

COURS DE PRÉPA

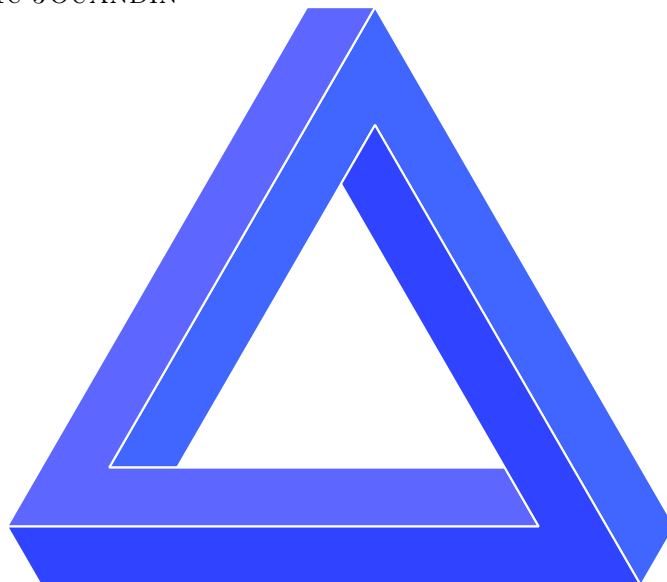
---

# Physique-Chimie

---

Écrit par  
Alexandre JOUANDIN

2013—2015  
Écrit en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X



2 février 2015

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Physique</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Thermodynamique</b>	<b>7</b>
1.1	Définitions générales . . . . .	7
1.2	Premier Principe . . . . .	8
1.2.1	Transformation isochore . . . . .	8
1.2.2	Transformation isobare . . . . .	9
1.3	Deuxième Principe . . . . .	10
1.4	Cas particulier du gaz parfait . . . . .	11
1.5	Troisième Principe . . . . .	13
1.6	Machines thermiques . . . . .	13
1.7	Systèmes ouverts en régime stationnaire . . . . .	14
1.7.1	Système ouvert . . . . .	14
1.7.2	Premier principe . . . . .	15
1.7.3	Deuxième principe . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Statique des fluides</b>	<b>16</b>
2.1	Champ de pression d'un fluide . . . . .	16
2.2	Théorème d'ARCHIMÈDE . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Électronique</b>	<b>17</b>
3.1	Circuits linéaires dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS) . . . . .	17
3.1.1	THÉVENIN-NORTON . . . . .	19
3.2	Régime transitoires . . . . .	20
3.3	Amplificateur Opérationnel (AO) . . . . .	20
3.4	Régimes sinusoïdaux . . . . .	21
3.4.1	Puissance . . . . .	22
3.5	Filtres . . . . .	23
3.5.1	Fonctions de transfert usuelles . . . . .	24
3.5.2	Diagrammes de Bode . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Mécanique du Point</b>	<b>26</b>
4.1	Étude cinétique . . . . .	26
4.2	Approche Énergétique . . . . .	27
4.2.1	Puissance et travail . . . . .	27
4.2.2	Énergie cinétique . . . . .	27
4.2.3	Énergie potentielle . . . . .	28
4.3	Forces centrales . . . . .	28
4.4	Dynamique en référentiel non galiléen . . . . .	29
4.4.1	Loi de composition des vitesses . . . . .	30
4.4.2	Loi de composition des accélérations . . . . .	30
4.4.3	Forces d'inerties . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Mécanique du solide</b>	<b>32</b>
5.1	Préambule . . . . .	32
5.1.1	Dérivée d'un vecteur . . . . .	32
5.1.2	Dérivée en coordonnées polaires . . . . .	32
5.2	Définitions . . . . .	32
5.3	Théorèmes de Koënig . . . . .	33
5.4	Moment d'inertie . . . . .	34
5.5	Théorèmes de dynamique . . . . .	34
5.6	Solides en contact . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Optique</b>	<b>37</b>
6.1	Optique géométrique . . . . .	37
6.1.1	Stigmatisme et aplanétisme . . . . .	37
6.1.2	Réflexion et réfraction . . . . .	38
6.2	Optique ondulatoire . . . . .	39
6.2.1	Modèle scalaire des ondes lumineuses . . . . .	39
6.2.2	Superposition d'ondes lumineuses . . . . .	41
6.2.3	Trous d'YOUNG . . . . .	43
6.2.4	Diffraction . . . . .	44
6.2.5	Réseaux . . . . .	45
<b>7</b>	<b>Électromagnétisme</b>	<b>46</b>
7.1	Électrostatique . . . . .	46
7.1.1	Loi de COULOMB . . . . .	46
7.1.2	Propriétés du champ électrostatique . . . . .	47
7.1.3	Circulation du champ électrostatique . . . . .	47
7.1.4	Flux du champ électrostatique . . . . .	48
7.1.5	Dipôle électrostatique . . . . .	48
7.2	Magnétostatique . . . . .	50
7.2.1	Champ magnétique . . . . .	50
7.2.2	Dipôle Magnétique . . . . .	51
7.3	Équations de MAXWELL . . . . .	52
7.3.1	Principe de conservation de la charge . . . . .	52
7.3.2	Les équations de MAXWELL . . . . .	52
7.3.3	Equations de POISSON et de LAPLACE . . . . .	54
7.4	Énergie électromagnétique . . . . .	55
7.5	Induction . . . . .	57
7.5.1	Loi d'Ohm généralisée . . . . .	57
7.5.2	Auto-induction . . . . .	59

7.5.3	Inductance mutuelle . . . . .	59
7.5.4	Force électromotrice induite . . . . .	59
7.6	Propagation et rayonnement . . . . .	60
7.6.1	Dans le vide . . . . .	60
7.6.2	Propagation dans un plasma . . . . .	64
7.6.3	Propagation dans un conducteur ohmique . . . . .	67
<b>8</b>	<b>Diffusion Thermique</b>	<b>69</b>
8.1	Conduction . . . . .	69
8.2	Convection . . . . .	72
<b>9</b>	<b>Rayonnement Thermique</b>	<b>73</b>
<b>10</b>	<b>Annexe</b>	<b>76</b>
10.1	Trigonométrie . . . . .	76
10.1.1	Définition . . . . .	76
10.1.2	Addition / Produit . . . . .	76
10.1.3	Nombres complexes . . . . .	76
10.2	Calcul vectoriel . . . . .	77
10.3	Complément mathématique . . . . .	77
10.3.1	Dérivée d'un vecteur . . . . .	77
10.3.2	Équation différentielle . . . . .	78
10.4	Repères en physique . . . . .	78
10.4.1	Repère cartésien . . . . .	78
10.4.2	Repère cylindrique . . . . .	79
10.5	Analyse Vectorielle . . . . .	80
10.5.1	Généralités sur les champs . . . . .	80
10.5.2	Opérateurs sur les champs . . . . .	80
10.5.3	STOKES et OSTROGRADSKI . . . . .	81
10.6	Règles générales . . . . .	82
10.6.1	Relations entre les grandeurs . . . . .	82
10.6.2	Longueurs de références . . . . .	82
<b>II</b>	<b>Chimie</b>	<b>83</b>
<b>11</b>	<b>Première année</b>	<b>84</b>
11.1	Configuration électronique . . . . .	84
11.2	Représentation moléculaire . . . . .	85
11.3	Cristallographie . . . . .	85
<b>12</b>	<b>Premier principe appliqué à la transformation chimique</b>	<b>87</b>
<b>13</b>	<b>Thermochimie</b>	<b>88</b>
13.1	Grandeurs extensives . . . . .	88
13.2	Équilibre d'une réaction . . . . .	89
13.2.1	Enthalpie libre . . . . .	89
13.2.2	Avancement . . . . .	90
13.2.3	Loi d'action de masse . . . . .	91

<b>14 Diagramme Potentiel-pH</b>	<b>92</b>
14.1 Rappels . . . . .	92
14.2 Méthode . . . . .	92
<b>Liste des acronymes</b>	<b>95</b>
<b>Index</b>	<b>96</b>

Première partie

Physique

# Chapitre 1

## Thermodynamique

### Méthode

#### Formules

**Premier principe**  $\Delta U = Q + W$  (cf. équation (1.4a) page 8)

$dU = \delta Q + \delta W$  (cf. équation (1.4b) page 8)

$dU = TdS - PdV$  (cf. équation (1.11) page 10)

**Enthalpie**  $dH = U + PV$  (cf. équation (1.7) page 9)

$dH = TdS + VdP$  (cf. équation (1.12) page 11)

**Deuxième principe**  $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$  (cf. équation (1.10) page 10)

**Gaz parfait**  $dU = C_V dT$

$dH = C_P dT$

$PV^\gamma = \text{constante}$

Les fonctions  $U$ ,  $H$  et  $S$  sont des fonctions d'état. Ainsi, d'un point  $A$  à un point  $B$  d'une transformation, le calcul ne change pas qu'on passe par un chemin réversible ou non.

### 1.1 Définitions générales

Avant de commencer, un petit point sur la différence de notation entre  $d$  et  $\delta$ , conformément au programme de deuxième année.

Signification	Petite	Grande
Variation	$dH$	$\Delta H$
Quantité	$\delta Q$	$Q$

TABLE 1.1 – Différence entre  $d, \delta$ , et  $\Delta$

#### Définition 1 : Système

On appelle **système thermodynamique** le contenu d'une zone délimitée dans l'espace.

Type de système	Ouvert	Fermé	Isolé
Échange d'énergie avec l'extérieur	✓	✓	
Échange de matière avec l'extérieur	✓		

TABLE 1.2 – Les différents systèmes

**Définition 2 : Transfert thermique**

Le **transfert thermique** est un apport de chaleur lors d'un transfert de température :

$$(1.1) \quad Q = C \Delta T \quad dQ = C dT$$

Où  $C$  est la capacité calorifique en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

Pour un corps pur,  $C$  est défini, sinon, pour un gaz parfait, il faudra prendre  $C = C_V$  ou  $C = C_P$  suivant qu'on se trouve à volume ou à pression constante.

(ATTENTION) Parfois, on utilise les valeurs molaires en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  :  $C_{Vm} = \frac{C_V}{n}$  par exemple.

**Définition 3 : Travail**

Le travail reçu par un système thermodynamique est noté  $W$ .

Il prend en compte le travail des forces de pression  $-P_{\text{ext}}dV$  et les autres forces  $W_u$  :

$$(1.2) \quad \delta W = -P_{\text{ext}}dV + \delta W_u$$

**Définition 4 : Énergie interne**

L'énergie interne  $U$  d'un système thermodynamique est définie microscopiquement par :

$$(1.3) \quad U = U_0 + E_c^* + \underbrace{E_p^*}_{\text{Énergie potentielle d'interaction}}$$

**1.2 Premier Principe****Théorème 4.1 : Premier principe**

La variation d'énergie  $\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p$  est égal à la somme du travail reçu  $W$  et du transfert thermique reçu  $Q$  :

$$(1.4a) \quad \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W$$

Entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  très proches :

$$(1.4b) \quad dU + dE_c + dE_p = \delta Q + \delta W$$

**1.2.1 Transformation isochore**

Une transformation isochore est une transformation pendant laquelle le volume  $V$  reste constant.



### Théorème 4.2

Pour une transformation **isochore** (à volume constant), on peut simplifier la variation d'énergie interne :

$$(1.5) \quad dU_V = C_V dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à volume constant** :

$$(1.6) \quad C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

**Preuve 4.2.1** On note  $U_V$  et  $Q_V$  respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à volume constant.

Si on néglige  $dE_c$  et  $dE_p$ , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_V &= \delta W + \delta Q_V \\ &= -P \underbrace{dV}_{\text{nul car } V=\text{cte}} + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_V \\ &= \delta Q_V \\ dU_V &= C_V dT \end{aligned}$$

### 1.2.2 Transformation isobare

On peut effectuer un raisonnement analogue à la preuve précédente en étudiant cette fois une transformation **isobare** (à pression constante)

**Preuve 4.2.2** On note  $U_P$  et  $Q_P$  respectivement l'énergie interne et le transfert thermique à pression constante.

Si on néglige  $dE_c$  et  $dE_p$ , le premier principe nous donne :

$$\begin{aligned} dU_P &= \delta W + \delta Q_P \\ &= -PdV + \underbrace{\delta W_u}_{\text{supposé nul}} + \delta Q_P \\ dU_P + PdV &= \delta Q_P \\ d(U + PV)_P &= \delta Q_P \\ &= C_P dT \end{aligned}$$

Cette quantité de chaleur mise en jeu est l'enthalpie. On va maintenant la définir de manière générale :

### Définition 5 : Fonction Enthalpie

On appelle **enthalpie** la fonction d'état  $H$  telle que :

$$(1.7) \quad H = U + PV$$

### Théorème 5.1

Lors d'une transformation isobare, l'enthalpie s'exprime par :

$$(1.8) \quad dH_P = C_P dT$$

Cela permet de définir la **capacité thermique à pression constante** :

$$(1.9) \quad C_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

## 1.3 Deuxième Principe

### Théorème 5.2 : Deuxième principe

Il existe une **fonction d'état**  $S$  **entropie**, **additive**, **extensive**, telle que :

$$(1.10) \quad dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T}}$$

Au final,  $\boxed{\delta S_{\text{créée}} \geq 0}$ .

Lorsqu'une transformation est **réversible**, on a  $\boxed{S_{\text{créée}} = 0}$  et alors  $\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}}$

### Théorème 5.3 : Première identité thermodynamique

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **première identité thermodynamique** est vérifiée :

$$(1.11) \quad dU = TdS - PdV$$

**Preuve 5.3.1** On étudie en premier lieu une transformation réversible. C'est-à-dire que  $dS = \frac{\delta Q_{\text{réversible}}}{T}$ .

Ainsi,  $\begin{cases} \delta Q_{\text{réversible}} = TdS \\ \delta W_{\text{réversible}} = -PdV \end{cases}$ . On peut maintenant appliquer le premier principe de la thermodynamique :

$$dU_{\text{réversible}} = TdS - PdV$$

Mais  $U$  est une **fonction d'état**. Donc peu importe le chemin parcouru par la transformation, qu'il soit réversible ou pas, on peut écrire :

$$dU = TdS - PdV$$

(ATTENTION)

On ne peut pas intégrer cette équation sur un chemin irréversible. Mais on peut substituer l'intégrale à celle d'un chemin réversible.

Théorème 5.4 : Deuxième identité thermodynamique

Lors d'une transformation sans changement de composition, la **deuxième identité thermodynamique** est vérifiée :

$$(1.12) \quad dH = TdS + VdP$$

## 1.4 Cas particulier du gaz parfait

Définition 6 : Gaz Parfait

Un gaz parfait est un gaz vérifiant l'équation d'état :

$$(1.13) \quad PV = nRT$$

Théorème 6.1 : Énergie interne d'un gaz parfait

L'énergie cinétique interne d'un gaz parfait ne varie pas. On démontre expérimentalement que l'énergie interne d'un gaz parfait est :

$$(1.14) \quad U_{\text{Gaz Parfait}} = U_0 + C_V T$$

La capacité thermique à volume constant  $C_V$  d'un gaz parfait est

$$(1.15) \quad C_V = \begin{cases} \frac{3}{2}nR & \text{pour un gaz parfait monoatomique} \\ \frac{5}{2}nR & \text{pour un gaz parfait polyatomique} \end{cases}$$

Théorème 6.2 : Capacité thermique

On peut utiliser deux **capacités thermiques** :

La capacité calorifique  $C_V$  à volume constant

$$(1.16a) \quad C_V = \frac{3}{2}nR$$

La capacité calorifique  $C_P$  à pression constante

$$(1.16b) \quad C_P = \frac{5}{2}nR$$

Définition 7

On défini  $\gamma$  comme le rapport des capacités calorifiques :

$$(1.17) \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

### Théorème 7.1 : Relation de MAYER

La **relation de MAYER** relie la capacité thermique à pression constante  $C_P$  à la capacité thermique à volume constant  $C_V$  :

$$(1.18) \quad C_P - C_V = nR \quad C_{Pm} - C_{Vm} = R$$

On peut maintenant exprimer :

$$(1.19a) \quad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

$$(1.19b) \quad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

**Preuve 7.1.1** *La démonstration de la relation de MAYER ne semble pas être au programme.*

*Pour le reste, les démonstrations sont assez simples :*

$$\begin{aligned} C_P - C_V &= nR \\ \gamma C_V - C_V &= nR \\ (\gamma - 1)C_V &= nR \\ C_V &= \frac{nR}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

*La deuxième devient alors bien plus simple à démontrer :*

$$\begin{aligned} C_P &= \gamma C_V \\ C_P &= \gamma \frac{nR}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

### Théorème 7.2 : Relations de LAPLACE

Au cours d'une transformation **adiabatique réversible** (donc isentropique), un gaz parfait vérifie :

$$(1.20a) \quad PV^\gamma = \text{constante}$$

$$(1.20b) \quad TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$\begin{aligned} (1.20c) \quad P^{1-\gamma} T^\gamma &= \text{constante} \\ &= P_{\text{eq}} V_{\text{eq}} \end{aligned}$$

**Preuve 7.2.1** *On part d'une des identités thermodynamiques. Peu importe laquelle, cela changera juste quelle relation de LAPLACE on obtient.*

*Nous allons partir de  $dH = TdS + VdP$ .*

$$\begin{aligned} dH &= TdS + VdP \\ dS &= \frac{dH}{T} - dP \frac{V}{T} \end{aligned}$$

D'après l'équation d'état d'un gaz parfait (1.13) :

$$dS = \frac{dH}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

$$dS = C_P \frac{dT}{T} - (C_P - C_V) \frac{dP}{P}$$

$$dS = \gamma C_V \frac{dT}{T} - C_V(\gamma - 1) \frac{dP}{P}$$

$$dS = \gamma C_V \ln \frac{T_2}{T_1} - C_V(\gamma - 1) \ln \frac{P_2}{P_1}$$

Or la transformation est isentropique, donc  $dS = 0$ , d'où :

$$\cancel{C_V}(\gamma - 1) \ln \frac{P_2}{P_1} = \gamma \cancel{C_V} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$(1 - \gamma) \ln \frac{P_1}{P_2} = \gamma \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

On a alors démontré l'équation (1.20c), et on peut passer facilement aux autres avec l'équation d'état des gaz parfait (1.13).  $\square$

De la preuve précédente, on tire une dernière formule pour les gaz parfaits : le calcul de l'entropie.

