

COURS DE PRÉPA

---

# Physique-Chimie

---

Écrit par  
Alexandre JOUANDIN

2013—2015  
Écrit en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X



11 novembre 2014

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>I</b> | <b>Physique</b>  | <b>5</b>  |
| <b>1</b> | <b>Thermodynamique</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1      | Définitions generales . . . . .  | 6         |
| 1.2      | Gaz Parfait . . . . .  | 6         |
| 1.3      | Premier Principe . . . . .   | 7         |
| 1.4      | Deuxième Principe . . . . .  | 8         |
| 1.5      | Troisième Principe . . . . .   | 8         |
| 1.6      | Machines thermiques . . . . .  | 8         |
| <b>2</b> | <b>Statique des fluides</b>  | <b>10</b> |
| 2.1      | Champ de pression d'un fluide . . . . .  | 10        |
| 2.2      | Théorème d'ARCHIMÈDE . . . . .   | 10        |
| <b>3</b> | <b>Électronique</b>  | <b>11</b> |
| 3.1      | Circuits linéaires dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS) . . . . . | 11        |
| 3.1.1    | THÉVENIN-NORTON . . . . .  | 13        |
| 3.2      | Régime transitoires . . . . .  | 14        |
| 3.3      | Amplificateur Opérationnel (AO) . . . . .  | 14        |
| 3.4      | Régimes sinusoïdaux . . . . .  | 15        |
| 3.4.1    | Puissance . . . . .  | 16        |
| 3.5      | Filtres . . . . .  | 17        |
| 3.5.1    | Fonctions de transfert usuelles . . . . .  | 18        |
| 3.5.2    | Diagrammes de Bode . . . . .   | 18        |
| <b>4</b> | <b>Mécanique du Point</b>  | <b>20</b> |
| 4.1      | Étude cinétique . . . . .  | 20        |
| 4.2      | Approche Énergétique . . . . .   | 21        |
| 4.2.1    | Puissance et travail . . . . .   | 21        |
| 4.2.2    | Énergie cinétique . . . . .  | 21        |
| 4.2.3    | Énergie potentielle . . . . .  | 22        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.3      | Forces centrales . . . . .                      | 22        |
| 4.4      | Dynamique en référentiel non galiléen . . . . . | 23        |
| 4.4.1    | Loi de composition des vitesses . . . . .       | 24        |
| 4.4.2    | Loi de composition des accélérations . . . . .  | 24        |
| 4.4.3    | Forces d'inerties . . . . .                     | 24        |
| <b>5</b> | <b>Mécanique du solide</b>                      | <b>26</b> |
| 5.1      | Préambule . . . . .                             | 26        |
| 5.1.1    | Dérivée d'un vecteur . . . . .                  | 26        |
| 5.1.2    | Dérivée en coordonnées polaires . . . . .       | 26        |
| 5.2      | Définitions . . . . .                           | 26        |
| 5.3      | Théorèmes de Koënig . . . . .                   | 27        |
| 5.4      | Moment d'inertie . . . . .                      | 28        |
| 5.5      | Théorèmes de dynamique . . . . .                | 28        |
| 5.6      | Solides en contact . . . . .                    | 29        |
| <b>6</b> | <b>Optique</b>                                  | <b>31</b> |
| 6.1      | Optique géométrique . . . . .                   | 31        |
| 6.1.1    | Stigmatisme et aplanétisme . . . . .            | 31        |
| 6.1.2    | Réflexion et réfraction . . . . .               | 32        |
| 6.2      | Optique ondulatoire . . . . .                   | 33        |
| 6.2.1    | Généralités . . . . .                           | 33        |
| 6.2.2    | Lumière monochromatique . . . . .               | 34        |
| 6.2.3    | Interférences . . . . .                         | 35        |
| 6.2.4    | Diffraction . . . . .                           | 37        |
| 6.2.5    | Réseaux . . . . .                               | 38        |
| <b>7</b> | <b>Électromagnétisme</b>                        | <b>39</b> |
| 7.1      | Électrostatique . . . . .                       | 39        |
| 7.1.1    | Loi de COULOMB . . . . .                        | 39        |
| 7.1.2    | Propriétés du champ électrostatique . . . . .   | 40        |
| 7.1.3    | Circulation du champ électrostatique . . . . .  | 40        |
| 7.1.4    | Flux du champ électrostatique . . . . .         | 41        |
| 7.1.5    | Dipôle électrostatique . . . . .                | 41        |
| 7.2      | Magnétostatique . . . . .                       | 43        |
| 7.2.1    | Dipôle Magnétique . . . . .                     | 44        |
| 7.3      | Équations de MAXWELL . . . . .                  | 45        |
| 7.3.1    | Principe de conservation de la charge . . . . . | 45        |
| 7.3.2    | Les équations de MAXWELL . . . . .              | 45        |
| 7.3.3    | Equations de POISSON et de LAPLACE . . . . .    | 47        |
| 7.4      | Énergie électromagnétique . . . . .             | 48        |
| 7.5      | Induction . . . . .                             | 50        |
| 7.5.1    | Loi d'Ohm généralisée . . . . .                 | 50        |
| 7.5.2    | Auto-induction . . . . .                        | 51        |
| 7.5.3    | Inductance mutuelle . . . . .                   | 52        |
| 7.5.4    | Force electomotrice induite . . . . .           | 52        |
| 7.6      | Propagation et rayonnement . . . . .            | 53        |
| 7.6.1    | Dans le vide . . . . .                          | 53        |
| 7.6.2    | Dans un plasma . . . . .                        | 57        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>8</b>  | <b>Diffusion Thermique</b>              | <b>59</b> |
| 8.1       | Conduction . . . . .                    | 59        |
| 8.2       | Convection . . . . .                    | 62        |
| <b>9</b>  | <b>Rayonnement Thermique</b>            | <b>63</b> |
| <b>10</b> | <b>Annexe</b>                           | <b>66</b> |
| 10.1      | Trigonométrie . . . . .                 | 66        |
| 10.1.1    | Définition . . . . .                    | 66        |
| 10.1.2    | Addition / Produit . . . . .            | 66        |
| 10.1.3    | Nombres complexes . . . . .             | 66        |
| 10.2      | Calcul vectoriel . . . . .              | 67        |
| 10.3      | Complément mathématique . . . . .       | 67        |
| 10.3.1    | Dérivée d'un vecteur . . . . .          | 67        |
| 10.3.2    | Équation différentielle . . . . .       | 68        |
| 10.4      | Repères en physique . . . . .           | 68        |
| 10.4.1    | Repère cartésien . . . . .              | 68        |
| 10.4.2    | Repère cylindrique . . . . .            | 69        |
| 10.5      | Analyse Vectorielle . . . . .           | 70        |
| 10.5.1    | Généralités sur les champs . . . . .    | 70        |
| 10.5.2    | Opérateurs sur les champs . . . . .     | 70        |
| 10.5.3    | STOKES et OSTROGRADSKI . . . . .        | 71        |
| 10.6      | Règles générales . . . . .              | 72        |
| 10.6.1    | Relations entre les grandeurs . . . . . | 72        |
| 10.6.2    | Longueurs de références . . . . .       | 72        |
| <b>II</b> | <b>Chimie</b>                           | <b>73</b> |
| <b>11</b> | <b>Première année</b>                   | <b>74</b> |
| 11.1      | Configuration électronique . . . . .    | 74        |
| 11.2      | Représentation moléculaire . . . . .    | 75        |
| 11.3      | Cristallographie . . . . .              | 75        |
| <b>12</b> | <b>Thermochimie</b>                     | <b>77</b> |
| 12.1      | Grandeurs extensives . . . . .          | 77        |
| 12.2      | Équilibre d'une réaction . . . . .      | 78        |
| 12.2.1    | Enthalpie libre . . . . .               | 78        |
| 12.2.2    | Avancement . . . . .                    | 79        |
| 12.2.3    | Loi d'action de masse . . . . .         | 80        |
| <b>13</b> | <b>Diagramme Potentiel-pH</b>           | <b>81</b> |
| 13.1      | Rappels . . . . .                       | 81        |
| 13.2      | Méthode . . . . .                       | 81        |
|           | <b>Liste des acronymes</b>              | <b>84</b> |
|           | <b>Index</b>                            | <b>85</b> |

Première partie

Physique

# Chapitre 1

## Thermodynamique

### Méthode

#### Formules

**Premier principe**  $\Delta U = Q + W$  (cf. équation (1.5a) page 7)

$dU = \delta Q + \delta W$  (cf. équation (1.6a) page 7)

$dU = TdS - PdV$

**Enthalpie**  $dH = U + PV$

$dH = TdS + VdP$

**Deuxième principe**  $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$  (cf. équation (1.8) page 8)

### 1.1 Définitions generales

#### Définition 1 : Energie interne

On la définit microscopiquement par :

$$(1.1) \quad U = U_0 + E_c^* + \underbrace{E_p^*}_{\text{Énergie potentielle d'interaction}}$$

### 1.2 Gaz Parfait

#### Définition 2 : Gaz Parfait

Un gaz parfait est un gaz vérifiant

$$(1.2) \quad PV = nRT$$

Par définition, l' $E_c^*$  d'un gaz parfait ne varie pas. On démontre expérimentalement que :

$$U_{\text{Gaz Parfait}} = U_0 + C_v T$$

### Théorème 2.1 : Relations de LAPLACE

Au cours d'une transformation **adiabatique réversible** (donc isentropique), un gaz parfait vérifie :

(1.3a)  $PV^\gamma = \text{constante}$

(1.3b)  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$

(1.3c)  $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{constante}$   
 $= P_{\text{eq}}V_{\text{eq}}$

Où  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

## 1.3 Premier Principe

### Définition 3 : Transfert thermique

Le **transfert thermique** est un apport de chaleur lors d'un transfert de température :

(1.4)  $Q = C \Delta T$

Où  $C$  est la capacité calorifique en  $J \cdot K^{-1}$

### Théorème 3.1 : Premier principe

C'est un bilan sur l'énergie interne :

(1.5a)  $\Delta U = Q + W$

Sa deuxième forme est en infinitésimal :  $dU = \delta Q + \delta W$ . Ou plutôt :

(1.5b)  $dU = TdS - PdV$

### Définition 4 : Fonction Enthalpie

La fonction enthalpie  $H$  est homogène à une énergie.

(1.6a)  $H = U + PV$

(1.6b)  $dH = TdS + VdP$

### Théorème 4.1 : Capacité calorifique

On peut utiliser deux capacités calorifiques :

La capacité calorifique  $C_v$  à volume constant

$$(1.7a) \quad C_v = \frac{3}{2} nR$$

La capacité calorifique  $C_p$  à pression constante

$$(1.7b) \quad C_p = \frac{5}{2} nR$$

#### Preuve 4.1.1

Si on est à volume constant :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \underbrace{Q_v}_{C_v \Delta T} + \underbrace{W}_{P dV} \\ &= C_v \Delta T + 0 \\ \Delta U &= C_v \Delta T \end{aligned}$$

Donc l'énergie interne est proportionnelle à la variation de température.

