :

$$u_i = \lambda_i \text{Id}_E + (u_i - \lambda_i \text{Id}_E)$$

Ici,  $\lambda_i \text{Id}_E$  est une homothétie.

De plus,  $(u_i - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i} = 0$  par définition de  $F_{\lambda_i}$ , donc  $(u_i - \lambda_i \text{Id}_E)$  est un endomorphisme nilpotent.  $\square$



## Chapitre 8

# Topologie des espaces vectoriels normés

### Méthode

#### Application continue

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. Soit une application continue  $f : E \rightarrow F$ .

- $f : A \in E \rightarrow F$  conserve :
  - les parties compactes
  - les parties connexes par arcs
- $f^{-1} : F \rightarrow E$  conserve :
  - les parties fermées
  - les parties ouvertes

### 8.1 Normes et espaces vectoriels normés

#### 8.1.1 Rappels

##### Définition 22 : Espace vectoriel

Soit  $\mathbb{K}$  un corps ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** s'il respecte les conditions suivantes :

- |       |  |       |  |   |                                  |
|-------|--|-------|--|---|----------------------------------|
| (8.1) |  | (i)   | $(E, +)$ est un  | <u>groupe abélien</u>   | Groupe pour la loi +             |
|       |  | (ii)  | $\forall x \in E,$   | $1 \cdot x = x$   | Neutre multiplicatif             |
|       |  | (iii) | $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,$ | $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$                      | Distributivité pour $\mathbb{K}$ |
|       |  | (iv)  | $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,$     | $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$                         | Distributivité pour $E$          |
|       |  | (v)   | $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,$     | $\alpha \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ | Associativité                    |

#### 8.1.2 Norme

### Définition 23 : Définition de la norme

Soit  $E$  un espace vectoriel de  $\mathbb{K}$ . Une **norme** est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

$$(8.2) \quad \left| \begin{array}{ll} (i) & \forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0 \\ (ii) & \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \\ (iii) & \forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Séparation} \\ \text{Homogénéité} \\ \text{Inégalité triangulaire} \end{array}$$

Et le couple  $(E, N)$  est l'**espace vectoriel normé** associé.

### Théorème 23.1 : Norme $N_2$

$$N_2 : f \mapsto \left( \int_{[a,b]} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ est une norme sur } \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$$

### 8.1.3 Distance

Il y a plusieurs manières de définir la distance. Si on se place dans un espace vectoriel normé, on peut utiliser la norme pour définir la distance, comme dans la définition 25. Sinon, si l'espace est quelconque, la distance peut avoir la définition générale suivante :

### Définition 24 : Distance dans un espace quelconque

Soit  $E$  un ensemble. On appelle **distance** dans  $E$  toute application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

$$(8.3) \quad \left| \begin{array}{ll} (i) & \forall x \in E, \quad d(x, y) = 0 \implies x = y \\ (ii) & \forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x) \\ (iii) & \forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Séparation} \\ \text{Symétrie} \\ \text{Inégalité triangulaire} \end{array}$$

### Définition 25 : Distance associée à une norme

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé

La **distance**  $d$  associée à la norme  $\|\cdot\|$  est l'application :

$$(8.4) \quad \begin{aligned} d : E^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

### 8.1.4 Boules

### Définition 26 : Boule

Dans un espace vectoriel normé  $(E, N)$ , on définit les boules centrées en  $a$  et de rayon  $r$

**Boule ouverte** de rayon  $r$  centrée en  $a$  :  $\{x \in E \mid N(x - a) < r\}$   
**Boule fermée** de rayon  $r$  centrée en  $a$  :  $\{x \in E \mid N(x - a) \leq r\}$   
**Sphère** de rayon  $r$  centrée en  $a$  :  $\{x \in E \mid N(x - a) = r\}$

**Remarque :** Une boule n'est pas forcément une "boule" au sens géométrique du terme, puisque leur définition dépend de la norme. Par exemple, une boule en norme 3 est un cube.

### 8.1.5 Parties, suites, fonctions bornées

#### Définition 27 : Partie bornée

Une partie  $A$  de  $E$  est dite **bornée** s'il existe une boule  $B(a, r)$  la contenant :

$$(8.5) \quad \exists(a, r), A \subset B(a, r)$$

#### Théorème 27.1 : CNS d'une partie bornée

Une partie  $A$  de  $E$  est **bornée** si et seulement si il existe un réel  $M$  tel que :

$$(8.6) \quad \forall x \in A, \|x\| \leq M$$

**(ATTENTION)** Le caractère borné d'une partie dépend de la norme. Il peut donc arriver qu'une partie soit bornée pour une norme et pas pour une autre.

#### Définition 28 : Application bornée

Une application  $f : X \rightarrow E$  est dite **bornée** si l'ensemble  $\{f(x), x \in X\}$  est borné.

### 8.1.6 Produit scalaire

#### Définition 29 : Produit scalaire

Le **produit scalaire** est défini comme suit :

- (i)  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) > 0$  (définie positive)
- (ii)  $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  (symétrie)
- (iii)  $\forall x \in E, \underline{y \mapsto \varphi(x, y)}$  est linéaire (linéaire à droite)

On peut associer un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  à un espace vectoriel  $E$ . L'espace  $(E, (\cdot | \cdot))$  est appelé **espace préhilbertien**.

**Remarque :** La symétrie et la linéarité impliquent la linéarité à gauche, donc la bilinéarité du produit scalaire.

#### Théorème 29.1 : Continuité du produit scalaire

Le produit scalaire est une application bilinéaire continue de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Théorème 29.2 : Norme associée**

$x \mapsto \sqrt{(x|x)}$  définit une norme sur  $E$ . On la note  $\|x\|$ , et  $\|x\|^2 = (x|x)$ .

**Théorème 29.3 : Inégalité CAUCHY-SCHWARZ**

$$(8.7a) \quad |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \times \sqrt{(y|y)}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$(8.7b) \quad |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si  $(x, y)$  est une famille liée.

**8.1.7 Normes usuelles****Théorème 29.4 : Normes sur  $\mathbb{K}^n$** 

Soit  $x = (x_n) \in \mathbb{K}^n$ . Les applications suivantes sont des normes sur  $\mathbb{K}^n$  :

$$(8.8a) \quad \|\cdot\|_1 : x \mapsto \sum |x_i|$$

$$(8.8b) \quad \|\cdot\|_2 : x \mapsto \sqrt{\sum |x_i|^2}$$

$$(8.8c) \quad \|\cdot\|_\infty : x \mapsto \max_{i \in [1, n]} |x_i|$$

**Théorème 29.5 : Normes sur  $\mathcal{C}^0$** 

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ . Les applications suivantes sont des normes sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  :

$$(8.9a) \quad \|\cdot\|_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt \quad (\text{Norme de la convergence en moyenne})$$

$$(8.9b) \quad \|\cdot\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad (\text{Norme de la convergence en moyenne quadratique})$$

$$(8.9c) \quad \|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \quad (\text{Norme de la convergence uniforme})$$

**8.1.8 Produit fini d'espaces vectoriels normés****Théorème 29.6 : Norme sur un produit d'espaces vectoriels normés**

Soient  $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$  des espaces vectoriels normés.

(8.10)

L'application :

$$\left\{ \begin{array}{ll} N : E_1 \times \cdots \times E_n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} N_i(x_i) \end{array} \right.$$

est une norme sur  $E_1 \times \cdots \times E_n$ .

## 8.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

### Définition 30 : Convergence d'une suite

On dit que la suite des  $(x_n)_n$  converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(8.11)

- (i)  $\exists l \in E$  tel que  $(N(x_n - l)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- (ii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$  tel que  $(n \geq n_0 \implies N(x_n - l) < \varepsilon)$
- (iii)  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$  tel que  $(n \geq n_0 \implies x_n \in B(l, \varepsilon))$

(ATTENTION)

Une suite peut converger pour une norme et diverger pour une autre.

#### Propriétés

- Toute suite convergente est bornée
- La limite  $l$  introduite précédemment est unique.

### Théorème 30.1 : Suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé produit  $E = E_1 \times \cdots \times E_n$  converge si et seulement si chacune des suites composantes converge dans leur espace  $E_i$  respectif.

**Preuve 30.1.1** On utilise la norme définie au théorème 29.6 page 44.

### Théorème 30.2

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérences diverge.

## 8.3 Comparaison des normes

### Définition 31 : Normes équivalentes

On dit que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si

(8.12)

$$\exists (c, C) \in \mathbb{R}^{+2}, \forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$

### Théorème 31.1 : Dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

## 8.4 Topologie d'un espace normé

Voici plusieurs définitions utiles à l'étude d'espaces vectoriels normés :

### Définition 32 : Ouvert

Une partie  $\mathcal{O}$  de  $E$  est un **ouvert** si, pour tout élément  $x$  de  $\mathcal{O}$ , il existe une boule centrée en  $x$  incluse dans  $\mathcal{O}$  (cf. FIGURE 8.1) :

$$(8.13) \quad \forall x \in \mathcal{O}, \quad \exists r > 0, \quad \forall y \in E, \quad \|y - x\| \leq r \implies y \in \mathcal{O}$$

### Définition 33 : Voisinage

On appelle **voisinage** d'un point  $x$ , et on note  $\mathcal{V}(x)$ , toute partie  $V$  de  $E$  qui contient une boule ouverte de centre  $x$  :

$$(8.14) \quad V \in \mathcal{V}(x) \text{ si } \exists r > 0, \forall y \in E, \quad \|y - x\| < r \implies y \in V$$

### Définition 34 : Fermé

Un espace vectoriel  $F$  est dit **fermé** si son complémentaire  $\overline{F}$  est un ouvert

Pour différencier un ouvert d'un fermé, prenons le schéma ci-contre :

La partie en **rouge** est un ouvert noté  $O$ , celle en **bleue** est un fermé noté  $F$ .

En effet : il n'existe aucun disque centré en  $y \in O + F$  inclus dans la partie  $O + F$ , donc  $O + F$  n'est pas un ouvert. Par contre, pour tout point  $x \in O$ , on peut trouver une boule incluse dans  $O$ .

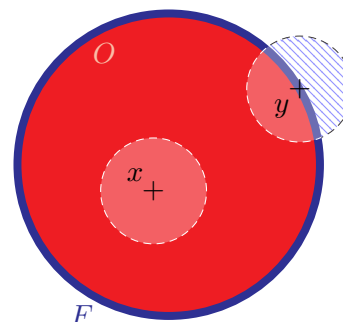


FIGURE 8.1 – Ouvert / Fermé

### Théorème 34.1 : Caractérisation séquentielle d'un fermé

$F \subset E$  est un **fermé ssi** toute suite convergente de  $F$  a sa limite dans  $F$

---

**Définition 35 : Point adhérent**

---

Un point  $x \in E$  est dit **adhérent** à  $A$  si tout voisinage de  $x$  rencontre  $A$  :

(8.15)  $\forall V \in \mathcal{V}(x), \quad V \cap A \neq \emptyset$

Autrement dit, toute boule ouverte de centre  $x$  contient au moins un élément de  $A$  :

$$(8.16) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad \|a - x\| < \varepsilon$$

### Définition 36 : Point intérieur

Un point  $x$  de  $E$  est dit **intérieur** à  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $x$ , c'est à dire s'il existe une boule ouverte de centre  $x$  contenue dans  $A$  :

$$(8.17) \quad \exists \varepsilon > 0, \forall y \in E, \quad \|y - x\| < \varepsilon \implies y \in A$$

Reformuler sous forme d'un théorème

### Théorème 36.1 : Intérieur, Adhérence

L'**intérieur** de  $B$ , noté  $\overset{\circ}{B}$ , est la réunion des parties ouvertes contenues dans  $B$ .  
L'**adhérence** de  $A$ , notée  $\overline{A}$  est l'intersection des parties fermées contenant  $A$ .

### Propriétés

- $A$  fermé  $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- $\underbrace{\text{Fr}(A)}_{\text{frontière}}$  est un fermé
- $\bigcup_{\text{finie}} \text{fermés} = \text{fermé}$
- $\bigcup \text{ouverts} = \text{ouvert}$
- $\bigcap \text{fermés} = \text{fermé}$
- $\bigcap_{\text{finie}} \text{ouverts} = \text{ouvert}$

### Définition 37 : Dense

On dit qu'une partie  $D$  est dense dans  $A$  si  $A \subset \overline{D}$ .



### Théorème 37.1

Un **complet**  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est **fermé**.

La réciproque (*Les parties complètes sont les parties fermées*) est vraie si  $E$  est un espace de BANACH.

## 8.5 Caractérisations séquentielles

Disperser cette section

### Théorème 37.2 : Caractérisation séquentielle des points adhérents

$x$  est adhérent à  $A$  **si et seulement si** il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

### Théorème 37.3 : Caractérisation séquentielle de la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \forall (x_n)_n \xrightarrow{+\infty} a, \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

### Théorème 37.4 : Caractérisation séquentielle de la continuité

$f$  est continue en  $a$  **si et seulement si**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , et :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \forall (x_n)_n \xrightarrow{+\infty} a, \quad f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$$

## 8.6 Applications linéaires continues

### Définition 38 : Continuité uniforme

On dit que  $f : E \rightarrow F$  est **uniformément continue** sur  $A \in E$  si :

$$(8.18) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in A^2, \|y - x\| < \alpha \implies \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$$

### Théorème 38.1 : Caractérisation de la continuité d'une application linéaire

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire continue. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est continue sur  $E$
- 1.  $f$  est continue en  $0_E$
- 2.  $f$  est bornée sur la boule unité fermée

3.  $\exists K \in \mathbb{R}^+, \|f(x)\| \leq K\|x\|$
4.  $f$  est lipschitzienne sur  $E$
5.  $f$  est uniformément continue

### Théorème 38.2 : Continuité en dimension finie

Toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue si  $E$  est de dimension finie.

### Théorème 38.3 : Continuité d'une application multilinéaire

Une application multilinéaire  $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$  est continue sur  $E_1 \times \cdots \times E_n$  si et seulement si :

$$(8.19) \quad \exists K \in \mathbb{R}^+, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) \leq K\|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

## 8.7 Complets

### Définition 39 : Complet

$A$  est un **complet** si toute suite de Cauchy  $(c_n)_n \in A$  admet une limite  $l \in A$   
CÀD si toute suite de Cauchy est convergente

**Remarque :** Intuitivement, un espace est complet s'il n'a pas de « trou ».  $\mathbb{Q}$  n'est pas complet, car  $\sqrt{2}$  n'est pas dans  $\mathbb{Q}$ .

### Définition 40 : Espace de BANACH

Un **espace de BANACH** est un espace-vectoriel normé et complet.

## 8.8 Parties compactes d'un espace normé

### Théorème 40.1 : BOLZANO-WEIERSTRASS

Toute suite réelle bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Par extension : toute suite bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie possède au moins une valeur d'adhérence.

On va utiliser cette propriété pour définir un compact :

### Définition 41 : Compact

$A$  est un **compact** si toute suite d'éléments  $(x_n)_n \in A$  a au moins une valeur d'adhérence  
CÀD on peut extraire de  $(x_n)_n$  une suite  $(x_{\varphi(n)})_n$  qui converge dans  $A$

### Théorème 41.1

Soit  $E$  un espace vectoriel. Les parties compactes de  $E$  sont fermées et bornées.

### Théorème 41.2 : Compacts en dimension finie

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

Une partie de  $E$  est compacte si et seulement si elle est fermée bornée.

### Théorème 41.3

Toute partie fermée d'un compact est compact

### Théorème 41.4

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit  $A$  un compact de  $E$ .

Une suite d'éléments de  $A$  converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence :

(8.20)

$$\forall (x_n)_n \in A, x_n \text{ converge} \Leftrightarrow \exists ! l, x_n \rightarrow l$$

## 8.9 Applications continues sur une partie compacte

### Théorème 41.5 : Image d'une partie compacte

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . Soit  $F$  un espace vectoriel normé.

Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$ .

Si  $f$  est continue, l'image de tout compact de  $A$  est un compact de  $F$ .

### Théorème 41.6

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit une application  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue, alors elle est bornée et atteint ses bornes.

### Théorème 41.7 : Théorème de HEINE

Si  $(E, N)$  et  $(F, N)$  sont des espaces vectoriels normés,  $A$  une partie **compacte** de  $E$ , si  $f \in \mathcal{C}(A, F)$ , alors  $f$  est **uniformément continue**.