### Théorème 7.3 : Entropie d'un gaz parfait

Pour une transformation réversible, l'entropie d'un gaz parfait peut être calculée par la formule :

$$(1.21) \quad dS = \gamma C_V \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1}$$

## 1.5 Troisième Principe

### Définition 8 : Troisième principe

À température nulle ( $T = 0K$ ), l'entropie est nulle.

## 1.6 Machines thermiques

### Théorème 8.1 : Énoncé des premiers et deuxièmes principes

Sur un cycle, les fonctions d'état reviennent à leur état initial. Donc le premier principe s'écrit :

$$(1.22) \quad W + \sum_i Q_i = \Delta U = 0$$

De même, le second principe s'écrit cette fois :

$$(1.23) \quad S_{\text{échangée}} = \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

On appelle ce second principe l'**inégalité de CLAUSIUS**.

### Théorème 8.2 : Rendement

Le rendement  $r$  est :

$$(1.24a) \quad r = \frac{\text{Bénéfices}}{\text{Donné à la machine}}$$

$$r_{\text{moteur}} = -\frac{W}{Q_c}$$

$$(1.24b) \quad r_{\text{réfrigérateur}} = -\frac{Q_f}{W}$$

$$(1.24c) \quad r_{\text{pompe à chaleur}} = -\frac{Q_c}{W}$$

## 1.7 Systèmes ouverts en régime stationnaire

### 1.7.1 Système ouvert

#### Définition 9 : Système ouvert

Un **système ouvert** est un système dont l'espace est traversé par de la matière.

Pour être conforme au programme, on n'étudie que l'écoulement dans le cas unidimensionnel.

#### Définition 10 : Régime stationnaire

Un système ouvert en **régime stationnaire** est un système pour lequel toutes les caractéristiques du fluide contenu à l'intérieur du système ne changent pas.

#### Définition 11 : Débits massiques

On se place dans le cas de systèmes ouverts en **régime stationnaire**. La masse étant une caractéristique du fluide, elle ne varie pas non plus.

C'est-à-dire que le débit de fluide massique entrant  $dm_e$  est égal au débit massique de fluide sortant  $dm_s$ , et on peut définir le **débit massique**  $D_m$  à travers le système comme étant  $D_m = dm_e = dm_s$ .

Si  $dm$  est la masse de fluide entrée/sortie pendant un court instant  $dt$  :

$$(1.25) \quad D_m = \frac{dm}{dt}$$

Souvent, on a le débit massique, l'équation plus pertinente serait donc  $dm = D_m \times dt$

### 1.7.2 Premier principe

#### Théorème 11.1 : Premier principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **premier principe** s'écrit :

$$(1.26) \quad dm \left( \Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p \right) = dm (q + w_u) \quad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Toutes ces grandeurs **se rapportent au fluide** qui traverse le système et sont **massiques**.  $w_u$  est le travail massique utile à l'intérieur du système, par exemple une hélice, et ne prend pas en compte le travail des forces de pression.

(ATTENTION)

Ça ressemble beaucoup au premier principe, mais c'est l'enthalpie qui rentre en jeu, car elle inclut  $u$  et le travail des forces de pression qui se trouvaient dans le membre de droite de l'équation.

### 1.7.3 Deuxième principe

#### Théorème 11.2 : Deuxième principe en système ouvert

Dans un système ouvert en régime stationnaire, le **second principe** s'écrit :

$$(1.27) \quad \Delta s = s_{\text{échangée}} + s_{\text{créée}} \quad \text{avec } \Delta a = a_s - a_e$$

Comme pour le premier principe, ces grandeurs sont celles du fluide traversant le système et sont massiques.

## Chapitre 2

# Statique des fluides

### 2.1 Champ de pression d'un fluide

#### Définition 12 : Définition générale

La pression et la masse volumique sont définies comme des champs scalaires fonctions des variables d'espace.

#### Théorème 12.1 : Relation fondamentale de la statique

Pour un champ de pesanteur  $\vec{g}$ , le champ de pesanteur  $P$  vérifie localement :

$$(2.1a) \quad \frac{dP}{dz} = \rho g$$

où  $\rho$  est la masse volumique locale. On l'intègre en :

$$(2.1b) \quad P(z) = P_0 + \rho g z$$

La norme d'une force  $\vec{F}_p$  exercée par une pression  $P$  sur une surface  $S$  est  $F = P \cdot S$

### 2.2 Théorème d'ARCHIMÈDE

#### Théorème 12.2 : Poussée d'ARCHIMÈDE

Un corps entièrement immergé dans un liquide subit une force opposée au poids du volume du fluide déplacé. C'est à dire :

$$(2.2) \quad \vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$



## Chapitre 3

# Électronique

### Méthode

#### Résoudre

$$\text{Loi des nœuds} \quad \sum_{\text{Nœud}} i = 0$$

$$\text{Puissance} \quad \mathcal{P} = u \times i$$

$$\text{Inductance} \quad u = L \frac{di}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2} Li^2$$

$$\text{Loi des mailles} \quad \sum_{\text{Maille}} u = 0$$

$$\text{Énergie électrique reçue} \quad \Delta E = \int_{\Delta t} \mathcal{P}(t) dt$$

$$\text{Capacité} \quad i = C \frac{du}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2} Cu^2$$

#### Lois de KIRCHOFF

Pour ne pas avoir trop d'équations redondantes avec les lois de Kirchhoff, on pourra suivre la méthode suivante :

- On compte le nombre  $b$  de branches et  $n$  de nœuds.
- On écrit  $(n - 1)$  lois des nœuds
- On écrit  $((b - (n - 1)))$  lois des mailles
- On résout le système final

### 3.1 Circuits linéaires dans l'ARQS

— **Définition 13 : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)** —

On parle d'ARQS quand le courant se propage assez rapidement pour pouvoir considérer que son établissement est instantané.

Ainsi, pour une Onde Électromagnétique (OEM) sinusoïdale de période temporelle  $T$  et de période spatiale  $\lambda$ , telle que  $\lambda = c \cdot T$  (où  $c$  désigne la vitesse de l'onde), et pour un observateur

situé à une distance  $D$  d'un point quelconque du circuit, on est dans le cadre de l'ARQS si  $D \ll \lambda$ .

#### Définition 14

Un courant électrique résulte d'un déplacement de charges  $q$ . On peut dès lors définir l'intensité  $I$  et la tension  $U$  d'un dipôle :

$$(3.1) \quad I = \frac{dq}{dt} \quad U_{AB} = V_A - V_B$$

#### Théorème 14.1 : Loi d'Ohm

Loi d'Ohm Globale

$$(3.2) \quad u = Ri \quad i = Gu$$

#### 3.1.1 THÉVENIN-NORTON

##### Théorème 14.2 : Équivalence de THÉVENIN-NORTON

Dans le modèle de THÉVENIN, un générateur de tension est la combinaison d'un générateur de tension idéal de *Force Électromotrice*  $E$  et d'une résistance interne  $R$  :

$$(3.3) \quad u = E - Ri$$

Ce générateur est équivalent, dans le modèle de NORTON, à la combinaison d'un générateur de courant idéal de *courant de court-circuit*  $I_0 = \frac{E}{R}$  et d'une résistance  $R$  en parallèle (on prendra  $G = \frac{1}{R}$ ) :

$$(3.4) \quad i = I_0 - Gu$$

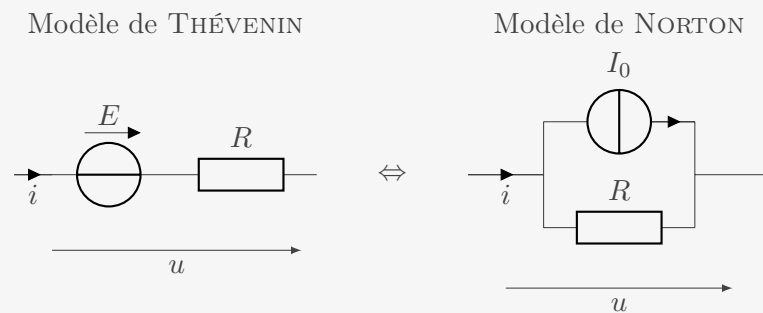
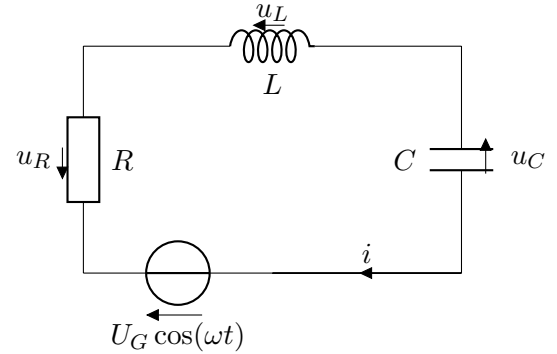


FIGURE 3.1 – Équivalence THÉVENIN-NORTON

### 3.2 Régime transitoires

Mise en équation :

$$\begin{cases} u_C + u_L + u_R = U_G \cos(\omega t) \\ u_R = Ri \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$$



### 3.3 Amplificateur Opérationnel (AO)

#### Définition 15 : L'Amplificateur Opérationnel

Un Amplificateur Opérationnel (AO) est un **circuit intégré** à huit bornes dont 5 sont utilisées en TP. C'est un composant **actif** qui doit être alimenté par un courant stable continu.

#### Propriétés

Les propriétés générales d'un AO :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $V_S \in [-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}]$
- L'intensité de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $I_S \in [-I_{\text{sat}}; I_{\text{sat}}]$

En régime linéaire (avec une boucle de **rétroaction négative**), on a :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est **presque nulle** :  $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $V_S \in ] - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}} [$

Au contraire, en régime saturé (avec une boucle de **rétroaction positive**), on a :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est **quelconque** :  $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est saturée du signe d' $\varepsilon$  :  $V_S \in \{ - V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}} \}$

Enfin, l'A.O idéal a les propriétés suivantes :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont nuls :  $I_- = I_+ = 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est nulle en régime linéaire :  $\varepsilon = 0$

### 3.4 Régimes sinusoïdaux

#### Méthode

#### Formules

**Théorème de MILLMAN** 
$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

**Puissance moyenne** 
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_0 I_0 \cos \varphi}{2}$$

#### Étudier un circuit électrique

Lorsqu'on doit étudier un circuit, il peut être utile de penser aux méthodes suivantes :

- Calculer les impédances équivalentes
- Utiliser des ponts diviseurs
- Appliquer les lois de KIRCHOFF
- Trouver des équivalences THÉVENIN-NORTON
- Appliquer la formule de Millman

#### Théorème 15.1 : Impédance des dipôles usuels

On donne, pour les dipôles usuels, leur impédance en complexes  $\underline{Z}$  :

<b>Dipole</b>	$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$	
<b>Résistance</b>	$\underline{u} = R \cdot \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Résistance}} = R$
<b>Bobine</b>	$\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Bobine}} = jL\omega$
<b>Condensateur</b>	$C \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{i}$	$\underline{Z}_{\text{Condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$

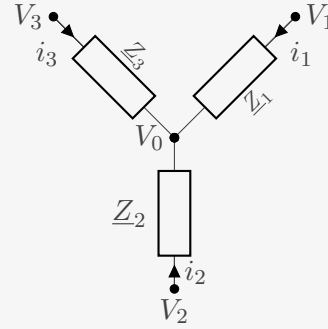
**Preuve 15.1.1** On remarque que pour des fonction complexes, dériver  $f = re^{j(\omega t + \varphi)}$  revient à multiplier  $f$  par  $j\omega$ . On obtient alors immédiatement toutes les formules précédentes en les exprimant bien sous la forme  $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

### Théorème 15.2 : MILLMAN

Le théorème de MILLMAN permet de calculer le potentiel d'un nœud

(3.5)

$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_k \frac{1}{Z_k}}$$



#### 3.4.1 Puissance

##### Définition 16 : Puissance instantanée

La **puissance instantanée** est une fonction du temps :

(3.6)

$$\mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$$

En **convention récepteur**, c'est la puissance reçue par le dipôle.

En **convention générateur**, c'est la puissance cédée par le dipôle.

##### Définition 17 : Energie

L'**énergie** est l'intégrale de la puissance :

(3.7)

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt$$

##### Définition 18 : Puissance moyenne

On s'intéresse plus souvent à la **puissance moyenne**  $\mathcal{P}_m$  sur un intervalle de temps  $\tau$

(3.8)

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{P}(t)dt$$

En général, on prend  $\tau = T$  la période d'une fonction sinusoïdale.

On définira la **valeur moyenne** d'une fonction du temps de cette même manière :

(3.9)

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

### Théorème 18.1 : Valeur efficace

La **valeur efficace** est la valeur continue qui fournirait la même énergie pendant un

même intervalle de temps. Pour une tension  $u(t) = Ri(t)$  :

$$(3.10) \quad U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

La valeur efficace est donc la racine carrée de la moyenne du carré, en anglais *Root Mean Square* (RMS).

**Preuve 18.1.1** Par définition de la valeur efficace, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= U_{\text{RMS}} I_{\text{RMS}} \times T \\ \int_0^T u(t)i(t)dt &= U_{\text{RMS}} \frac{U_{\text{RMS}}}{R} T \\ \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt &= \frac{U_{\text{RMS}}^2}{R} T \\ U_{\text{RMS}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \end{aligned}$$

Pour un régime sinusoïdal,  $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$ , donc :

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

### 3.5 Filtres

#### Définition 19 : Fonction de transfert

La **fonction de transfert**  $\underline{H}$  d'un quadripôle de tension d'entrée  $\underline{v}_e$  et de tension de sortie  $\underline{v}_s$  est définie par :

$$(3.12) \quad \underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

#### Définition 20 : Filtre

Un **filtre** est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend de la pulsation  $\omega$

### 3.5.1 Fonctions de transfert usuelles

1 <sup>er</sup> ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	$\omega_c = \frac{1}{RC}$
	Passe-haut	$\frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$	
2 <sup>e</sup> ordre	Passe-bas	$\frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$
	Passe-haut	$\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	
	Passe-bande	$\frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$	
	Coupe-bande	$\frac{H_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$	

### 3.5.2 Diagrammes de Bode

#### Définition 21 : Gain et phase d'un quadripôle

On peut écrire la fonction de transfert sous la forme polaire :

$$\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

On définit alors le **gain**  $G(\omega)$  comme le rapport des amplitudes d'entrées et de sortie et la **phase**  $\varphi(\omega)$  comme le déphasage entre ces mêmes signaux.

Ainsi :

$$(3.13) \quad G(\omega) = \sqrt{\underline{H}\overline{H}} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}\underline{H}}{\text{Re}\underline{H}}$$



---

**Définition 22 : Diagramme de BODE**

---

Le **diagramme de BODE** d'un quadripôle est l'ensemble des deux tracés en fonction de  $\log(\omega)$  :

- du gain en décibel  $G_{\text{dB}} = 20 \log(G(\omega))$
- de la phase  $\varphi(\omega)$

(ATTENTION)

Il est souvent commode d'avoir recours à une variable réduite comme  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  où  $\omega_0$  est une constante qui permet de simplifier les calculs

---

**Définition 23 : Pulsation de coupure à  $-3$  dB**

---

La **pulsation de coupure**  $\omega_c$  correspond à la valeur de la pulsation pour laquelle le gain maximum  $G_{\text{max}}$  est divisé par  $\sqrt{2}$  :

(3.14)

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

## Chapitre 4

# Mécanique du Point

### Méthode

#### Formules Usuelles

##### Interactions fondamentales

Force Gravitationnelle  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_r$

Force Électrostatique  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2}$

##### Forces usuelles

Poids  $\vec{P} = m \vec{g}$

Force de LORENTZ  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Force de Rappel  $\vec{F} = k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$

##### Énergies usuelles

Energie potentielle générale  $E_p(A) - E_p(B) = W_{A \rightarrow B}$

Energie potentielle gravitationnelle  $E_p = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r_{AB}}$

Energie potentielle de pesanteur  $E_p = mgh$

Energie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Energie potentielle élastique  $E_{p,e} = \frac{k(l - l_0)^2}{2}$

### 4.1 Étude cinétique

Définition 24 : Force de Rappel

Cette force est déterminée expérimentalement, au voisinage d'une longueur d'équilibre  $l_0$ , par :

$$(4.1) \quad \vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}_{\text{ressort}}$$

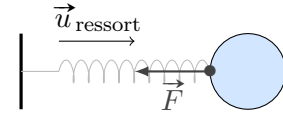


FIGURE 4.1 – Force de rappel d'un ressort

## 4.2 Approche Énergétique

### Définition 25 : Système conservatif

Un **système conservatif** est un système dont l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  est constante.