Maintenant, si on est à pression constante, on va prendre l'enthalpie  $H$  :

$$\Delta H = \underbrace{\Delta U}_{Q + W} + \Delta(PV)$$

## 1.4 Deuxième Principe

### Théorème 4.2 : Deuxième principe

Il existe une fonction d'état  $S$  **entropie**, additive, extensive, telle que :

$$(1.8) \quad dS = \delta S_{\text{créée}} + \delta S_{\text{échangée}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta S_{\text{échangée}} = \frac{\delta Q}{T}}$$

Au final,  $\boxed{\delta S_{\text{créée}} \geq 0}$ .

Lorsqu'une transformation est **réversible**, on a  $\boxed{S_{\text{créée}} = 0}$  et alors  $\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}}$

## 1.5 Troisième Principe

### Définition 5 : Troisième principe

À température nulle ( $T = 0K$ ), l'entropie est nulle.

## 1.6 Machines thermiques

### Théorème 5.1 : Énoncé des premiers et deuxièmes principes



Sur un cycle, les fonctions d'état reviennent à leur état initial. Donc le premier principe s'écrit :

$$(1.9) \quad W + \sum_i Q_i = \Delta U = 0$$

De même, le second principe s'écrit cette fois :

$$(1.10) \quad \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

On appelle ce second principe l'inégalité de Clausius.

### Théorème 5.2 : Rendement

Le rendement  $r$  est défini par :

$$(1.11a) \quad r = \frac{\text{Transfert énergétique utile}}{\text{Énergie fournie à la machine}}$$

$$(1.11a) \quad r_{\text{moteur}} = -\frac{W}{Q_c}$$

$$(1.11b) \quad r_{\text{réfrigérateur}} = -\frac{Q_f}{W}$$

$$(1.11c) \quad r_{\text{Pompe à chaleur}} = -\frac{Q_c}{W}$$

## Chapitre 2

# Statique des fluides

### 2.1 Champ de pression d'un fluide

#### Définition 6 : Définition générale

La pression et la masse volumique sont définies comme des champs scalaires fonctions des variables d'espace.

#### Théorème 6.1 : Relation fondamentale de la statique

Pour un champ de pesanteur  $\vec{g}$ , le champ de pesanteur  $P$  vérifie localement :

$$(2.1a) \quad \frac{dP}{dz} = \rho g$$

où  $\rho$  est la masse volumique locale. On l'intègre en :

$$(2.1b) \quad P(z) = P_0 + \rho g z$$

La norme d'une force  $\vec{F}_p$  exercée par une pression  $P$  sur une surface  $S$  est  $F = P \cdot S$

### 2.2 Théorème d'ARCHIMÈDE

#### Théorème 6.2 : Poussée d'ARCHIMÈDE

Un corps entièrement immergé dans un liquide subit une force opposée au poids du volume du fluide déplacé. C'est à dire :

$$(2.2) \quad \vec{\Pi}_A = -\rho V \vec{g}$$

## Chapitre 3

# Électronique

### Méthode

#### Résoudre

$$\text{Loi des nœuds} \quad \sum_{\text{Nœud}} i = 0$$

$$\text{Puissance} \quad \mathcal{P} = u \times i$$

$$\text{Inductance} \quad u = L \frac{di}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2} L i^2$$

$$\text{Loi des mailles} \quad \sum_{\text{Maille}} u = 0$$

$$\text{Énergie électrique reçue} \quad \Delta E = \int_{\Delta t} \mathcal{P}(t) dt$$

$$\text{Capacité} \quad i = C \frac{du}{dt}$$
$$E = \frac{1}{2} C u^2$$

#### Lois de KIRCHOFF

Pour ne pas avoir trop d'équations redondantes avec les lois de Kirchhoff, on pourra suivre la méthode suivante :

- On compte le nombre  $b$  de branches et  $n$  de nœuds.
- On écrit  $(n - 1)$  lois des nœuds
- On écrit  $((b - (n - 1)))$  lois des mailles
- On résout le système final

### 3.1 Circuits linéaires dans l'ARQS

— **Définition 7 : Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)** —

On parle d'ARQS quand le courant se propage assez rapidement pour pouvoir considérer que son établissement est instantané.

Ainsi, pour une Onde Électromagnétique (OEM) sinusoïdale de période temporelle  $T$  et de période spatiale  $\lambda$ , telle que  $\lambda = c \cdot T$  (où  $c$  désigne la vitesse de l'onde), et pour un observateur

situé à une distance  $D$  d'un point quelconque du circuit, on est dans le cadre de l'ARQS si  $D \ll \lambda$ .

### Définition 8

Un courant électrique résulte d'un déplacement de charges  $q$ . On peut dès lors définir l'intensité  $I$  et la tension  $U$  d'un dipôle :

$$(3.1) \quad I = \frac{dq}{dt} \quad U_{AB} = V_A - V_B$$

### Théorème 8.1 : Loi d'Ohm

Loi d'Ohm Globale

$$(3.2) \quad u = Ri \quad i = Gu$$

#### 3.1.1 THÉVENIN-NORTON

#### Théorème 8.2 : Équivalence de THÉVENIN-NORTON

Dans le modèle de THÉVENIN, un générateur de tension est la combinaison d'un générateur de tension idéal de *Force Électromotrice*  $E$  et d'une résistance interne  $R$  :

$$(3.3) \quad u = E - Ri$$

Ce générateur est équivalent, dans le modèle de NORTON, à la combinaison d'un générateur de courant idéal de *courant de court-circuit*  $I_0 = \frac{E}{R}$  et d'une résistance  $R$  en parallèle (on prendra  $G = \frac{1}{R}$ ) :

$$(3.4) \quad i = I_0 - Gu$$

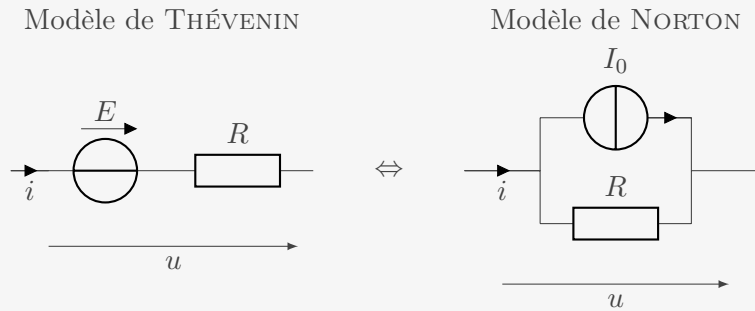
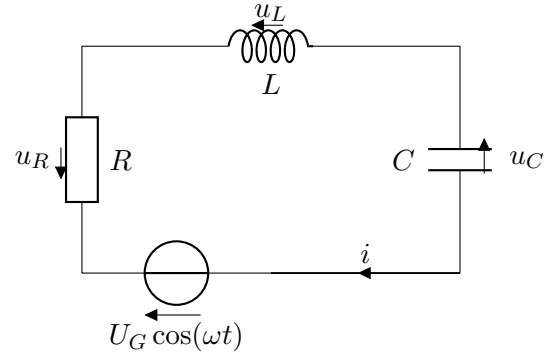


FIGURE 3.1 – Équivalence THÉVENIN-NORTON

### 3.2 Régime transitoires

Mise en équation :

$$\begin{cases} u_C + u_L + u_R = U_G \cos(\omega t) \\ u_R = Ri \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases}$$



### 3.3 Amplificateur Opérationnel (AO)

#### Définition 9 : L'Amplificateur Opérationnel

Un Amplificateur Opérationnel (AO) est un **circuit intégré** à huit bornes dont 5 sont utilisées en TP. C'est un composant **actif** qui doit être alimenté par un courant stable continu.

#### Propriétés

Les propriétés générales d'un AO :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $V_S \in [-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}]$
- L'intensité de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $I_S \in [-I_{\text{sat}}; I_{\text{sat}}]$

En régime linéaire (avec une boucle de **rétroaction négative**), on a :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est **presque nulle** :  $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est limitée par une valeur de saturation :  $V_S \in ]-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}[$

Au contraire, en régime saturé (avec une boucle de **rétroaction positive**), on a :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont pratiquement nuls :  $I_- \approx I_+ \approx 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est **quelconque** :  $\varepsilon \approx 0$
- La tension de sortie est saturée du signe d' $\varepsilon$  :  $V_S \in \{-V_{\text{sat}}; V_{\text{sat}}\}$

Enfin, l'Ao idéal a les propriétés suivantes :

- Les courants d'entrée  $I_-$  et  $I_+$  sont nuls :  $I_- = I_+ = 0$
- La tension d'entrée ( $\varepsilon = V_+ - V_-$ ) est nulle en régime linéaire :  $\varepsilon = 0$

### 3.4 Régimes sinusoïdaux

#### Méthode

#### Formules

**Théorème de MILLMAN** 
$$V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{\underline{Z}_k}}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}}$$

**Puissance moyenne** 
$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{U_0 I_0 \cos \varphi}{2}$$

#### Étudier un circuit électrique

Lorsqu'on doit étudier un circuit, il peut être utile de penser aux méthodes suivantes :

- Calculer les impédances équivalentes
- Utiliser des ponts diviseurs
- Appliquer les lois de KIRCHOFF
- Trouver des équivalences THÉVENIN-NORTON
- Appliquer la formule de Millman

#### Théorème 9.1 : Impédance des dipôles usuels

On donne, pour les dipôles usuels, leur impédance en complexes  $\underline{Z}$  :

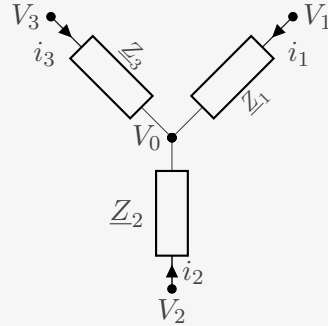
|                     |   |  |
|---------------------|---|--|
| <b>Dipole</b>       | $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$                           |  |
| <b>Résistance</b>   | $\underline{u} = R \cdot \underline{i}$                                       | $\underline{Z}_{\text{Résistance}} = R$                    |
| <b>Bobine</b>       | $\underline{u} = L \cdot \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L \underline{i}$ | $\underline{Z}_{\text{Bobine}} = jL\omega$                 |
| <b>Condensateur</b> | $C \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{i}$                                 | $\underline{Z}_{\text{Condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$ |

**Preuve 9.1.1** On remarque que pour des fonction complexes, dériver  $f = re^{j(\omega t + \varphi)}$  revient à multiplier  $f$  par  $j\omega$ . On obtient alors immédiatement toutes les formules précédentes en les exprimant bien sous la forme  $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$

### Théorème 9.2 : MILLMAN

Le théorème de MILLMAN permet de calculer le potentiel d'un nœud

$$(3.5) \quad V_0 = \frac{\sum_k \frac{V_k}{Z_k}}{\sum_k \frac{1}{Z_k}}$$



#### 3.4.1 Puissance

##### Définition 10 : Puissance instantanée

La **puissance instantanée** est une fonction du temps :

$$(3.6) \quad \mathcal{P}(t) = u(t)i(t)$$

En **convention récepteur**, c'est la puissance reçue par le dipôle.