## 8.10 Connexité par arcs

### 8.10.1 Convexité

Définition 42 : Convexe

Un ensemble  $E$  est **convexe** si :

$$(8.21) \quad \forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], \boxed{tx + (1 - t)y \in E}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

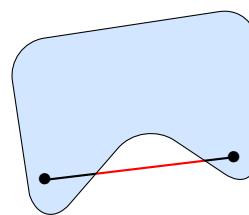


FIGURE 8.2 – Un ensemble non convexe

### Définition 43 : Fonction convexe

Une fonction  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  est dite convexe si :

$$(8.22) \quad \forall (a, b) \in I^2, \forall t \in ]0, 1[, \boxed{f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)}$$

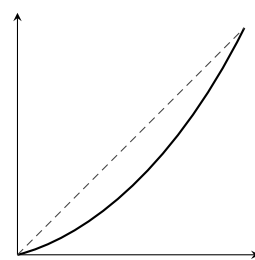


FIGURE 8.3 – Une fonction convexe

### Théorème 43.1 : Convexe dans $\mathbb{R}$

$I$  de  $\mathbb{R}$  est convexe si et seulement si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$

### 8.10.2 Connexité

#### Définition 44 : Connexe par arcs

Une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  est **connexe par arcs** si, pour tous points  $a$  et  $b$  de  $E$ , il existe une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow E$  continue telle que

$$(8.23) \quad \begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \\ f([0, 1]) \subset A \end{cases}$$

### Théorème 44.1 : Relation d'équivalence

« Il existe un chemin continu d'un point  $x$  à un point  $y$  » est une relation d'équivalence sur une partie  $A$  de  $E$ .

Les **composantes connexes** sont les classes d'équivalences de  $A$ .

**Théorème 44.2 : Connexe dans  $\mathbb{R}$**

$A$  non vide de  $\mathbb{R}$  est connexe par arcs si et seulement si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$

**Théorème 44.3 : Image continue d'une partie connexe**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Soit l'application  $f : A \subset E \rightarrow F$ .

Si  $f$  est continue, alors l'image de toute partie connexe par arcs est connexe par arcs dans  $F$ .

**Théorème 44.4 : Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soit  $A$  une partie connexe par arcs de  $E$ .

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue qui atteint  $(c, d) \in \mathbb{R}$ . Alors  $f$  atteint toute valeur  $f(x) \in [c, d]$ .

## Chapitre 9

# Espaces Préhilbertiens réels

Dans cette section, on se placera dans  $\mathbb{R}$ .

### Méthode

#### Définitions rapides

**Produit Scalaire** *cf.* définition 29 page 43

**Éléments orthogonaux**  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $(x|y) = 0$

**Famille orthogonale**  $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$

**Distance de  $x$  à une partie  $F$**   $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

### 9.1 Orthogonalité

#### Définition 45 : Éléments orthogonaux

Deux éléments  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $(x|y) = 0$

#### Théorème 45.1 : Pythagore

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille d'éléments de  $E$  deux à deux orthogonaux, alors

$$(9.1) \quad \left\| \sum_{i=0}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^n \|x_i\|^2$$

(ATTENTION)

Ce sont bien des normes car  $x_i$  au carré n'existe pas (qu'est-ce que le produit de deux vecteurs ?), du coup on utilise  $\|\cdot\|^2 = (\cdot|\cdot)$

**Preuve 45.1.1** On procède par récurrence. Avec une famille à deux éléments :

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

Puisque  $x_1$  et  $x_2$  sont orthogonaux par hypothèse, on obtient :

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

### Théorème 45.2 : Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT

Pour toute base de  $(e_i)$ , il existe une base  $(\varepsilon_i)$  telle que :

$$(9.2) \quad \begin{cases} (\varepsilon_i) \text{ est une base orthonormée} \\ \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\ (e_i|\varepsilon_i) > 0 \end{cases}$$

On aura souvent recours à compléter une base  $(e_i)_k$  avec  $n - k$  vecteurs orthonormaux aux  $(\varepsilon_i)_k$  par le théorème de la base incomplète.

### Théorème 45.3 : Inégalité de BESSEL

Si  $(e_i)$  est une base orthonormée :  $\boxed{\sum_i (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2}$

## 9.2 Automorphismes orthogonaux

$u$  est un endomorphisme, donc il est linéaire.

### Définition 46

- i.  $u$  un endomorphisme, il existe un unique endomorphisme  $u^*$  tel que

$$\forall (x, y) \in E, (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

$u^*$  est l'**adjoint** de  $u$ .

- ii.  $u$  est **autoadjoint** (symétrique) si  $u^* = u$

- iii.  $u$  est un **automorphisme orthogonal** si  $u^* = u^{-1}$ . On note  $u \in \mathcal{O}(E)$

#### Propriétés

- i. Si  $M_{\mathcal{B}}(u) = A$ , alors  $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t A$

- ii.  $\text{Ker}(u^*) = [\text{Im}(u)]^\perp$

- iii.  $\text{Im}(u^*) = [\text{Ker}(u)]^\perp$

- iv.  $\chi_u = \chi_{u^*}$

$$v. (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

### Théorème 46.1 : Caractérisation d'un automorphisme orthogonal

$u$  est un automorphisme orthogonal si les assertions suivantes (équivalentes) sont vérifiées :

- i.  $u$  conserve la norme
- ii.  $u$  conserve le produit scalaire
- iii.  $u(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$
- iv.  $\forall \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}, \exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$  telle que  $u(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$
- v.  $\exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$  telle que  $\begin{cases} U^t U = I_n \\ \text{ou} \\ {}^t U U = I_n \end{cases}$  où  $U = M_{\mathcal{B}}(u)$

### Théorème 46.2 : Théorème spectral

Tout **endomorphisme auto-adjoint** est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de  $u$ .

Toute **matrice symétrique réelle** est diagonalisable. On peut aussi dire :

$$(9.3) \quad \forall A \in S_n, \exists \begin{cases} P \in \mathcal{O}(n) \\ D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \end{cases} \text{ tel que } A = P D P^{-1} = P D^t P$$

## 9.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

### Définition 47 : Isométrie vectorielle d'un espace euclidien

Soit  $E$  un espace euclidien.

On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est une **isométrie vectorielle** si  $u$  est un endomorphisme qui conserve la norme :

$$(9.4) \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

### Théorème 47.1 : Bijectivité

Une isométrie vectorielle est bijective.

**Preuve 47.1.1** Une isométrie vectorielle est injective :

$$\begin{aligned} u(x) = 0 &\implies \|u(x)\| = 0 \\ &\implies \|x\| = \|u(x)\| = 0 \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

Puisque  $E$  est un espace euclidien, il est de dimension finie. Ainsi injectivité  $\Leftrightarrow$  bi-



jectivité, et  $u$  est bijective. □

**Théorème 47.2 : CNS avec le produit scalaire**

$u \in \mathcal{L}(E)$  est une isométrie vectorielle si et seulement si  $u$  conserve le produit scalaire :

(9.5) 
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|u(y)) = (x|y)$$

**Preuve 47.2.1** *Commençons par le sens « conserve le produit scalaire  $\implies$  isométrie vectorielle » :*

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x)|u(x))} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|$$

*Réciproquement, montrons que « conserve le produit scalaire  $\Leftarrow$  isométrie vectorielle ».*

*Si  $u$  est une isométrie vectorielle, d'après les identités de polarisation :*

$$\begin{aligned} (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= (x|y) \end{aligned}$$

*On a alors montré l'équivalence.* □

## Chapitre 10

# Espaces Préhilbertiens complexes

### 10.1 Structure Préhilbertienne complexe

On se place dans  $\mathbb{C}$  et on établit de nouveau le produit scalaire comme à la définition 29 page 43 du chapitre précédent. À une différence prêt, la symétrie est appelée **symétrie hermitienne**

#### Définition 48 : Produit scalaire

Le produit scalaire est défini comme suit :

- (i)  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) > 0$  (définie positive)
- (ii)  $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$  (symétrie hermitienne)
- (iii)  $\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire (linéaire à droite)

On peut associer un produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$  à un espace vectoriel  $E$ . L'espace  $(E, (\cdot|\cdot))$  est appelé **espace préhilbertien**.

### 10.2 Orthogonalité

#### Théorème 48.1 : Inégalité de BESSEL

Si  $(e_i)$  est une base orthonormée : 
$$\sum_i |(e_i|x)|^2 \leq N_2^2(x)$$

### 10.3 Séries de FOURIER

#### Méthode

#### Coefficients

**Exponentiels**  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt$

**Trigonométriques**

- $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt$
- $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) dt$

On note  $\mathcal{C}_{2\pi}$  l'espace vectoriel des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   **$2\pi$ -périodiques** et **continues** sur  $[0, 2\pi]$ .

On note  $\mathcal{CM}_{2\pi}$  l'espace vectoriel des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   **$2\pi$ -périodiques** et **continues par morceaux** sur  $[0, 2\pi]$ .

(ATTENTION)

Sur  $\mathcal{CM}_{2\pi}$ ,  $N_1, N_2$  et  $N_\infty$  ne sont plus des normes, mais elles fonctionnent toujours de la même manière

Cette sous-section se base sur le théorème suivant :

#### Théorème 48.2

Pour toute fonction dans  $\mathcal{CM}_{2\pi}$ , il existe une suite  $(f_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{C}_{2\pi}$  telle que

$$N_2(f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

L'objectif des séries de FOURIER est de « transposer » une fonction dans une base de  $\mathcal{C}_{2\pi}$ .

On prendra pour bases  $(e^{it}, e^{2it}, \dots, e^{int})$  ou  $(\cos(t), \cos(2t), \dots, \cos(nt))$  par exemple, et grâce à un produit scalaire, on obtient la décomposition de notre fonction dans la base. C'est ainsi qu'on définit les coefficients :

#### Définition 49 : Coefficients exponentiels

Pour une fonction  $f$  dans  $\mathcal{CM}_{2\pi}$  :

$$c_n(f) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in \cdot t} f(t) dt}_0$$

on est sur  $\mathcal{CM}_{2\pi}$

En effet :  $c_n(f) = (e_n | f)$  avec  $e_n = e^{int}$ . Or le produit scalaire pour des fonctions est  $(g | f) = \int_0^{2\pi} \overline{g(t)} f(t) dt$ , d'où  $(e_n | f) = \int_0^{2\pi} \overline{e^{int}} f(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt$

On aurait très bien pu intégrer sur  $[-\pi, \pi]$  au lieu de  $[0, 2\pi]$ . C'est ce qu'on fera plus tard avec les coefficients trigonométriques.

#### Propriétés

- $g : t \mapsto f(-t), c_n(g) = c_{-n}(f)$

- $f_a : t \mapsto f(t + a)$ ,  $c_n(f_a) = e^{ina} c_n(f)$

### Théorème 49.1 : Dérivée de $f$

$$c_n(f') = in c_n(f)$$

$$\text{d'où, par récurrence : } c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

### Définition 50 : Coefficients trigonométriques

Pour une fonction  $f$  dans  $\mathcal{CM}_{2\pi}$  :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) dt$$

Ici, c'est  $\frac{1}{\pi}$  en facteur, car  $N_2^2(\cos(n\bullet)) = \frac{1}{2}$

#### Propriétés

- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$  et  $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$
- Si  $f$  est paire, alors  $b_n = 0 \forall n$
- Si  $f$  est impaire, alors  $a_n = 0 \forall n$

En général, on utilisera ces coefficients si  $f$  présente une parité.

### Définition 51 : Série de FOURIER

On appelle **série de FOURIER** de  $f$  la série  $\sum u_n$  où 
$$\begin{cases} u_0 &= c_0(f) e_0 \\ u_n &= c_n(f) e_n + c_{-n}(f) e_{-n} \end{cases}$$
  
 $S_n(f)$  est appelée **somme partielle de rang  $n$  de la série de FOURIER**

### Théorème 51.1 : Inégalité de Bessel

Si  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ , alors :

$$\sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq N_2^2(f)$$

### Théorème 51.2 : Théorème de convergence PARSEVAL

Si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{CM}_{2\pi}$ , alors  $N_2(f - S_n(f))_n$  converge vers 0

Avec ce nouveau théorème, on trouve le cas d'égalité de l'inégalité de Bessel :

### Théorème 51.3 : Égalité de Parseval

Si  $f$  est une fonction de  $\mathcal{CM}_{2\pi}$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = N_2^2(f)$$

En réel, cette égalité devient :

$$N_2^2(f) = \left( \frac{a_0(f)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n^2(f) + b_n^2(f)]$$

### Théorème 51.4 : Calcul des Coefficients

Si on a la suite  $s_n$  telle que 
$$\begin{cases} s_n = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e_k \\ N_2(s_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{Z}, c_k(f) = \alpha_k$$

#### Preuve 51.4.1

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,  $|c_k(s_n - f)| \leq N_2(s_n - f)$ . Donc  $|c_k(f) - \alpha_k| \leq N_2(s_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , d'où, quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $c_n(f) = \alpha_n$ .

### Théorème 51.5 : Théorème de convergence normale

Si  $f$  est  $\mathcal{C}_{2\pi}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux <sup>a</sup>

alors sa série de FOURIER **converge normalement** et sa somme vaut  $f$   
sa somme partielle de sa série de FOURIER  $S_n$  **converge uniformément**

<sup>a</sup>.  $\mathcal{C}^1$  par morceaux c'est à dire que la dérivée est continue par morceaux, à ne pas confondre avec  $f \in \mathcal{CM}$

### Définition 52 : Noyau de DIRICHLET

On appelle **noyau de DIRICHLET**, et on note  $D_p(t)$  la somme : 
$$D_p(t) = \sum_{k=-p}^p e^{ikt}$$

### Théorème 52.1 : Noyau de DIRICHLET

Si  $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$  et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, alors sa série de FOURIER **converge simplement** sur  $\mathbb{R}$ .

**Sa somme** au point  $x$ , notée  $\tilde{f}(x)$  est égale à  $\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} [f(x+h) + f(x-h)]$ . Si  $f$  est **continue**, alors  $\tilde{f}(x) = f(x)$ .

Quatrième partie

*Analyse*

# Chapitre 11

## Séries numériques et vectorielles

### Méthode

#### Étude d'une série

Prenons le cas d'étude d'une série :  $\sum u_n$

1. Vérifier que  $\sum u_n$  est positive.

Si elle ne l'est pas, on peut prendre  $N(\sum u_n)$ . Dans  $\mathbb{R}$ , on prendra  $|\sum u_n|$ .

2. Utiliser un théorème de comparaison pour ramener à des séries facilement étudiables. On peut :
  - Trouver un équivalent (en utilisant des Développements Limités (DLs))
  - Trouver une domination en  $o(\dots)$  ou en  $O(\dots)$
  - Majorer/Minorer explicitement, mais c'est rare

### 11.1 Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

#### Définition 1

La **série**  $S$  de terme général  $u_n$  est la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où on définit  $S_n$  de manière suivante.

(11.1)

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^n \underbrace{u_k}_{\text{Terme général de la série}}}_{\text{Somme partielle}}$$

Suite des sommes partielles

On appelle **reste** d'ordre  $n$  de la série la différence  $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k$

### Définition 2 : Convergence d'une série

On dit que la série des  $u_n$  **converge** s'il existe  $l$  tel que  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existe.

Si la suite  $(u_n)_n$  ne converge pas vers 0, on dit que sa série  $S_n$  **diverge grossièrement**

### Théorème 2.1

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

(ATTENTION) La réciproque n'est pas souvent vraie. Exemple classique :  $\sum \frac{1}{n}$

### Théorème 2.2 : Théorème suite-série

La série  $S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k)$  converge **si et seulement si** la suite  $(a_n)$  converge.

#### 11.1.1 Convergence absolue

### Définition 3 : Convergence absolue

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $E$ .

La série  $\sum u_n$  de  $E$  est dite **absolument convergente** si la série des normes  $\sum \|u_n\|$  est convergente.

### Théorème 3.1

Convergence absolue  $\implies$  convergence.

#### 11.1.2 Série À Termes Positifs

### Définition 4 : Série À Termes Positifs

On appelle **Série À Termes Positifs (SATP)** toute série de terme général  $u_n$  réel telle que, à partir d'un certain rang,  $u_n \geq 0$ .