### Définition 26 : Force conservative

C'est une force dont le travail entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend pas du chemin emprunté.

#### 4.2.1 Puissance et travail

### Définition 27 : Puissance d'une force

La **puissance** caractérise la contribution d'une force  $\vec{F}$  sur un objet en mouvement à une vitesse  $\vec{v}$ .

$$(4.2) \quad \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

### Définition 28 : Travail d'une force

Le travail est la somme des contributions d'une force  $\vec{F}$  sur un objet en mouvement :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \delta W &= \mathcal{P} dt \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

#### 4.2.2 Énergie cinétique

### Définition 29 : Énergie cinétique

C'est la première énergie qu'on définit :

$$(4.5) \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Pour le **théorème de la puissance cinétique**, cf théorème 37.4 page 35. Le théorème de l'énergie cinétique a été vu en première\* :

#### Théorème 29.1 : Théorème de l'énergie cinétique

Il dérive de l'expression de l'énergie mécanique :

$$(4.6) \quad \underbrace{\frac{dE_m(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action non conservatives}}} = \frac{dE_c(\Sigma)}{dt} + \underbrace{\frac{dE_p(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action conservatives}}}$$

#### Théorème 29.2

On peut déduire du théorème précédent que

$$(4.7) \quad \begin{array}{lll} \text{La variation d'énergie cinétique} & \text{est égale à} & \text{la somme des travaux des forces} \\ E_c(B) - E_c(A) & = & \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i) \\ dE_c & = & \delta W_{A \rightarrow B} \end{array}$$

(ATTENTION) Pour l'énergie cinétique, on prend toutes les forces en comptes. Conservatives ou non.

### 4.2.3 Énergie potentielle

#### Définition 30 : Énergie potentielle

L'énergie potentielle dérivant d'action conservatives, on peut la définir ainsi, en définissant un point  $O$  comme l'origine :

$$(4.8) \quad E_p(M) = E_p(O) - W_{O \rightarrow M}(\vec{P})$$

En pratique, sur Terre,  $E_p = mgh$

### 4.3 Forces centrales

#### Définition 31 : Force centrale

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné, une force est **centrale** si elle pointe en permanence vers un point fixe de  $\mathcal{R}$ .

\*. cf page 418 du livre *Physique !* de Jérôme MAJOU

Un champ de force centrale newtonien est défini par

$$(4.9) \quad \vec{F}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad E_p(r) = \frac{k}{r}$$

### Théorème 31.1 : Loi des aires

Une force centrale présente un moment nul, donc le moment cinétique d'un objet soumis exclusivement à une force centrale est constant d'après le Théorème du Moment Cinétique (TMC) (théorème 37.3 page 35).

La trajectoire est alors plane et vérifie :

$$(4.10a) \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m} = C$$

D'où on déduit, en définissant  $\mathcal{V}$  comme étant la vitesse aréolaire d'un point de masse  $m$  :

$$(4.10b) \quad \boxed{\mathcal{V} = \frac{\sigma_O}{2m} = \frac{C}{2}}$$

**Preuve 31.1.1** Les forces centrales ont un moment nul. Donc, d'après le TMC :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = 0$$

Donc  $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{constante}}$ . Or, par définition du moment cinétique (cf. équation (5.6) page 33) :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= mr \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{aligned}$$

### Théorème 31.2 : Lois de KEPLER

Les trois lois de KEPLER ont été définies expérimentalement vers la fin du XVI<sup>e</sup> siècle :

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont l'un des foyers est le soleil
- Pendant un même intervalle de temps  $t$ , l'aire balayée par la trajectoire d'une planète est constante (loi des aires)
- La période  $T$  de révolution d'une planète est liée au demi grand axe  $a$  de sa trajectoire elliptique :

$$(4.11) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_{\text{Soleil}}}$$

## 4.4 Dynamique en référentiel non galiléen

### Définition 32 : Référentiel galiléen

On dit qu'un référentiel  $\mathcal{R}$  est **galiléen** si les interactions physiques suffisent à justifier les mouvements

(ATTENTION) Cette définition limite la caractérisation d'un référentiel galiléen à la précision de nos expérimentations

### Définition 33 : Mouvement relatif de deux référentiels

Le mouvement d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}$  est caractérisé par une vitesse de translation ( $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ) et une vitesse angulaire de rotation ( $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ).

#### Théorème 33.1 : Dérivation d'un vecteur dans deux référentiels

Si  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  est le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  relativement à  $\mathcal{R}'$ , alors la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{x}$  est

$$(4.12) \quad \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{x}$$

#### 4.4.1 Loi de composition des vitesses

##### Théorème 33.2 : Composition des vitesses

La vitesse d'un point  $M$  s'exprime, dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  en mouvement relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  galiléen, par :

$$(4.13) \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{vitesse de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$$

#### 4.4.2 Loi de composition des accélérations

##### Théorème 33.3 : Composition des accélérations

L'accélération d'un point  $M$  s'exprime, dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en mouvement relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, par :

$$(4.14) \quad \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{a}(O')_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{Accélération d'entraînement}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{Accélération de CORIOLIS}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge [\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}]$$

#### 4.4.3 Forces d'inerties

Les forces d'inerties varient suivant le référentiel. On en distingue 4 :

Force d'inertie de translation	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{translation}} = -m \vec{a}(O)_{\mathcal{R}}$
Force d'inertie centrifuge	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{centrifuge}} = m \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 r \vec{u}_r$
Force d'inertie de rotation différentielle	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{différentielle}} = -m \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$
Force d'inertie complémentaire de CORIOLIS	$\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{coriolis}} = -2m \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$

### Frottement solide

#### Théorème 33.4 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle  $\vec{T}$  en fonction du frottement solide et de la composante normale  $\vec{N}$  :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Statique} & \vec{T}_0 \leq \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \stackrel{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right.$$

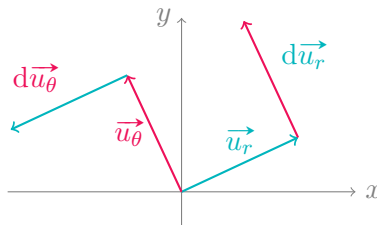
## Chapitre 5

# Mécanique du solide

### 5.1 Préambule

#### 5.1.1 Dérivée d'un vecteur

Ce problème est courant quand on a les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  à dériver. Il suffit de les décomposer selon la base  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  en utilisant les fonctions cosinus et sinus. On obtient alors :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{d(\vec{u}_r)}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d(\vec{u}_\theta)}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{cases}$$


D'où, en utilisant que  $\frac{d(\vec{u})}{dt} = \frac{d(\vec{u})}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ , le résultat  $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}}{d\theta}$

#### 5.1.2 Dérivée en coordonnées polaires

$$(5.2) \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

#### Théorème 33.5 : Relation de VARIGNON

Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir : la formule de « **Babar** »

$$(5.3) \quad \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

**Rappel** : La quantité de mouvement  $\vec{P} = m \vec{v}$  se conserve. Cette idée est souvent utile en mécanique.

### 5.2 Définitions

#### Définition 34 : Moment $\vec{\mathcal{M}}$ d'une force

On définit le **moment**  $\vec{\mathcal{M}}$  (équivalent couple  $\vec{\Gamma}$ ) d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  sur

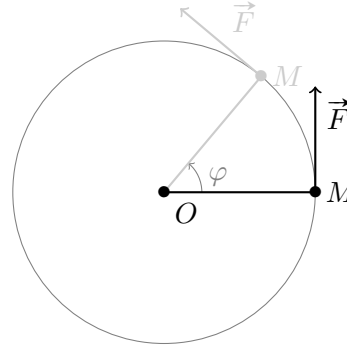


un levier de centre  $O$  :

(5.4)

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Moment      Couple



### Définition 35 : Torseur cinétique

C'est un torseur tout simple  $[\vec{\sigma}, \vec{P}]$

(5.5)

$$\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}$$

d'où

$$\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge M\vec{v}$$

**Rappel** : La vitesse de rotation  $\omega$  permet de déterminer la vitesse  $\vec{v}$ . Pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  :

$$\text{D'après Varignon, on a} \quad \vec{v}(M) = 0 + \vec{\omega}(\Sigma) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\text{D'où} \quad \vec{\omega}(\Sigma) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_{\Delta}$$

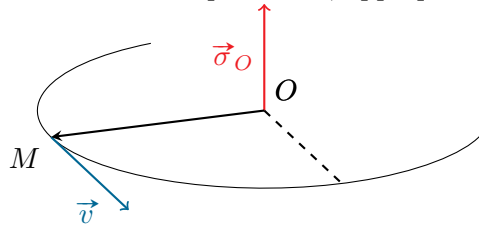
$$\text{Dans le mouvement précédent} \quad v(M) = \omega \cdot OM_{\text{rayon}}$$

### Définition 36 : Moment cinétique $\vec{\sigma}_O$

Le moment cinétique caractérise le mouvement de rotation d'un point par rapport à un autre. Il suffit de prendre la relation de notre torseur précédent, appliqué en  $O$  sans mouvement :

(5.6)

$$\vec{\sigma}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$



## 5.3 Théorèmes de Koëinig

### Théorème 36.1 : 1<sup>e</sup> théorème de Koëinig

C'est le torseur cinétique appliquée en  $A$  par rapport à  $G$  le centre du référentiel barycentrique :

$$(5.7) \quad \vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}_{Br}} + \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}(G)$$

Moment cinétique du référentiel barycentrique

### Théorème 36.2 : 2<sup>e</sup> théorème de Koëinig

Une application du premier théorème à l'énergie cinétique :

$$(5.8) \quad E_{c,R} = E_{c,Br} + \frac{1}{2} M (\vec{v}(G))^2$$

## 5.4 Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide caractérise la répartition de la masse dans un solide.

### Définition 37 : Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide  $\Sigma$  par rapport à un axe  $\Delta$  est :

$$(5.9) \quad J_{\Delta} = \iiint_{P \in \Sigma} d(P, \Delta)^2 dm = \iiint_{P \in \Sigma} d(P, \Delta)^2 \rho dV_P$$

Où  $d(x, \Delta)^2$  est la distance à l'axe  $\Delta$  d'un volume élémentaire  $dV$  de masse volumique  $\rho$  dans le solide  $\Sigma$ .

### Théorème 37.1

On relie la vitesse de rotation d'un axe  $\Delta$  du solide à  $J_{\Delta}$  par

$$(5.10) \quad \boxed{\vec{\sigma} = J_{\Delta} \cdot \omega \vec{u}_{\Delta}}$$

et on peut alors calculer l'énergie cinétique :

$$(5.11) \quad E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$



## 5.5 Théorèmes de dynamique

Ce sont les 3 théorèmes les plus importants.

### Théorème 37.2 : Théorème de la Résultante Cinétique (TRC)

C'est en réalité le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) qu'on voit en terminale et en première, mais la version originale avec la quantité de mouvement.

$$(5.12) \quad \frac{d \overbrace{\vec{P}_{R_g}}^{m \vec{v}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \text{ est équivalent à } \sum \vec{F} = m \vec{a}$$

### Théorème 37.3 : Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Pour un couple  $\vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$  issu des forces extérieures appliquées en  $A$  et un moment cinétique  $\vec{\sigma}(A)$  appliqué en un point  $A$ , on a :

$$(5.13a) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$(5.13b) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(A)$$

C'est un équivalent du PFD, mais qui prend en compte la rotation, c'est à dire le moment cinétique. Pour les définitions du moment d'une force et du moment cinétique, on se réfèrera à la formule (5.6). On est souvent amené à utiliser cette équation en conjonction avec l'équation (5.10) du moment d'inertie.

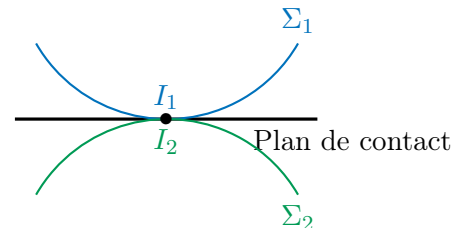
### Théorème 37.4 : Théorème de la puissance cinétique

$$(5.14) \quad \frac{dE_c}{dt} = \sum_i \underbrace{P_i}_{\text{Puissances des forces qui travaillent}}$$

## 5.6 Solides en contact

On définit la **vitesse de glissement instantané** entre deux solides  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  par :

$$(5.15) \quad \boxed{\vec{v}_{\text{glissement}} = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)}$$



### Définition 38 : Roulement sans glissement

Deux conditions :

- $\vec{v}_{\text{glissement}} = 0$

- $\vec{\omega}_{/\Sigma_2}(\Sigma_1)$  est parallèle au **plan de contact**

### Théorème 38.1 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle  $\vec{T}$  en fonction du frottement solide et de la composante normale  $\vec{N}$  :

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Statique} \quad \vec{T}_0 = \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} \quad \vec{T} \quad \left| \begin{array}{l} \geq \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \\ \underset{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

# Chapitre 6

## Optique

### 6.1 Optique géométrique

#### Méthode

#### Formules de conjugaison

$$\text{Miroir} \quad \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\text{Lentille} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

#### Techniques

- Les dessins miroirs peuvent être « développés » pour obtenir la représentation d'une lentille
- Règles de construction pour les dioptries et les miroirs
  - Un rayon passant par le centre n'est pas dévié
  - Un rayon incident parallèle à l'axe passe, après son passage par le système optique, par le foyer image
  - Un rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique
  - Deux rayons parallèles à l'axe se croisent au foyer image
  - Deux rayons se croisant au foyer objet ressortent parallèles du système optique
- Ne pas oublier le principe de retour inverse de la lumière

#### 6.1.1 Stigmatisme et aplanétisme

Définition 39 : Système stigmatique

Un système optique est dit **rigoureusement stigmatique** pour le couple de points  $(A; A')$  si tous les rayons issus de  $A$  passent par  $A'$  après avoir été déviés par le système. Si  $A'$  est une tâche assez petite au lieu d'un point, on parle de **stigmatisme approché**

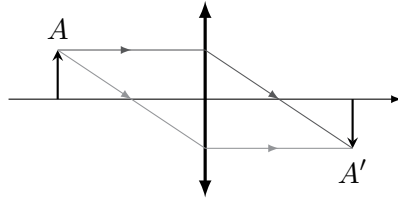


FIGURE 6.1 – Système rigoureusement stigmatique

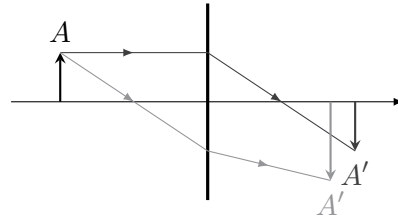


FIGURE 6.2 – Système non stigmatique

#### Définition 40 : Système aplanétique

Soit  $(S)$  un système optique. Soient  $A$  et  $A'$  deux points de l'axe optique conjugués par  $(S)$  et soit  $B$  un point du plan transverse de  $A$ . Le système est dit **aplanétique** pour  $A$  si  $B'$ , le conjugué de  $B$  par  $(S)$ , est dans le plan transverse de  $A'$ .

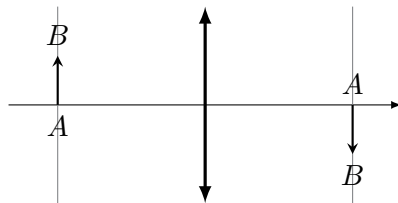


FIGURE 6.3 – Système rigoureusement aplanétique

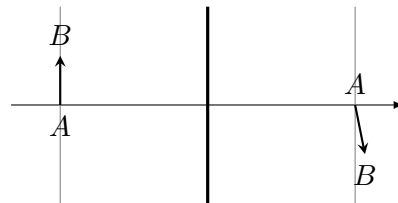


FIGURE 6.4 – Système non aplanétique

#### Définition 41 : Conditions de GAUSS

Les conditions de GAUSS permettent de vérifier l'aplanétisme et le stigmatisme approchés :

- Les rayons lumineux font un **angle petit** avec l'axe du système  
On parle de **rayons paraxiaux**
- Les rayons lumineux rencontrent les dioptries ou les miroirs au **voisinage de leur sommet**
- L'angle d'incidence des rayons sur les dioptries ou les miroirs est **petit**

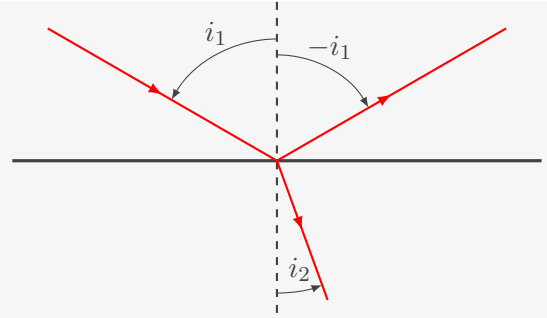
#### 6.1.2 Réflexion et réfraction

##### Théorème 41.1 : Loi de DESCARTES

La loi de DESCARTES stipule que l'angle de réflexion est le même que l'angle d'incidence. De plus, la loi permet de calculer l'angle du rayon réfracté :

(6.1)

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



## 6.2 Optique ondulatoire

### Méthode

#### Définitions

$$s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Périodicité temporelle  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Périodicité spatiale  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$c = \lambda\nu$   $\lambda = cT$

Vibration Complexe  $\underline{s}(M, t) = A(M) e^{i(\varphi(M) - \omega t)}$

Amplitude Complexe  $\underline{a}(M) = A(M) e^{i\varphi(M)}$

Éclairement (cf. (6.6))  $\mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$

#### Propriétés

$$s(M, t) = \text{Re}(\underline{s}(M, t))$$

$$A(M) = |\underline{a}(M)| = |\underline{s}(M, t)|$$

$$\varphi(M) = \arg(\underline{a}(M))$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} K |\underline{a}(M)|^2 = \frac{1}{2} K |\underline{s}(M, t)|^2$$

### 6.2.1 Modèle scalaire des ondes lumineuses

#### Définition 42 : Onde Électromagnétique (OEM)

Une OEM est le couple  $(\vec{E}, \vec{B})$ . C'est l'oscillation couplée du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ .

#### Définition 43 : Vibration lumineuse

Le modèle ondulatoire de la lumière étant plus vieux que les OEMs, la **vibration lumineuse**  $s(M, t)$  est une composante quelconque du champ électromagnétique. C'est-à-dire que  $s(M, t) = \vec{E}$  ou  $\vec{B}$ .

### Théorème 43.1 : Superposition

On admet que la vibration lumineuse en un point  $M$  à l'instant  $t$  est la somme des toutes les vibrations lumineuses en ce point :

$$(6.2) \quad s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

### Chemin optique

#### Définition 44 : Chemin optique

Soit un rayon lumineux passant par les points  $M$  et  $N$  en un temps  $t_{MN}$ . Le **chemin optique**  $(MN)$  parcouru par la lumière est :

$$(6.3) \quad (MN) = c \cdot t_{MN}$$

En milieu homogène où l'onde se déplace à une vitesse  $v$ , si  $MN$  est la distance parcourue, on a  $t_{MN} = \frac{MN}{v}$ .

### Théorème 44.1 : Déphasage dû à la propagation

Soient deux point  $M$  et  $N$  de chemin optique  $(MN)$ . Le **retard de phase** en  $N$  par rapport à la phase au point  $M$  est :

$$(6.4) \quad \varphi(N) = \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) = \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN)$$

**Preuve 44.1.1** Le retard en temps accumulé en  $N$  est de  $t_{MN}$ . Donc :

$$s(N, t) = \underbrace{s(M, t - t_{MN})}_{\text{Vibration en } M, t_{MN} \text{ secondes plus tôt}}$$

Donc :

$$A(N) \cos(\omega t - \varphi(N)) = A(M) \cos\left(\omega(t - t_{MN}) - \varphi(M)\right)$$

Ce qui implique :

$$-\varphi(N) = -\omega t_{MN} - \varphi(M)$$

Or par définition de (6.3) :  $t_{MN} = \frac{(MN)}{c}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(N) &= \varphi(M) + \frac{\omega}{c}(MN) \\ &= \varphi(M) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(MN) \end{aligned}$$



Avec  $\lambda_0 = cT = c \frac{2\pi}{\omega}$  la longueur d'onde dans le vide. □

### Théorème 44.2 : Réflexion métallique

La lumière subit un déphasage de  $\pi$  lors de sa réflexion dans un matériau. Le chemin optique se voit modifié de  $\frac{\lambda_0}{2}$  :

$$(6.5a) \quad \varphi(\text{Avant réflexion}) = \varphi(\text{Après réflexion}) + \pi$$

$$(6.5b) \quad \varphi(\text{Avant réflexion}) = \varphi(\text{Après réflexion}) + \frac{\lambda_0}{2}$$

### Éclairement et intensité

Les récepteurs de lumière (comme l'œil et les capteurs CDD) sont sensibles à une valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent. Il convient alors de définir l'éclairement pour décrire ce que l'on voit.

#### Définition 45 : Éclairement

Les capteurs photo-sensibles ayant un taux de rafraîchissement lent relativement à la vitesse de la lumière et à sa pulsation  $\omega$ , ils font une moyenne sur une période de la vibration reçue. C'est alors qu'on définit l'éclairement :

$$(6.6) \quad \mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

## 6.2.2 Superposition d'ondes lumineuses

### Lumière monochromatique

#### Définition 46 : Lumière monochromatique

La **lumière monochromatique** est la forme la plus idéale de vibration. Elle est « purement » sinusoïdale :

$$(6.7) \quad s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Cette vibration présente une périodicité temporelle et une périodicité spatiale :

- Périodicité temporelle :

caractérisée par la **période**  $T$ , la fréquence  $\nu = \frac{1}{T}$ , et la **pulsation**  $\omega$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Périodicité spatiale :

caractérisée par la **longueur d'onde**  $\lambda$  (période spatiale), le **nombre d'onde**

$\sigma = \frac{1}{\lambda}$  (fréquence spatiale), et le **module d'onde** (pulsation spatiale)  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On les relie avec la vitesse de propagation :  
 Pour la lumière dans le vide :

$$(6.8) \quad \lambda_0 = cT$$

### Interférences

Prenons deux sources  $S_1$  et  $S_2$ , de vibrations respectives  $s_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$  et  $s_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$ .

#### Théorème 46.1 : Formule de FRESNEL

Pour le système ainsi défini, l'éclairement résultant d'interférences est donné par la **formule de FRESNEL** :

$$(6.9) \quad \begin{aligned} s(M, t) &= s_1(M, t) + s_2(M, t) \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \underbrace{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}_{\text{Nul si } \omega_1 \neq \omega_2} \end{aligned}$$

Ainsi, le terme d'interférence  $2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$  n'est valable que si :

- Les ondes 1 et 2 doivent être de même pulsation (i.e  $\omega_1 = \omega_2$ )
- Les sources  $S_1$  et  $S_2$  doivent être cohérentes
- Le déphasage ne doit pas dépasser la longueur de cohérence  $l_c$
- Le déphasage doit être quasiment constant sur une durée du temps de réponse du détecteur utilisé

**Preuve 46.1.1** On exprime l'éclairement total en  $M$ ,  $\mathcal{E}(M)$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= K \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle \\ &= K \langle (s_1(M, t))^2 \rangle + K \langle (s_2(M, t))^2 \rangle + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \\ &= \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \end{aligned}$$

Étudions ce deuxième terme  $\mathcal{E}_{12}(M) = 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle$  :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

D'après la formule de trigonométrie (10.3) page 76 ( $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(M) &= \frac{1}{2} \times 2K A_1(M) A_2(M) \left( \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \right) \end{aligned}$$

La valeur moyenne d'un cosinus étant nulle, on sait de plus que :

$\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle = 0$  car  $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ , et que  
 $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$ .

Si on considère que  $\omega_1 - \omega_2 = 0$ , alors le deuxième terme  $\mathcal{E}_{12}(M)$  devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{12}(M) &= K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \\ &= 2 \sqrt{\frac{K}{2} A_1(M)^2} \sqrt{\frac{K}{2} A_2(M)^2} \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \\ &= 2 \sqrt{\mathcal{E}_1(M) \mathcal{E}_2(M)} \langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle\end{aligned}$$

Comme précédemment,  $\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$  est constant.

Alors,  $\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \rangle = \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$  □

**Remarque :** en complexe, ça va beaucoup plus vite.

### 6.2.3 Trous d'YOUNG

Étudions le dispositif suivant : deux fentes ( $F_1$ ) et ( $F_2$ ) sont éclairées par une source  $S$  à l'infini formant un angle  $\alpha_0$  avec l'origine.

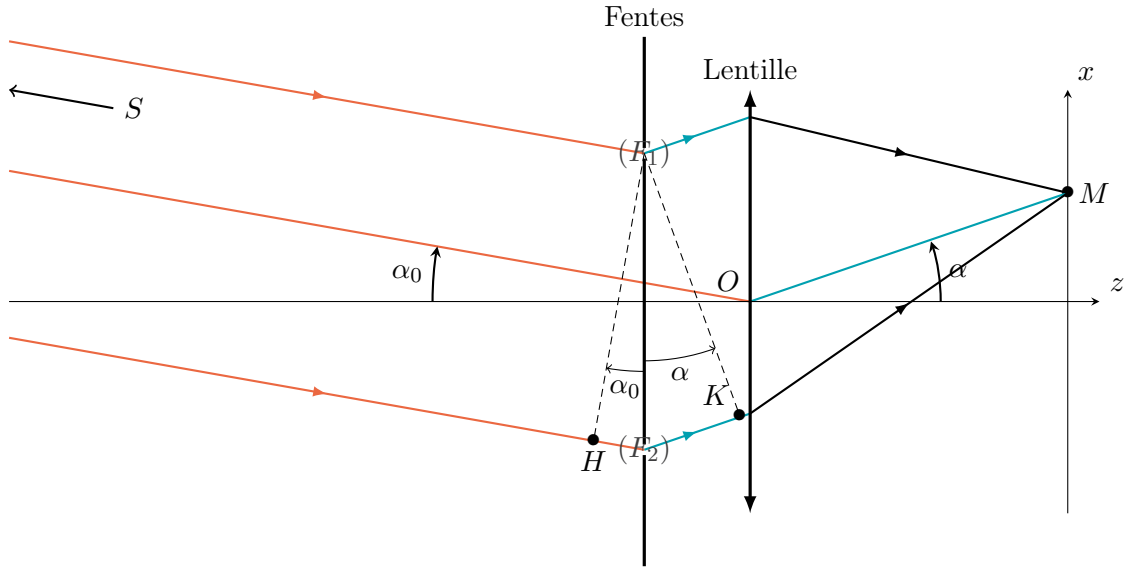


FIGURE 6.5 – Dispositif des trous de YOUNG

Quelques remarques : Puisque  $M$  est dans le plan transversal du foyer de la lentille, on sait que les rayons de cette couleur sont parallèles avant de passer par la lentille.

De plus, la présence de la lentille  $F'$  impose que l'on soit dans les conditions de GAUSS pour l'angle  $\alpha$  (cf. définition 41 page 38 pour les conditions de GAUSS).

Ainsi, on peut écrire l'approximation

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

avec  $f'$  la distance focale de la lentille  $F'$ .

Pour nous aider dans les calculs, on note  $H$  et  $K$  les projetés orthogonaux de ( $F_1$ ). Calculons la différence de marche  $\delta(M)$  :

$$\begin{aligned}\delta(M) &= (SF_2M) - (SF_1M) \\ &= (SH) + (HF_2) + (F_2K) + (KM) - ((SF_1) + (F_1M))\end{aligned}$$

Les chemins optiques en couleur se soustraient. Il nous reste :

$$\delta(M) = (HF_2) + (F_2K)$$

(ATTENTION)

Il ne faut pas omettre de préciser pourquoi  $(KM)$  et  $(F_1M)$  sont identiques. En effet :  $H$  et  $(F_1)$  sont dans le même plan d'onde car ils viennent directement de  $S$  qui est à l'infini et qui émet une onde plane. Mais le plan contenant  $K$  et  $(F_1)$  n'est pas *a priori* un plan d'onde du fait que les ondes issues des fentes ne sont plus planes. Pour raisonner, on dira que  $M$  étant une image à l'infini, les plans d'ondes relatifs à  $M$  sont les plans perpendiculaires à ses rayons. Maintenant, en remarquant qu'on peut reporter les angles  $\alpha$  et  $\alpha_0$  (cf. le schéma), les calculs de  $(HF_2)$  et  $(F_2K)$  se font facilement :

$$\begin{aligned}(HF_2) &= n_{\text{air}} HF_2 \\ &= n_{\text{air}} a(-\sin \alpha_0) \\ &= -n_{\text{air}} a \sin \alpha_0 \\ &\approx -n_{\text{air}} a \alpha_0 (HF_2)\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(F_2K) &= n_{\text{air}} a \sin \alpha \\ &\approx n_{\text{air}} a \alpha \\ (F_2K) &\approx n_{\text{air}} a \frac{x}{f'}\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat :

$$\begin{aligned}\delta(M) &\approx n_{\text{air}} a \left( \frac{x}{f'} - \alpha_0 \right) \\ i &= \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}} a}\end{aligned}$$

#### 6.2.4 Diffraction

##### Définition 47 : Principe d'HUYGENS-FRESNEL

Tout point  $P$  d'une surface  $\Pi$  issu d'une même source  $\mathcal{S}$  agit comme une source secondaire d'amplitude proportionnelle à celle de la source.

La vibration lumineuse en un point donné est la somme des vibrations émises par l'ensemble des sources secondaires.

$$(6.12) \quad \underline{a(M)} = \mathcal{C}_0 \iint_{P \in \Pi} \frac{\underline{a(P)}}{PM} e^{i \overbrace{k_0 PM}^{\varphi(M)}}$$

##### Théorème 47.1 : Diffraction de FRAUNHOFER

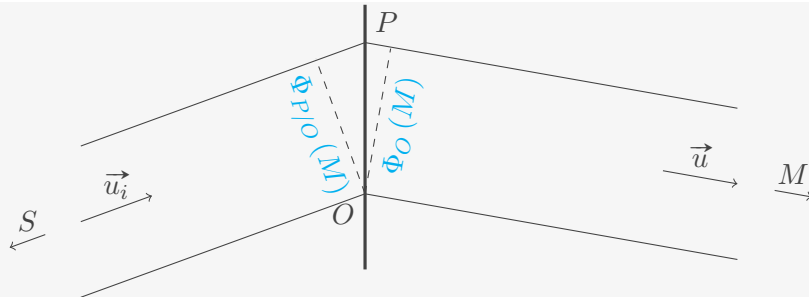


FIGURE 6.6 – Objet diffractant

$$(6.13) \quad \Phi_{P/O}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP} + \underbrace{\arg(t(p))}_{\text{Si l'objet est quelconque}}$$

En remaniant l'équation (6.12) d'HUYGENS-FRESNEL avec cette nouvelle phase :

$$(6.14) \quad \underline{a}(M) = \frac{\mathcal{C}_0}{OM} A(P) e^{i\Phi_O(M)} \iint \underline{t}(P) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0} (\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP}}$$

(ATTENTION) Ne pas oublier le  $\frac{2\pi}{\lambda_0}$  !

### 6.2.5 Réseaux

#### Théorème 47.2 : Formule des réseaux

Dans un réseau

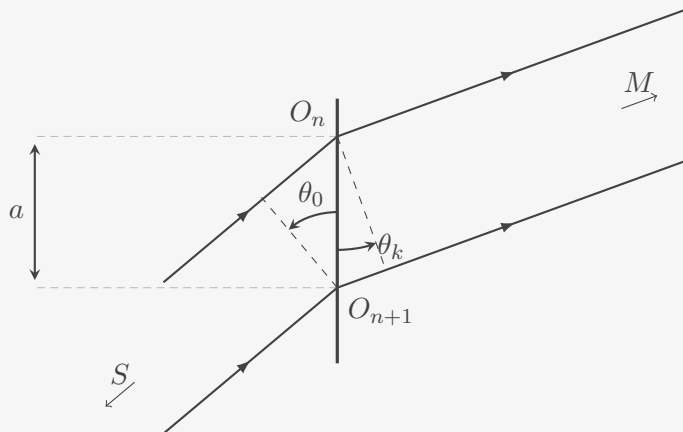


FIGURE 6.7 – Deux fentes  $O_n$  et  $O_{n+1}$  d'un réseau

$$(6.15) \quad \sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$$

$k$  est appelé **ordre de diffraction**

## Chapitre 7

# Électromagnétisme

### Méthode

#### Champ électrostatique

Pour trouver le champ  $\vec{E}$  :

1. Appliquer le théorème de Gauss
2. Appliquer les formule de Coulomb (7.2a)

### 7.1 Électrostatique

#### 7.1.1 Loi de COULOMB

##### Définition 48 : Force de COULOMB

C'est la force électromagnétique entre deux charges  $q_A$  et  $q_B$

$$(7.1) \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

##### Théorème 48.1

On peut définir la force de COULOMB comme  $\vec{F} = q_B \vec{E}(B)$  où :

$$(7.2a) \quad \vec{E}(B) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}$$

Mais on retiendra :

$$\begin{aligned}
 (7.2b) \quad \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{dV}{\|\vec{PM}\|^3} & \rho(M) &= \frac{dQ(M)}{dV} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \frac{dS}{\|\vec{PM}\|^3} & \sigma(M) &= \frac{dQ(M)}{dS} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \lambda \frac{dl}{\|\vec{PM}\|^3} & \lambda(M) &= \frac{dQ(M)}{dl}
 \end{aligned}$$

### 7.1.2 Propriétés du champ électrostatique

#### Théorème 48.2 : Principe de superposition

Soient  $n$  particules  $A_1, A_2, \dots, A_n$  immobiles dans l'espace.

Le champ électrostatique résultant est la somme des champs engendrés par ces particules :

$$(7.3) \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{A_i}(M)$$

#### Théorème 48.3 : Symétries

Le champ  $\vec{E}$  est symétrique pour une distribution symétrique des charges.

On en déduit que le champ  $\vec{E}$  est colinéaire aux plans de symétries des distributions des charges, et orthogonal aux plans d'anti-symétrie.

### 7.1.3 Circulation du champ électrostatique

#### Théorème 48.4 : Circulation d'un champ

Soit  $q_A$  une charge située en  $A$ . Soit  $\vec{E}_A$  le champ électrostatique créé par  $q_A$ .