En **convention générateur**, c'est la puissance cédée par le dipôle.

##### Définition 11 : Energie

L'**énergie** est l'intégrale de la puissance :

$$(3.7) \quad \mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt$$

##### Définition 12 : Puissance moyenne

On s'intéresse plus souvent à la **puissance moyenne**  $\mathcal{P}_m$  sur un intervalle de temps  $\tau$

$$(3.8) \quad \mathcal{P}_m = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{P}(t)dt$$

En général, on prend  $\tau = T$  la période d'une fonction sinusoïdale.

On définira la **valeur moyenne** d'une fonction du temps de cette même manière :

$$(3.9) \quad \langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

### Théorème 12.1 : Valeur efficace

La **valeur efficace** est la valeur continue qui fournirait la même énergie pendant un



même intervalle de temps. Pour une tension  $u(t) = Ri(t)$  :

$$(3.10) \quad U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

La valeur efficace est donc la racine carrée de la moyenne du carré, en anglais *Root Mean Square* (RMS).

**Preuve 12.1.1** Par définition de la valeur efficace, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= U_{\text{RMS}} I_{\text{RMS}} \times T \\ \int_0^T u(t)i(t)dt &= U_{\text{RMS}} \frac{U_{\text{RMS}}}{R} T \\ \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt &= \frac{U_{\text{RMS}}^2}{R} T \\ U_{\text{RMS}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \end{aligned}$$

Pour un régime sinusoïdal,  $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$ , donc :

$$U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

### 3.5 Filtres

#### Définition 13 : Fonction de transfert

La **fonction de transfert**  $\underline{H}$  d'un quadripôle de tension d'entrée  $\underline{v}_e$  et de tension de sortie  $\underline{v}_s$  est définie par :

$$(3.12) \quad \underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$$

#### Définition 14 : Filtre

Un **filtre** est un quadripôle dont la fonction de transfert dépend de la pulsation  $\omega$

### 3.5.1 Fonctions de transfert usuelles

|                       |             |   |   |
|-----------------------|-------------|---|---|
| 1 <sup>er</sup> ordre | Passe-bas   | $\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$  | $\omega_c = \frac{1}{RC}$   |
|                       | Passe-haut  | $\frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$                                |   |
| 2 <sup>e</sup> ordre  | Passe-bas   | $\frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$   | $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ |
|                       | Passe-haut  | $\frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$                 |   |
|                       | Passe-bande | $\frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$  |   |
|                       | Coupe-bande | $\frac{H_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$ |   |

### 3.5.2 Diagrammes de Bode

#### Définition 15 : Gain et phase d'un quadripôle

On peut écrire la fonction de transfert sous la forme polaire :

$$\underline{H}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

On définit alors le **gain**  $G(\omega)$  comme le rapport des amplitudes d'entrées et de sortie et la **phase**  $\varphi(\omega)$  comme le déphasage entre ces mêmes signaux.

Ainsi :

$$(3.13) \quad G(\omega) = \sqrt{\underline{H}\overline{H}} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}\underline{H}}{\text{Re}\underline{H}}$$

---

**Définition 16 : Diagramme de BODE**

---

Le **diagramme de BODE** d'un quadripôle est l'ensemble des deux tracés en fonction de  $\log(\omega)$  :

- du gain en décibel  $G_{\text{dB}} = 20 \log(G(\omega))$
- de la phase  $\varphi(\omega)$

(ATTENTION)

Il est souvent commode d'avoir recours à une variable réduite comme  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  où  $\omega_0$  est une constante qui permet de simplifier les calculs

---

**Définition 17 : Pulsation de coupure à  $-3$  dB**

---

La **pulsation de coupure**  $\omega_c$  correspond à la valeur de la pulsation pour laquelle le gain maximum  $G_{\text{max}}$  est divisé par  $\sqrt{2}$  :

(3.14)

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

## Chapitre 4

# Mécanique du Point

### Méthode

#### Formules Usuelles

Intéractions fondamentales

Force Gravitationnelle  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_r$

Force Électrostatique  $\vec{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_a q_b}{r^2}$

Forces usuelles

Poids  $\vec{P} = m\vec{g}$

Force de LORENTZ  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

Force de Rappel  $\vec{F} = k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ressort}}$

Énergies usuelles

Energie potentielle générale  $E_p(A) - E_p(B) = W_{A \rightarrow B}$

Energie potentielle gravitationnelle  $E_p = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{r_{AB}}$

Energie potentielle de pesanteur  $E_p = mgh$

Energie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

Energie potentielle élastique  $E_{p,e} = \frac{k(l - l_0)^2}{2}$

### 4.1 Étude cinétique

Définition 18 : Force de Rappel

Cette force est déterminée expérimentalement, au voisinage d'une longueur d'équilibre  $l_0$ , par :

$$(4.1) \quad \vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ressort}}$$

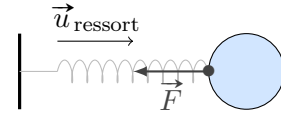


FIGURE 4.1 – Force de rappel d'un ressort

## 4.2 Approche Énergétique

### Définition 19 : Système conservatif

Un **système conservatif** est un système dont l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  est constante.

### Définition 20 : Force conservative

C'est une force dont le travail entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend pas du chemin emprunté.

#### 4.2.1 Puissance et travail

### Définition 21 : Puissance d'une force

La **puissance** caractérise la contribution d'une force  $\vec{F}$  sur un objet en mouvement à une vitesse  $\vec{v}$ .

$$(4.2) \quad \mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

### Définition 22 : Travail d'une force

Le travail est la somme des contributions d'une force  $\vec{F}$  sur un objet en mouvement :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \delta W &= \mathcal{P} dt \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v} dt \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

#### 4.2.2 Énergie cinétique

### Définition 23 : Énergie cinétique

C'est la première énergie qu'on définit :

$$(4.5) \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Pour le **théorème de la puissance cinétique**, cf théorème 31.4 page 29. Le théorème de l'énergie cinétique a été vu en première\* :

#### Théorème 23.1 : Théorème de l'énergie cinétique

Il dérive de l'expression de l'énergie mécanique :

$$(4.6) \quad \underbrace{\frac{dE_m(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action non conservatives}}} = \frac{dE_c(\Sigma)}{dt} + \underbrace{\frac{dE_p(\Sigma)}{dt}}_{\mathcal{P}_{\text{action conservatives}}}$$

#### Théorème 23.2

On peut déduire du théorème précédent que

$$(4.7) \quad \begin{array}{lcl} \text{La variation d'énergie cinétique} & \text{est égale à} & \text{la somme des travaux des forces} \\ E_c(B) - E_c(A) & = & \sum_i W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_i) \\ dE_c & = & \delta W_{A \rightarrow B} \end{array}$$

(ATTENTION) Pour l'énergie cinétique, on prend toutes les forces en comptes. Conservatives ou non.

### 4.2.3 Énergie potentielle

#### Définition 24 : Énergie potentielle

L'énergie potentielle dérivant d'action conservatives, on peut la définir ainsi, en définissant un point  $O$  comme l'origine :

$$(4.8) \quad E_p(M) = E_p(O) - W_{O \rightarrow M}(\vec{P})$$

En pratique, sur Terre,  $E_p = mgh$

### 4.3 Forces centrales

#### Définition 25 : Force centrale

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné, une force est **centrale** si elle pointe en permanence vers un point fixe de  $\mathcal{R}$ .

\*. cf page 418 du livre *Physique !* de Jérôme MAJOU

Un champ de force centrale newtonien est défini par

$$(4.9) \quad \vec{F}(r) = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad E_p(r) = \frac{k}{r}$$

#### Théorème 25.1 : Loi des aires

Une force centrale présente un moment nul, donc le moment cinétique d'un objet soumis exclusivement à une force centrale est constant d'après le Théorème du Moment Cinétique (TMC) (théorème 31.3 page 29).

La trajectoire est alors **plane** et vérifie :

$$(4.10a) \quad r^2 \dot{\theta} = \frac{|\vec{\sigma}_O|}{m} = C$$

D'où on déduit, en définissant  $\mathcal{V}$  comme étant la vitesse aréolaire d'un point de masse  $m$  :

$$(4.10b) \quad \boxed{\mathcal{V} = \frac{\sigma_O}{2m} = \frac{C}{2}}$$

**Preuve 25.1.1** Les forces centrales ont un moment nul. Donc, d'après le TMC :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = 0$$

Donc  $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{\text{constante}}$ . Or, par définition du moment cinétique (cf. équation (5.6) page 27) :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \\ &= mr \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{aligned}$$

#### Théorème 25.2 : Lois de KEPLER

Les trois lois de KEPLER ont été définies expérimentalement vers la fin du XVI<sup>e</sup> siècle :

- Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques dont l'un des foyers est le soleil
- Pendant un même intervalle de temps  $t$ , l'aire balayée par la trajectoire d'une planète est constante (loi des aires)
- La période  $T$  de révolution d'une planète est liée au demi grand axe  $a$  de sa trajectoire elliptique :

$$(4.11) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} m_{\text{Soleil}}}$$

## 4.4 Dynamique en référentiel non galiléen

### Définition 26 : Référentiel galiléen

On dit qu'un référentiel  $\mathcal{R}$  est **galiléen** si les interactions physiques suffisent à justifier les mouvements

(ATTENTION) Cette définition limite la caractérisation d'un référentiel galiléen à la précision de nos expérimentations

### Définition 27 : Mouvement relatif de deux référentiels

Le mouvement d'un référentiel  $\mathcal{R}'$  relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}$  est caractérisé par une vitesse de translation ( $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ) et une vitesse angulaire de rotation ( $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ).