### Théorème 4.1 : Convergence des SATP

Si  $\sum u_n$  est une SATP, alors :

(11.2) 
$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n u_n \text{ est majorée}$$

## 11.2 Complément sur les séries numériques

### 11.2.1 Règle de d'ALEMBERT



### Lemme

Pour toute suite  $(u_n)$  strictement positive, s'il existe une suite  $(\alpha_n)$  strictement positive telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ , alors

$$(11.3) \quad u_n \underset{+\infty}{=} O(\alpha_n)$$

### Théorème 4.2 : Règle de d'ALEMBERT

Soit  $\sum u_n$  une série d'éléments de  $E$ , telle que (à partir d'un certain rang)  $u_n \neq 0$ .  
Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L}$  alors :

$$(11.4) \quad \begin{cases} \text{Si } L > 1, \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \\ \text{Si } L < 1, \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$$

Ce théorème est peu utile car il est « trop vrai », mais on l'introduit principalement en vue de l'étude des séries entières.

### 11.2.2 Séries alternées

#### Définition 5 : Série alternée

La série  $\sum u_n$  est une **série alternée** s'il existe  $(\alpha_n)$  une suite positive et  $\varepsilon \in \{-1; 1\}$  tels que  $u_n = \varepsilon(-1)^n \alpha_n$

### Théorème 5.1 : Théorème spécial des séries alternées (TSSA)

Si  $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|) \text{ est décroissante} \\ (|u_n|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{cases}$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $\forall n \geq 0, \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_n|$

(ATTENTION) Ne pas oublier les valeurs absolues pour l'étude des séries alternées.

### 11.2.3 Comparaison série intégrale

#### Théorème 5.2

Soit  $f$  telle que  $u_n = f(n)$ .

Si  $f$  est décroissante et continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , alors on peut encadrer :

$$(11.5a) \quad \int_{n-1}^n f(t)dt \geq f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)dt$$

(11.5b)

Si  $f$  est croissante et continue sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , alors on peut encadrer :

$$\int_{n-1}^n f(t)dt \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt$$

### Théorème 5.3 : Comparaison d'une série à une intégrale

Si  $f$  est une fonction continue par morceaux, **positive** et **décroissante** sur  $\mathbb{R}^+$ .

Notons  $w_n = \left( \int_{n-1}^n f \right) - f(n)$ . La série  $\sum w_n$  est une SATP convergente.

(11.6)

$$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \sum f(n) \text{ converge}$$

En cas de divergence,  $\int_0^n f \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum f(n)$

Si  $f$  est une fonction continue par morceaux, **positive**, **croissante** et majorée sur  $\mathbb{R}^+$ , alors la série de terme général  $\left( \int_n^{n+1} f \right) - f(n)$  est une SATP convergente.

## 11.2.4 Comparaison des SATP

### Théorème 5.4 : Théorème de comparaison des SATPs

Si on a deux suites  $u_n$  et  $v_n$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telles qu'on ait une des conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ u_n = o(v_n) \end{cases}, \text{ alors } \sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

$$u_n = O(v_n)$$

On a également la contraposée :  $\sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge}$

### Théorème 5.5 : 2<sup>e</sup> théorème de comparaison des SATPs

Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites positives.

Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $u_n$  et  $v_n$  sont de même nature.

### Théorème 5.6 : Somme des relations de comparaison (convergence)

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes à termes positifs.

Notons  $R_n$  et  $R'_n$  leurs restes respectifs d'ordre  $n$ .

- Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $R_n = O(R'_n)$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $R_n = o(R'_n)$ .
- Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $R_n \sim R'_n$ .

### Théorème 5.7 : Sommation des relations de comparaison (divergence)

Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries **divergentes** à termes positifs.  
Notons  $S_n$  et  $S'_n$  leurs sommes partielles respectives d'ordre  $n$ .

- Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $S_n = O(S'_n)$ .
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $S_n = o(S'_n)$ .
- Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $S_n \sim S'_n$ .

### Théorème 5.8 : CÉSARO

Si  $\sum \alpha_n$  est une SATP divergente, et que  $(\beta_k)$  est une suite complexe convergente vers  $\beta$ , alors la suite  $(S_n)$  de terme général :

$$S_n = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$$

(définie à partir d'un certain rang) converge vers  $\beta$ .

La moyenne de CÉSARO apparaît en prenant la suite  $\alpha_k = 1 \forall k$ , car alors  $\sum \alpha_k = n$  et :

$$S_n = \frac{\sum_{k=0}^n \beta_k}{n}$$

C'est la moyenne des termes de la suite  $\beta_k$ , et on sait qu'elle converge si  $\beta_k$  converge.

**Preuve 5.8.1** *L'idée est de séparer la somme en deux. Prenons  $\varepsilon > 0$ . Soit  $l$  la limite de la suite  $\beta_k$ .*

*Soit  $N$  tel que  $\forall n \geq N, |\beta_n - l| < \varepsilon$ . Alors :*

$$S_n - l = \frac{\sum_{k=0}^N \alpha_k (\beta_k - l)}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} + \frac{\sum_{k=N}^n \alpha_k (\beta_k - l)}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$$

*La somme allant jusqu'à  $N$  ne dépendant plus de  $n$  :*

$$S_n - l \leq \frac{\text{constante}}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} + \frac{\sum_{k=N}^n \alpha_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} \cdot \varepsilon$$

$$S_n - l \leq \frac{\text{constante}}{\pm\infty} + 1 \cdot \varepsilon$$

On a majoré par quelque chose d'aussi petit qu'on veut, et alors  $S_n$  converge  $\square$

### 11.3 Hors programme

Tous les théorèmes vus ici sont à démontrer.

#### Théorème 5.9 : Transformation d'ABEL

Soient deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . On note  $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ . Alors :

$$(11.7) \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i$$

On peut en déduire, si on a les conditions  $\begin{cases} \sum (a_i - a_{i+1}) \text{ CVA vers } 0 \\ B_n = \sum_{k=0}^n b_k \text{ est bornée} \end{cases}$ , que  $\sum a_k b_k$  converge.

**Preuve 5.9.1** On remarque que  $b_i = B_i - B_{i-1}$ , avec  $b_0 = B_0$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \end{aligned}$$

On change d'indice sur la deuxième somme, et comme  $b_0 = B_0$  :

$$\begin{aligned} &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \end{aligned}$$

## Chapitre 12

# Familles sommables de nombres complexes

### 12.1 Ensembles dénombrables

---

**Définition 6 : Ensemble fini**

On dit que  $E$  est un **ensemble fini** de cardinal  $n$  si  $E$  est en bijection avec  $\llbracket 0, n \rrbracket$

---

**Définition 7 : Equipotence**

Deux ensembles  $E$  et  $F$  sont dits **équipotents** (ou en bijection) s'il existe une application  $\varphi : E \rightarrow F$  telle que  $\varphi$  soit bijective.

---

**Définition 8 : Ensemble dénombrable**

On dit que  $E$  est un **ensemble dénombrable** s'il est équipotent à  $\mathbb{N}$

---

**Théorème 8.1**

Toute partie infinie de  $\mathbb{N}$  est dénombrable.

---

**Théorème 8.2**

Un ensemble est fini ou dénombrable (**au plus dénombrable**) si et seulement si il est équipotent à une partie de  $\mathbb{N}$

---

**Théorème 8.3**

L'ensemble  $\mathbb{N}^2$  est dénombrable.

**Preuve 8.3.1** On utilise la fonction de couplage de CANTOR :

$$(12.1) \quad f(p, q) = q + \sum_{i=0}^{p+q} i$$

On montre que cette fonction est bijective.

### Définition 9 : Produit cartésien

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

### Théorème 9.1

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Ainsi,  $\mathbb{Q}$  est dénombrable :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

### Théorème 9.2

L'ensemble  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

## 12.2 Familles sommables

### 12.2.1 Pour les réels positifs

#### Définition 10 : Famille sommable de réels positifs

Soit une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de nombres réels positifs. Une famille est **sommable** s'il existe un réel  $M$  tel que, pour toute partie finie  $J \subset I$ , on ait :

$$(12.2a) \quad \sum_{i \in J} u_i \leq M$$

On définit la somme de cette famille par

$$(12.2b) \quad \sum_{i \in I} u_i = \sup_J \sum_{n \in J} u_n$$

### Théorème 10.1 : Sommation par paquets

Soit une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de nombres réels positifs.

Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition dénombrable de  $I$ .

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si :

- la sous-famille  $(u_i)_{i \in I_n}$  est sommable pour tout  $n$
- la série  $\sum \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$  est convergente

Dans ce cas :

$$(12.3) \quad \sum_{n \in I} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

### Théorème 10.2 : Sommation triangulaire

Soit  $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de réels positifs.

$$(12.4) \quad \begin{aligned} (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} &\Leftrightarrow \sum_n \left( \sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \text{ converge} \\ \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n \left( \sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \end{aligned}$$

## 12.2.2 Pour les réels et les complexes

### Définition 11 : Famille sommable

Une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  est **sommable** si la famille de réels positifs  $(|u_i|)_{i \in I}$  est sommable.

### Théorème 11.1

$$(u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \sum_{i \in I} u_i \text{ absolument convergente}$$

### Théorème 11.2 : Sommation par paquets

Soit une famille  $(u_i)_{i \in I}$  de nombres réels positifs.

Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition **dénombrable** de  $I$ .

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable **si et seulement si** :

- la sous-famille  $(u_i)_{i \in I_n}$  est sommable pour tout  $n$
- la série  $\sum_n \left( \sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$  est convergente

Dans ce cas :

$$(12.5) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right) = \sum_{n \in I} u_n$$

### Théorème 11.3

Soient  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(b_q)_{q \in \mathbb{N}}$  deux familles sommables. Alors la famille  $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et

$$(12.6) \quad \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \left( \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \right) \left( \sum_{q \in \mathbb{N}} b_q \right)$$

**Preuve 11.3.1** *Ce théorème est issu du théorème de FUBINI (cf. théorème 14.4 page 76) : les deux suites  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(b_q)_{q \in \mathbb{N}}$  sont sommables, donc leurs séries convergent absolument, et les hypothèses du théorème de FUBINI sont alors vérifiées.*

### Théorème 11.4 : Sommation triangulaire

Soit  $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .

$$(12.7) \quad \begin{aligned} (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} &\Leftrightarrow \sum_n \left( \sum_{p+q=n} |u_{p,q}| \right) \text{ converge} \\ \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n \left( \sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \end{aligned}$$

(ATTENTION) Faire attention à bien mettre des modules partout

### Définition 12 : Produit de CAUCHY

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries de nombres complexes. On appelle **produit de CAUCHY** des séries la série  $\sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

### Théorème 12.1

Avec les notations précédentes, si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergente, alors leur produit de CAUCHY est une série absolument convergente et :

$$(12.8) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_{n-k} = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right)$$



# Chapitre 13

## Suites de fonctions

### Méthode

En général, pour la convergence simple, on **fixe**  $x$ . Pour la convergence uniforme, puisqu'on cherche la norme  $N_\infty$ , on **dérive**  $f_n(x)$  pour étudier ses variations.

### 13.1 Convergence simple, convergence uniforme

#### Définition 13

Définitions simplifiées des différents types de convergence

(13.1)

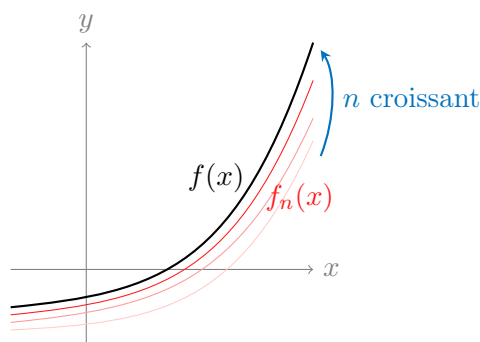
La suite des  $(f_n)$  converge **simplement** vers  $f \Leftrightarrow \forall x, (f_n(x))_n \rightarrow f(x)$

La suite des  $(f_n)$  converge **uniformément** vers  $f \Leftrightarrow N_\infty^A \left( \underbrace{f_n - f}_{\in B(A, F)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

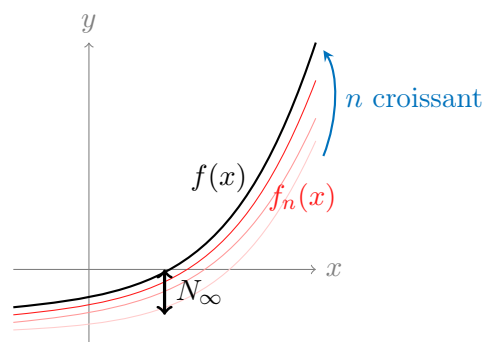
$(f_n(x))_n$  vérifie le **critère de Cauchy de CU**  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mid n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow N_\infty^A((f_n - f)) < \varepsilon$

Le critère de Cauchy de convergence uniforme est équivalent à la convergence uniforme.

Critère de Cauchy  $\Leftrightarrow$  Convergence Uniforme



(a) Convergence Simple



(b) Convergence Uniforme

FIGURE 13.1 – Les différents types de convergence de fonction

### Théorème 13.1

$(f_n)$  Converge Uniformément (CVU) vers  $f \implies (f_n)$  Converge Simplement (CVS) vers  $f$

### Propriétés de la simple convergence

- $\begin{cases} f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (f_n(x))_n \text{ est croissante} \Leftrightarrow f \text{ est croissante} \\ (f_n(x))_n \xrightarrow[x \in A]{CVS} f \end{cases}$
- (autres propriétés analogues de  $f_n$  appliquées à  $f$  par CVS)

## 13.2 Continuité, double limite

### Théorème 13.2

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues en un point  $a \in A$ . Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur un voisinage de  $a$ , alors  $u$  est continue en  $a$ .

Le corollaire de ce théorème est alors :

### Théorème 13.3 : Continuité de la limite uniforme

Toute limite uniforme de fonctions continues sur  $A$  est continue sur  $A$ .

### Théorème 13.4 : Théorème de la double limite

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$  définie sur  $A$ .

Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ .

Si, pour tout  $n$ ,  $f_n$  admet une limite  $l_n$  en  $a$  et converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ , alors  $(l_n)$  admet une limite  $l$  et :

$$(13.2a) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = l$$

$$(13.2b) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

On retiendra surtout :

$$(13.2c) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

### Théorème 13.5 : Convergence par changement de base

Si  $(f_n(x))_n$  converge simplement ou uniformément ssi  $(f_{n,i}(x))_n$  converge de la même manière dans la base  $\mathcal{B} = (e_i)$

**Théorème 13.6 : Conditions nécessaire de convergence uniforme**

$$\left. \begin{array}{l} (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\text{CVU}} f \\ (f_n(x))_n \text{ est bornée} \end{array} \right\} \implies f \text{ est uniformément convergente bornée}$$

**Théorème 13.7 : Conditions nécessaire de Non-Convergence Uniforme**

Il suffit que :  $\exists (x_n)$  tel que  $f(x_n) \not\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

On notera les fonctions  $f$  dont la dérivée est continue de  $A \rightarrow B$  comme appartenant à l'ensemble  $\mathcal{C}(A, B)$

**Théorème 13.8 : Continuité par convergence**

$$\left. \begin{array}{l} (f_n(x))_n \text{ converge uniformément vers } f \\ (f_n(x))_n \text{ continue en } a \end{array} \right\} \implies f \text{ est continue en } a$$

$$\left. \begin{array}{l} (f_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \\ (f_n(x))_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout compact } \subset A \end{array} \right\} \implies f \in \mathcal{C}(A, F)$$

**Théorème 13.9 : Théorème d'approximation de WEIERSTRASS**

Toute fonction  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$  est **limite uniforme** d'une suite  $(\mathcal{P}_n(X))_n$  de fonctions polynômes.

Le même théorème existe pour les fonctions (T-périodiques à valeurs complexes) limites d'une suite de polynômes trigonométriques.

### 13.3 Convergence des Séries

**Définition 14**

Définitions simplifiées des convergences de Séries de fonctions :

$$(13.3) \quad \begin{array}{ll} \sum f_n \text{ converge simplement} & \text{si } \forall x \in A, \text{ la série } \sum f_n(x) \text{ converge} \\ \sum f_n \text{ converge uniformément} & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} x \in A, \text{ la série } (S_n) = \sum_0^n f_n(x) \\ \text{converge uniformément} \\ x \in A, \text{ la série } (R_n) = \sum_n^\infty f_n(x) \\ \text{converge uniformément} \end{array} \right. \\ \sum f_n \text{ converge normalement} & \text{si } \sum N_\infty(f_n) \text{ converge} \end{array}$$

Pour les définitions de convergence de fonctions, se référer aux définitions 13.1.