La circulation de  $\vec{E}_A$  le long d'un chemin  $C \rightarrow D$  est

$$(7.4a) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\vec{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\vec{D}}$$

D'après le théorème de superposition, on peut dire que la circulation d'un champ créé par une **distribution quelconque de charges** est

$$(7.4b) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\vec{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\vec{D}}$$

La circulation de  $\vec{E}$  ne dépend donc pas du chemin emprunté, mais seulement des points de départs et d'arrivée. On va pouvoir définir un potentiel

#### Définition 49 : Potentiel Electrostatique

Le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  est défini tel que

$$\mathcal{C}_{M \rightarrow N}(\vec{E}) = V(M) - V(N)$$

Ainsi, **potentiel électrostatique**  $V(M)$  créé par une charge  $q_A$  en un point  $A$  est donné par

(7.5) 
$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} + \text{constante}$$

#### Théorème 49.1 : Potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique**  $V(M)$  est lié au champ  $\vec{E}(M)$  par la relation :

(7.6) 
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

(ATTENTION) Pour un champ  $\vec{E}(M)$  donné,  $V(M)$  n'est pas unique.

#### Théorème 49.2 : Energie potentielle

L'**énergie potentielle** d'une charge ponctuelle  $q$  soumise à la force exercée par un champ  $\vec{E}$  de potentiel  $V$  est

(7.7) 
$$E_p(M) = qV(M)$$

### 7.1.4 Flux du champ électrostatique

#### Théorème 49.3 : Équation de MAXWELL-GAUSS

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Gauss).

Le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface orientée d'un volume est proportionnelle à la charge contenue dans ce volume :

(7.8) 
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

L'objectif est de trouver un volume tel que  $\vec{E}$  ne dépende d'aucune variable de l'intégrale  $\oiint_S d\vec{S}$ . Par exemple,  $\oiint_{\theta,z} E \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$ , où on peut sortir  $E \vec{u}_r$ . En général, ce

théorème est très utile avec les symétries.

(ATTENTION) Ce sont des surfaces qu'on étudie avec le théorème de GAUSS. Pas des volumes...

### 7.1.5 Dipôle électrostatique

Définition 50 : Dipôle électrostatique



On appelle **dipôle électrostatique** le système de deux charges ponctuelles opposées ( $q$  et  $-q$ ) situées en deux points  $N$  et  $P$  tels que  $\|\overrightarrow{NP}\|$  soit très petit devant les autres distances envisagées.

### Définition 51 : Moment dipolaire

Le **moment dipolaire**  $p$  d'un dipôle est défini par :

$$(7.9) \quad \vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$



FIGURE 7.1 – Moment dipolaire

### Théorème 51.1 : Potentiel électrostatique d'un dipôle

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par un dipôle électrostatique est

$$(7.10) \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right)$$

### Théorème 51.2 : Potentiel créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire  $p$  :

$$(7.11) \quad V(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

### Théorème 51.3 : Champ électrique créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire  $p$  :

$$(7.12) \quad \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta}{r^3}$$

### Théorème 51.4 : Force et moment d'un champ uniforme sur un dipôle

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle électrostatique est

$$(7.13) \quad \vec{F} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P)$$

Quand le champ est uniforme,  $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$ , donc  $\vec{F} = 0$ , et la résultante des forces est nulle.

Il y a néanmoins un couple  $\mathcal{M}_0$  qui s'applique sur le dipôle en son centre 0 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 &= q \left( \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} \right) \wedge \vec{E} \\ &= q \overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \\ \mathcal{M}_0 &= \vec{p} \wedge \vec{E}\end{aligned}$$

Le dipôle électrostatique va donc chercher à s'aligner avec le champ  $\vec{E}$ .

## 7.2 Magnétostatique

### 7.2.1 Champ magnétique

#### Définition 52 : Densité Volumique de Courant

La **densité volumique de courant** décrit le mouvement d'ensemble des particules de charges  $q$  passant à travers une surface élémentaire orientée  $dS_M$ .

Pour une surface élémentaire  $dS$  décrite par son vecteur normal  $d\vec{S}$ , le courant électrique  $di$  à travers cette surface est relié à  $\vec{j}$  par

$$di = \vec{j} \cdot d\vec{S} \qquad i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Un courant électrique est un débit de charges électriques à travers une surface orientée. Si on note  $n$  le nombre de charges  $q$  par unité de volume :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v}$$

Ou encore, la troisième définition qu'on peut déduire :

$$d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M dt$$

#### Théorème 52.1 : BIOT et SAVARD

La formules de BIOT et SAVART permet de calculer des champs  $\vec{B}$  de manière plus directe qu'avec les équations de Maxwell. La contribution au champ  $\vec{B}$  d'un circuit est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{Circuit}} \frac{i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

(ATTENTION) Ce théorème est désormais hors-programme

### Théorème 52.2 : Équation de MAXWELL-AMPÈRE

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Ampère).

(ATTENTION) Elle n'est valable que si le deuxième terme  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}\right)$  est nul ou négligeable!

(7.17)

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{Enlacé}}$$

### Définition 53 : Force de LORENTZ

C'est la force subit par un charge  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  dans des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

(7.18)

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

### Théorème 53.1 : Force de LAPLACE

On la revoit au théorème 58.5 page 58.

La force de LAPLACE existe sous deux formes, et on voit ici la forme intégrale qui caractérise les effets d'un champs  $\vec{B}$  sur un circuit, elle vient de la force de LORENTZ cf. équation (7.18) page 51

(7.19)

$$\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = \int_{M \in \text{Circuit}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

## 7.2.2 Dipôle Magnétique

### Définition 54 : Moment magnétique

Le **moment magnétique**  $\vec{\mathcal{M}}$  d'une distribution de courant d'intensité  $I$ , de surface  $S$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est :

(7.20)

$$\vec{\mathcal{M}} = I S \vec{n}$$

Son unité est en  $A \cdot m^2$

### Définition 55 : Dipôle magnétique

Un **dipôle magnétique** est une distribution de courant tel que :

- $\vec{\mathcal{M}}$  non nul
- La taille caractéristique  $a$  est infiniment petite devant les autres longueurs

## Action du dipôle magnétique sur l'extérieur

### Théorème 55.1 : Potentiel vecteur et champ magnétique

Le potentiel vecteur créé par un dipôle en  $M$  est, en notant  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$(7.21) \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Le champ magnétique créé par ce même dipôle en  $M$  est

$$(7.22) \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}}}{r^5}$$

$$(7.23) \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

### Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

#### Théorème 55.2

Un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  plongé dans un champ  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est soumis à un couple de moment

$$(7.24) \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

L'énergie potentielle qui en résulte est :

$$(7.25) \quad E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

## 7.3 Équations de MAXWELL

### 7.3.1 Principe de conservation de la charge

#### Théorème 55.3 : Équation de conservation de la charge

Il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique. Ce postulat donne lieu à l'équation de conservation de la charge :

$$(7.26) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

### 7.3.2 Les équations de MAXWELL

Ces 4 équations sont les plus importantes. À elles 4 elles permettent de retrouver intégralement le programme de première année.

#### Théorème 55.4 : Les Équations de MAXWELL

(Maxwell-Gauss)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Maxwell-Flux)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(Maxwell-Faraday)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Maxwell-Ampère)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Grâce aux formules de STOKES ([Stokes](#)) et d'OSTROGRADSKI ([Ostrogradski](#)) de la page 82, on peut obtenir les versions intégrales des équations de MAXWELL. On a aussi la loi de FARADAY ([7.41](#)) de la page 57.

### Définition 56 : Célérité de la lumière dans le vide

On définit la célérité  $c$  de la manière suivante :

(7.27)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

C'est la vitesse de la lumière

### Équations de propagation

#### Théorème 56.1 : Équation de d'ALEMBERT

Dans le vide, en l'absence de charges ( $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ ), les champs électrique et magnétique vérifient l'équation de d'ALEMBERT

(7.28)

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

**Preuve 56.1.1** *Démontrons le cas pour  $\vec{B}$ , la démonstration pour  $\vec{E}$  est analogue.*

*On part de l'équation (Maxwell-Ampère) :*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

*Comme dans beaucoup de démonstration, on applique un deuxième  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

*On peut intervertir les opérateurs  $\partial$  et  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$  :*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}}{\partial t}$$

Sachant que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{B}) - \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \underbrace{\text{div } \vec{B}}_0 \right) - \underbrace{\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})}_{\Delta \vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

### Théorème 56.2 : Potentiels

Au champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ , on peut associer un couple de potentiels  $(V(M, t), \vec{A}(M, t))$  tel que :

$$(7.29) \quad \begin{cases} \vec{B} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}(V) \end{cases}$$

**Preuve 56.2.1** Comme  $\text{div } \vec{B} = 0$  (Équation 3 de Maxwell (Maxwell-Faraday)), on sait que  $\vec{B}$  est un champ rotationnel. Donc il existe  $\vec{A}$  tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Maintenant, en prenant l'équation 2 de Maxwell (Maxwell-Flux),  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})}{\partial t}$ . En intervertissant les opérateurs, et en faisant tout passer à gauche :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Donc on sait que  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est un champ à gradient. D'où il existe  $V$  tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

### 7.3.3 Equations de POISSON et de LAPLACE

En statique,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ , ce qui équivaut à l'existence d'un potentiel  $V(M)$  tel que  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$  (c'est l'équation (7.6) qu'on voit en électrostatique page 48).

### Théorème 56.3

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'**équation de Poisson** :

$$(7.30) \quad \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

(ATTENTION)

$\Delta V(M)$  est le **laplacien** de  $V(M)$ . Ce n'est pas la variation  $\Delta$ .

Lorsqu'une zone est en plus vide de charge,  $\rho(M) = 0$  et l'équation devient l'**équation de LAPLACE** :

$$(7.31) \quad \Delta V(M) = 0$$

**Preuve 56.3.1** Il suffit d'injecter  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$  à l'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) page 53 :

$$(7.32) \quad \text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} V \right) (M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Or, par définition,  $\text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} f \right) = -\Delta f$ . □

(ATTENTION)

Le potentiel n'existe que quand  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ . En général, c'est en statique ou en régime permanent. Mais écrire  $V(M, t)$  est absurde !

## 7.4 Énergie électromagnétique

Sur une particule chargée, la majorité des forces sont négligeables devant la force de LORENTZ. C'est ainsi qu'on peut appliquer le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) (équation (5.12) page 35)

### Théorème 56.4 : Densité volumique de force

La **densité volumique de force électromagnétique** est :

$$(7.33a) \quad \vec{f}_V(M, t) = \rho(M, t) \vec{E}(M, t) + \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Cette force est volumique, donc elle s'exerce sur les charges d'un volume  $dV$  tel que :

$$(7.33b) \quad d\vec{F} = \vec{f}_V(M, t) dV$$

**Preuve 56.4.1** On part de la force de LORENTZ (7.18) page 51 :

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

En infinitésimal :

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = dq\vec{E} + dq\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On injecte  $dq = \rho dV$

$$d\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = [\rho \vec{E} + \rho \vec{v} \wedge \vec{B}] dV$$

D'où la force volumique :  $\vec{f}_V = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$  □

### Définition 57 : Puissance volumique

La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière est

$$(7.34) \quad \mathcal{P}_v(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

Avec la loi d'Ohm locale (7.38) page 56 :

$$\mathcal{P}_V(M, t) = \frac{\vec{j}^2(M, t)}{\gamma}$$

### Définition 58

Le **vecteur de POYNTING**  $\vec{\Pi}(M, t)$  est tel que l'énergie électromagnétique traversant la surface  $d\vec{S}$  autour de  $M$  est :

$$(7.35) \quad d^2 U_{\text{em}} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} dt$$

On admet les expressions suivantes :

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est

$$(7.36) \quad u_{\text{em}}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2(M, t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M, t)}{2\mu_0}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie, ou **vecteur de POYNTING** est

$$(7.37) \quad \vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

#### Théorème 58.1 : Loi d'Ohm locale

Elle relie, en un point  $M$ , la densité volumique de courant  $\vec{j}(M, t)$  au champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  :

$$(7.38) \quad \vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

#### Théorème 58.2 : Équation locale de POYNTING

L'équation locale de POYNTING est un bilan d'énergie. Elle donne :

$$(7.39) \quad \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t}(M, t) + \text{div } \vec{\Pi}(M, t) = - (\vec{j} \cdot \vec{E})(M, t)$$



**Preuve 58.2.1** Le bilan d'énergie électromagnétique pour une surface  $\mathcal{S}$  est :

$$(7.40) \quad \frac{dU_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_{sortant} - \mathcal{P}_{perdue}$$

Exprimons ces grandeurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{perdue} &= \iiint \mathcal{P}_V dV \\ &= \iiint (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV \\ \mathcal{P}_{sortant} &= \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_P \\ &= \iiint \operatorname{div}(\vec{\Pi}) dV \\ \frac{dU_{em}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint u_{em} dV \\ &= \iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV \end{aligned}$$

ce qui nous donne, pour un volume d'intégration  $\mathcal{V}_M$  quelconque :

$$\iiint_{\mathcal{V}_M} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV + \iiint_{\mathcal{V}_M} \operatorname{div}(\vec{\Pi}) dV = \iiint_{\mathcal{V}_M} -(\vec{j} \cdot \vec{E}) dV$$

d'où le résultat. □

## 7.5 Induction

### Théorème 58.3 : Loi de FARADAY

Elle caractérise la force électromotrice  $e$  induit par un flux  $\Phi_B$

$$(7.41) \quad e = \oint_S \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

#### 7.5.1 Loi d'Ohm généralisée

### Théorème 58.4

On considère un conducteur formé d'un fil de longueur  $L$ , de section  $s$ , constitué d'un matériau dont la conductivité électrique est  $\gamma$ , est branché entre un point  $A$  et un deuxième point  $B$ . La loi d'Ohm pour ce conducteur, dite généralisée, donne :

$$(7.42) \quad V(A, t) - V(B, t) = Ri + \overbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}}^{-e}$$

avec  $R = \frac{L}{\gamma s}$ .

C'est bien sûr l'équation 3.2 de la page 19.

#### Preuve 58.4.1

On part de

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

D'après la définition du  $\overrightarrow{\text{grad}}$ ,

$$- \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M = - (V(B, t) - V(A, t)) = V(A, t) - V(B, t)$$

D'autre part, avec la loi d'Ohm locale (équation 7.38 page 56),

$$\begin{aligned} \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{1}{\gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \\ &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{R s}{L} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \end{aligned}$$

Si on reprend la définition de  $\vec{j}$  de l'équation (7.15c) (définition 52 page 50), et qu'on prend  $d\vec{l}_M = d\vec{\tau}_M dl_M$  ( $d\vec{\tau}_M$  est orienté dans le sens de  $\vec{j}$ ) :

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = Ri = [V(A, t) - V(B, t)] - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

En approximant :  $-\int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = - \oint_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = - \frac{d\Phi_B}{dt} = e$  d'où  
 $V(A, t) - V(B, t) = Ri - e$

La force de LAPLACE est la résultante des forces du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  sur des charges en  $M$

#### Théorème 58.5 : Force de Laplace

$$d\vec{F}_{v \text{ LAPLACE}} = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Cette force est bien volumique, car elle s'exprime en fonction de  $\vec{j}(M)$ . On retiendra surtout :

(7.43)

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

(ATTENTION)

$I$  et  $\vec{dl}$  doivent être colinéaires

### 7.5.2 Auto-induction

#### Définition 59 : Inductance propre

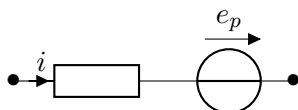
Pour un circuit électrique fixe et indéformable parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  crée un flux propre  $\Phi_p(t)$  proportionnel à  $i(t)$  dans les conditions d'ARQS

$$(7.44) \quad \Phi_p(t) = L i(t)$$

Cette relation définit  $L$ , le coefficient d'**inductance propre** du circuit.

**Remarque :** Dans la loi d'OHM vu précédemment (cf. équation (7.42) page 57), on peut prendre, en l'absence d'un champ magnétique extérieur,  $-e = \frac{d\Phi_p}{dt} = L \frac{di}{dt}$ , et alors :

$$V_A - V_B = Ri + L \frac{di}{dt}$$



### 7.5.3 Inductance mutuelle

#### Théorème 59.1 : Inductance mutuelle entre deux circuits

Pour deux circuits 1 et 2 parcourus respectivement par les courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ , l'inductance mutuelle  $M$  d'un circuit sur un autre est proportionnelle à  $i_*(t)$  :

$$(7.45) \quad \begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M i_1(t) \\ \Phi_{2 \rightarrow 1}(t) = M i_2(t) \end{cases}$$

On admettra le **théorème de NEUMANN** qui donne

$$(7.46) \quad M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

### 7.5.4 Force électromotrice induite

#### Définition 60 : Champ électromoteur

Lorsqu'on déplace un conducteur à une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  stationnaire, il crée un **champ électrique électromoteur**  $\vec{E}_m$

$$(7.47) \quad \vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}_0(M)$$

#### Théorème 60.1 : Force électromotrice induite

La **force électromotrice**  $e_{AB}$  **induite** par  $\vec{E}_m$  est, comme dans l'équation (7.41) de FARADAY :

$$(7.48) \quad e_{AB} = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{l}_M$$

## 7.6 Propagation et rayonnement

### Méthode

#### Relations de structure

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

#### Relations de Passage

$$E_2(A, t) - E_1(A, t) = \frac{\sigma(A, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{sortant}}$$

$$B_2(A, t) - B_1(A, t) = \mu_0 \vec{j}(A, t) \wedge \vec{n}_{\text{sortant}}$$

### 7.6.1 Dans le vide

On se place dans une zone où il n'y a **ni charge, ni courant**. C'est à dire que  $\rho = 0$  et alors  $\vec{j} = 0$ . Lorsqu'on reprend les équations de MAXWELL, les équations (**Maxwell-Gauss**) et (**Maxwell-Ampère**) sont modifiées :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

#### Onde Plane Progressive

### Définition 61 : Onde plane

Une **onde plane** est une solution **non constante** de l'équation de d'ALEMBERT qui prend des valeurs uniformes sur les plans perpendiculaires à une direction  $\vec{k}$ .