#### Théorème 27.1 : Dérivation d'un vecteur dans deux référentiels

Si  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  est le vecteur rotation de  $\mathcal{R}$  relativement à  $\mathcal{R}'$ , alors la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{x}$  est

$$(4.12) \quad \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{x}$$

#### 4.4.1 Loi de composition des vitesses

##### Théorème 27.2 : Composition des vitesses

La vitesse d'un point  $M$  s'exprime, dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}$  en mouvement relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}'$  galiléen, par :

$$(4.13) \quad \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{vitesse de } M \text{ dans } \mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}_{\text{vitesse de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}' \text{ dans } \mathcal{R}}$$

#### 4.4.2 Loi de composition des accélérations

##### Théorème 27.3 : Composition des accélérations

L'accélération d'un point  $M$  s'exprime, dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  en mouvement relativement à un autre référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, par :

$$(4.14) \quad \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{a}(O')_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\text{Accélération d'entraînement}} + \underbrace{\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge [\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}]}_{\text{Accélération de CORIOLIS}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\text{Accélération de CORIOLIS}}$$

#### 4.4.3 Forces d'inerties

Les forces d'inerties varient suivant le référentiel. On en distingue 4 :



|  |  |
|--|--|
| Force d'inertie de translation             | $\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{translation}} = -m \vec{a}(O)_{\mathcal{R}}$  |
| Force d'inertie centrifuge                 | $\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{centrifuge}} = m \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}^2 r \vec{u}_r$                                     |
| Force d'inertie de rotation différentielle | $\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{différentielle}} = -m \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$ |
| Force d'inertie complémentaire de CORIOLIS | $\vec{F}_{\text{inertie}}^{\text{coriolis}} = -2m \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$             |

## Frottement solide

### Théorème 27.4 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle  $\vec{T}$  en fonction du frottement solide et de la composante normale  $\vec{N}$  :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Statique} & \vec{T}_0 \leq \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} & \vec{T} \stackrel{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right.$$

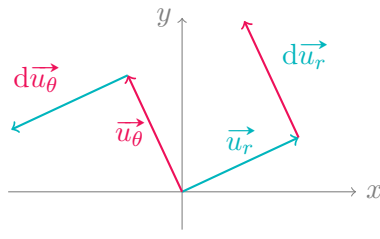
## Chapitre 5

# Mécanique du solide

### 5.1 Préambule

#### 5.1.1 Dérivée d'un vecteur

Ce problème est courant quand on a les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  à dériver. Il suffit de les décomposer selon la base  $\vec{u}_x, \vec{u}_y$  en utilisant les fonctions cosinus et sinus. On obtient alors :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\vec{u}_r)}{d\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d(\vec{u}_\theta)}{d\theta} = -\vec{u}_r \end{array} \right.$$


D'où, en utilisant que  $\frac{d(\vec{u})}{dt} = \frac{d(\vec{u})}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ , le résultat  $\dot{\vec{u}} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}}{d\theta}$

#### 5.1.2 Dérivée en coordonnées polaires

$$(5.2) \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

#### Théorème 27.5 : Relation de VARIGNON

Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir : la formule de « **Babar** »

$$(5.3) \quad \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

**Rappel** : La quantité de mouvement  $\vec{P} = m \vec{v}$  se conserve. Cette idée est souvent utile en mécanique.

### 5.2 Définitions

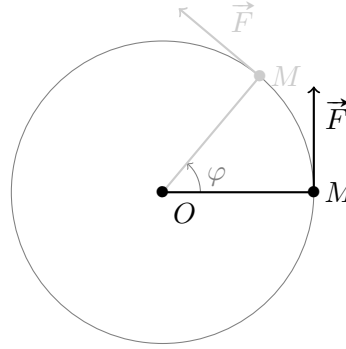
#### Définition 28 : Moment $\vec{\mathcal{M}}$ d'une force

On définit le **moment**  $\vec{\mathcal{M}}$  (équivalent couple  $\vec{\Gamma}$ ) d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  sur

un levier de centre  $O$  :

(5.4)

$$\vec{M}_{\text{Moment}} = \vec{\Gamma}_{\text{Couple}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$



### Définition 29 : Torseur cinétique

C'est un torseur tout simple  $[\vec{\sigma}, \vec{P}]$

(5.5)

$$\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P} \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(B) = \vec{\sigma}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge M\vec{v}}$$

**Rappel** : La vitesse de rotation  $\omega$  permet de déterminer la vitesse  $\vec{v}$ . Pour un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  :

$$\text{D'après Varignon, on a} \quad \vec{v}(M) = 0 + \vec{\omega}(\Sigma) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\text{D'où} \quad \vec{\omega}(\Sigma) = \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_{\Delta}$$

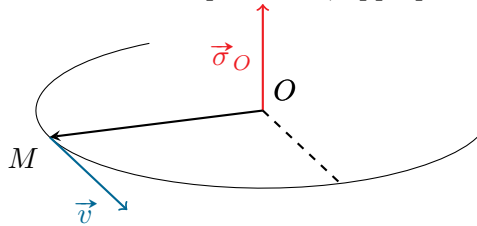
$$\text{Dans le mouvement précédent} \quad v(M) = \omega \cdot OM_{\text{rayon}}$$

### Définition 30 : Moment cinétique $\vec{\sigma}_O$

Le moment cinétique caractérise le mouvement de rotation d'un point par rapport à un autre. Il suffit de prendre la relation de notre torseur précédent, appliqué en  $O$  sans mouvement :

(5.6)

$$\vec{\sigma}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$



## 5.3 Théorèmes de Koënig

### Théorème 30.1 : 1<sup>e</sup> théorème de Koënig

C'est le torseur cinétique appliquée en  $A$  par rapport à  $G$  le centre du référentiel barycentrique :

$$(5.7) \quad \vec{\sigma}(A) = \underbrace{\vec{\sigma}_{Br}}_{\text{Moment cinétique du référentiel barycentrique}} + \overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}(G)$$

Moment cinétique du référentiel barycentrique

### Théorème 30.2 : 2<sup>e</sup> théorème de Koëinig

Une application du premier théorème à l'énergie cinétique :

$$(5.8) \quad E_{c,R} = E_{c,Br} + \frac{1}{2} M (\vec{v}(G))^2$$

## 5.4 Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide caractérise la répartition de la masse dans un solide.

### Définition 31 : Moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide  $\Sigma$  par rapport à un axe  $\Delta$  est :

$$(5.9) \quad J_{\Delta} = \iiint_{P \in \Pi} r^2 dm_P$$

### Théorème 31.1

On relie la vitesse de rotation d'un axe  $\Delta$  du solide à  $J_{\Delta}$  par

$$(5.10) \quad \boxed{\vec{\sigma} = J_{\Delta} \cdot \omega \vec{u}_{\Delta}}$$

et on peut alors calculer l'énergie cinétique :

$$(5.11) \quad E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \cdot \omega^2$$



## 5.5 Théorèmes de dynamique

Ce sont les 3 théorèmes les plus importants.

### Théorème 31.2 : Théorème de la Résultante Cinétique (TRC)

C'est en réalité le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) qu'on voit en termi-

nale et en première, mais la version originale avec la quantité de mouvement.

$$(5.12) \quad \frac{d \overbrace{\vec{P}_{Rg}}^{m\vec{v}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \text{ est équivalent à } \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

### Théorème 31.3 : Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Pour un couple  $\vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$  issu des forces extérieures appliquées en  $A$  et un moment cinétique  $\vec{\sigma}(A)$  appliqué en un point  $A$ , on a :

$$(5.13a) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\Gamma}_{\text{ext}}(A)$$

Qu'on peut aussi écrire :

$$(5.13b) \quad \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(A)$$

C'est un équivalent du PFD, mais qui prend en compte la rotation, c'est à dire le moment cinétique. Pour les définitions du moment d'une force et du moment cinétique, on se référera à la formule (5.6). On est souvent amené à utiliser cette équation en conjonction avec l'équation (5.10) du moment d'inertie.

### Théorème 31.4 : Théorème de la puissance cinétique

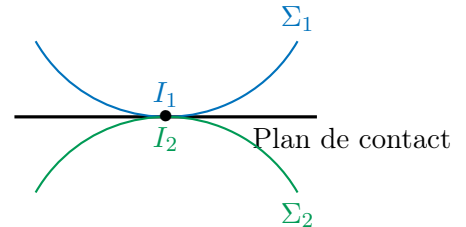
$$(5.14) \quad \frac{dE_c}{dt} = \sum_i P_i$$

Puissances des forces qui travaillent

## 5.6 Solides en contact

On définit la **vitesse de glissement instantané** entre deux solides  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  par :

$$(5.15) \quad \vec{v}_{\text{glissement}} = \vec{v}(I_1) - \vec{v}(I_2)$$



### Définition 32 : Roulement sans glissement

Deux conditions :

- $\vec{v}_{\text{glissement}} = 0$
- $\vec{\omega}_{/\Sigma_2}(\Sigma_1)$  est parallèle au **plan de contact**

### Théorème 32.1 : Lois du frottement solide

Les **lois de COULOMB** définissent la composante tangentielle  $\vec{T}$  en fonction du frottement solide et de la composante normale  $\vec{N}$  :

$$(5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Statique} \quad \vec{T}_0 = \underbrace{f_0}_{\text{coefficient de frottement statique}} \times \vec{N} \\ \text{Dynamique} \quad \vec{T} \quad \left| \begin{array}{l} \geq \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \\ \underset{RSG}{=} \underbrace{f}_{\text{coefficient de frottement dynamique}} \times \vec{N} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## Chapitre 6

# Optique

### 6.1 Optique géométrique

#### Méthode

#### Formules de conjugaison

$$\begin{array}{lcl} \text{Miroir} & \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \\ & \frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \\ \text{Lentille} & \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \end{array}$$

#### Techniques

- Les dessins miroirs peuvent être « développés » pour obtenir la représentation d'une lentille
- Règles de construction pour les dioptries et les miroirs
  - Un rayon passant par le centre n'est pas dévié
  - Un rayon incident parallèle à l'axe passe, après son passage par le système optique, par le foyer image
  - Un rayon passant par le foyer objet ressort parallèle à l'axe optique
  - Deux rayons parallèles à l'axe se croisent au foyer image
  - Deux rayons se croisant au foyer objet ressortent parallèles du système optique
- Ne pas oublier le **principe de retour inverse de la lumière**

#### 6.1.1 Stigmatisme et aplanétisme

Définition 33 : Système stigmatique

Un système optique est dit **rigoureusement stigmatique** pour le couple de points  $(A; A')$  si tous les rayons issus de  $A$  passent par  $A'$  après avoir été déviés par le système.

Si  $A'$  est une tâche assez petite au lieu d'un point, on parle de **stigmatisme approché**

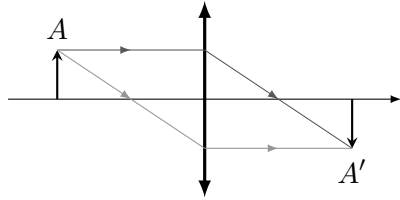


FIGURE 6.1 – Système rigoureusement stigmatique

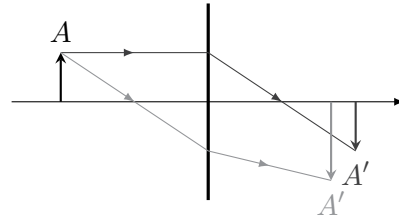


FIGURE 6.2 – Système non stigmatique

#### Définition 34 : Système aplanétique

Soit  $(S)$  un système optique. Soient  $A$  et  $A'$  deux points de l'axe optique conjugués par  $(S)$  et soit  $B$  un point du plan transverse de  $A$ . Le système est dit **aplanétique** pour  $A$  si  $B'$ , le conjugué de  $B$  par  $(S)$ , est dans le plan transverse de  $A'$ .