On retrouve certaines propriétés des fonctions :

#### Théorème 14.1

$$\left. (u_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ est continue sur } A$$

#### Théorème 14.2 : Théorème de la double limite

Si  $\sum f_n$  converge uniformément, et qu'il existe  $(v_n)$  telle que  $v_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ , alors  $\sum v_n$  converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)}_{=v_n} = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x))$$

**Preuve 14.2.1** C'est le théorème 13.4 de la double limite de suites de fonctions appliqué aux séries

### 13.4 Propriétés de la somme

#### Théorème 14.3 : Intégration sous le signe somme

$$(13.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_k \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C}) \text{ et intégrable sur } I \\ S \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C}) \\ \sum u_n \rightarrow S \\ \boxed{\sum |u_n| \text{ converge}} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} S \text{ est intégrable, et} \\ \int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_I u_n \right) \end{array}$$

### 13.5 Séries doubles

#### Théorème 14.4 : Intersion des sommations de FUBINI

$$(13.5) \quad \text{Si } \left\{ \begin{array}{l} (u_{p,q})_{p,q} \text{ est une suite double complexe} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \left( \sum |u_{p,q}| \right)_{p,q} \text{ converge} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \sum \left( \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) \text{ converge} \end{array} \right. , \text{ alors :}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$$

Avec les deux séries  $\left(\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_q$  et  $\left(\sum \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_p$  qui convergent

# Chapitre 14

## Séries Entières

Certains objets mathématiques ont des développements de Taylor exacts. C'est le cas notamment des polynômes, qui sont déjà des développements de Taylor. Les séries géométriques par exemple ont également un développement de Taylor exact : pour la série de terme général  $q^k$ , on a  $\sum_0^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$ . Sinon, la plupart du temps, le développement de Taylor est précis jusqu'à un dernier terme qu'on ne peut calculer, mais qu'on peut quand même approximer en  $o(\dots)$  ou en  $O(\dots)$

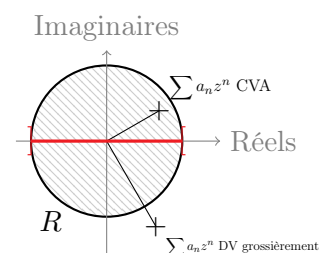
### 14.1 Généralités

#### Définition 15

Soit  $(a_n)_n$  une suite de nombres complexes. On appelle **série entière** de la variable complexe  $z$  la série de fonctions  $\sum a_n z^n$ .

Le **rayon de convergence** est la borne supérieure de  $I = \{z \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| z^n \text{ converge}\}$ . C'est en fait la valeur maximale de  $z$  pour laquelle la série converge.

Pour calculer le rayon de convergence, il importera peu de l'étudier pour les valeurs absolues, les nombres imaginaires, etc... car c'est seulement un rayon. Dans les réels, on appellera l'intervalle  $]-R, R[$  l'intervalle ouvert de convergence.



#### Lemme d'ABEL

S'il existe  $\rho$  tel que la suite  $(a_n \rho^n)$  soit bornée, alors

$$(14.1) \quad \forall z < \rho, |a_n z^n| \leq M \left( \frac{|z|}{\rho} \right)^n \quad \text{et} \quad \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

#### 14.1.1 Rayon de Convergence

### Théorème 15.1 : Relations de comparaisons

Si  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ , alors :

- i. Si  $|a_n| \leq |b_n|$ , alors  $R_a \geq R_b$
- ii. Si  $a_n = O(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$
- iii. Si  $a_n = o(b_n)$ , alors  $R_a \geq R_b$
- iv. Si  $a_n \sim b_n$ , alors  $R_a = R_b$

### Théorème 15.2

Sur le disque ouvert  $D_R$  de convergence  $] - R, R[$ , la série entière  $\sum a_n z^n$  converge **absolument**.

### Théorème 15.3

Sur le disque ouvert  $D_R$  de convergence  $] - R, R[$ , la série entière  $\sum a_n z^n$  converge **uniformément** et sa somme est une fonction **continue**.

### Théorème 15.4

Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.

Pour déterminer le rayon, il existe plusieurs méthodes, mais on se servira principalement du théorème suivant étant une conséquence de la règle de d'ALEMBERT :

#### 14.1.2 D'ALEMBERT

### Théorème 15.5 : Règle de d'ALEMBERT

Pour la série entière  $\sum a_n z^k$  non nulle à partir d'un certain rang, et qu'il existe  $l$  tel que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \quad \text{alors} \quad l = \frac{1}{R}$$

La réciproque est fautive : si on connaît  $R$ , on n'a pas  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Sinon, on a aussi  $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

**Preuve 15.5.1** Il suffit d'appliquer d'Alembert (cf. théorème 4.2 page 65) à la série de terme général  $|a_n z^k|$  (qui est une SATP) qu'on prend à partir d'un

certain rang tel que  $a_n \neq 0$ . Donc il existe une limite  $l$  telle que

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l|z|$$

Donc  $|a_n z^n|$  converge si  $l|z| < 1$ , et diverge si  $l|z| > 1$ .

Puisque toute série entière de rayon de convergence  $R > 0$  est absolument convergente dans son disque ouvert de convergence.

(ATTENTION)

En général, il vaut mieux utiliser le théorème original (théorème 4.2 page 65). En effet, ce théorème ne s'applique que pour des séries entières fonctions de  $z^n$ . Pour une série entière du type  $\sum a_n z^{n^2}$ , il n'est plus valable !

## 14.2 Série entière d'une variable réelle

### 14.2.1 Primitivation

#### Théorème 15.6

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Sa primitive est :

$$(14.2) \quad \forall z \in ]-R; R[, \quad \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Et la série entière  $\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$  a le même rayon de convergence  $R$ .

### 14.2.2 Dérivation

#### Théorème 15.7

La somme d'une série entière est  $C^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence.

#### Théorème 15.8 : Dérivation terme à terme

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Sa dérivée est :

$$(14.3) \quad \forall z \in ]-R; R[, \quad \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Et la série entière  $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$  a le même rayon de convergence.

(ATTENTION)

Le théorème de dérivation n'est valable qu'à l'intérieur du disque de convergence !



## 14.3 Fonctions développables en série entière

### Définition 16 : Fonction développable en série entière

$f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  admet un DSE en 0 s'il existe une série entière  $\sum a_n z^n$  telle que

(14.4)  $\forall z \in V, f(z) = \sum a_n z^n$

Cette boule ouverte de centre 0 est incluse dans le disque de convergence du Développement en Série Entière (DSE) :  $V \subset ]-R; R[$ .

### Théorème 16.1 : Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) d'un DSE

$$f : \mathbb{R} \rightarrow K \text{ est un DSE en } 0 \Leftrightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

## 14.4 Propriétés de la somme

### Continuité

#### Théorème 16.2

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence  $R$

### Dérivabilité

#### Théorème 16.3 : Dérivées successives

Les dérivées successives d'une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  ont toutes le même rayon de convergence  $R$

#### Théorème 16.4

Pour des séries entières avec  $R = \min(R_a, R_b)$ , alors :

$$\forall x \in ]-R, R[, \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$$

## Chapitre 15

# Calcul Différentiel et Intégral

### 15.1 Dérivation

#### Définition 17 : Dérivabilité

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $a \in I$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe.

On notera  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des applications dérivables de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Théorème 17.1

$f$  dérivable  $\Leftrightarrow \exists l$  tel que  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x - a)l + (x - a)\varepsilon(x)$   
Alors,  $l$  est la dérivée en  $a$  de  $f$

#### Propriétés

**Continuité**  $f$  dérivable  $\Rightarrow f$  continue

**Linéarité**  $(f + \alpha g)' = f' + \alpha g'$

**Dérivées usuelles**

**Application linéaire**  $u$  linéaire,  $f$  dérivable ;  $(u \circ f)'(x) = u \circ f'(x)$

**Application multi-linéaire**  $\varphi$  une application  $n$ -linéaire ;

$$\left( \varphi(f_1, \dots, f_n) \right)'(x) = \sum_{i=0}^n \varphi \left( f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f'_i(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x) \right)$$

**Quotient**  $u$  et  $v$  dérivables ;  $\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

**Composition**  $f$  et  $g$  dérivables ;  $(f \circ g)' = f' \circ g'(f)$

#### Définition 18 : Application $\mathcal{C}^1$

$f \in \mathcal{C}^1(E, F)$  si l'application  $f' : a \mapsto f'(a)$  existe et est continue.

### Définition 19 : Dérivée $k$ -ième

On définit récursivement la dérivée  $k$ -ième  $f^{(k)}$  :

$$(15.1) \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

### Définition 20 : Application de classe $\mathcal{C}^k$

$f$  est  $\mathcal{C}^k$  si  $f$  est  $k$  fois dérivable et si  $f^{(k)}$  est continue.

### Théorème 20.1 : LEIBNIZ

Soit  $\varphi$  une application bilinéaire, alors :

$$(Leibniz) \quad \varphi^{(n)}(f, g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

## 15.2 Intégration

### Inégalité de la moyenne

#### Théorème 20.2 : Cas réel

Si  $f$  est **continue** sur un intervalle  $[a, b]$  et qu'il existe  $m$  et  $M$  tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors

$$(15.2) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

## 15.3 Primitive

### Définition 21 : Primitive

$F$  est une **primitive** de  $f$  si  $\forall x, F'(x) = f(x)$ .

### Théorème 21.1

Si  $F$  est la primitive de  $f$ ,

$$(15.3) \quad \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

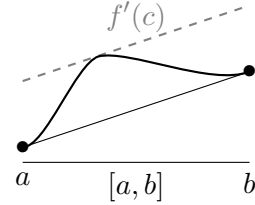
## 15.4 Accroissements finis

### 15.4.1 Cas réel

#### Théorème 21.2 : Accroissements finis

(15.4)  $f \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ , alors

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ tel que } \boxed{f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)}$$

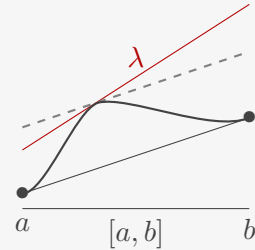


### 15.4.2 Cas vectoriel

#### Théorème 21.3 : Accroissements finis

(15.5)  $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$   
Si  $\exists \lambda$  tel que  $\forall t \in ]a, b[, N(f'(t)) \leq \lambda$ , alors

$$\boxed{N(f(b) - f(a)) \leq \lambda(b - a)}$$



## 15.5 Formules de Taylor

#### Théorème 21.4 : Formules de Taylor

$f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E)$ , avec  $(a, b) \in I^2$

**Taylor-Young**  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$

**Taylor-Laplace**  $f(x) = \overbrace{\sum_{p=0}^k \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)}^{T_k(x)} + \overbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt}^{\text{Reste intégral } R_k(x)}$

$$= (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}((1-u)a + ux) du$$

**Taylor-Lagrange**  $f(x) = N \left( f(b) - f(a) - \sum_{p=1}^k \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \right) \leq \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} N_{\infty}^{[a,b]}(f^{(k+1)})$

## Chapitre 16

# Intégrales sur un intervalle

### Méthode

#### Définitions rapides

**Intégrabilité**  $f(x)$  intégrable si  $\int |f(x)| < +\infty$

**Norme de la convergence en moyenne**

$$N_1 : \int_I |f|$$

**Norme de la convergence en moyenne quadratique**

$$N_2 : f \rightarrow (f|f)^{\frac{1}{2}} \text{ (cf théorème 29.2 de la page 44)}$$

#### Pour prouver l'intégrabilité

1. Vérifier la continuité sur l'intervalle étudié
2. Remplacer la fonction par sa valeur absolue
3. Étudier les problèmes aux bornes
  - Trouver un équivalent
  - Trouver un  $o(\cdots)$
  - Avoir une primitive dont la limite vers la borne est finie
4. Comparer la fonction  
On pourra utiliser :
  - La fonction **exponentielle** ;
  - Les croissances comparées ;

- L'intégrale de **RIEMANN** :  $\frac{1}{t^\alpha}$  (théorème 25.3 page 88)
- Une extension de RIEMANN : par exemple,  $f$  est intégrable sur  $]0, 1[$  si  $\exists \alpha < 1$  tel que  $f(x) x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , car alors, quand  $x$  tend vers 0,  $x^\alpha f(x) \leq 1$  et on retrouve RIEMANN.
- L'intégrale de **BERTRAND** (hors programme) :  $\frac{1}{|\ln(t)|^\beta t^\alpha}$

## Pour intégrer

On utilisera

1. Les intégrations par partie
2. Un changement de variable
3. Cauchy-Schwarz
4. L'intégrale d'un polynôme est un polynôme

Souvent, on ne peut intégrer sur tout un intervalle comme  $[0; +\infty]$ . Pour y remédier, on peut poser  $a > 0$  tel que notre fonction soit intégrable sur  $[a; +\infty[$ . Alors, la fonction est intégrable sur  $\cup[a; +\infty[ = \mathbb{R}^+$

## Formes usuelles

Forme	Méthode
$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{x}$	Multiplier le dénominateur et le numérateur par le conjugué $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour obtenir $a - b$ en haut
$\frac{\ln x}{x^\alpha}$	On remarque que $x^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ . On a alors $\frac{\ln x}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$ . Plus qu'à appliquer RIEMANN.
$\frac{1}{(x+a) \cdots (x+z)}$	Décomposition en éléments simples !

## Applications classiques des théorèmes

Convergence dominée - (27.7)	Montrer que $\lim \left( \int \cdots \right) = \int (\lim \cdots)$
Intégration terme-à-terme - (27.9)	Montrer une égalité du type $\int f_{DSE} = \int \left( \sum (DSE) \right) = \sum \left( \int \cdots \right)$
Dérivation d'une intégrale à paramètre - (27.11)	Dériver une fonction de type $F(x) = \int_I f(x, t) dt$

## 16.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

### 16.1.1 Définition

#### Définition 22 : Intégrale convergente

Pour  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction  $\mathcal{CPM}$ , l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  est dite **convergente** si la fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f$  a une limite finie en  $x \rightarrow +\infty$ .

Si tel est le cas, on note  $\int_a^{+\infty} f$  cette limite.

### 16.1.2 Propriétés de l'intégrale

#### Définition 23 : Notation $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$

Soient  $E$  et  $F$  deux intervalles de  $\mathbb{K}$ .

On note  $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(E, F)$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{CPM}(E, F)$  dont la valeur absolue  $|f|$  est intégrable sur  $E$ .

(ATTENTION) Cette notation n'existe pas, je l'ai inventée pour alléger la suite

#### Théorème 23.1 : Linéarité de l'intégration

$\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'application  $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^{+\infty} f \end{array} \right\}$  est **linéaire**.

#### Théorème 23.2 : Positivité

Soit  $f \in \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ .

Si  $f$  est positive, alors :

$$(16.1) \quad \int_a^{+\infty} f \geq 0$$

De plus, si  $f$  est **continue** sur  $[a, +\infty[$  et si  $\int_a^{+\infty} f = 0$ , alors  $f$  est nulle sur  $[a, +\infty[$ .

#### Théorème 23.3 : Dérivation

Soit  $f$  une application **continue** de  $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ .

L'application  $\left\{ \begin{array}{ccc} [a, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_x^{+\infty} f \end{array} \right\}$  est **dérivable** et de dérivée  $(-f)$  sur  $[a, +\infty[$ .

## 16.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

### Définition 24 : Fonction intégrable

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{CPM}$  de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{K}$ .

On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $[a, +\infty[$  si  $\int_a^{+\infty} |f|$  est convergente :

$$(16.2) \quad f \text{ intégrable si } |f| \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$$

**Remarque :** Cela revient à dire que  $f$  est intégrable si  $\int_a^{+\infty} f$  converge absolument.

### Définition 25 : Notation $\mathcal{L}^1$

Soient  $E$  et  $F$  deux intervalles de  $\mathbb{K}$ .

On note  $\mathcal{L}^1(E, F)$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{CPM}(E, F)$  dont la valeur absolue  $|f|$  est intégrable sur  $E$ .

(**ATTENTION**) Une fonction dont l'intégrale converge n'est pas forcément intégrable (cf. définition 24 page 88), c'est sa valeur absolue qui doit avoir une intégrale convergente !

Si  $\int_a^{+\infty} f$  est seulement convergente, l'intégrale est dite **semi-convergente**

### Théorème 25.1

Si  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , alors  $\int_a^{+\infty} f$  converge.

## 16.3 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

### Théorème 25.2 : Fonction positive intégrable

Soit  $f$  une fonction positive sur  $[a, +\infty[$ .

L'intégrale  $\int_a^{+\infty} f$  converge **si et seulement si**  $x \mapsto \int_a^{+\infty} f$  est majorée :

$$(16.3) \quad \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \iff \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \int_a^{+\infty} f \leq M$$

### Théorème 25.3 : Intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$

Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  **si et seulement si**  $\alpha > 1$ .