Une onde plane de pulsation  $\omega$  se décrit de la manière suivante :

$$(OP) \quad U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) + g(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + vt)$$

### Définition 62 : Onde plane progressive

Une **onde progressive** est une solution de l'équation de d'ALEMBERT qui s'écrit sous la forme  $U(z, t) = f(z - vt)$ . Elle se propage dans le sens positif de l'axe  $Oz$

La forme générale d'une **Onde Plane Progressive (OPP)** de pulsation  $\omega$  se propageant uniquement selon une direction  $\vec{k}$  est :

$$(OPP) \quad U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt)$$

Obtenir la solution des équations de d'ALEMBERT du théorème 56.1 permet de trouver la forme générale d'une onde. C'est ainsi qu'on peut déterminer la forme d'une OPP électromagnétique :

#### Théorème 62.1 : Onde électromagnétique

La forme générale d'une Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans le vide dans la direction de  $\vec{u}_z$  est :

$$(7.49) \quad \vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(z - ct) \\ f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c} f_x(z - ct) \\ \frac{1}{c} f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la composante en  $\vec{u}_z$  des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont nulles. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , qui sont donc perpendiculaires à la propagation de l'onde, sont dis **transversaux**. L'onde est appelée **transversale**

**Preuve 62.1.1** Une OPP doit vérifier l'équation de D'ALEMBERT comme on l'a vu au théorème 56.1 page 53. Donc pour une onde se propageant selon  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(t - \frac{z}{c}) \\ f_y(t - \frac{z}{c}) \\ f_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} h_x(t - \frac{z}{c}) \\ h_y(t - \frac{z}{c}) \\ h_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix}$$

L'équation de MAXWELL-GAUSS (**Maxwell-Gauss**) (la version où  $\rho = 0$  car dans

le vide il n'y a pas de charge) donne :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial f_x(t - \frac{z}{c})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(t - \frac{z}{c})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} &= 0 \\ 0 + 0 + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial f_z}{\partial z}\right) &= 0\end{aligned}$$

Et nécessairement,  $\frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} = 0$  implique que  $f_z$  est constante. Donc  $f_z$  est nulle. De même, l'équation de MAXWELL-Flux nous donne que  $h_z$  est nulle.

Avec l'équation de MAXWELL-FARADAY (Maxwell-Faraday), on trouve finalement que

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} f'_y &= -h'_x \\ \frac{1}{c} f'_x &= h'_y\end{aligned}$$

Et on obtient les équations de propagation d'une onde électromagnétique.  $\square$

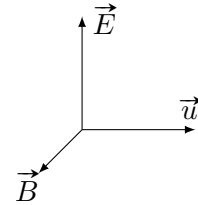
### Théorème 62.2 : Relations de structure

On structure les OPPs de la manière suivante :

- Le trièdre  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est direct
- La famille  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est orthogonale
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

Qui peuvent se résumer dans les relations de structure :

$$(7.50) \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \qquad c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$



### Onde Plane Progressive Monochromatique

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) de pulsation  $\omega$  se décrit de la manière suivante :

$$(OPPM) \quad U(M, t) = U_0 \cos \left( \omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_0 \right)$$

### Définition 63 : Vitesse de Phase

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) se propage selon une direction  $\vec{u} =$

$$(7.51) \quad \left| \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} \right|. \text{ On définit sa vitesse de phase :}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

**Remarque :** Dans le vide,  $v_\varphi = c$ , donc  $k = \frac{\omega}{c}$ .

### Notation complexe

Opérateurs	Maxwell
$\frac{\partial}{\partial t} \bullet \Leftrightarrow i\omega \times \bullet$	(Maxwell-Gauss) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$
$\overrightarrow{\text{grad}} \underline{U} \Leftrightarrow -i\vec{k} \times \underline{U}$	(Maxwell-Flux) $-i\vec{k} \cdot \underline{\vec{B}} = 0$
$\text{div} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Faraday) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$
$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{U}} \Leftrightarrow -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{U}}$	(Maxwell-Ampère) $-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \frac{1}{c^2} \underline{\vec{E}}$

### Théorème 63.1 : Relations de structure d'une OPPM

De même que les relations de structure (7.50) d'une OPP, on obtient rapidement, avec la forme complexe des équations de MAXWELL :

$$(7.52) \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

**Preuve 63.1.1** *D'après l'équation (Maxwell-Faraday) en complexes (en prenant la partie réelle) :*

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

*Il vient immédiatement :*

$$\begin{aligned} i\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} &= i\vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \end{aligned}$$

*De même, en partant de l'équation (Maxwell-Ampère) en complexes (et toujours en prenant la partie réelle) :*

$$i\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega \frac{1}{c^2} \vec{E}$$

Qui donne, immédiatement :

$$i\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega}\vec{k} \wedge \vec{B}$$

Ces équations sont homolgues à celles vues précédemment, car  $k = \frac{\omega}{c}$

## Polarisation

On considère une OPP *transverse*, donc qui s'écrit :

$$(7.53) \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_{0x} \cos(\omega t - kz) + \vec{E}_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

On appelle **onde polarisée rectilignement** une onde sous la forme

$$(7.54) \quad \vec{E} = E_0(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz)$$

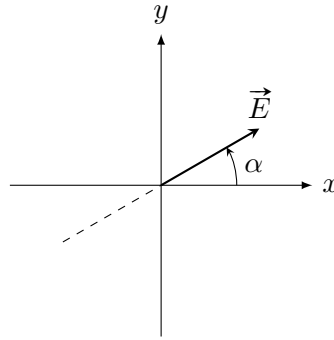


FIGURE 7.2 – Polarisation rectiligne

## 7.6.2 Propagation dans un plasma

### Définition 64 : Plasma

Un **plasma** est un conducteur constitué d'ions et d'électrons pour une charge globale neutre. Les conditions suivantes soient vérifiées

- Les ions positifs sont immobiles
- Il est peu dense, c'est à dire qu'on néglige les interactions électromagnétiques.

### Théorème 64.1 : Densité volumique de courant

Il existe dans le plasma une densité volumique de courant :

$$(7.55) \quad \underline{j} = -i\frac{n_0 e^2}{m\omega}\underline{E}(M, t)$$



**Preuve 64.1.1** Si on note  $\vec{f}_e$  et  $\vec{f}_m$  respectivement les forces de LORENTZ électrostatique et magnétostatique, alors on remarque que :

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{\| -e \vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e \vec{E} \|} \sim \frac{v}{c}$$

Or  $v$  est la vitesse de l'électron dans le milieu, et  $v \ll c$  car l'électron est dit « non relativiste ». Donc  $f_m \ll f_e$ , et on peut négliger  $\vec{f}_e$  dans un PFD :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \approx -e\vec{E}(M, t)$$

On passe en notation complexe, et le mouvement d'oscillation de l'électron est  $\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{v}_0} \exp(i\omega t)$ . D'où la nouvelle expression du PFD :

$$m_e(i\omega) \underline{\vec{v}} \approx -e\vec{E}(M, t)$$

soit

$$\underline{\vec{v}} = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}(M, t)$$

Et on obtient  $\vec{j}$  avec  $\vec{j} = -n_0 e \vec{v}$  □

On peut donc définir une pulsation plasma  $\omega_p$

#### Définition 65 : Pulsation plasma

On définit la **pulsation plasma** par

$$(7.56a) \quad \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0}}$$

Et alors :

$$(7.56b) \quad \underline{\vec{j}} = -i \frac{n_0 e^2}{\omega m} \underline{\vec{E}} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}}$$

#### Théorème 65.1 : Relation de dispersion

Dans un plasma, on établit une relation de dispersion :

$$(7.57) \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_P^2)$$

**Preuve 65.1.1** On utilise les equations (Maxwell-Faraday) et (Maxwell-Ampère) en complexes, ainsi que la formule du double produit vectoriel (10.5a) page 77. On part de l'équation de MAXWELL (Maxwell-Faraday), à laquelle on effectue le

produit vectoriel par  $-i\vec{k}$  des deux cotés :

$$\begin{aligned} \cancel{i\vec{k}} \wedge (-i\vec{k} \wedge \vec{E}) &= \cancel{i\vec{k}} \wedge (-i\omega\vec{B}) \\ -i(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0 \text{ car orthogonaux}})\vec{k} + i(\vec{k} \cdot \vec{k})\vec{E} &= \omega\vec{k} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

D'où :

$$ik^2\vec{E} = \omega\vec{k} \wedge \vec{B}$$

On injecte l'équation de MAXWELL (Maxwell-Ampère) :

$$ik^2\vec{E} = \omega\left(\mu_0\vec{j} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E}\right)$$

D'après l'équation (7.56b) de la définition précédente :  $\vec{j} = -i\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\vec{E}$

$$\begin{aligned} ik^2\vec{E} &= \omega\left(-i\mu_0\varepsilon_0\frac{\omega_p^2}{\omega}\vec{E} + i\omega\varepsilon_0\mu_0\vec{E}\right) \\ k^2 &= \varepsilon_0\mu_0(\omega^2 - \omega_p^2) \end{aligned}$$

$$D'où k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$$

□

## Vitesse de phase et dispersion

### Définition 66 : Vitesse de phase

La **vitesse de phase**  $v_\varphi$  est la vitesse de propagation d'une OPPM.

### Théorème 66.1 : Vitesse de phase dans un plasma

Dans un plasma, avec les hypothèses précédentes, la vitesse de phase est égale à :

$$(7.58) \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

### Définition 67 : Phénomène de dispersion

On dit qu'il y a **dispersion** quand la vitesse de phase dépend de la pulsation  $\omega$  de l'OPPM

## Fréquence et pulsation de coupure

### Définition 68 : Fréquence de coupure

On appelle **fréquence de coupure** la fréquence  $f_c$  pour laquelle une onde ne se propage plus. La pulsation associée  $\omega_c$  est appelée **pulsation de coupure**

### Théorème 68.1 : Pulsation de coupure du plasma

La pulsation plasma  $\omega_P$  est une pulsation de coupure :

$$(7.59) \quad \omega_c = \omega_P = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

**Preuve 68.1.1** Deux cas :

- Si  $\omega > \omega_P$ , alors  $k^2 > 0 \implies k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}$ .
- Sinon, si  $\omega < \omega_P$ , alors  $k^2$  est négatif et il n'y a pas de propagation (une solution imaginaire n'est pas possible pour une onde).

□

### Propagation d'un paquet d'onde

On se place, dans un premier temps, dans un milieu dispersif quelconque.

#### Définition 69 : Paquet d'onde

Un **paquet d'onde** est la superposition de plusieurs OPPM de pulsations proches et de pulsation moyenne  $\omega_0$  :

$$(7.60) \quad \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - k z)} d\omega$$

Cette intégrale est valable de 0 à  $+\infty$ , car on considère des ondes dont la pulsation  $\omega$  est comprise dans un intervalle  $\left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$ , où  $\delta\omega \ll \omega_0$

### 7.6.3 Propagation dans un conducteur ohmique

#### Définition 70 : Conducteur ohmique

Le **conducteur ohmique** est un métal pour lequel les conditions suivantes sont vérifiées :

- Les ions positifs sont immobiles
- Il est **dense**, et les électrons, de densité particulière  $n_0$ , sont libres de se déplacer.

On remarque qu'un conducteur ohmique est comme un plasma (cf. définition 64 page 64). Sa seule différence est d'être dense. On prend alors en compte les interactions entre électrons et ions sous la forme d'une force de frottement.

#### Théorème 70.1 : Relation de dispersion

Dans un conducteur ohmique, on établit, comme pour le plasma, une relation de dis-

persion :

$$(7.61) \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$$

Cette équation n'est pas réelle, et conduit à un **module d'onde complexe**. On note :

$$(7.62) \quad \underline{k} = k' - ik''$$

#### **Théorème 70.2 : Effet de peau**

Dans un conducteur ohmique, la distance caractéristiques de d'atténuation d'une OPPM de pulsation  $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$  est :

$$(7.63) \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$$

#### **Réflexion d'une OPPM**

## Chapitre 8

# Diffusion Thermique

### 8.1 Conduction

C'est le phénomène à petite échelle qui se produit sans mouvement des particules lors d'une diffusion de chaleur. C'est un processus très lent.

#### Définition 71 : Flux Thermique

On le définira de la façon suivante :

$$(8.1) \quad \delta Q = \Phi dt$$

On prendra  $\varphi$  tel que  $\Phi = \varphi S$

#### Définition 72

Le transfert thermique passant à travers une surface fermée  $\vec{S}$  sera caractérisé par le vecteur  $\vec{j}_{th}$ . On le définit :

$$(8.2a) \quad \delta^2 Q = \vec{j}_{th} d\vec{S} dt$$

En notant  $d\vec{S}_M = dS \vec{n}_M$  :

$$(8.2b) \quad \varphi_{\vec{n}_M}(M, t) = \vec{j} \cdot \vec{n}_M$$

#### Théorème 72.1 : Loi de FOURIER

C'est une loi empirique qui donne la densité volumique de courant thermique  $\vec{j}_{th}$  en fonction de  $T$  un champ de températures :

(Fourier)

$$\vec{j}_{th} = - \underbrace{\lambda}_{\text{Conductivité Thermique}} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

#### Théorème 72.2 : Premier principe de Thermodynamique

Le premier principe de thermodynamique (équation (1.4a) page 8) s'énonce, en diffu-

sion, avec :

$$(8.3) \quad dU = \delta Q + \mathcal{P}_{\text{prod}} dt$$

$$\text{Souvent, } \mathcal{P}_{\text{prod}} = \iiint \mathcal{P}_V dV$$

### Théorème 72.3 : Bilan local d'énergie

Pour un système  $\Sigma$  de matière dans un volume  $\mathcal{V}$  quelconque,

$$(8.4) \quad \mu c_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{\text{th}}(M, t) = \mathcal{P}_V(M, t)$$

**Preuve 72.3.1** On utilise le premier principe de thermodynamique vu plus haut. D'après un DL au premier ordre, on détermine :

$$\begin{aligned} dU &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c_v (T(M, t + dt) - T(M, t)) dV \\ &= \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c_v \left( \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right) \right) dt \end{aligned}$$

Le transfert thermique est, par définition de  $\vec{j}$  :

$$\delta Q = \left( - \oint \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

Et enfin :

$$\mathcal{P}_{\text{prod}} dt = \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_V dV \right) dt$$

### Théorème 72.4 : Équation de diffusion thermique

Pour un champ  $T$  de températures, on a l'équation :

$$(8.5) \quad \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \overbrace{\Delta T}^{\text{Laplacien de } T} + P_v$$

avec  $c_v$  la capacité calorifique massique à volume constant,  $\mu$  la masse volumique, et  $\lambda$  définit comme précédemment.

### Définition 73 : Résistance thermique

C'est la grandeur  $R_{th}$  telle que :

$$(T_1 - T_2) = \Phi_{1 \rightarrow 2} R_{th}$$

### Théorème 73.1 : Résistances usuelles

Pour deux plaques parallèles de surfaces  $S$  distantes de  $L$  :

$$(8.7) \quad R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Pour deux cylindres coaxiaux de hauteur  $H$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2$

$$(8.8) \quad R_{th} = \frac{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi\lambda H}$$

## 8.2 Convection

Bien plus rapide que la conduction, c'est quand la diffusion thermique est accompagnée d'un mouvement de particules (par exemple quand on ouvre une fenêtre)

---

### Définition 74

Encore une loi empirique, la loi phénoménologique de NEWTON :

(8.9) 
$$\varphi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_s - T_f)$$

Cette équation permet surtout de donner :  $\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = hS(T_s - T_f)$

Par définition de  $R_{\text{th}}$  et par identification, l'interface entre un solide et un fluide a donc pour résistance  $R_{\text{th}} = \frac{1}{hS}$



## Chapitre 9

# Rayonnement Thermique

### Méthode

#### Calculer un flux thermique

**Relation entre les flux**  $d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$

**Relation de STEFAN-BOLTZMANN**  $\varphi^0(T) = \sigma T^4$

**Loi de PLANCK** (*non exigible*) cf théorème 76.1

#### Définition 75 : Flux Thermique

La **densité surfacique d'énergie** est définie telle que la puissance électromagnétique reçue par un objet dans l'enceinte sous  $dS$  soit

$$(9.1) \quad d\Phi = \varphi^0 dS$$

L'exposant  $^0$  est là pour rappeler que  $\varphi$  ne dépend ni de la position, ni de  $dS$  : il ne dépend que de  $T$ .