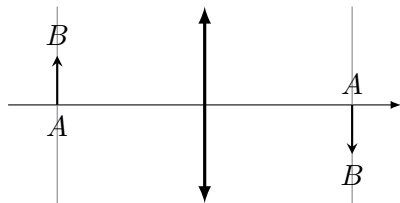


FIGURE 6.3 – Système rigoureusement aplanétique

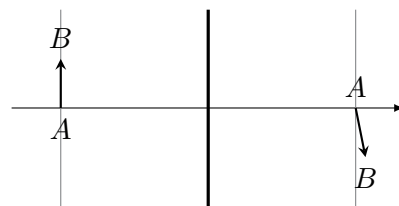


FIGURE 6.4 – Système non aplanétique

#### Définition 35 : Conditions de GAUSS

Les conditions de GAUSS permettent de vérifier l'aplanétisme et le stigmatisme approchés :

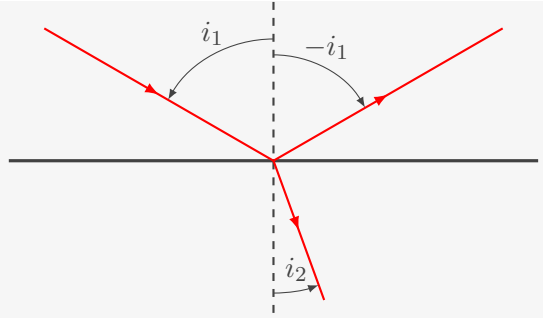
- Les rayons lumineux font un **angle petit** avec l'axe du système  
On parle de **rayons paraxiaux**
- Les rayons lumineux rencontrent les dioptries ou les miroirs au **voisinage de leur sommet**
- L'angle d'incidence des rayons sur les dioptries ou les miroirs **est petit**

#### 6.1.2 Réflexion et réfraction

##### Théorème 35.1 : Loi de DESCARTES



La loi de DESCARTES stipule que l'angle de réflexion est le même que l'angle d'incidence. De plus, la loi permet de calculer l'angle du rayon réfracté :



(6.1)

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

## 6.2 Optique ondulatoire

### Méthode

#### Définitions

|  |                            |                         |   |
|--|----------------------------|-------------------------|---|
| $s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$ |                            |                         |   |
| Périodicité temporelle                       | $\omega = \frac{2\pi}{T}$  | Vibration Complexe      | $\underline{s(M, t)} = A(M) e^{i(\varphi(M) - \omega t)}$ |
| Périodicité spatiale                         | $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ | Amplitude Complexe      | $\underline{a(M)} = A(M) e^{i\varphi(M)}$                 |
| $c = \lambda\nu$ $\lambda = cT$              |                            | Éclairement (cf. (6.3)) | $\mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$               |

#### Propriétés

$$s(M, t) = \operatorname{Re} \left( \underline{s(M, t)} \right) \quad \left| \quad \varphi(M) = \arg(\underline{a(M)}) \right.$$

$$\underline{A(M)} = |\underline{a(M)}| = |\underline{s(M, t)}| \quad \left| \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} K |\underline{a(M)}|^2 = \frac{1}{2} K |\underline{s(M, t)}|^2 \right.$$

### 6.2.1 Généralités

#### Définition 36 : Onde Électromagnétique (OEM)

Une OEM est le couple  $(\vec{E}, \vec{B})$ . C'est l'oscillation couplée du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$ .

#### Définition 37 : Vibration lumineuse

Le modèle ondulatoire de la lumière étant plus vieux que les OEMs, la **vibration lumineuse**  $s(M, t)$  est une composante quelconque du champ électromagnétique. C'est-à-dire que  $s(M, t) = \vec{E}$  ou  $\vec{B}$ .

### Théorème 37.1 : Superposition

On admet que la vibration lumineuse en un point  $M$  à l'instant  $t$  est la somme des toutes les vibrations lumineuses en ce point :

$$(6.2) \quad s(M, t) = \sum_i s_i(M, t)$$

Les récepteurs de lumière (comme l'œil et les capteurs CDD) sont sensibles à une valeur moyenne de la puissance lumineuse qu'ils reçoivent. Il convient alors de définir l'éclairement pour décrire ce que l'on voit.

### Définition 38 : Éclairement

Les capteurs photo-sensibles ayant un taux de rafraîchissement lent relativement à la vitesse de la lumière et à sa pulsation  $\omega$ , ils font une moyenne sur une période de la vibration reçue. C'est alors qu'on définit l'éclairement :

$$(6.3) \quad \mathcal{E} = K \langle s(M, t)^2 \rangle$$

## 6.2.2 Lumière monochromatique

### Définition 39 : Lumière monochromatique

La **lumière monochromatique** est la forme la plus idéale de vibration. Elle est « purement » sinusoïdale :

$$(6.4) \quad s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

Cette vibration présente une périodicité temporelle et une périodicité spatiale :

- Périodicité temporelle :

caractérisée par la **période**  $T$ , la fréquence  $\nu = \frac{1}{T}$ , et la **pulsation**  $\omega$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- Périodicité spatiale :

caractérisée par la **longueur d'onde**  $\lambda$  (période spatiale), le **nombre d'onde**  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$  (fréquence spatiale), et le **module d'onde** (pulsation spatiale)  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On les relie avec la vitesse de propagation :

Pour la lumière dans le vide :

$$(6.5) \quad \lambda_0 = cT$$

**Chemin optique**

### Définition 40 : Chemin optique

Soit un rayon lumineux passant par les points  $M$  et  $N$  en un temps  $t_{MN}$ . Le **chemin optique**  $(MN)$  parcouru par la lumière est :

$$(6.6) \quad (MN) = c \cdot t_{MN}$$

En milieu homogène où l'onde se déplace à une vitesse  $v$ , si  $MN$  est la distance parcourue,  $t_{MN} = \frac{MN}{v}$ .

### 6.2.3 Interférences

#### Interférences entre deux sources

Prenons deux sources  $S_1$  et  $S_2$ , de vibrations respectives  $s_1(M, t) = A_1(M) \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))$  et  $s_2(M, t) = A_2(M) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$ .

#### Théorème 40.1 : Interférences entre deux sources

Pour le système ainsi définit, on a :

$$(6.7) \quad \begin{aligned} s(M, t) &= s_1(M, t) + s_2(M, t) \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \underbrace{2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}_{\text{Nul si } \omega_1 \neq \omega_2} \end{aligned}$$

Ainsi, le terme d'interférence  $2\sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))$  n'est valable que si :

- Les ondes 1 et 2 doivent être de même pulsation (i.e  $\omega_1 = \omega_2$ )
- Les sources  $S_1$  et  $S_2$  doivent être cohérentes
- Le déphasage ne doit pas dépasser la longueur de cohérence  $l_c$

**Preuve 40.1.1** On exprime l'éclairement  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= K \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle \\ &= K \langle (s_1(M, t))^2 \rangle + K \langle (s_2(M, t))^2 \rangle + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \\ &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle \end{aligned}$$

Étudions ce deuxième terme  $2K \langle s_1(M, t) s_2(M, t) \rangle$  :

$$\begin{aligned} s_1(M, t) s_2(M, t) &= 2K A_1(M) A_2(M) \langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \times 2K \left( \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle \right) \end{aligned}$$

D'après la formule de trigonométrie (10.3) page 66 ( $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ ).

On sait de plus que  $\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle = 0$  car  $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ ,  
et  $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M) + \varphi_2(M)) \rangle = 0 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$ .

## Trous de YOUNG

Étudions le dispositif suivant : deux fentes ( $F_1$ ) et ( $F_2$ ) sont éclairées par une source  $S$  à l'infini formant un angle  $\alpha_0$  avec l'origine.

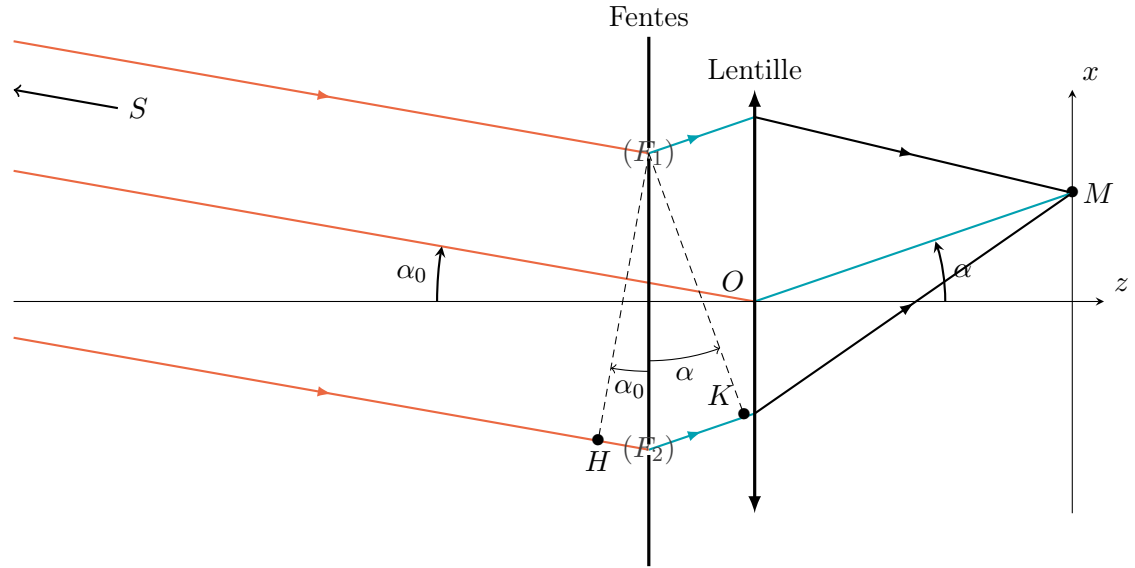


FIGURE 6.5 – Dispositif des trous de YOUNG

Quelques remarques : Puisque  $M$  est dans le plan transversal du foyer de la lentille, on sait que les rayons de cette couleur sont parallèles avant de passer par la lentille.

De plus, la présence de la lentille  $F'$  impose que l'on soit dans les conditions de GAUSS pour l'angle  $\alpha$  (cf. définition 35 page 32 pour les conditions de GAUSS).

Ainsi, on peut écrire l'approximation

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{x}{f'}$$

avec  $f'$  la distance focale de la lentille  $F'$ .