On étudie ici des intervalles du type  $[a, +\infty[$ , mais il peut être bon de savoir que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est intégrable sur  $[0, 1[$  si et seulement si  $\alpha < 1$ .

#### Théorème 25.4 : Relations de comparaison

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles, positives, et continues par morceaux sur  $[a, +\infty[$  :

si  $0 \leq f \leq g$  ,  $g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ ,  $g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$  ,  $g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \iff f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

## 16.4 Intégration sur un intervalle quelconque

### 16.4.1 Sur un intervalle semi-ouvert

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant  $+\infty$  par un réel  $b$  quelconque de  $\mathbb{R}$ . On effectue alors l'étude sur un semi-ouvert  $[a, b[$ . On retrouve alors :

- la définition 22 d'une intégrale convergente ;
- la définition 24 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 25.2, CNS d'une fonction positive intégrable ;
- le théorème 25.4 des relations de comparaisons.

#### Théorème 25.5 : Intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$

Soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$  est intégrable sur  $]a, b]$  si et seulement si  $\alpha < 1$  ( $x - a > 0$ ).

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$  est intégrable sur  $[b, a[$  si et seulement si  $\alpha < 1$  ( $x - a < 0$ ).

### 16.4.2 Sur un intervalle de la forme $]a, b[$

#### Définition 26 : L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On note  $\overline{\mathbb{R}}$  l'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

(**ATTENTION**) L'ensemble  $\overline{\mathbb{R}}$  n'a aucune des propriétés algébriques familières qu'on a dans  $\mathbb{R}$  : par exemple,  $a + b = a + c \implies b = c$  n'est plus vrai dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

### Définition 27 : Intégrale convergente sur un ouvert

Soit  $f$  une fonction  $\mathcal{CPM}([a, b[, \mathbb{K})$ . Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

L'intégrale  $\int_a^b f$  est dite **convergente** s'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que les deux intégrales  $\int_a^c f$  et  $\int_c^b f$  convergent sur leur intervalle semi-ouvert. On pose alors :

$$(16.4) \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant  $+\infty$  par un réel  $b$  quelconque de  $\mathbb{R}$ . On effectue alors l'étude sur un ouvert  $]a, b[$  et on retrouve :

- la définition 22 d'une intégrale convergente ;
- la définition 24 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 25.2, CNS d'une fonction positive intégrable.

### 16.4.3 Sur un intervalle $I$ quelconque

#### Théorème 27.1 : Relation de CHASLES

Soit  $f \in \mathcal{CPM}(I, \mathbb{K})$  dont l'intégrale sur  $I$  converge. Pour tout  $(a, b, c) \in \vec{I}^3$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , la **relation de CHASLES** nous donne :

$$(Chasles) \quad \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Soit  $I$  un intervalle quelconque entre deux bornes  $a$  et  $b$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ , on note  $\int_I f$  l'intégrale  $\int_a^b f$ . On retrouve :

- le théorème 23.1 de linéarité de l'intégration :  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ;
- le théorème 23.2 de positivité de l'intégration.

#### Théorème 27.2 : Inégalité triangulaire

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$  avec  $p \in \mathbb{R}$ . L'**inégalité triangulaire** des intégrales donne :

$$(16.5) \quad \left( \int_I |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_I |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

C'est l'inégalité de MINKOWSKI appliquée aux intégrales. Elle est au programme dans le chapitre 6 des fonctions convexes (page 25), en tant qu'« exemple d'inégalités de convexité ».

### Théorème 27.3 : Changement de variable

Soit  $f$  une fonction **continue** sur  $]a, b[$  et soit  $\varphi : ]\alpha, \beta[ \rightarrow ]a, b[$  une fonction **bijective** (donc strictement monotone) et de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Les intégrales  $\int_a^b f$  et  $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$  sont de même nature. Si elles convergent, elles sont égales :

$$(16.6) \quad \int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$$

**Remarque :** On a nécessairement  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \varphi(x) = a$  et  $\lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x) = b$ .

### Théorème 27.4 : Intégration par parties

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

Si  $f \cdot g$  possède des limites finies aux bornes  $a$  et  $b$  de l'intervalle, alors les intégrales

$\int_a^b f \cdot g'$  et  $\int_a^b f' \cdot g$  sont de même nature.

Si les intégrales convergent :

$$(16.7) \quad \int_a^b f(t) g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt$$

où  $[fg]_a^b = \lim_{x \rightarrow b} (f \cdot g)(x) - \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$

## 16.5 Intégration des relations de comparaison

### Théorème 27.5 : 1<sup>er</sup> théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\mathcal{CPM}([a, b[, \mathbb{R}^+)$  telles qu'on ait une des conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \leq g \\ f = o(g) \text{ (cf. définition 6 page 13), alors :} \\ f = O(g) \end{array} \right.$$

$$(16.8a) \quad \int_a^b g \text{ converge} \implies \int_a^b f \text{ converge}$$

On a également la contraposée :

$$(16.8b) \quad \int_a^b f \text{ diverge} \implies \int_a^b g \text{ diverge}$$

**Remarque :** D'après le programme officiel, seule la fonction de référence doit être positive.

### Théorème 27.6 : 2<sup>e</sup> théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $\mathcal{CPM}([a, b[, \mathbb{R}^+)$ .  
Si  $f \sim g$ , alors  $f$  et  $g$  sont de même nature.

## 16.6 Passage à la limite sous l'intégrale

### 16.6.1 Convergence dominée

#### Théorème 27.7 : Convergence dominée

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(f_n)_n$  est une suite de fonction de  $\mathcal{CPM}(I, K)$  convergeant simplement vers une fonction  $f \in \mathcal{CPM}(I, K)$ , et s'il existe  $\varphi \in \mathcal{L}^1$  telle que  $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$ ,  
alors  $f \in \mathcal{L}^1$  et  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$

#### Théorème 27.8 : Convergence dominée de fonction à paramètre réel

Soit  $\lambda \in J \subset \mathbb{R}$ . On suppose que :

- $(f_\lambda)_\lambda$  est une suite de fonction de  $\mathcal{CPM}(I, K)$  ;
- pour tout  $x \in I$ , pour tout  $\lambda_0 \in \bar{J}$ ,  $f_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(x)$  avec  $f \in \mathcal{CPM}(I, K)$  ;
- il existe  $\varphi \in \mathcal{L}^1$  telle que  $\boxed{\forall \lambda, |f_\lambda| \leq \varphi}$ .

Alors,  $f \in \mathcal{L}^1$ , et  $\int_I f = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f_\lambda$

Démonstration !

### 16.6.2 Intégration terme à terme

#### Théorème 27.9 : Intégration terme à terme

Si  $\left. \begin{array}{l} \sum \underbrace{f_n}_{f_n \in \mathcal{L}^1} \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ \sum \int_I |f_n| \text{ converge} \end{array} \right\}$ , alors  $f$  est intégrable et :

(16.9) 
$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

**Remarque :** L'hypothèse de convergence de  $\sum \int_I |f_n|$  est en faite une hypothèse de domination.

## 16.7 Continuité d'une intégrale à paramètre

### Théorème 27.10 : Continuité

Soit  $A$  une partie d'un espace normé, et soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : (A \times I) \longrightarrow \mathbb{K}$  une fonction. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Si :

$$(16.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in A, & t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{CM} \quad (\mathcal{CPM} \text{ pour } t) \\ \forall t \in I, & x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C} \quad (\text{Continue pour } x) \\ \forall (x, t) \in (A \times I) & |f(x, t)| \leq \varphi \quad (\text{Domination}) \\ \exists \varphi \in \mathcal{L}^1 \text{ tel que} & \end{array} \right.$$

alors la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est définie et continue sur  $A$  si

## 16.8 Dérivation d'un intégrale à paramètre

### Théorème 27.11 : Dérivabilité d'un intégrale à paramètre

Soient  $I$  et  $A$  des intervalles quelconques de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : (A \times I) \longrightarrow \mathbb{K}$  une fonction. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Si :

$$(16.11a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{L}^1 \quad (f \text{ intégrable pour } t) \\ f \text{ admet une dérivée partielle qui vérifie} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{L}^1 & (\mathcal{CPM} \text{ pour } t) \\ \forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C} & (\mathcal{C}^1 \text{ pour } x) \\ \forall (x, t) \in A \times \underbrace{[a, b]}_{\in I}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \in \mathcal{L}^1 & (\text{Domination}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

alors, la fonction  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est dérivable et  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ , et :

$$(16.11b) \quad \forall x \in A, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

### Théorème 27.12 : Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soient  $I$  et  $A$  des intervalles quelconques de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f : (A \times I) \longrightarrow \mathbb{K}$  une fonction. Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

(16.12a) Si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, \forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \quad t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{L}^1 \quad (f \text{ intégrable } k \text{ fois pour } t) \\ \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \in \mathcal{CPM} \quad (\mathcal{C}^k \mathcal{PM} \text{ pour } t) \\ \forall t \in I, \forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, x \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) \in \mathcal{C} \quad (\mathcal{C}^k \text{ pour } x) \\ \forall (x, t) \in A \times \underbrace{[a, b]}_{\in I}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \in \mathcal{L}^1 \quad (\text{Domination}) \end{array} \right.$$

Alors  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est intégrable sur  $I$ ,  $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $A$ , et :

(16.12b)  $\forall x \in A, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$

## 16.9 Intégrabilité (Ancienne version)

À l'origine, on donne plusieurs définitions de l'intégrabilité : d'abord pour les fonctions positives, puis pour les autres en disant que c'est si  $|f|$  est intégrable. On donne ici une définition plus générale :

### Définition 28 : Fonction intégrable

$f(x) \in \mathcal{CM}$  est intégrable sur  $I$  si  
 $\forall x \in \underbrace{J}_{\text{segment}} \subset I, \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \int_J |f| \leq M$

### Théorème 28.1 : CNS de l'intégration

$f(x)$  est intégrable sur  $I$  si  
 $\forall x \in I, \left[ \int_I |f| \leq \varphi \right]$  où  $\varphi \in \mathcal{L}^1$

### Théorème 28.2

Si  $f$  est une fonction intégrable sur  $I$ ,

(16.13)  $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$

## 16.10 Intégrales classiques

### Théorème 28.3

Si  $-\infty < a < b < +\infty$ , alors  $f : t \mapsto \frac{1}{(b-a)^\alpha}$  est intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\boxed{\alpha < 1}$

#### Théorème 28.4 : Intégrale de Riemann

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est l'intégrale de Riemann, } \begin{cases} \int_0^1 f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \int_1^{+\infty} f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

### 16.11 Espaces vectoriels normés de fonction intégrables

#### Théorème 28.5 : Convergence dominée

Si  $(f_n)_n$  est une suite de fonction de  $\mathcal{CM}(I, K)$  convergeant simplement vers une fonction  $f \in \mathcal{CM}(I, K)$ , et s'il existe  $\varphi \in \mathcal{L}^1$  telle que  $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$ , alors  $f \in \mathcal{L}$  et  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$

#### Théorème 28.6 : Intégration terme à terme

$$(16.14) \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f_n}_{f_n \in \mathcal{L}^1} \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ \sum \int_I \underbrace{|f_n|}_{\text{converge}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \\ \sum f_n \text{ converge} \\ \int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{array}$$

### 16.12 Fonction Gamma

#### Définition 29 : Fonction Gamma

On définit  $\Gamma$  de  $]0, +\infty[$  par  $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Cette fonction est convexe (comme produit de deux applications  $x \mapsto t^{x-1}$  et  $x \mapsto e^{-t}$  convexes), donc continue.

#### Théorème 29.1 : Étude de $\Gamma$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

- $\Gamma(n+1) = n!$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \dots = \sqrt{\pi}$

**Preuve 29.1.1** Vérifions que  $\Gamma$  est une fonction continue. On utilise le théorème de continuité de fonctions paramétrés,  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est continue par morceaux,  $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est continue.

Pour dominer  $t^{x-1}e^{-t}$ , avec  $x \in [a, b]$ , on prend  $\varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$

Maintenant qu'on a étudié la continuité, on peut faire une intégration par partie de  $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$  en posant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(t) = t^n & \implies u'(t) = nt^{n-1} \\ v(t) = -e^{-t} & \implies v'(t) = e^{-t} \end{cases} \\ \implies \Gamma(n+1) = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^\infty}_{=-0+0} - \underbrace{\int_0^\infty -t^{n-1} e^{-t}}_{\Gamma(n)} \\ \implies \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n! \underbrace{\Gamma(1)}_{=1} \end{aligned}$$

d'où  $\Gamma(n+1) = n!$  CQFD.

## 16.13 Intégrales doubles

### Définition 30 : Intégrale double

$f$  une fonction continue de  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ .

Alors 
$$\int_\alpha^\beta \left( \int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left( \int_\alpha^\beta f(x, t) dx \right) dt$$



# Chapitre 17

## Variables aléatoires discrètes

### Méthode

#### Prouver qu'une application $p_\omega$ est une probabilité

On se sert du théorème 35.1 page 99, et on prend des éléments élémentaires (de la forme  $\{\omega\}$ ). On montre que  $(p_\omega)_\omega$  est une famille sommable de somme 1, et le tour est joué ! L'application probabilité est alors  $\mathbb{P} : A = \{\omega_i, \omega_j, \dots\} \mapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega$ .

### 17.1 Espace probabilisé

#### Définition 31 : Univers

Un **univers**  $\Omega$  est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.  
L'ensemble des parties de l'univers  $\Omega$  est noté  $\mathcal{P}(\Omega)$

#### Définition 32 : Tribu, espace probabilisable, évènement

Une **tribu** sur un univers  $\Omega$  est un sous-ensemble  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  vérifiant les propriétés :

- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} \in \mathcal{T}$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Le couple  $(\Omega, \mathcal{T})$  est appelé **espace probabilisable**.  
Un élément de la tribu  $\mathcal{T}$  est appelé un **évènement**

#### Propriétés

Si  $(\Omega, \mathcal{T})$  est un espace probabilisable, et  $A_i$  un élément de  $\mathcal{T}$  :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\bigcup_{\text{finie}} A_i \in \mathcal{T}$
- $\bigcap_{\text{finie}} A_i \in \mathcal{T}$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{T}$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, A \cap \overline{B} = A \setminus B$

### Définition 33 : Incompatibilité, implication

Deux évènements  $A$  et  $B$  sont dits **incompatibles** si  $A \cap B = \emptyset$

On dit que  $A \xRightarrow{\text{implique}} B$  quand  $A \subset B$

(**ATTENTION**) Ne pas confondre  $(A \cap B = \emptyset)$  et  $(P(A \cap B) = 0)$

### Définition 34 : Système complet d'évènements

Soit  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace probabilisable.

Soit  $I$  fini ou égal à  $\mathbb{N}$ .

Un **système complet d'évènements** est une suite d'évènements  $(A_i)_{i \in I}$  telle que :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
- $\forall (p, q) \in I^2, p \neq q, A_p \cap A_q = \emptyset$

### Définition 35 : Probabilité

Soit  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace probabilisable. La **probabilité** est l'application  $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$  d'évènements deux à deux incompatibles :
  - $\sum \mathbb{P}(A_n)$  converge
  - $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$   
( $\sigma$ -additivité)

Le triplet  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  est appelé **espace probabilisé**

(**ATTENTION**) Espace propabilisable  $(\Omega, \mathcal{T}) \neq$  Espace probablilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$

### Théorème 35.1 : Caractérisation par une famille sommable

Soit  $\Omega$  un univers fini ou dénombrable.

Soit une application  $\begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \omega & \longmapsto p_\omega \end{cases}$  telle que  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  soit une famille sommable de somme 1.

Soit  $\begin{cases} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega \end{cases}$

Alors  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  est un espace probablilisé.

## 17.2 Propriétés élémentaires des probabilités

### Théorème 35.2 : Théorème de la limité monotone

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  un espace probablil .

- Si  $A_n$  est une suite croissante d' v nements ( $A_n \subset A_{n+1}$ ), alors :

$$(17.1a) \quad \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

- Si  $A_n$  est une suite décroissante d' v nements ( $A_{n+1} \subset A_n$ ), alors :

$$(17.1b) \quad \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Dans la définition 35 de la probabilité, la propriété de  $\sigma$ -additivité nécessite que les  v nements soient incompatibles. Cette propriété existe sous forme d'inégalité quand les  v nements ne sont pas incompatibles :

### Théorème 35.3 : Inégalité de BOOLE

Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  un espace probablil .