D'ici, on définit la **densité spectrale en longueur d'onde de flux surfacique** (notée  $\varphi_{\lambda}^0$ ) de manière analogue : elle est telle que la contribution à  $\varphi^0$  des photons de longueur d'onde comprises entre  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  soit

$$(9.2) \quad d\varphi^0 = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda$$

Pour résumer, on se rapportera à la figure 9.1 (page 74) et à la simple formule :

$$d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$$

#### Définition 76 : Énergie d'un photon

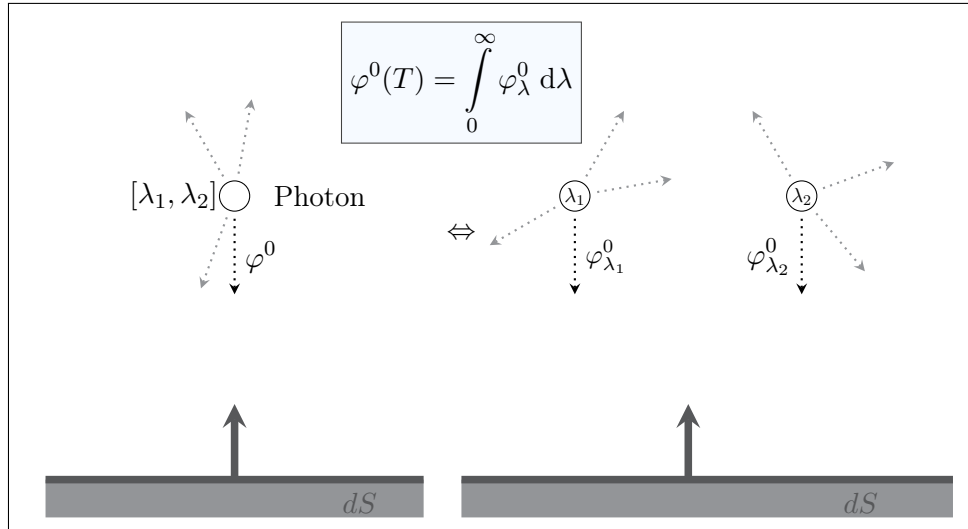


FIGURE 9.1 – Caractérisation des différents flux

(9.4)

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

#### Théorème 76.1 : Loi de PLANCK

La loi de PLANCK n'est pas exigible, mais elle permet de calculer la densité spectrale en longueur d'onde

$$\varphi^\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{\frac{hc}{e\lambda k_B T} - 1}$$

avec :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

#### Théorème 76.2 : STEFAN-BOLTZMANN

(9.6)

$$\varphi^0(T) = \sigma T^4$$

où  $\sigma$  est la constante de STEFAN :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  C'est aussi le flux émis par un corps noir.

La densité spectrale en longueur d'onde du flux ( $\varphi_\lambda^0$ ) passe par un maximum pour une longueur d'onde  $\lambda_m$ . On l'obtient avec la loi de WIEN :

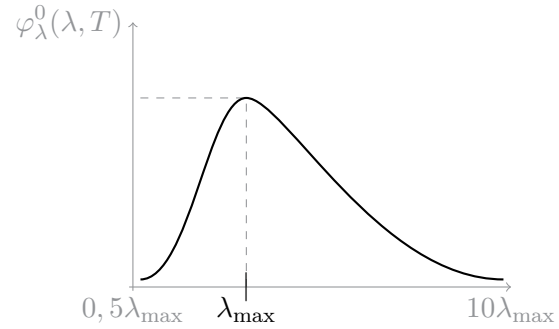
**Théorème 76.3 : Loi de WIEN**

(9.7)

$$\lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$$

Pour retenir :  $\lambda_{\max} T = 2900 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

**Remarque :** Le domaine spectral d'émission est compris dans  $[0, 5\lambda_{\max}, 10\lambda_{\max}]$



**Théorème 76.4 : Flux surfacique radiatif**

En un point  $P$ , le flux surfacique cédé par un corps noir opaque est :

(9.8)

$$\varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = \sigma T(P)^4 - \varphi_{\text{reçu}}(P)$$

et alors, le flux radiatif suit une loi de NEWTON  $\varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = h(T(P) - T_0)$  dont le coefficient est

(9.9)

$$h^{\text{rad}} = 4\sigma T_0^4$$

# Chapitre 10

## Annexe

### 10.1 Trigonométrie

#### 10.1.1 Définition

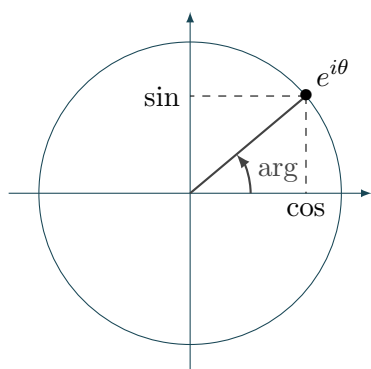
On aura souvent besoin de trigonométrie en Physique. Surtout les règles sur les sinus et cosinus. Bien sûr, la première chose à ne jamais oublier, c'est leur définition en exponentielle :

$$(10.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array} \right. (10.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

#### 10.1.2 Addition / Produit

$$(10.3) \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \end{array} \right.$$

#### 10.1.3 Nombres complexes

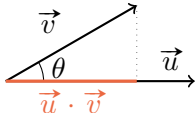


## Opérations en complexes

	Forme exponentielle	Module	Argument
<b>Produit</b>	$z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$	$ zz'  =  z   z' $	$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
<b>Quotient</b>	$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$\left \frac{z}{z'}\right  = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
<b>Exposant</b>	$z^n = r^n e^{in\theta}$	$ z^n  =  z ^n$	$\arg(z^n) = n \times \arg z \quad [2\pi]$
<b>Conjugué</b>	$\bar{z} = r e^{-i\theta}$	$ \bar{z}  =  z $	$\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$

## 10.2 Calcul vectoriel

On a deux types de calculs vectoriels. Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . En physique, on les définit comme suit :

$$(10.4) \quad \left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u \cdot v \cdot \cos \theta \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= u \cdot v \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ avec : } \begin{array}{c} \vec{v} \\ \theta \\ \vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$


(ATTENTION)

Il ne faut **pas oublier** que le produit scalaire renvoie un **scalaire**, et que le produit vectoriel renvoie un **vecteur perpendiculaire** au plan formé des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

### Propriétés Produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v}$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif

Formules du double produit vectoriel :

$$(10.5a) \quad \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$(10.5b) \quad (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

## 10.3 Complément mathématique

### 10.3.1 Dérivée d'un vecteur

$$(10.6) \quad \frac{dx_i \vec{i}}{dt} = x_i \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

### 10.3.2 Équation différentielle

En général, on résout l'équation homogène, on trouve une solution particulière, puis la combinaison linéaire des deux donne la solution générale.

#### Au premier ordre

Dans le cas d'une équation de la forme :

$$y'(t) = ay(t) + b$$

La solution générale est

$$(10.7) \quad Ae^{ax} - \frac{b}{a}$$

#### Au second Ordre

Dans le cas de l'équation homogène suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On calcule le discriminant  $\Delta$  du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution  $y(t)$  pour l'équation homogène :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm \beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t))$
$\Delta < 0$	$r_{\pm} = \alpha \pm i\beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t))$
$\Delta = 0$	$r \text{ double} \quad y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

(ATTENTION)

Pour déterminer la **solution particulière** quand le second membre n'est pas constant, on suppose que la solution est sinusoïdale et de même pulsation. Alors il n'y a plus qu'à réinjecter la solution dans l'équation différentielle pour déterminer les constantes restantes.

## 10.4 Repères en physique

### 10.4.1 Repère cartésien

Dans un repère en **coordonnées cartésiennes** (cf. figure 10.1), le point  $M$  est repéré par la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  :

$$(10.8) \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

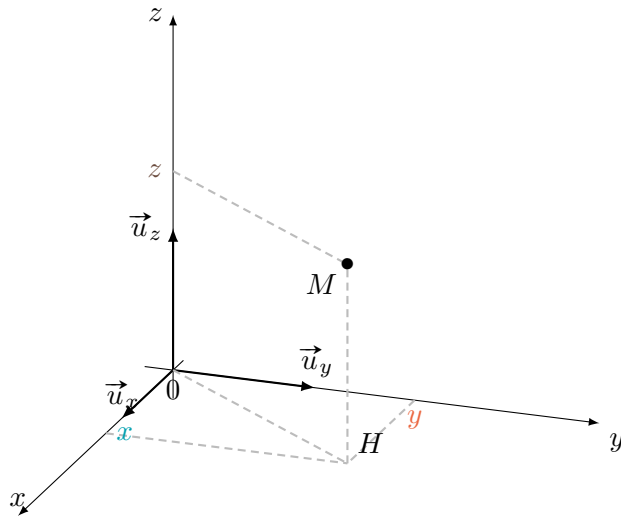


FIGURE 10.1 – Repère en coordonnées cartésiennes

#### 10.4.2 Repère cylindrique

Dans un repère en **coordonnées cylindriques** (cf. figure 10.2), le point  $M$  est repéré par la base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  :

$$(10.9) \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$$

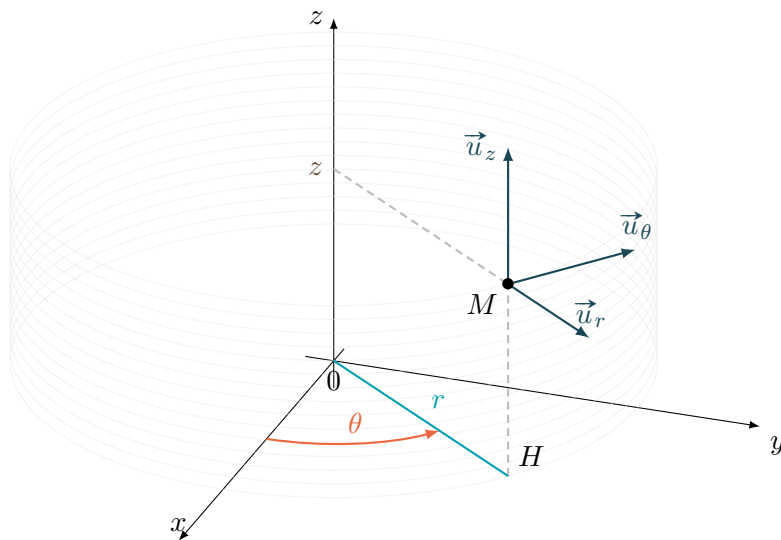


FIGURE 10.2 – Repère en coordonnées cylindriques

(ATTENTION)  $r$  se mesure sur le projeté :  $r = \|\overrightarrow{OH}\|$ , et non  $\overrightarrow{OM}$

## 10.5 Analyse Vectorielle

### 10.5.1 Généralités sur les champs

Coordonnées	Déplacement élémentaire	Circulation élémentaire
Cartésiennes	$dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$
Cylindriques	$dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_z dz$
Sphériques	$dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$	$d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin\theta d\varphi$

#### Définition 77 : Lignes et tubes de champ

Pour un champ de vecteurs  $\vec{A}(M)$ , une **ligne de champ** est une courbe sur laquelle, en tout point  $M$ ,  $\vec{A}(M)$  est tangent.

Si on note  $d\vec{M}$  le déplacement élémentaire, une ligne de champ vérifie :

(10.10)

$$d\vec{M} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

On appelle **tube de champ** un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

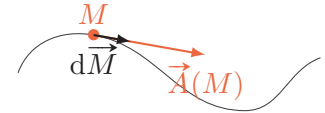


FIGURE 10.3 – Ligne de champ

### 10.5.2 Opérateurs sur les champs

#### Définition 78 : Gradient

Soit  $U(M)$  un champ scalaire. La variation  $dU$  est lié au déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  par le **gradient** :

(10.11)

$$\vec{\text{grad}}(U(M)) \cdot d\vec{l}_M = dU$$

Ses expressions sont :

	Coordonnées	Expressions
Cartésiennes	$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	
Cylindriques	$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$	
Sphériques	$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$	

#### Définition 79 : Divergence

Soit un volume élémentaire  $dV_M$  autour d'un point  $M$  et un champ de vecteur  $\vec{A}(M)$ . En notant  $d\Phi$  le flux de  $\vec{A}(M)$  traversant la surface entourant  $dV_M$ , la **divergence** est définie



par :

$$(10.12) \quad \operatorname{div}(\vec{A}(M)) \cdot dV_M = d\Phi(M)$$

Ses expressions sont :

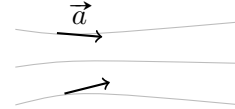
**Coordonnées**

**Expressions**

Cartésiennes	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Cylindriques	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
Sphériques	$\operatorname{div}(\vec{A}(M)) =$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

### Définition 80 : Circulation

Soit  $\vec{a}$  un champ de vecteur.



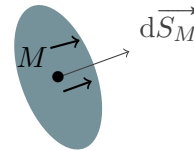
La **circulation élémentaire** du champ  $\vec{a}$  de vecteurs sur le déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  autour d'un point  $M$  est

$$(10.13) \quad d\mathcal{C} = \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}_M$$

Alors, la **circulation** le long d'un chemin  $\Gamma_{AB}$  est :

$$(10.14) \quad \mathcal{C}_a = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{l}_M$$

On va maintenant définir le flux passant à travers une surface :



### Définition 81 : Flux

Le **flux élémentaire** du champs  $\vec{a}$  de vecteurs à travers une surface élémentaire  $d\vec{S}_M$  autour d'un point  $M$  est

$$(10.15) \quad d\Phi = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Alors, le **flux** le long d'un chemin  $\Gamma_{AB}$  est :

$$(10.16) \quad \Phi_a = \iint_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{S}_M$$

### 10.5.3 STOKES et OSTROGRADSKI

**Théorème 81.1 : Formules de STOKES et d'OSTROGRADSKI**

(Ostrogradski)

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \cdot \vec{dV} = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} \quad (\text{Flux})$$

(Stokes)

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{E}) \cdot \vec{dS} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} \quad (\text{Contour fermé})$$

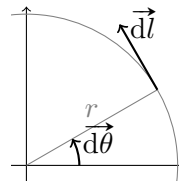
## 10.6 Règles générales

### 10.6.1 Relations entre les grandeurs

$$\boxed{\text{Puissance} = \frac{d \text{ Travail}}{dt}}$$

### 10.6.2 Longueurs de références

$$\boxed{\vec{dl} = r d\vec{\theta}}$$



Deuxième partie

Chimie

# Chapitre 11

## Première année

### 11.1 Configuration électronique

#### Définition 1 : Les nombres quantiques

Pour caractériser un électron, on définit :

- $n$ , le **nombre quantique principal**, définit la couche sur laquelle un électron est rangé
- $l \in [0, n - 1]$ , le **nombre quantique azimutal**, précise la sous-couche sur laquelle un électron est rangé
- $m_l \in [-l; l]$ , le **nombre quantique magnétique**, définit le nombre d'orbitales possibles. Chaque orbitale est appelée “case quantique”.
- $m_s \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , **nombre quantique de spin**, définit le sens de rotation des électrons d'une même case quantique.

#### Théorème 1.1 : Principe d'exclusion de PAULI

Deux électrons ne peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques

#### Théorème 1.2 : Règle de stabilité de KLECHKOWSY

Le remplissage des orbitales atomiques se fait par ordre des  $(n + l)$  croissants.

#### Théorème 1.3 : Règle de remplissage de HUND

Lorsqu'un niveau d'énergie est **dégénéré** — c'est à dire pour deux orbitales de même nombre quantique principal  $n$  — et que le nombre d'électrons n'est pas suffisant pour sauter le niveau :

- L'état de plus basse énergie est obtenu en utilisant un maximum d'orbitales
- Les spins des électrons non appariés (les électrons célibataires) d'une même orbitale étant parallèles

n \ 1	1	2	3	4
1	$1s^2$			
2	$2s^2$	$2p^6$		
3	$3s^2$	$3p^6$	$3d^{10}$	
4	$4s^2$	$4p^6$	$4d^{10}$	$4f^{14}$

FIGURE 11.1 – Tableau des sous-couches électroniques

## 11.2 Représentation moléculaire

### Méthode

#### Représentation de LEWIS

La **charge formelle** d'un atome est déterminée par :

$$(11.1) \quad CF_A = n_{\text{Atome}}(e^-) - n_{\text{Molécule}}(e^-)$$

1. On compte le nombre  $N$  d'électrons pour connaître le nombre  $\frac{N}{2}$  de doublets à répartir
2. On minimise le nombre de charges formelles en multipliant les liaisons
3. On distribue les charges formelles par ordre d'électronégativité

#### Méthode VSEPR

Le **moment dipolaire**  $\vec{\mu}$  est le vecteur caractérisant une liaison entre deux charges  $(-\delta e)$  et  $(+\delta e)$  distancées de  $d$ . Ses caractéristiques sont :

**Direction** Celle de la liaison

**Sens** Du  $-$  au  $+$  (donc de  $(-\delta e)$  vers  $(+\delta e)$ )

**Norme**  $\|\vec{\mu}\| = \delta e \times d$

La notation VSEPR s'exprime par :

$$(VSEPR) \quad A X_m E_n$$

où  $m$  est le nombre d'atomes liés à l'atome central et  $n$  est le nombre d'entités non liantes (doublets ou électron célibataire).

## 11.3 Cristallographie

---

**Définition 2 : Cristal**

---

Un cristal est défini par une **maille** et un **motif**. Un motif est une translation de la maille selon un vecteur  $\vec{t}$ .