Pour nous aider dans les calculs, on note  $H$  et  $K$  les projetés orthogonaux de ( $F_1$ ). Calculons la différence de marche  $\delta(M)$  :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= (SF_2M) - (SF_1M) \\ &= (SH) + (HF_2) + (F_2K) + (KM) - ((SF_1) + (F_1M)) \end{aligned}$$

Les chemins optiques en couleur se soustraient. Il nous reste :

$$\delta(M) = (HF_2) + (F_2K)$$

(ATTENTION)

Il ne faut pas omettre de préciser pourquoi  $(KM)$  et  $(F_1M)$  sont identiques. En effet :  $H$  et  $(F_1)$  sont dans le même plan d'onde car ils viennent directement de  $S$  qui est à l'infini et qui émet une onde plane. Mais le plan contenant  $K$  et  $(F_1)$  n'est pas *a priori* un plan d'onde.

du fait que les ondes issues des fentes ne sont plus planes. Pour raisonner, on dira que  $M$  étant une image à l'infini, les plans d'ondes relatifs à  $M$  sont les plans perpendiculaires à ses rayons. Maintenant, en remarquant qu'on peut reporter les angles  $\alpha$  et  $\alpha_0$  (*cf.* le schéma), les calculs de  $(HF_2)$  et  $(F_2K)$  se font facilement :

$$\begin{aligned}(HF_2) &= n_{\text{air}} HF_2 \\ &= n_{\text{air}} a(-\sin \alpha_0) \\ &= -n_{\text{air}} a \sin \alpha_0 \\ &\approx -n_{\text{air}} a \alpha_0 (HF_2)\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}(F_2K) &= n_{\text{air}} a \sin \alpha \\ &\approx n_{\text{air}} a \alpha \\ (F_2K) &\approx n_{\text{air}} a \frac{x}{f'}\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat :

$$\begin{aligned}\delta(M) &\approx n_{\text{air}} a \left( \frac{x}{f'} - \alpha_0 \right) \\ i &= \frac{\lambda_0 f'}{n_{\text{air}} a}\end{aligned}$$

#### 6.2.4 Diffraction

##### Définition 41 : Principe d'HUYGENS-FRESNEL

Tout point  $P$  d'une surface  $\Pi$  issu d'une même source  $\mathcal{S}$  agit comme une source secondaire d'amplitude proportionnelle à celle de la source.

La vibration lumineuse en un point donné est la somme des vibrations émises par l'ensemble des sources secondaires.

$$(6.10) \quad \underline{a(M)} = \mathcal{C}_0 \iint_{P \in \Pi} \frac{a(P)}{PM} e^{i \overbrace{k_0 PM}^{\varphi(M)}}$$

##### Théorème 41.1 : Diffraction de FRAUNHOFER

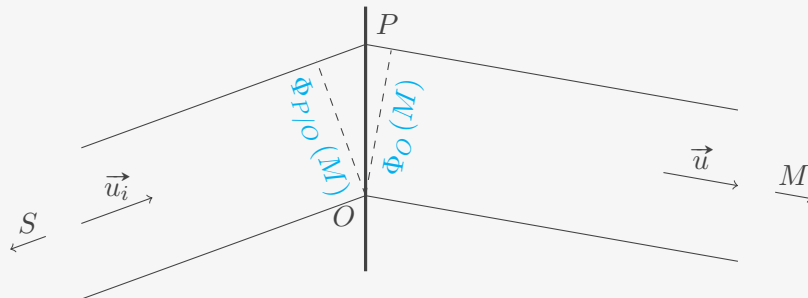


FIGURE 6.6 – Objet diffractant

$$(6.11) \quad \Phi_{P/O}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP} + \underbrace{\arg(t(p))}_{\text{Si l'objet est quelconque}}$$

En remaniant l'équation (6.10) d'HUYGENS-FRESNEL avec cette nouvelle phase :

$$(6.12) \quad \underline{a}(M) = \frac{\mathcal{C}_0}{OM} A(P) e^{i\Phi_O(M)} \iint \underline{t}(P) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u} - \vec{u}_i) \cdot \overrightarrow{OP}}$$

(ATTENTION) Ne pas oublier le  $\frac{2\pi}{\lambda_0}$  !

### 6.2.5 Réseaux

#### Théorème 41.2 : Formule des réseaux

Dans un réseau

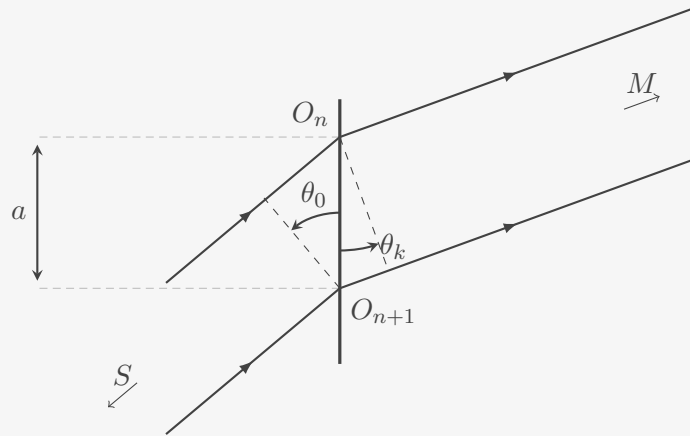


FIGURE 6.7 – Deux fentes  $O_n$  et  $O_{n+1}$  d'un réseau

$$(6.13) \quad \sin \theta_k - \sin \theta_0 = k \frac{\lambda_0}{a}$$

$k$  est appelé **ordre de diffraction**

## Chapitre 7

# Électromagnétisme

### Méthode

#### Champ électrostatique

Pour trouver le champ  $\vec{E}$  :

1. Appliquer le théorème de Gauss
2. Appliquer les formule de Coulomb (7.2a)

### 7.1 Électrostatique

#### 7.1.1 Loi de COULOMB

##### Définition 42 : Force de COULOMB

C'est la force électromagnétique entre deux charges  $q_A$  et  $q_B$

$$(7.1) \quad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

##### Théorème 42.1

On peut définir la force de COULOMB comme  $\vec{F} = q_B \vec{E}(B)$  où :

$$(7.2a) \quad \boxed{\vec{E}(B) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^3}}$$

Mais on retiendra :

$$\begin{aligned}
 (7.2b) \quad \vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho \frac{dV}{\|\vec{PM}\|^3} & \rho(M) &= \frac{dQ(M)}{dV} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma \frac{dS}{\|\vec{PM}\|^3} & \sigma(M) &= \frac{dQ(M)}{dS} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \lambda \frac{dl}{\|\vec{PM}\|^3} & \lambda(M) &= \frac{dQ(M)}{dl}
 \end{aligned}$$

### 7.1.2 Propriétés du champ électrostatique

#### Théorème 42.2 : Principe de superposition

Soient  $n$  particules  $A_1, A_2, \dots, A_n$  immobiles dans l'espace.

Le champ électrostatique résultant est la somme des champs engendrés par ces particules :

$$(7.3) \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_{A_i}(M)$$

#### Théorème 42.3 : Symétries

Le champ  $\vec{E}$  est symétrique pour une distribution symétrique des charges.

On en déduit que le champ  $\vec{E}$  est colinéaire aux plans de symétries des distributions des charges, et orthogonal aux plans d'anti-symétrie.

### 7.1.3 Circulation du champ électrostatique

#### Théorème 42.4 : Circulation d'un champ

Soit  $q_A$  une charge située en  $A$ . Soit  $\vec{E}_A$  le champ électrostatique créé par  $q_A$ .

La circulation de  $\vec{E}_A$  le long d'un chemin  $C \rightarrow D$  est

$$(7.4a) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\textcolor{red}{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A\textcolor{red}{D}}$$

D'après le théorème de superposition, on peut dire que la circulation d'un champ créé par une **distribution quelconque de charges** est

$$(7.4b) \quad \mathcal{C}_{C \rightarrow D} = \sum_i \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\textcolor{red}{C}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{A_i\textcolor{red}{D}}$$

La circulation de  $\vec{E}$  ne dépend donc pas du chemin emprunté, mais seulement des points de départs et d'arrivée. On va pouvoir définir un potentiel

#### Définition 43 : Potentiel Electrostatique



Le potentiel  $V(M)$  en un point  $M$  est défini tel que

$$\mathcal{C}_{M \rightarrow N}(\vec{E}) = V(M) - V(N)$$

Ainsi, **potentiel électrostatique**  $V(M)$  créé par une charge  $q_A$  en un point  $A$  est donné par

$$(7.5) \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} + \text{constante}$$

#### Théorème 43.1 : Potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique**  $V(M)$  est lié au champ  $\vec{E}(M)$  par la relation :

$$(7.6) \quad \vec{E} = -\text{grad } V$$

(ATTENTION) Pour un champ  $\vec{E}(M)$  donné,  $V(M)$  n'est pas unique.

#### Théorème 43.2 : Energie potentielle

L'**énergie potentielle** d'une charge ponctuelle  $q$  soumise à la force exercée par un champ  $\vec{E}$  de potentiel  $V$  est

$$(7.7) \quad E_p(M) = qV(M)$$

### 7.1.4 Flux du champ électrostatique

#### Théorème 43.3 : Équation de MAXWELL-GAUSS

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Gauss).

Le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface orientée d'un volume est proportionnelle à la charge contenue dans ce volume :

$$(7.8) \quad \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

L'objectif est de trouver un volume tel que  $\vec{E}$  ne dépende d'aucune variable de l'intégrale  $\oiint_S d\vec{S}$ . Par exemple,  $\oiint_{\theta,z} E \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$ , où on peut sortir  $E \vec{u}_r$ . En général, ce

théorème est très utile avec les symétries.

(ATTENTION) Ce sont des surfaces qu'on étudie avec le théorème de GAUSS. Pas des volumes...

### 7.1.5 Dipôle électrostatique

Définition 44 : Dipôle électrostatique

On appelle **dipôle électrostatique** le système de deux charges ponctuelles opposées ( $q$  et  $-q$ ) situées en deux points  $N$  et  $P$  tels que  $\|\overrightarrow{NP}\|$  soit très petit devant les autres distances envisagées.

#### Définition 45 : Moment dipolaire

Le **moment dipolaire**  $p$  d'un dipôle est défini par :

$$(7.9) \quad \vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$



FIGURE 7.1 – Moment dipolaire

#### Théorème 45.1 : Potentiel électrostatique d'un dipôle

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par un dipôle électrostatique est

$$(7.10) \quad V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{MP} - \frac{1}{MN} \right)$$

#### Théorème 45.2 : Potentiel créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire  $p$  :

$$(7.11) \quad V(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

#### Théorème 45.3 : Champ électrique créé par un dipôle

En coordonnées cylindriques, pour un dipôle de moment dipolaire  $p$  :

$$(7.12) \quad \vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta}{r^3}$$

#### Théorème 45.4 : Force et moment d'un champ uniforme sur un dipôle

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle électrostatique est

$$(7.13) \quad \vec{F} = -q\vec{E}(N) + q\vec{E}(P)$$

Quand le champ est uniforme,  $\vec{E}(P) = \vec{E}(N)$ , donc  $\vec{F} = 0$ , et la résultante des forces est nulle.

Il y a néanmoins un couple  $\mathcal{M}_0$  qui s'applique sur le dipôle en son centre 0 :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0 &= q (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge \vec{E} \\ &= q \overrightarrow{NP} \wedge \vec{E} \\ \mathcal{M}_0 &= \vec{p} \wedge \vec{E}\end{aligned}\tag{7.14}$$

Le dipôle électrostatique va donc chercher à s'aligner avec le champ  $\vec{E}$ .

## 7.2 Magnétostatique

### Définition 46 : Densité Volumique de Courant

La **densité volumique de courant** décrit le mouvement d'ensemble des particules de charges  $q$  passant à travers une surface élémentaire orientée  $dS_M$ .