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  converge. Alors :

$$(17.2) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

**Preuve 35.3.1** On se ramène à une suite d' v nements deux à deux disjoints

en introduisant la suite  $(C_n)$  telle que :

$$C_0 = A_0 \qquad C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

Puisque  $C_n \subset A_n$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

## 17.3 Probabilités conditionnelles et indépendance

### 17.3.1 Probabilités conditionnelles

#### Théorème 35.4 : Probabilité conditionnelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $A \in \mathcal{F}$  de probabilité non nulle.

L'application

$$(17.3) \quad \mathbb{P}_A : \begin{cases} \mathcal{F} & \longrightarrow [0, 1] \\ B & \longmapsto \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{cases}$$

est une probabilité appelée **probabilité sachant  $A$** .

On notera également  $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B)$  pour “probabilité de  $B$  sachant  $A$ ”.

#### Théorème 35.5 : Formule des probabilités composées

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(A_n)$  une suite d'évènements de  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) > 0$ . Alors :

$$(17.4) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \times \mathbb{P}\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{k=1}^{n-2} A_k\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_1)$$

#### Théorème 35.6 : Formule des probabilités totales

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un **système complet** d'évènements de probabilités non nulles. Alors :

$$(17.5) \quad \forall B \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n)$$

**Preuve 35.6.1**  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements. Ainsi, les événements  $B \cap A_n$  sont deux à deux incompatibles, et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n) = B$ . Or

$$\mathbb{P}_{A_n}(B) = \frac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(A_n)}, \text{ ainsi :}$$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n)$$

### Théorème 35.7 : Formule de BAYES

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors :

$$(17.6) \quad \forall B \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n)}$$

## 17.3.2 Indépendance

### Définition 36 : Événements indépendants

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Deux événements  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{F}$  sont dits **indépendants** lorsque

$$(17.7) \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On peut généraliser la définition suivante à une famille entière :

### Définition 37 : Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Une famille  $(A_n)_{n \in I}$  d'événements de  $\mathcal{F}$  est dite **suite d'événements mutuellement indépendants** lorsque :

$$(17.8) \quad \forall J \subset I, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_J A_n\right) = \prod_J \mathbb{P}(A_n)$$

## 17.4 Variables aléatoires discrètes

### Définition 38 : Variable aléatoire

Soit  $E$  un ensemble. On appelle **variable aléatoire** discrète une application  $X : \Omega \rightarrow E$  telle que :

- $X(\Omega)$  est fini ou dénombrable
- Pour tout  $x \in X(\Omega)$ , l'image réciproque de  $\{x\}$  par  $X$  est un événement. On notera cet

évènement  $(X = x)$ .

Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , on dit que la variable aléatoire est réelle.

### Définition 39 : Loi de probabilité

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète de  $\Omega$  dans  $E$ .

On note  $\mathcal{P}(X(\Omega))$  l'ensemble des parties de  $X(\Omega)$ . L'application  $\mathbb{P}_X(\Omega)$  :

$$(17.9) \quad \mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longmapsto \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

## 17.5 Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

### 17.5.1 Couple de variables aléatoires

#### Définition 40 : Loi conjointe

Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires discrètes.

On appelle **loi conjointe** de  $X_1$  et  $X_2$  la loi  $X = (X_1, X_2)$  déterminée par :

- $X(\Omega) = \left\{ (x_1 \in X_1(\Omega), x_2 \in X_2(\Omega)) \right\} = X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$
- $\mathbb{P}_X(x_1, x_2) = \mathbb{P}_X \left( (x_1 = X_1(\Omega) \cap x_2 = X_2(\Omega)) \right)$

À partir de deux variables  $X_1$  et  $X_2$ , on peut déterminer une troisième variable  $(X_1, X_2)$  et sa loi. Les lois marginales vont nous permettre de faire l'inverse :

#### Théorème 40.1 : Lois marginales

Soit  $X = (X_1, X_2)$  un couple de variables aléatoires discrètes.

On note  $X(\Omega) = \{(x_1, x_2) \mid i \in I, j \in J\}$

On peut déterminer la loi de  $X_1$  ou de  $X_2$  à partir de la loi  $\mathbb{P}_X$  de la manière suivante :

$$(17.10) \quad X_1(\Omega) = \{x_i, i \in I\} \quad \mathbb{P}_{X_1}(x_1) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = (x_i, x_j))$$

$$(17.11) \quad X_2(\Omega) = \{x_j, j \in J\} \quad \mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = (x_i, x_j))$$

### 17.5.2 Variables aléatoires indépendantes

#### Définition 41 : Suite finie de variables aléatoires indépendantes

Soient  $n$  variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$ .

On dit qu'elles sont **indépendantes** si pour tous  $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ , les évènements  $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$  sont indépendants.

#### Définition 42 : Suite de variables aléatoires indépendantes

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On dit qu'elles sont **indépendantes** si pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{N}$  la famille finie  $(X_n)_{n \in I}$  est indépendante.

##### Théorème 42.1

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout  $m \in [1, n-1]$  et pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ , les variables  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

## 17.6 Lois usuelles

#### Définition 43 : Loi de BERNOULLI

La **loi de BERNOULLI** est une distribution discrète qui prend la valeur 1 avec une probabilité  $p$  et la valeur 0 avec la probabilité  $(1-p)$ .

Une variable aléatoire qui suit cette loi est appelée variable de BERNOULLI

##### 17.6.1 Loi binomiale

#### Définition 44

Une **loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  est la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  égale au nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de  $n$  épreuves de Bernoulli,  $p$  étant la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli.

Autrement, c'est une variable aléatoire  $X$  telle que

$$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

où les  $Y_i$  sont des variables aléatoires **indépendantes** de loi de BERNOULLI.

La variable aléatoire suit une loi de probabilité :

$$(17.12) \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

##### Théorème 44.1 : Espérance et variance

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $p$  et  $n$ . Alors :

$$(17.13) \quad E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

##### 17.6.2 Loi géométrique

### Définition 45

Une **loi géométrique** de paramètre  $p \in ]0, 1[$  est la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  égale au rang  $k$  du premier succès dans une suite d'épreuves de BERNOULLI mutuellement indépendantes de paramètres  $p$ .

Une telle loi vérifie  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et :

$$(17.14) \quad \forall k > 0, \quad \mathbb{P}_X(k) = p(1-p)^{k-1}$$

Une loi géométrique se note  $\mathcal{G}(p)$ .

### Théorème 45.1 : Espérance et variance

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre  $p$ . Alors :

$$(17.15) \quad E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

### Théorème 45.2 : Caractérisation comme loi sans mémoire

La loi géométrique est la seule loi de probabilité discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  vérifiant :

$$(17.16) \quad \mathbb{P}(X > (n+k) | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$$

pour tous entiers  $n$  et  $m$ .

## 17.6.3 Loi de POISSON

### Définition 46 : Loi de POISSON

On dit d'une variable aléatoire  $X$  que c'est une **loi de POISSON** de paramètre  $\lambda > 0$  lorsque  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et :

$$(17.17) \quad \mathbb{P}_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Une telle loi se note  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

### Théorème 46.1 : Espérance et variance

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi de POISSON de paramètre  $\lambda > 0$ . Alors :

$$(17.18) \quad E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda$$

### Théorème 46.2 : Approximation de la loi binomiale par une loi de POISSON

Si, pour tout  $n$ ,  $X_n$  est une loi binomiale de paramètre  $n$ ,  $p_n$ , et si le produit  $n \cdot p_n$



converge vers  $\lambda$ , alors :

$$(17.19) \quad \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

### Propriétés

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de POISSON de paramètres  $\lambda$  et  $\mu$ , alors la loi  $X + Y$  suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ .

## 17.7 Espérance

### 17.7.1 Définitions

#### Définition 47 : Espérance d'une famille finie

Soit  $X$  une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . L'**espérance** de  $X$  est donnée par la somme finie :

$$(17.20a) \quad E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}_X(x_i)$$

**Remarque :** On assimile souvent l'espérance à la moyenne, car puisque la somme des probabilités est 1, on peut très bien écrire que :

$$(17.20b) \quad E(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}_X(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}_X(x_i)}$$

Si  $X$  ne prend pas un nombre fini de valeurs, on peut étendre la définition précédente au cas où les valeurs de  $X$  forment une famille sommable :

#### Définition 48 : Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète. On dit que  $X$  est d'**espérance finie** si la famille  $\left(x \mathbb{P}_X(x)\right)_{x \in X(\Omega)}$  est sommable.

La somme est appelée **espérance de  $X$** .

#### Définition 49 : Variable centrée

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète d'espérance finie.

La variable aléatoire  $X - E(X)$  est appelée **variable centrée associée** à  $X$ .  
Son espérance  $E(X - E(X))$  est nulle.

### 17.7.2 Propriétés de l'espérance

### Propriétés

- L'ensemble  $\mathcal{E}$  des variables aléatoires de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  et dont l'espérance est finie est un espace vectoriel
- L'espérance est une forme linéaire sur  $\mathcal{E}$
- $\forall X \in \mathcal{E}, X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \implies E(X) \geq 0$  (l'espérance est positive)
- L'espérance est croissante :  $\forall (X, Y) \in \Omega^2, X \leq Y \implies E(X) \leq E(Y)$
- Soit  $Y$  une variable aléatoire d'espérance finie, si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $|X| \leq Y$ , alors  $X$  est d'espérance finie.
- Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires **indépendantes et admettant chacune une espérance finie**, alors  $XY$  est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

Par récurrence, on vérifie que pour  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes :

$$E\left(\prod_i X_i\right) = \prod_i E(X_i)$$

### Théorème 49.1 : Formule de transfert

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète.

Soit  $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ .

La variable aléatoire  $f(X)$  est d'espérance finie **si et seulement si** la famille  $\left(f(x) \cdot P(X = x)\right)$  est sommable. Si tel est le cas :

$$(17.21) \quad E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

### Théorème 49.2 : Inégalité de MARKOV

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète **positive** admettant une espérance finie. Alors, pour tout  $a > 0$ , l'**inégalité de MARKOV** nous donne :

$$(17.22) \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

## 17.8 Variance

### 17.8.1 Moment

---

**Définition 50 : Moment d'ordre  $n$** 

---

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. On dit que  $X$  admet un **moment** d'ordre  $m$  si  $X^m$  admet une espérance finie.

---

**Théorème 50.1**

---

Si  $X$  est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors  $X$  admet une espérance finie.

---

**Théorème 50.2 : Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ**

---

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires discrètes de moment d'ordre 2, alors  $XY$  a une espérance finie et

$$(17.23) \quad \left(E(XY)\right)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$$

---

**Théorème 50.3 : Espace vectoriel**

---

L'ensemble des variables aléatoires définies sur  $\Omega$  admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes définies sur  $\Omega$  et d'espérance finie.

### 17.8.2 Variance et écart-type

On relatera que dans cette sous-section, on fera tout le temps l'hypothèse d'une variable aléatoire  $X$  admettant un moment d'ordre 2, c'est-à-dire telle que  $X^2$  admette une espérance finie.

---

**Définition 51 : Variance et Écart-type**

---

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2.

On définit la **variance** par :

$$(17.24a) \quad V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

et l'**écart-type** par :

$$(17.24b) \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

---

**Théorème 51.1 : Formule de KÖNIG-HUYGENS**

---

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$(17.25) \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

### Théorème 51.2

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors pour tous réels  $a$  et  $b$  :

$$(17.26) \quad V(aX + B) = a^2 V(X)$$

### Définition 52 : Variables réduites

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2 et telle que  $\sigma(X) > 0$ .

La variable aléatoire  $\frac{X}{\sigma(X)}$  est appelée **variable réduite** associée à  $X$ .

Son écart-type est égal à 1.

La variable aléatoire  $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est appelée **variable centrée réduite** associée à  $X$ .

Son espérance est nulle et son écart-type est égal à 1.

### Théorème 52.1 : Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$(17.27) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

**Preuve 52.1.1** On applique le théorème 49.2 de MARKOV page 106 à la variable aléatoire  $Y = (X - E(X))^2$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Ce dernier théorème permet de majorer la probabilité que  $X$  prenne une valeur dont la distance à  $E(X)$  (c'est-à-dire à la moyenne) serait supérieure à  $\varepsilon$ .

### 17.8.3 Covariance

#### Définition 53 : Covariance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance finie.

Si elle existe, on définit la **covariance** de  $X$  et de  $Y$  par :

$$(17.28) \quad \text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

### Théorème 53.1 : Existence de la covariance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors la covariance de  $X$  et de  $Y$  existe et on a :

$$(17.29) \quad \text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Preuve 53.1.1**  $X$  et  $Y$  étant des variables aléatoires d'ordre 2, elles admettent une espérance finie.

De plus, on a :

$$\text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

On développe :

$$= E\left(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\right)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} &= E(XY) - E(E(X)Y) - E(E(Y)X) + E(E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - \cancel{E(Y)E(X)} + \cancel{E(X)E(Y)} \\ \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Du théorème précédent, on déduit le théorème suivant :

**Théorème 53.2 : Covariance de variables aléatoires indépendantes**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes admettant un moment d'ordre 2, alors  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

**Théorème 53.3**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2. Alors :

- $X + Y$  a un moment d'ordre 2 et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$  ;
- si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

Par récurrence, on en déduit le théorème suivant :

**Théorème 53.4 : Variance d'une somme finie**

Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires réelles discrètes admettant toutes des moment d'ordre 2. Alors :

- la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  a un moment d'ordre 2 et :

$$(17.30a) \quad V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

- si les variables  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes :

$$(17.30b) \quad V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

## 17.9 Loi faible des grands nombres

### Théorème 53.5 : Loi faible des grands nombres

Si  $(X_n)_n$  est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $m = E(X_1)$ , on a :

$$(17.31a) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Pour avoir la formule en tête de manière plus visuelle, même si c'est plus lourd :

$$(17.31b) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} - E(X_1) \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Formule  
citée par  
le pro-  
gramme

## 17.10 Fonctions génératrices

### Définition 54 : Fonction génératrice

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit la **fonction génératrice**  $G_X$  de  $X$  par :

$$(17.32) \quad G_X(t) = E(t^X) = \sum_k \mathbb{P}(X = k) t^k$$

pour les valeurs de  $t$  telles que la variable aléatoire  $t^X$  admette une espérance finie.

### Théorème 54.1 : Détermination de la loi de $X$

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

- La série entière  $G_X$  est de rayon  $R \geq 1$  et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 ;
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ , alors :

$$(17.33) \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

- Si  $R > 1$ , alors  $X$  admet un moment d'ordre  $k$  quelconque dans  $\mathbb{N}^*$  et :

$$(17.34a) \quad G_X'(1) = E(X)$$

$$(17.34b) \quad G_X''(1) = E(X(X-1))$$

$$(17.34c) \quad G_X^{(k)}(1) = E(X(X-1) \cdots (X-k+1))$$

Dans ce cas,  $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'^2(1)$ .

La dernière partie de ce théorème peut se généraliser même si  $R \geq 1$  :

#### **Théorème 54.2**

Soit  $X$  une variable aléatoire.

- $X$  admet une espérance finie si et seulement si  $G_X$  est dérivable à gauche en 1 ; dans ce cas  $E(X) = G_X'(1)$ .
- $X$  admet un second moment si et seulement si  $G_X$  est deux fois dérivable à gauche en 1 ; dans ce cas  $G_X''(1) = E(X(X-1))$  et  $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'^2(1)$ .

#### **Théorème 54.3 : Somme de variables aléatoires indépendantes**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires à valeurs dans  $N$  et indépendantes, alors :

$$(17.35) \quad \boxed{\forall t \in ]-1, 1[} \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$

On peut généraliser à  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  mutuellement indépendantes :

$$(17.36) \quad \boxed{\forall t \in ]-1, 1[} \quad G_{\sum X_k}(t) = \prod G_{X_k}(t)$$

Cinquième partie

Équations Différentielles



## Chapitre 18

# Équations Différentielles Linéaires

### Méthode

#### Résoudre une équation différentielle

**Scalaire du 1<sup>er</sup> ordre** Méthode algorithmique, cf. preuve 12.1.1 page 119

**Vectérielles du 1<sup>er</sup> ordre**

- Avec les coefficients constants
- Avec une matrice Diagonalisable
- Avec une matrice Trigonalisable

**Scalaire du second ordre**

Dans ce chapitre,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

### 18.1 Généralités

#### 18.1.1 Équation différentielle linéaire

**Définition 1 : Équation différentielle linéaire d'ordre 1**

On appelle **équation différentielle d'ordre 1** l'équation  $(\mathcal{L})$  :

$$(\mathcal{L}) \quad x' = a(t)(x) + b(t)$$

avec  $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$  et  $b \in \mathcal{C}(I, E)$ .