---

**Définition 3 : Compacité**

---

En considérant les atomes comme des sphères, la **compacité**  $C$  se définit dans une maille par :

(11.2) 
$$C = \frac{\text{Volume des atomes de la maille}}{\text{Volume de la maille}}$$

## Chapitre 12

# Premier principe appliqué à la transformation chimique

# Chapitre 13

## Thermochimie

### Méthode

Enthalpie	$H = U + PV$	Capacité thermique molaire à volume constant	$c_v = \frac{(\partial U_m)}{\partial T}$
Energie libre	$F = U - TS$	Capacité thermique molaire à pression constante	$c_v = \frac{(\partial H_m)}{\partial T}$
Enthalpie libre	$G = H - TS$	Avancement	$\xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$
		Vitesse de réaction	$v = \frac{d\xi}{dt} = k \prod_i c_i$

### 13.1 Grandeurs extensives

#### Définition 4 : Grandeure intensive/extensive

Une grandeur extensive est une grandeur proportionnelle à la taille du système qu'elle caractérise.

#### Propriétés

- extensive  $\times$  intensive = intensive
- $\frac{\text{extensive}}{\text{extensive}} = \text{intensive}$
- $J_{\text{extensive}}(\alpha n, \alpha V) = \alpha J(n, V)$

#### Définition 5



Pour toute grandeur extensive  $J$ , on définit :

$$(13.1) \quad \Delta_r J = \left( \frac{\partial J}{\partial \xi} \right)_{T, P \text{ fixés}}$$

### Théorème 5.1

$$(13.2) \quad \Delta_r J = \sum_{\text{Produits}} J_m - \sum_{\text{Réactifs}} J_m$$

### Définition 6 : Variance

La **variance** d'un système est le nombre maximal de paramètres intensifs que l'on peut choisir sans remettre en cause l'équilibre du système étudié.

### Théorème 6.1 : Règle de GIBBS

La règle de GIBBS permet de déterminer la **variance**  $v$  d'un système en connaissant :

- i. Le nombre  $\varphi$  de phases distinctes
- ii. Le nombre  $c$  de constituants
- iii. Le nombre  $r$  de réactions chimiques

Alors, on a :

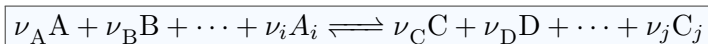
$$(13.3) \quad v = c - r + 2 - \varphi$$

(ATTENTION)

Il faut faire attention en comptant  $\varphi$  dans un système : les phases doivent être distinctes. Par exemple,  $\varphi = 2$  pour un liquide et un gaz,  $\varphi = 2$  pour deux états solides (car ils sont non miscibles), et  $\varphi = 1$  pour deux liquides ou deux gaz miscibles

## 13.2 Équilibre d'une réaction

On considère une réaction du type :



Les  $\nu_i$  et les  $\nu_j$  sont les coefficients stoechiométriques associés à chaque constituant  $i$ . Ceux des réactifs (les  $\nu_i$ ) sont comptés négativement.

Les  $n_k$  sont les quantités de matière associées à chaque constituant  $P_k$  de la réaction.

### 13.2.1 Enthalpie libre

---

**Définition 7 : Enthalpie libre de réaction**

---

L'**enthalpie libre**  $G$  est une fonction d'état associée au deuxième principe de la thermodynamique :

$$(13.5a) \quad \begin{aligned} G &= H - TS \\ G &= U + PV - TS \end{aligned}$$

La version différentielle :

$$(13.5b) \quad dG = Vdp - SdT + \delta W_{\text{rév}}$$

Et  $G$  étant une fonction d'état extensive :

$$(13.5c) \quad \Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

$\Delta_r G^\circ$  caractérise l'équilibre de réaction, et  $\Delta_r G$  son sens.

$$(13.6) \quad \begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= -RT \ln K \\ \Delta_r G &= \Delta_r G^\circ + RT \ln Q \\ &= RT \ln \frac{Q}{K} \\ \Delta_r G \leq 0 &\Leftrightarrow \text{Sens direct} \end{aligned}$$

À l'équilibre,  $Q = K$ , donc  $\Delta_r G = 0$ .

### 13.2.2 Avancement

---

**Définition 8 : Avancement**

---

L'**avancement** d'une réaction est défini par

$$(13.7) \quad \xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$$

Où  $n_i$  est la quantité molaire du constituant  $A_i$ ,  $n_i^\circ$  sa quantité molaire initiale, et  $\nu_i$  son coefficient stœchiométrique.

$\xi$  est en mol

---

**Définition 9 : Vitesse de réaction**

---

La vitesse de réaction est la variation de l'avancement :

$$(13.8) \quad v_{\text{réaction}} = \frac{d\xi}{dt}$$

Dans les systèmes à volumes constants, on parle de **vitesse volumique de réaction** :

$$v_{\text{vol}} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt}$$

#### Théorème 9.1 : Loi de vitesse

On peut relier la vitesse de réaction à la constante de vitesse  $k$  et les concentrations  $c_i$  :

(13.9a) 
$$v = k \cdot f(c_i)$$

où  $f(c_i)$  est une fonction des concentrations. Souvent, on a :

(13.9b) 
$$v = k \prod_i c_i$$

### 13.2.3 Loi d'action de masse

#### Théorème 9.2 : Loi d'action de masse

La **loi d'action de masse**, aussi appelée **Loi de GULDERG et WAAGE**, permet de calculer la constante  $K$  :

(13.10) 
$$K = \prod_i a_i^{\nu_i}$$

## Chapitre 14

# Diagramme Potentiel-pH

Pour un couple Oxydant-Réducteur, le diagramme potentiel-pH représente l'évolution du potentiel d'oxydo-réduction en fonction du pH.

### 14.1 Rappels

Le **produit ionique de l'eau**  $K_e$  est le coefficient de réaction d'autoprotolyse de l'eau.

$$(14.1a) \quad K_e = [\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]$$

Le  $pK_e$  est son potentiel :

$$(14.1b) \quad \begin{aligned} pK_e &= -\log K_e \\ pK_e &= p\text{OH} + p\text{H} \end{aligned}$$

À 25°C,  $K_e = 10^{-14}$ .

### 14.2 Méthode

On va prendre pour exemple le fer :  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})/\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})/\text{Fe}(\text{s})$ , à une concentration de tracé  $c_{\text{tra}} = 10^{-2} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$

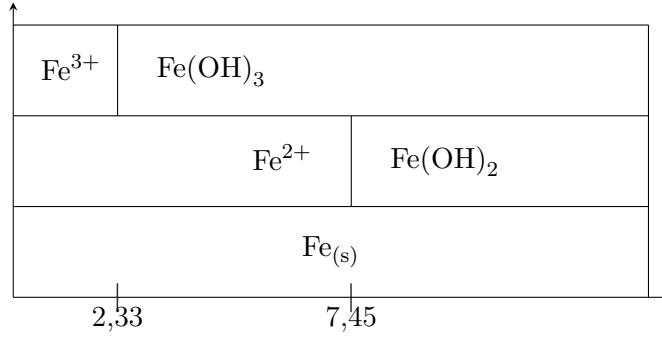
1. Créer un diagramme de situation

- Calculer les **nombre d'oxydation** ( $\sum q = \sum n_0$ )  
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}^{3+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s}) & / & \text{Fe}^{2+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s}) & / & \text{Fe}(\text{s}) \\ +III & & +III & & +II & & +II & & 0 \end{array}$$
- Pour un même nombre d'oxydation, on regarde les gammes de pH.
  - (a) Avec la concentration de tracé  $c_{\text{tra}} = [\text{Fe}^{2+}]$ , on écrit une équation, par exemple  
$$\text{Fe}^{2+} + 2 \text{OH}^- = \text{Fe}(\text{OH})_2$$
  - (b) On utilise la loi d'action de masse pour trouver le pH en connaissant le  $K_e = 10^{-14}$  et le  $K_{s2} = [\text{OH}^-]^2[\text{Fe}^{2+}]$

$$\begin{aligned}
K_{s_2} &= [\text{OH}^-]^2 [\text{Fe}^{2+}] \\
pH &= -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \\
&= -\log \left( \frac{K_e}{[\text{OH}^-]} \right) \\
&= -\log \left( \frac{K_e}{\sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}}} \right) = pK_e + \log \left( \sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}} \right)
\end{aligned}$$

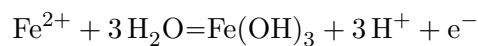
Les données renvoient les frontières  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3$  respectivement à 7,5 et 2,3

- On en déduit un diagramme de situation :



2. On étudie, pour les frontières existantes, l'équation de la droite

- Pour les équations ne faisant pas intervenir  $\text{H}^+$ , comme par exemple à la frontière  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{s})$  où l'équation est  $\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Fe}$ , ou à la frontière  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+}$ , la frontière sera horizontale, d'équation  $E^\circ$
- Pour les autres, on applique simplement NERNST pour exprimer  $E$  en fonction du pH. Par exemple :



Alors,

$$\begin{aligned}
E &= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 (3 \log [\text{H}^+] - \log [\text{Fe}^{2+}]) \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}] - 0,18 \text{pH}
\end{aligned}$$

$E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}]$  étant constant, on peut le déterminer par continuité avec la frontière de  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  à  $\text{pH} = 2,3$

3. On trace le diagramme Potentiel-pH

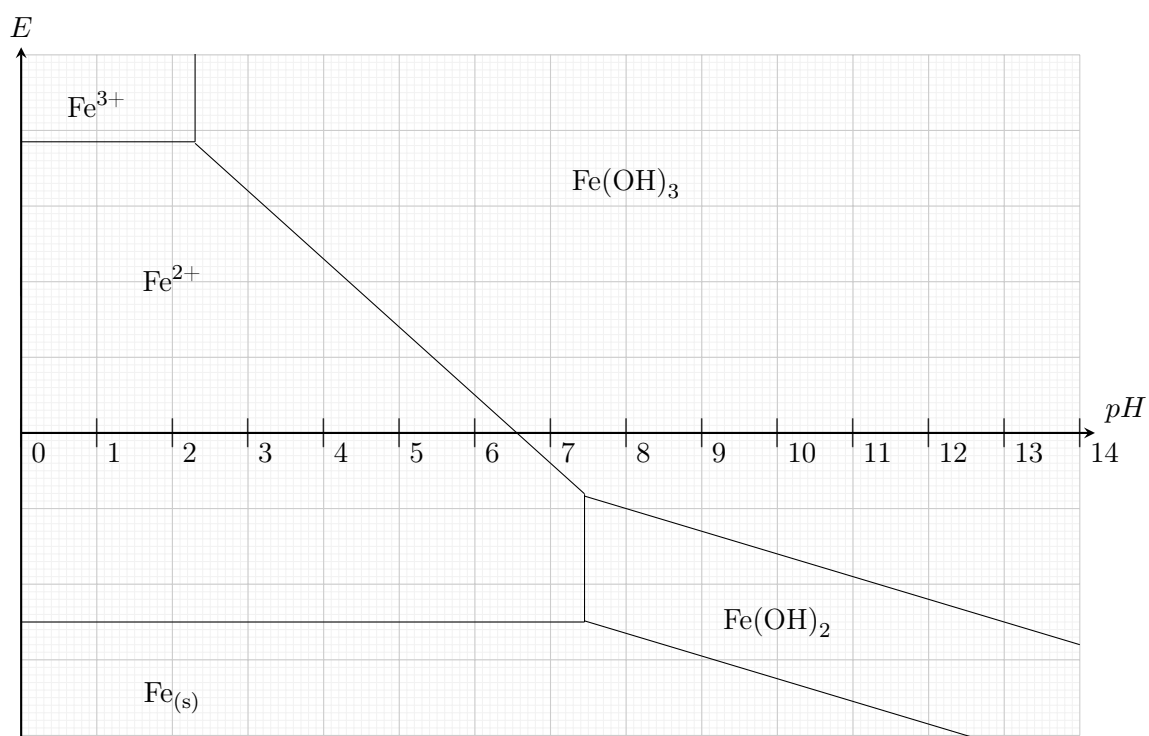


FIGURE 14.1 – Diagramme potentiel-pH du fer

# Liste des acronymes

AO	Amplificateur Opérationnel. 2, 20
ARQS	Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires. 2, 17, 96
FEM	Force Électromotrice. 19
OEM	Onde Électromagnétique. 17, 39
OPP	Onde Plane Progressive. 60, 61, 62, 63, 64
OPPM	Onde Plane Progressive Monochromatique. 62, 63, 66, 67, 68
PFD	Principe Fondamental de la Dynamique. 34, 35, 64
TMC	Théorème du Moment Cinétique. 29, 35
TRC	Théorème de la Résultante Cinétique. 34, 55

# Index

- D'ALEMBERT, 53
- Aplanétisme, 38
- ARCHIMÈDE, 16
- ARQS, 18
- Avancement, 90
- Biot et Savart, 50
- BODE, 25
- Capacité thermique, 11
  - à pression constante, 10
  - à volume constant, 9
- Champ
  - électromoteur, 59
- Charge formelle, 85
- Chemin optique, 40
- Circulation, 81
- Cirulation
  - élémentaire, 81
- CLAUSIUS
  - inégalité, 14
- Compacité, 86
- Conducteur ohmique, 67
- Constante
  - STEFAN, 74
- Coordonnées
  - cartésiennes, 78
  - cylindriques, 79
- Dégénéré, 84
- Densité
  - spectrale d'onde de flux surfacique, 73
  - surfacique
    - d'énergie, 73
  - volumique d'énergie électromagnétique, 56
  - volumique de force électromagnétique, 55
- DESCARTES, 38
- Deuxième principe, 10
- Diagramme
  - potentiel-pH, 92
- Dipôle
  - magnétique, 51
- Dipôle
  - électrostatique, 49
- Dispersion, 66
- Divergence, 80
- Éclairement  $\mathcal{E}$ , 41
- Energie
  - d'un dipôle, 22
- Énergie
  - cinétique, 28
  - potentielle, 28
- Enthalpie, 9
  - libre, 90
- Entropie, 10
- Équilibre de Réaction, 90
- Grandeur Extensive, 88
- FARADAY, 57
- Filtre, 23
- Flux, 81
  - élémentaire, 81
  - radiatif, 75
  - thermique, 69
- Fonction
  - de transfert, 23
- Force
  - centrale, 28
  - conservative, 27
  - de CORIOLIS, 31
  - de COULOMB, 46
  - électromotrice induite, 60
  - de LAPLACE, 51, 58
  - de LORENTZ, 51
  - de rappel, 27
- FRAUNHOFFER, 44
- Fréquence
  - de coupure, 66
- FRESNEL, 42



Gain, 24  
 GALILÉEN, 30  
 Gradient, 80  
  
 HUND, 84  
 HUYGENS-FRESNEL, 44  
  
 Impédance, 21  
 Inductance  
     propre, 59  
 Isobare, 9  
 Isochore, 9  
  
 $\vec{j}$  (Densité Volumique de Courant), 50  
  
 KEPLER, 29  
 KLECHKOWSY, 84  
  
 LAPLACE, 55  
 LEWIS, 85  
 Ligne de champ, 80  
 Loi  
     d'action de masse, 91  
     de COULOMB, 31, 36  
     de FOURIER, 69  
     de GULDERG et WAAGE, 91  
     de KIRCHOFF, 17  
     des mailles, 17  
     des nœuds, 17  
     de PLANCK, 74  
     de STEFAN-BOLTZMANN, 74  
     de WIEN, 75  
 Longueur d'onde  $\lambda$ , 41  
  
 Masse  
     volumique, 16  
 MAXWELL  
     AMPÈRE, 51  
     GAUSS, 48  
 MAYER, 12  
 MILLMAN, 22  
 Module d'onde  $k$ , 41  
 Moment  
     cinétique, 33  
     dipolaire, 85  
     dipolaire(Electrostatique), 49  
     d'une force, 32  
     d'inertie, 34  
     magnétique, 51  
 Lumière monochromatique, 41  
  
 NEUMANN, 59  
 Nombre d'onde  $\sigma$ , 41  
  
 Nombre quantique, 84  
     azimutal  $l$ , 84  
     magnétique  $m_l$ , 84  
     principal  $n$ , 84  
     de spin  $m_s$ , 84  
 NORTON, 19  
  
 Loi d'OHM  
     Globale, 57  
 Onde  
     électromagnétique, 39  
     plane, 61  
     polarisée rectilignement, 64  
     progressive, 61  
     transversale, 61  
 Ostrogradski, 82  
  
 Paquet d'onde, 67  
 Paraxial(rayon), 38  
 PAULI, 84  
 Période, 41  
 Phase, 24  
 Plasma, 64  
 POISSON, 55  
 Potentiel  
     électrostatique, 48  
 POYNTING  
     équation locale, 56  
     vecteur, 56  
 Premier principe, 8  
 Pression, 16  
 Puissance  
     d'une force, 27  
     instantanée, 22  
     moyenne, 22  
 Pulsation  
     de coupure, 66  
     de coupure, 25  
     plasma, 65  
 Pulsation  $\omega$ , 41  
  
 Régime  
     stationnaire (Thermodynamique), 14  
 Retard de phase, 40  
 Rétroaction, 20  
  
 Stigmatisme  
     approché, 38  
     rigoureux, 38  
 Stokes, 82  
 Système  
     conservatif, 27

- ouvert, 14
- thermodynamique, 7
- THÉVENIN, 19
- Torseur
  - cinétique, 33
- Transfert thermique, 8
- Transverse, 61
- Travail d'une force, 27
- Troisième principe, 13

- Tube de champ, 80
- Valeur
  - efficace, 22
  - moyenne, 22
- Variance, 89
- VARIGNON, 32
- Vibration lumineuse, 39
- Vitesse
  - de phase, 66