Pour une surface élémentaire  $dS$  décrite par son vecteur normal  $d\vec{S}$ , le courant électrique  $di$  à travers cette surface est relié à  $\vec{j}$  par

$$di = \vec{j} \cdot d\vec{S} \qquad i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}\tag{7.15a}$$

Un courant électrique est un débit de charges électriques à travers une surface orientée. Si on note  $n$  le nombre de charges  $q$  par unité de volume :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = nq \vec{v}\tag{7.15b}$$

Ou encore, la troisième définition qu'on peut déduire :

$$d^2q(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M dt\tag{7.15c}$$

### Théorème 46.1 : BIOT et SAVARD

La formules de BIOT et SAVART permet de calculer des champs  $\vec{B}$  de manière plus directe qu'avec les équations de Maxwell. La contribution au champ  $\vec{B}$  d'un circuit est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in \text{Circuit}} \frac{i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}\tag{7.16}$$

**(ATTENTION)** Ce théorème est désormais **hors-programme**

### Théorème 46.2 : Équation de MAXWELL-AMPÈRE

C'est la version intégrale de l'équation (Maxwell-Ampère).

(ATTENTION) Elle n'est valable que si le deuxième terme  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}\right)$  est nul ou négligeable!

(7.17)

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{Enlacé}}$$

### Définition 47 : Force de LORENTZ

C'est la force subit par un charge  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  dans des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

(7.18)

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

### Théorème 47.1 : Force de LAPLACE

On la revoit au théorème 52.5 page 51.

La force de LAPLACE existe sous deux formes, et on voit ici la forme intégrale qui caractérise les effets d'un champs  $\vec{B}$  sur un circuit, elle vient de la force de LORENTZ cf. équation (7.18) page 44

(7.19)

$$\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = \int_{M \in \text{Circuit}} I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

## 7.2.1 Dipôle Magnétique

### Définition 48 : Moment magnétique

Le **moment magnétique**  $\vec{\mathcal{M}}$  d'une distribution de courant d'intensité  $I$ , de surface  $S$  et de vecteur normal  $\vec{n}$  est :

(7.20)

$$\vec{\mathcal{M}} = I S \vec{n}$$

Son unité est en  $A \cdot m^2$

### Définition 49 : Dipôle magnétique

Un **dipôle magnétique** est une distribution de courant tel que :

- $\vec{\mathcal{M}}$  non nul
- La taille caractéristique  $a$  est infiniment petite devant les autres longueurs

## Action du dipôle magnétique sur l'extérieur

### Théorème 49.1 : Potentiel vecteur et champ magnétique

Le potentiel vecteur créé par un dipôle en  $M$  est, en notant  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

$$(7.21) \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Le champ magnétique créé par ce même dipôle en  $M$  est

$$(7.22) \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{\mathcal{M}}) \vec{r} - r^2 \vec{\mathcal{M}}}{r^5}$$

$$(7.23) \quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

## Action d'un champ extérieur sur un dipôle magnétique

### Théorème 49.2

Un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  plongé dans un champ  $\vec{B}_{\text{ext}}$  est soumis à un couple de moment

$$(7.24) \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_{\text{ext}}$$

L'énergie potentielle qui en résulte est :

$$(7.25) \quad E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}_{\text{ext}}$$

## 7.3 Équations de MAXWELL

### 7.3.1 Principe de conservation de la charge

#### Théorème 49.3 : Équation de conservation de la charge

Il n'existe aucun processus créant ou détruisant la charge électrique. Ce postulat donne lieu à l'équation de conservation de la charge :

$$(7.26) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

### 7.3.2 Les équations de MAXWELL

Ces 4 équations sont les plus importantes. À elles 4 elles permettent de retrouver intégralement le programme de première année.

#### Théorème 49.4 : Les Équations de MAXWELL

(Maxwell-Gauss)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(Maxwell-Flux)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(Maxwell-Faraday)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(Maxwell-Ampère)

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Grâce aux formules de STOKES (Stokes) et d'OSTROGRADSKI (Ostrogradski) de la page 72, on peut obtenir les versions intégrales des équations de MAXWELL. On a aussi la loi de FARADAY (7.41) de la page 50.

### Définition 50 : Célérité de la lumière dans le vide

On définit la célérité  $c$  de la manière suivante :

$$(7.27) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

C'est la vitesse de la lumière

### Équations de propagation

#### Théorème 50.1 : Équation de d'ALEMBERT

Dans le vide, en l'absence de charges ( $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ ), les champs électrique et magnétique vérifient l'équation de d'ALEMBERT

$$(7.28) \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

**Preuve 50.1.1** *Démontrons le cas pour  $\vec{B}$ , la démonstration pour  $\vec{E}$  est analogue.*

*On part de l'équation (Maxwell-Ampère) :*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

*Comme dans beaucoup de démonstration, on applique un deuxième  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

*On peut intervertir les opérateurs  $\partial$  et  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$  :*

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}}{\partial t}$$

Sachant que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{B}) - \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \underbrace{\text{div } \vec{B}}_0 \right) - \underbrace{\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} \vec{B})}_{\Delta \vec{B}} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

### Théorème 50.2 : Potentiels

Au champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ , on peut associer un couple de potentiels  $(V(M, t), \vec{A}(M, t))$  tel que :

$$(7.29) \quad \begin{cases} \vec{B} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}(V) \end{cases}$$

**Preuve 50.2.1** Comme  $\text{div } \vec{B} = 0$  (Équation 3 de Maxwell (Maxwell-Faraday)), on sait que  $\vec{B}$  est un champ rotationnel. Donc il existe  $\vec{A}$  tel que

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Maintenant, en prenant l'équation 2 de Maxwell (Maxwell-Flux),  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})}{\partial t}$ . En intervertissant les opérateurs, et en faisant tout passer à gauche :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Donc on sait que  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est un champ à gradient. D'où il existe  $V$  tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

### 7.3.3 Equations de POISSON et de LAPLACE

### Théorème 50.3

En régime stationnaire, le potentiel électrique vérifie l'équation de POISSON :

$$(7.30) \quad \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

(ATTENTION)

$\Delta V(M)$  est le **laplacien** de  $V(M)$ . Ce n'est pas la variation  $\Delta$ .

Lorsqu'une zone est en plus vide de charge,  $\rho(M) = 0$  et l'équation devient l'équation de LAPLACE :

$$(7.31) \quad \Delta V(M) = 0$$

**Preuve 50.3.1** Il suffit d'injecter  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$  à l'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) page 46 :

$$(7.32) \quad \text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} V \right) (M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Or, par définition,  $\text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} f \right) = -\Delta f$ . □

## 7.4 Énergie électromagnétique

Sur une particule chargée, la majorité des forces sont négligeables devant la force de LORENTZ. C'est ainsi qu'on peut appliquer le Théorème de la Résultante Cinétique (TRC) (équation (5.12) page 29)

### Théorème 50.4 : Densité volumique de force

La **densité volumique de force électromagnétique** est :

$$(7.33a) \quad \vec{f}_V(M, t) = \rho(M, t) \vec{E}(M, t) + \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

Cette force est volumique, donc elle s'exerce sur les charges d'un volume  $dV$  tel que :

$$(7.33b) \quad d\vec{F} = \vec{f}_V(M, t) dV$$

**Preuve 50.4.1** On part de la force de LORENTZ (7.18) page 44 :

$$\vec{F}_{\text{LORENTZ}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Et on peut exprimer  $q$  sous la forme

### Définition 51 : Puissance volumique

La puissance volumique cédée par le champ électrique à la matière est

$$(7.34) \quad \mathcal{P}_v(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$



Avec la loi d'Ohm locale (7.38) page 49 :

$$\mathcal{P}_V(M, t) = \frac{\vec{j}^2(M, t)}{\gamma}$$

### Définition 52

Le **vecteur de POYNTING**  $\vec{\Pi}(M, t)$  est tel que l'énergie électromagnétique traversant la surface  $d\vec{S}$  autour de  $M$  est :

$$(7.35) \quad d^2 U_{em} = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S} dt$$

On admet les expressions suivantes :

La **densité volumique d'énergie électromagnétique** est

$$(7.36) \quad u_{em}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2(M, t)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M, t)}{2\mu_0}$$

Le vecteur densité de courant d'énergie, ou **vecteur de POYNTING** est

$$(7.37) \quad \vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$$

### Théorème 52.1 : Loi d'Ohm locale

Elle relie, en un point  $M$ , la densité volumique de courant  $\vec{j}(M, t)$  au champ électrique  $E(M, t)$  :

$$(7.38) \quad \vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

### Théorème 52.2 : Équation locale de POYNTING

L'équation locale de POYNTING est un bilan d'énergie. Elle donne :

$$(7.39) \quad \frac{\partial u_{em}}{\partial t}(M, t) + \text{div } \vec{\Pi}(M, t) = - \left( \vec{j} \cdot \vec{E} \right) (M, t)$$

**Preuve 52.2.1** *Le bilan d'énergie électromagnétique pour une surface  $\mathcal{S}$  est :*

$$(7.40) \quad \frac{dU_{em}}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{sortant}} - \mathcal{P}_{\text{perdue}}$$

Exprimons ces grandeurs :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{perdue} &= \iiint \mathcal{P}_V dV \\
 &= \iiint (\vec{j} \cdot \vec{E}) dV \\
 \mathcal{P}_{sortant} &= \oiint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_P \\
 &= \iiint \text{div}(\vec{\Pi}) dV \\
 \frac{dU_{em}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint u_{em} dV \\
 &= \iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne, pour un volume d'intégration  $\mathcal{V}_M$  quelconque :

$$\iiint_{\mathcal{V}_M} \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dV + \iiint_{\mathcal{V}_M} \text{div}(\vec{\Pi}) dV = \iiint_{\mathcal{V}_M} -(\vec{j} \cdot \vec{E}) dV$$

d'où le résultat. □

## 7.5 Induction

### Théorème 52.3 : Loi de FARADAY

Elle caractérise la force électromotrice  $e$  induit par un flux  $\Phi_B$

(7.41)

$$e = \oint_S \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

### 7.5.1 Loi d'Ohm généralisée

#### Théorème 52.4

On considère un conducteur formé d'un fil de longueur  $L$ , de section  $s$ , constitué d'un matériau dont la conductivité électrique est  $\gamma$ , est branché entre un point  $A$  et un deuxième point  $B$ . La loi d'Ohm pour ce conducteur, dite généralisée, donne :

(7.42)

$$V(A, t) - V(B, t) = Ri + \overbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}}^{-e}$$

avec  $R = \frac{L}{\gamma s}$ .

C'est bien sûr l'équation 3.2 de la page 13.