L'application  $x : I \rightarrow E$ , dérivable, est **solution** de l'équation  $(\mathcal{L})$  si :

$$(18.1) \quad \forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$$

(ATTENTION)  $a$  est une application de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Donc  $a(t)$  est une application linéaire, pas un

scalaire

### Définition 2 : Forme matricielle

En choisissant une base de  $E$ , l'équation peut s'écrire matriciellement :

$$(18.2) \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec  $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{R}))$  et  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$

### Définition 3 : Équation homogène associée

On appelle **équation homogène** associée à l'équation différentielle  $(\mathcal{L})$  l'équation :

$$(\mathcal{H}) \quad x' = a(t)(x)$$

### Théorème 3.1 : Principe de superposition

Si  $x_1$  est solution de  $x' = a(t)x + b_1(t)$   
 et  $x_2$  \_\_\_\_\_  $x' = a(t)x + b_2(t)$   
 alors  $x_1 + x_2$  est solution de

$$(18.3) \quad x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t)$$

## 18.1.2 Problème de CAUCHY

### Définition 4 : Problème de CAUCHY

On appelle **problème de CAUCHY** pour l'équation différentielle  $(\mathcal{L})$  l'ensemble constitué par  $(\mathcal{L})$  et un couple  $(t_0, x_0)$  formant une condition initiale :

$$(18.4) \quad \begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) & (\mathcal{L}) \\ x(t_0) = x_0 & \text{(Condition initiale)} \end{cases}$$

### Théorème 4.1 : Mise sous forme intégrale

$x \in \mathcal{C}(I, F)$  est solution du problème de CAUCHY (18.4) si et seulement si :

$$(18.5) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(u)(x(u)) + b(u)) du$$

## 18.1.3 Équation scalaire linéaire d'ordre $n$

### Définition 5 : Équation scalaire linéaire

Avec les notations précédentes, une équation de la forme

$$(18.6) \quad x' = a(t)x + b(t)$$

est scalaire si  $n = \dim E = 1$ .

### Définition 6 : Équation différentielle linéaire d'ordre $n$

On appelle **équation différentielle d'ordre  $n$**  l'équation  $(\mathcal{L})$  :

$$(\mathcal{L}) \quad a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t)$$

$(a_0, \dots, a_n)$  est dans  $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}))^{n+1}$ .

Cette équation est équivalente à un système différentiel linéaire de la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec  $A \in \mathcal{C}(I, M_n(\mathbb{R}))$  et  $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$

## 18.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

### 18.2.1 Théorème de CAUCHY

#### Théorème 6.1 : Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire

Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où  $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ ,  $b \in \mathcal{C}(I, F)$ , alors

$$(18.7) \quad \forall (t_0, x_0) \in (I, F), \exists ! \varphi \text{ telle que } \begin{cases} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

### 18.2.2 Système fondamental de solutions

#### Définition 7 : Système Fondamental

Un **système fondamental** de solutions est une base dans l'espace  $S_I(\mathcal{H})$  des solutions.

#### Propriétés

- Si  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $S_I(\mathcal{L})$ , alors,  $\forall t \in I$ ,  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$  est une base dans  $F$

#### Définition 8 : Wronskien

Le Wronskien est le déterminant d'un système fondamental de solution.

$$(\text{Wronskien}) \quad W(t) = \det_B(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

(ATTENTION) Le Wronskien est une fonction de  $t$

### Propriétés

- $W'(t) = \text{tr}(a) W(t)$
- $W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(s) ds}$
- $(x_1, \dots, x_n)$  est un système fondamental de solutions  $\iff \forall t \in I, W(t) \neq 0$
- $(x_1, \dots, x_n)$  est un système fondamental de solutions  $\iff \exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$

Cas des  
équations  
d'ordre  
 $n$

## 18.3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

### Définition 9 : Exponentielle d'un endomorphisme

La fonction exponentielle peut s'appliquer à des endomorphismes :

$$(18.8) \quad \exp : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$$

### Définition 10 : Exponentielle d'une matrice

La fonction exponentielle peut s'appliquer à des matrices :

$$(18.9) \quad \exp : A \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

### Théorème 10.1

Si  $a$  et  $b$  sont deux endomorphismes qui commutent, alors :

$$(18.10a) \quad \exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

De même, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices qui commutent :

$$(18.10b) \quad \exp(A + B) = \exp(A) \circ \exp(B)$$

(ATTENTION) L'hypothèse de commutation est extrêmement importante !

### Théorème 10.2 : Dérivation

Soit  $a$  un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie.  
L'application  $e_a : t \mapsto \exp(ta)$  est dérivable, avec :

$$(18.11) \quad e'_a = a \circ e_a = e_a \circ a$$

Ce théorème s'applique également à une matrice.

## 18.4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

### Définition 11 : Équation homogène à coefficients constants

On dit d'une équation homogène  $(\mathcal{H}) : x' = a(t)(x)$  qu'elle est à **coefficients constants** si  $a$  est indépendant de  $t$ , c'est-à-dire que l'équation est telle que :

$$(18.12) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = a(x(t))$$

### Théorème 11.1 : Solution

Avec les notations précédentes, la fonction  $x$  définie par :

$$(18.13) \quad \forall x_0 \in E, \quad x(t) = e^{(t-t_0)a} x_0$$

est l'unique solution du problème de CAUCHY  $(x' = a(x); x(t_0) = x_0)$ .

Traduction  
matricielle

## 18.5 Méthode de variation des constantes

### Théorème 11.2 : Variation des constantes

Soit  $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  une base de  $S_I(\mathcal{H})$ .

Alors,  $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$ , :

$$(18.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une unique famille } \overbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}^{\text{dans } \mathcal{C}^\infty(I, F)} \text{ telle que } \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \\ \varphi \in S_I(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \forall t \in I, \sum_{i=1}^n \lambda'_i(t) \varphi_i(t) = b(t) \end{array} \right.$$

Pour une équation à coefficients  $a$  et  $b$  constants  $x' = ax + b(t)$ , la solution générale est

$$y(t) = e^{(t-t_0)a} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a} b(s) ds$$

Variation des  
constantes  
× coef-  
ficients  
constants

## 18.6 Équations différentielles scalaires du second ordre

### Théorème 11.3 : Méthode de variation des constantes

En connaissant  $(u, v)$  un système fondamental de solutions, on cherche une solution de la forme  $y(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t)$ . On détermine  $c_1$  et  $c_2$  avec :

$$(18.16) \quad c_1' \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

### Théorème 11.4 : Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire

Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{L}) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = \gamma(t)$$

où  $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ ,  $b \in \mathcal{C}(I, F)$ , alors

$$\forall (t_0, (x_0, x'_0)) \in (I, \mathbb{K}^2), \exists! \varphi \text{ telle que } \begin{cases} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x'_0 \end{cases}$$

#### Preuve 11.4.1

Le théorème est une conséquence du théorème 6.1 si on résout plutôt  $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}(t) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$

### Définition 12 : Wronskien

Si  $u$  et  $v$  sont des  $I$ -solutions, le **Wronskien** est l'application définie par

$$W = uv' - u'v$$

#### Propriétés

Dans l'équation  $(\mathcal{H}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ ,

- $W + aW = 0$
- $(u, v)$  libre  $\Leftrightarrow \exists t_0$  tel que  $W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t, W(t) \neq 0$

## 18.7 Équations Différentielles Scalaires d'ordre 1

### Théorème 12.1 : Solution de l'équation différentielle scalaire

Si  $y' = a(t)y + b(t)$ , alors  $S_I(\mathcal{L})$  est un sous-espace affine

**Preuve 12.1.1 (Algorithmique)** Par hypothèse,  $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , donc  $a(t)$  admet une primitive  $P(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-P(t)} y(t)) &= -P'(t) e^{-P(t)} y(t) + e^{-P(t)} y'(t) \\ &= \underbrace{-a(t)}_{-a(t)} y(t) e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \left( \underbrace{a(t) y(t) + b(t)}_{a(t) y(t) + b(t)} \right) \\ &= e^{-P(t)} b(t) \end{aligned}$$

Si  $c$  est intégrable,  $\exists C$  tel que :

$$\begin{aligned} e^{-P(t)} y(t) &= \int_{t_0}^t (e^{-P(u)} b(u) du + C) \\ y(t) &= \int_{t_0}^t (e^{-P(u)} b(u) du + C) e^{P(t)} \end{aligned}$$

est solution de l'équation.

## 18.8 Équations Différentielles Vectorielles d'ordre 1

### Problème de CAUCHY

#### Définition 13 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

$$(\mathcal{L}) \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où  $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ ,  $b \in \mathcal{C}(I, F)$ .

Le **Problème de CAUCHY** revient à trouver, pour tout  $(t_0, x_0 = x(t_0))$  dans  $I \times F$ , une solution  $\varphi$  de  $(\mathcal{L})$

(ATTENTION)  $a$  est une application de  $I$  dans  $\mathcal{L}(F)$ . Donc  $a(t)$  est une application linéaire, pas un scalaire

## 18.9 Équations Différentielles linéaires du second ordre

---

**Définition 14 : Équation Différentielle Vectorielle**

---

C'est une équation sous la forme

$$(\mathcal{L}) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + a(t)y(t) = \gamma(t)$$

L'équation homogène est

$$(\mathcal{H}) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$



On note  $f(r) = r^2 + a \times r + b$  son polynôme caractéristique

### 18.9.1 Coefficients constants

#### Théorème 14.1 : Résolution de l'équation

Dans le cas de l'équation homogène ( $\mathcal{H}$ ), on calcule le discriminant  $\Delta$  du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution  $y(t)$  pour l'équation homogène :

$$\frac{\Delta \neq 0}{\Delta = 0} \left| \begin{array}{l} y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \\ y(t) = (A + Bt)e^{rt} \end{array} \right.$$

Ou encore :

$$\frac{\Delta > 0}{\Delta < 0}{\Delta = 0} \left| \begin{array}{ll} r_{\pm} = \alpha \pm \beta & y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t)) \\ r_{\pm} = \alpha \pm i\beta & y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t)) \\ r \text{ double} & y(t) = (A + Bt)e^{rt} \end{array} \right.$$

#### Théorème 14.2

Si dans ( $\mathcal{L}$ ),  $\gamma(t) = P(t)e^{\lambda t}$ ,  $P \in \mathbb{C}[X]$ , alors on peut donner une solution :

(18.17) 
$$t \mapsto t^{\omega(\lambda)} Q(t)e^{\lambda t}$$

où  $\omega(\lambda)$  est la multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine du polynôme caractéristique de  $f$  et  $Q \in \mathbb{C}[X]$  est de même degré que  $P$ .

### 18.9.2 Cas général

## Chapitre 19

# Équations Différentielles non linéaires

### 19.1 Équations autonomes

#### Définition 15 : Champ de Vecteur

On appelle **champ de vecteurs** l'application qui à un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  associe  $\overrightarrow{V(M)} \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$  :

$$\begin{array}{ccc} U \in \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{C^1} & \mathbb{R}^2 \\ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \overrightarrow{V(M)} \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \end{array}$$

#### Définition 16 : Système Autonome

On appelle **système autonome** associé au champ de vecteur  $\overrightarrow{V(M)}$  le système différentiel

$$\frac{dM}{dt} = \overrightarrow{V(M)}$$

Le mot *autonome* témoigne de la non-dépendance en  $t$  du champ de vecteur  $\overrightarrow{V(M)}$

#### Théorème 16.1 : CAUCHY-LIPSCHITZ (*admis*)

Avec les données précédentes, pour tout couple  $(t_0, (x_0, y_0)) \in (I \times U)$ , il existe une unique  $I$ -solution maximale  $\varphi : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , telle que  $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Une **solution maximale** est une solution qui n'est la restriction d'aucune autre. Son intervalle de définition est l'intervalle maximal.

### 19.2 Équations non autonomes

Dans cette section on appelle **équation différentielle** :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = f(t, x)$$

où  $f$  est une fonction de  $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

**Théorème 16.2 : CAUCHY-LIPSCHITZ (*admis*)**

$U$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , et en reprenant l'équation  $(\mathcal{E})$  :

$$\forall (t_0, x_0) \in U, \exists! \varphi \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ soit } \textbf{solution maximale} \text{ de l'équation } (\mathcal{E}) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

## Chapitre 20

# Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on se place dans  $(E, N)$  et  $(F, P)$ , des espaces vectoriels normés de dimension finie.  $U$  est un ouvert de  $E$

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow F \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

### 20.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

---

**Définition 17 : Dérivée selon un vecteur**

---

Soit  $f : U \rightarrow F$  la fonction définie précédemment.

Soit  $v$  un vecteur non nul de  $E$ , et  $t$  un réel tel que  $a + tv \in U$ .

On dit que  $f$  **admet une dérivée selon le vecteur  $v$  au point  $a$**  (ou admet une **dérivée directionnelle**) si la fonction réelle  $t \mapsto f(a + tv)$  est dérivable en 0. Cette dérivée en  $a$  est notée  $D_v f(a)$ .

On a alors :

$$(20.1) \quad D_v f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

---

**Définition 18 : Dérivées partielles dans une base**

---

Soit  $f : U \rightarrow F$  la fonction définie précédemment.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On appelle **dérivée partielle** de  $f$  dans  $(e_n)_n$  ses dérivées par rapport aux vecteurs. La  $i$ -ième dérivée partielle en  $a$  est notée  $D_i f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ . Ainsi :

$$(20.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

### 20.2 Différentielle

#### 20.2.1 Application différentiable

### Définition 19 : Application différentiable au point $a$

Soit  $f : U \rightarrow F$  la fonction définie précédemment.

On dit que  $f$  est **différentiable** au point  $a$  s'il existe une fonction linéaire  $df(a) : E \rightarrow F$  telle que :

$$(20.3) \quad \forall h \in E, f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(h)$$

(ATTENTION)  $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On l'applique sur un vecteur  $h$  en notant  $df(a)(h)$  ou  $df(a) \cdot h$

### Théorème 19.1 : $f$ dérivable en $a$

Soit  $f$  la fonction définie précédemment.

Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$  et est dérivable en  $a$  selon tout vecteur. Sa dérivée selon le vecteur  $v$  est alors :

$$(20.4) \quad D_v f(a) = df(a)(v)$$

## 20.2.2 Jacobien, Jacobienne

### Définition 20 : Jacobienne, Jacobien

Soient  $(e_i)_i$  et  $(e'_i)_i$  deux bases de respectivement  $E$  et  $F$ .

Soit  $f = (f_j)_j$  la fonction définie précédemment telle que  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i f_i(x_i) \cdot e'_i$ . On

définit la **Jacobienne**  $\mathcal{J}_a(f)$  comme la matrice de terme général  $j_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = D_j f_i(a)$ .

Le **Jacobien** est le déterminant de cette matrice.

**Exemple :** La Jacobienne de la fonction polaire (qui à  $(r, \theta)$  associe  $(r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$ ) est  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ . Son Jacobien est donc  $r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r$

## 20.3 Opérations sur les applications différentiables

### Théorème 20.1 : Différentielle d'une composée d'applications

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels **normés réels** de dimension finie.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que :

$$\begin{array}{lll} f & : & E \rightarrow F \\ g & : & F \rightarrow G \end{array}$$

Alors, la fonction  $g \circ f$  est différentiable sur un ouvert de  $E$  et :

$$(20.5) \quad d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

## 20.4 Cas des applications numériques

### 20.4.1 Gradient

#### Définition 21 : Gradient

Soit  $E$  un espace euclidien, et  $f$  une application allant de  $U$  un ouvert de  $E$  à  $\mathbb{R}$ .  
On appelle **gradient** de  $f$  en  $a$  l'unique vecteur de  $E$ , noté  $\text{Grad } f(a)$ , tel que :

$$(20.6) \quad \forall v \in E, \quad df(a) \cdot v = (\text{Grad } f(a)|v)$$

Expres-  
sion  
dans  
une base  
ortho-  
normée

**Remarque :** Parfois, le gradient de  $f$  en  $a$ ,  $\text{Grad } f(a)$ , est aussi noté  $\nabla f(a)$

### 20.4.2 Représentation des formes linéaires

#### Définition 22 : Dual d'un Espace Vectoriel (ev) réel

Soit  $E$  un espace euclidien.

On appelle **dual** de  $E$ , et on note  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  ou  $E^*$ , l'ensemble des formes linéaires de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Théorème 22.1 : Représentation des formes linéaires

Soit  $E$  un espace euclidien.

Pour toute forme linéaire  $f$  de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  :

$$(20.7) \quad \exists ! y, \forall x \in E, \quad f(x) = (x|y)$$

**Preuve 22.1.1** Pour tout  $y \in E$ , on peut associer l'application  $\theta_y : x \mapsto (x|y)$ .  
Cette application est linéaire. L'application

$$\left| \begin{array}{lcl} \theta & : & E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ & & y \mapsto \theta_y \end{array} \right.$$

est également linéaire. Son noyau  $\text{Ker}(\theta)$  étant nul,  $\theta$  est injective. Mais  $E$  et  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  étant de même dimension, elle est donc **bijjective**.

Toute forme linéaire a donc un antécédant par  $\theta$ . □

### 20.4.3 Point critique

#### Définition 23 : Point critique

On appelle **point critique** d'une application différentiable  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  tout point de  $E$  tel que

$$(20.8) \quad df(a) = 0$$

#### Définition 24 : Extremum local

Soit  $E$  un espace euclidien, et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  présente un **extremum local** en un point  $a$  si pour tout voisinage de  $a$  :

(20.9a)  $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$  (Maximum local)

(20.9b)  $\forall x \in V, f(x) \geq f(a)$  (Minimum local)

**Théorème 24.1 : Condition nécessaire d'existence d'extremum**

Soit  $E$  un espace euclidien, et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une **fonction différentiable**.  
Si  $f$  présente un extremum local en un point  $a$ , alors  $df(a) = 0$ .

(ATTENTION) La réciproque de ce théorème est fausse

## 20.5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

## 20.6 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

## 20.7 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

# Chapitre 21

## Fonctions de plusieurs variables

### Méthode

#### Étude d'une fonction à deux variables

Passer en polaire

Dans ce chapitre, on se place dans  $(E, N)$  et  $(F, P)$ , des espaces vectoriels normés de dimension finie.  $U$  est un ouvert de  $E$

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow F \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

### 21.1 Différentielle, dérivée

#### 21.1.1 Différentielle

##### Définition 25 : Différentielle

Il existe au plus un élément  $\varphi$  de  $\mathcal{L}(E, F)$  tel que

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

$\varphi$  est appelée la **différentielle** de  $f$ . On la note  $df(a)$

**Remarque :**  $a$  et  $h$  sont des vecteurs. Donc sous la forme  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ . De plus,  $\varphi(h)$

est une application linéaire :  $\varphi(h) \in \mathcal{L}(E, F)$

#### 21.1.2 Dérivée selon un vecteur

##### Définition 26 : Dérivée en un point



On note  $\varphi_h : t \mapsto f(a + th)$ .  
 $f$  admet une dérivée en  $a$  selon  $h$  si  $\varphi_h$  est dérivable en 0.  
 Alors, on note cette dérivée  $D_h f(a) = \varphi'_h$ . Si elle existe :

$$D_h f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

On a alors la dérivée pour tout  $a$  définie par la fonction  $D_h f : a \mapsto D_h f(a)$

### Définition 27 : Application de classe $\mathcal{C}^1$

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si  $\forall j \in [1, n], D_j f$  existe et est continue sur  $U$

### Définition 28 : $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme

$f$  (bijective) est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme si elle et son inverse sont  $\mathcal{C}^k$ . C'est-à-dire :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(U, V) \\ f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, U) \end{cases}$$

## 21.2 Inversion locale

### Théorème 28.1 : Théorème d'inversion locale (*admis*)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C}(U, F) \text{ injective est } \mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme} \\ \Leftrightarrow \\ \forall a \in U, df(a) \text{ isomorphisme de } E \text{ dans } F \end{aligned}$$

## 21.3 Complément sur les courbes planes

### Théorème 28.2 : Formule de GREEN-RIEMANN

Un compact  $D$  délimitée par une courbe plane  $\Gamma$  positivement orientée et  $\mathcal{CPM}^1$ .  
 Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert dans lequel  $\Gamma$  est tracé. On admet la formule de GREEN-RIEMANN :

$$(21.2) \quad \iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] (x, y) \, dx \, dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

Sixième partie

Géométrie

## 21.4 Arcs Paramétrés

### Définition 1 : Arc Paramétré

On appelle **arc paramétré** de classe  $\mathcal{C}^k$  un couple  $(I, f)$  avec  $\begin{cases} I & \text{un intervalle de } \mathbb{R} \\ f & \text{une application de } \mathcal{C}^k(I, E) \end{cases}$

### Définition 2

Quelques autres définitions :

<b>Valeur Régulière</b>	$t_0$	—	$f'(t_0) \neq 0$
<b>Valeur Birégulière</b>	$t_0$	—	$(f'(t_0), f''(t_0))$ est libre
<b>Abscisse Curviligne</b>	$s$	—	$s' = N_2(f'(t))$ sur un intervalle
<b>Paramétrage normal</b>	$(J, g)$	—	

Exemple d'abscisse curviligne :  $s : t \mapsto \sinh(t)$  car  $N_2(s(t)) = \sqrt{\int |\sinh(t)|^2} = \sinh'(t) = \cosh(t)$ . L'avantage d'une abscisse curviligne est de pouvoir simplifier l'étude d'une courbe.

## 21.5 Courbes Planes

### 21.5.1 En polaire

### Définition 3 : Fonction arg

$\theta \mapsto e^{i\theta}$  est une bijection de  $] -\pi, \pi[$  sur  $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$  où  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Sa réciproque est l'application  $u \mapsto \arg(u)$

Si on prend  $u \in \mathbb{U}$ , en notant  $u = x + iy$ , alors  $\arg(u) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$

### Théorème 3.1 : Théorème du Relèvement

Soit  $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{U})$  (avec  $n \neq 0$ ).

$\exists \theta \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  tel que  $f(t) = e^{i\theta(t)}$ .  $\theta$  est appelé **relèvement** de  $f$ .

**Preuve 3.1.1** Si elle existe,  $\theta$  n'est pas unique ( $t \mapsto \theta(t) + 2\pi$  convient aussi).

Donc  $f'(t) = i\theta'(t)f(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = -i \frac{f'(t)}{f(t)}$ .

On peut alors intégrer :  $\theta(t) = C - i \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$ , et il ne reste plus qu'à prouver l'existence en ayant cette expression de  $\theta(t)$

### Définition 4 : Tangente

Si  $\theta$  est une valeur régulière, on note  $V$  l'angle  $\left(\vec{u}_\theta, \frac{d\vec{M}_\theta}{d\theta}\right)$ , et on définit  $\tan(V) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$

## 21.5.2 Étude d'une courbe paramétrée

### Méthode

### Étude de courbes paramétrées

Quelques conseils :

- On essaye, si possible, de passer en polaire
- Ne pas oublier de vérifier les ensembles de définition
- Lors de l'étude **au voisinage d'un point**, il suffit d'étudier les dérivées successives grâce à un développement limité

On a l'expression de  $x$  et  $y$  en fonction de  $t$  :  $x = f(t)$  et  $y = g(t)$ . Pour étudier la courbe :

1. Ensemble de **définition**  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$
2. Étude des **variations** : on étudie  $x'$ ,  $y'$  et  $\frac{y'}{x'}$
3. **Branches infinies**
  - $x = \lim f$  ou  $y = \lim g$  sont des asymptotes (avec  $\lim f$  et  $\lim g$  des limites finies)
  - Si, pour  $t_0 \in \mathbb{R}$  les deux fonctions tendent simultanément vers l'infini, on étudie  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y}{x}$

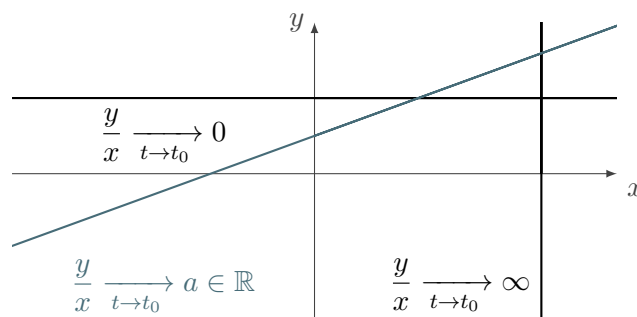


FIGURE 21.1 – Différents types d'asymptotes en fonction de  $\frac{y}{x}$

Dans le cas où  $\frac{y}{x} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a \in \mathbb{R}$ , on peut déterminer  $b$  de l'équation  $y = ax + b$  en examinant  $y - ax$

## Septième partie

### *Annexe*

## 21.6 Équivalences

Pour une définition de l'équivalence, *cf.* définition 4 page 12

**Formule de STIRLING** 
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

**Équivalence de  $\ln$**  
$$\frac{\ln(u)}{t^\alpha} \sim t^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

**Équivalents usuels en 0**

$\sin(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cos(u)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$	$\ln(\mathbf{1}+u) \underset{0}{\sim} u$
$\sinh(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cosh(u)-1 \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$	$e^u-1 \underset{0}{\sim} u$

## 21.7 Trigonométrie

### 21.7.1 Définition

$$(21.3) \quad \begin{cases} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases} \quad (21.4) \quad \begin{cases} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

### 21.7.2 Addition / Produit

$$(21.5) \quad \begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} & \begin{array}{l} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \end{array} \end{array}$$

### 21.7.3 Dérivation

Dérivées des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \tan' x &= \frac{1}{1 + \cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

### 21.7.4 Formule de MOIVRE

$$(21.6) \quad (\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$


---

## Généralités

**Conjugué**  $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

**Convexité** La fonction **exponentielle** est **convexe**, la fonction **logarithme** est **concave**

---

## Inégalités

<b>Modules</b>	$\left\  \sum_i x_i \right\  \leq \sum_i \ x_i\ $	
<b>Module d'intégrales</b>	$\left  \int_I f \right  \leq \int_I  f $	(16.13)
<b>Inégalité de la Moyenne</b>	$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$	(15.2)

---

## 21.8 Formules usuelles

$$\begin{array}{l}
 a^k - b^k = (a - b) \left( \sum_{p=0}^{k-1} a^p b^{k-1-p} \right) \\
 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\
 \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}
 \end{array} \right.$$


---

## 21.9 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels normés usuels :  
 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathbb{C}_n[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}),$  \_\_\_\_\_

## 21.10 Astuces

**Primitives de 1** Dans une IPP, on peut primitiver 1 par  $1+x$  pour enlever un terme au dénominateur. *Exemple* :  $(\ln(1+x))^n$

**Fontion  $k$ -lipschitzienne** Il suffit de montrer que  $\exists k \in \mathbb{R}$  tq  $|f'(t)| \leq k$

**Inverse d'une Matrice  $2 \times 2$**  Si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , alors  $M^{-1} = \frac{1}{da - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

**Dérivée de  $a^x$**  On a  $a^x = e^{x \ln(a)}$ , donc sa dérivée est  $\boxed{\ln(a) \times a^x}$

---



# Liste des acronymes

CNS	Condition Nécessaire et Suffisante. 43, 57, 81, 89, 90, 94
CVS	Converge Simplement. 74
CVU	Converge Uniformément. 74
DL	Développement Limité. 63
DSE	Développement en Série Entière. 81, 85
ev	Espace Vectoriel. 126
LCI	Loi de Composition Interne. 19
s-ep	sous-espace propre. 32, 33
SATP	Série À Termes Positifs. 4, 64, 66, 67, 79

# Index

- Abscisse curviligne, 131
- Accroissements finis, 84
- Adhérence, 48
- Adhérent, 47
- Adjoint, 55
- Arc paramétré, 131
- Autoadjoint, 55
- Automorphisme orthogonal, 55
- BANACH
  - Espace, 50
- Barycentre, 25
- BOLZANO
  - WEIERSTRASS, 50
- CANTOR, 70
- CAUCHY-LIPSCHITZ, 115, 118, 122, 123
- CAYLEY-HAMILTON, 39
- CÉSARO, 67
- CHASLES, 90
- $C^k$ -difféomorphisme, 129
- Compact, 50
- Complet, 50
- Complexe, 15
- Composante connexe, 52
- Concave, 27
- Connexe par arcs, 52
- Variation des Constantes, 117
- Continuité
  - uniforme, 49
- Convergence
  - absolue, 64
  - dominée, 92, 95
  - série, 64
- Convexe, 25, 26, 52
- Covariance, 108
- Dérivabilité, 82
- Dérivée
  - partielle, 124
- Développement en Série Entière, 81
- Diagonalisable
  - endomorphisme, 35
  - matrice, 36
- Différentiable, 125
- Différentielle, 128
- DIRICHLET
  - Noyau, 61
- Distance, 42
- Diverge
  - grossièrement, 64
- Droite
  - stable, 32
- Dual, 126
- Écart-type, 107
- Endomorphisme
  - induit, 31
- Ensemble
  - dénombrable, 69
  - équipotent, 69
  - fini, 69
- Épigraphe, 26
- Équation Différentielle, 115
  - du 2<sup>e</sup> ordre, 120
  - scalaire, 118
  - vectorielle, 119
- Équation différentielle, 113
- Équation homogène, 114
- Équivalence, 12
- Espace
  - normé, 42
  - préhilbertien, 43, 58
  - probabilisable, 97
  - probabilisé, 98
  - vectériel, 41
- Espérance, 105
- EULER, 23
- Évènement, 97
- Évènements
  - incompatibles, 98
  - indépendants, 101
- Extremum

local, 127  
 Famille  
     sommable, 70, 71  
 Fermé, 46  
 Fonction génératrice, 110  
 Série de FOURIER, 60  
 FUBINI, 76  
  
 Gamma, 95  
 Gradient, 126  
 GRASSMAN, 39  
 GREEN-RIEMANN, 129  
 Groupe, 19  
     de KLEIN, 19  
     monogène, 22  
     produit, 19  
  
 HEINE, 51  
  
 Inégalité  
     de Boole, 99  
     de JENSEN, 27  
     de MARKOV, 106  
 Inégalité  
     de BESSEL, 55, 58, 60  
     de CAUCHY-SCHWARZ, 44, 107  
     triangulaire, 42  
 Intégrable, 88  
 Intégrale  
     convergente, 87, 90  
     semi-convergente, 88  
 Intérieur  
     point, 48  
 Intérieur, 48  
 Isométrie  
     vectorielle, 56  
 Isomorphisme, 21  
  
 Jacobien(ne), 125  
  
 $k$ -lipschitzienne, 135  
 Loi  
     de BERNOULLI, 103  
     binomiale, 103  
     conjointe, 102  
     géométrique, 104  
     marginale, 102  
     de POISSON, 104  
  
 Matrice  
     semblable, 30  
 Module, 15  
  
 Moment(Probabilités), 107  
 Monogène, 22  
 Morphisme  
     de groupe, 21  
  
 Nilpotent, 23, 37  
 Norme, 42  
     Euclidienne, 42  
  
 Ordre  
     d'un élément, 22  
     d'un groupe, 22  
 Ouvert, 46  
  
 PARSEVAL  
     théorème de convergence, 60  
     égalité, 61  
 Point critique, 126  
 Polynôme  
     caractéristique, 34  
     d'un endomorphisme, 38  
     minimal, 38  
 Polynôme  
     caractéristique(Équation différentielle), 121  
 Primitive, 83  
 Probabilité, 98  
 Problème de CAUCHY, 114, 119  
 Procédé  
     d'Orthonormalisation de SCHMIDT, 55  
 Produit de CAUCHY, 72  
 Produit scalaire, 43, 58  
  
 Rayon de convergence, 78  
 Relèvement, 131  
 Reste, 63  
  
 SATP, 64  
 Série, 63  
     alternée, 65  
     entière, 78  
 Solution  
     maximale, 122  
 Sous-espace  
     caractéristique, 40  
     propre, 32  
 Sous-groupe, 19  
     engendré, 20  
 STIRLING, 134  
 Système  
     autonome, 122

fondamental de solutions, 115  
Système complet(probabilités), 98

Tangente, 132

Taylor

(*Formules*), 84

Lagrange, 84

Laplace, 84

Young, 84

Tribu, 97

Trigonalisable

endomorphisme, 36

matrice, 36

TSSA, 65

univers, 97

Valeur

birégulière, 131

propre, 32, 33

régulière, 131

Variable aléatoire, 101

indépendante, 103

Variable centrée associée, 105

Variable centrée réduite, 108

Variable réduite, 108

Variance, 107

Vecteur

propre, 32, 33

Champ de Vecteur, 122

Voisinage, 46

WEIERSTRASS

approximation, 75

Wronskien, 115, 118