#### Preuve 52.4.1

On part de

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

D'après la définition du  $\overrightarrow{\text{grad}}$ ,

$$- \int_{M \in \Gamma_{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{l}_M = - (V(B, t) - V(A, t)) = V(A, t) - V(B, t)$$

D'autre part, avec la loi d'Ohm locale (équation 7.38 page 49),

$$\begin{aligned} \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{1}{\gamma} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \\ &= \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{R s}{L} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{l}_M \end{aligned}$$

Si on reprend la définition de  $\vec{j}$  de l'équation (7.15c) (définition 46 page 43), et qu'on prend  $d\vec{l}_M = d\vec{\tau}_M dl_M$  ( $d\vec{\tau}_M$  est orienté dans le sens de  $\vec{j}$ ) :

$$\int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l}_M = Ri = [V(A, t) - V(B, t)] - \int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M$$

En approximant :  $-\int_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = - \oint_{M \in \Gamma_{AB}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_M = -\frac{d\Phi_B}{dt} = e$  d'où  
 $V(A, t) - V(B, t) = Ri - e$

La force de LAPLACE est la résultante des forces du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  sur des charges en  $M$

#### Théorème 52.5 : Force de Laplace

$$d\vec{F}_{v \text{ LAPLACE}} = \vec{j}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

Cette force est bien volumique, car elle s'exprime en fonction de  $\vec{j}(M)$ . On retiendra surtout :

(7.43)

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}(M)$$

(ATTENTION)

$I$  et  $d\vec{l}$  doivent être colinéaires

### 7.5.2 Auto-induction

### Définition 53 : Inductance propre

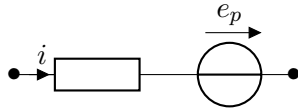
Pour un circuit électrique fixe et indéformable parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  crée un flux propre  $\Phi_p(t)$  proportionnel à  $i(t)$  dans les conditions d'ARQS

$$(7.44) \quad \Phi_p(t) = L i(t)$$

Cette relation définit  $L$ , le coefficient d'**inductance propre** du circuit.

**Remarque :** Dans la loi d'OHM vu précédemment (cf. équation (7.42) page 50), on peut prendre, en l'absence d'un champ magnétique extérieur,  $-e = \frac{d\Phi_p}{dt} = L \frac{di}{dt}$ , et alors :

$$V_A - V_B = Ri + L \frac{di}{dt}$$



### 7.5.3 Inductance mutuelle

#### Théorème 53.1 : Inductance mutuelle entre deux circuits

Pour deux circuits 1 et 2 parcourus respectivement par les courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ , l'inductance mutuelle  $M$  d'un circuit sur un autre est proportionnelle à  $i_*(t)$  :

$$(7.45) \quad \begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2}(t) = M i_1(t) \\ \Phi_{2 \rightarrow 1}(t) = M i_2(t) \end{cases}$$

On admettra le **théorème de NEUMANN** qui donne

$$(7.46) \quad M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

### 7.5.4 Force électromotrice induite

#### Définition 54 : Champ électromoteur

Lorsqu'on déplace un conducteur à une vitesse  $\vec{v}$  dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  stationnaire, il crée un **champ électrique électromoteur**  $\vec{E}_m$

$$(7.47) \quad \vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}_0(M)$$

#### Théorème 54.1 : Force électromotrice induite

La **force électromotrice**  $e_{AB}$  **induite** par  $\vec{E}_m$  est, comme dans l'équation (7.41) de

(7.48)

FARADAY :

$$e_{AB} = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{E}_m(M, t) \cdot d\vec{l}_M$$

## 7.6 Propagation et rayonnement

### Méthode

#### Relations de structure

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$$

$$c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

#### Relations de Passage

$$E_2(A, t) - E_1(A, t) = \frac{\sigma(A, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{\text{sortant}}$$

$$B_2(A, t) - B_1(A, t) = \mu_0 \vec{j}(A, t) \wedge \vec{n}_{\text{sortant}}$$

### 7.6.1 Dans le vide

On se place dans une zone où il n'y a **ni charge, ni courant**. C'est à dire que  $\rho = 0$  et alors  $\vec{j} = 0$ . Lorsqu'on reprend les équations de MAXWELL, les équations (Maxwell-Gauss) et (Maxwell-Ampère) sont modifiées :

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

#### Onde Plane Progressive

##### Définition 55 : Onde plane

Une **onde plane** est une solution **non constante** de l'équation de d'ALEMBERT qui prend des valeurs uniformes sur les plans perpendiculaires à une direction  $\vec{k}$ .

Une onde plane de pulsation  $\omega$  se décrit de la manière suivante :

(OP)

$$U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt) + g(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} + vt)$$

### Définition 56 : Onde plane progressive

Une **onde progressive** est une solution de l'équation de d'ALEMBERT qui s'écrit sous la forme  $U(z, t) = f(z - vt)$ . Elle se propage dans le sens positif de l'axe  $Oz$

La forme générale d'une **Onde Plane Progressive (OPP)** de pulsation  $\omega$  se propageant uniquement selon une direction  $\vec{k}$  est :

(OPP)

$$U(M, t) = f(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - vt)$$

Obtenir la solution des équations de d'ALEMBERT du théorème 50.1 permet de trouver la forme générale d'une onde. C'est ainsi qu'on peut déterminer la forme d'une OPP électromagnétique :

#### Théorème 56.1 : Onde électromagnétique

La forme générale d'une Onde Plane Progressive (OPP) se propageant dans le vide dans la direction de  $\vec{u}_z$  est :

(7.49)

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(z - ct) \\ f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c}f_x(z - ct) \\ \frac{1}{c}f_y(z - ct) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la composante en  $\vec{u}_z$  des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont nulles. Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , qui sont donc perpendiculaires à la propagation de l'onde, sont dits **transversaux**. L'onde est appelée **transversale**

**Preuve 56.1.1** Une OPP doit vérifier l'équation de d'ALEMBERT comme on l'a vu au théorème 50.1 page 46. Donc pour une onde se propageant selon  $\vec{u}_z$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \begin{pmatrix} f_x(t - \frac{z}{c}) \\ f_y(t - \frac{z}{c}) \\ f_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix} \quad \vec{B}(M, t) = \begin{pmatrix} h_x(t - \frac{z}{c}) \\ h_y(t - \frac{z}{c}) \\ h_z(t - \frac{z}{c}) \end{pmatrix}$$

L'équation de MAXWELL-GAUSS (Maxwell-Gauss) (la version où  $\rho = 0$  car dans

le vide il n'y a pas de charge) donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \frac{\partial f_x(t - \frac{z}{c})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(t - \frac{z}{c})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} &= 0 \\ 0 + 0 + \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Et nécessairement,  $\frac{\partial f_z(t - \frac{z}{c})}{\partial z} = 0$  implique que  $f_z$  est constante. Donc  $f_z$  est nulle. De même, l'équation de MAXWELL-Flux nous donne que  $h_z$  est nulle.

Avec l'équation de MAXWELL-FARADAY (Maxwell-Faraday), on trouve finalement que

$$\frac{1}{c} f'_y = -h'_x$$

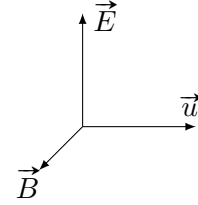
$$\frac{1}{c} f'_x = h'_y$$

Et on obtient les équations de propagation d'une onde électromagnétique.  $\square$

### Théorème 56.2 : Relations de structure

On structure les OPPs de la manière suivante :

- Le trièdre  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est direct
- La famille  $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$  est orthogonale
- $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$



Qui peuvent se résumer dans les relations de structure :

$$(7.50) \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \qquad c \vec{B} \wedge \vec{u} = \vec{E}$$

### Onde Plane Progressive Monochromatique

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) de pulsation  $\omega$  se décrit de la manière suivante :

$$(OPPM) \quad U(M, t) = U_0 \cos \left( \omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_0 \right)$$

### Définition 57 : Vitesse de Phase

Une Onde Plane Progressive Monochromatique (OPPM) se propage selon une direction  $\vec{u} =$

$$(7.51) \quad \left| \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}. \text{ On définit sa vitesse de phase :} \right.$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

**Remarque :** Dans le vide,  $v_\varphi = c$ , donc  $k = \frac{\omega}{c}$ .

### Notation complexe

| Opérateurs   | Maxwell   |
|--|---|
| $\frac{\partial}{\partial t} \bullet \Leftrightarrow -i\omega \times \bullet$              | (Maxwell-Gauss) $i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$   |
| $\overrightarrow{\text{grad}} \underline{U} \Leftrightarrow i\vec{k} \times \underline{U}$ | (Maxwell-Flux) $i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$                                 |
| $\text{div} \vec{U} \Leftrightarrow i\vec{k} \cdot \underline{U}$                          | (Maxwell-Faraday) $i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$               |
| $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \Leftrightarrow i\vec{k} \wedge \underline{U}$        | (Maxwell-Ampère) $i\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}(-i\omega)\vec{E}$ |

### Théorème 57.1 : Relations de structure d'une OPPM

De même que les relations de structure (7.50) d'une OPP, on obtient rapidement, avec la forme complexe des équations de MAXWELL :

$$(7.52) \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

**Preuve 57.1.1** *D'après l'équation (Maxwell-Faraday) en complexes (en prenant la partie réelle) :*

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

*Il vient immédiatement :*

$$\begin{aligned} i\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} &= i\vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \end{aligned}$$

*De même, en partant de l'équation (Maxwell-Ampère) en complexes (et toujours en prenant la partie réelle) :*

$$i\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega \frac{1}{c^2} \vec{E}$$



Qui donne, immédiatement :

$$i \frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B} = -i \vec{E}$$

$$\vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}$$

Ces équations sont homologues à celles vues précédemment, car  $k = \frac{\omega}{c}$

## Polarisation

On considère une OPP *transverse*, donc qui s'écrit :

$$(7.53) \quad \vec{E}_0 = \vec{E}_{0x} \cos(\omega t - kz) + \vec{E}_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

On appelle **onde polarisée rectilignement** une onde sous la forme

$$(7.54) \quad \vec{E} = E_0 (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz)$$

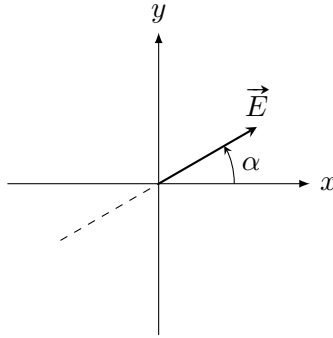


FIGURE 7.2 – Polarisation rectiligne

## 7.6.2 Dans un plasma

### Définition 58 : Plasma

Un **plasma** est un conducteur constitué d'ions et d'électrons, et tel que les conditions suivantes soient vérifiées

- Les ions sont immobiles
- Il est peu dense, c'est à dire qu'il n'y a pas (ou peu) d'interactions électromagnétique

Avec un rapide bilan des forces, on trouve une condition sur la densité volumique de courant :

$$\underline{j} = -n_0 \underline{v} = i \frac{n_0 e^2}{m \omega} \underline{E}$$

On peut donc définir une pulsation plasma  $\omega_p$

### Définition 59 : Pulsation plasma

On définit la **pulsation plasma** par

$$(7.55) \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

Et alors :  $\underline{j} = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{E}$

### Théorème 59.1 : Relation de dispersion

Dans un plasma, on établit une relation de dispersion :

$$(7.56) \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

## Chapitre 8

# Diffusion Thermique

### 8.1 Conduction

C'est le phénomène à petite échelle qui se produit sans mouvement des particules lors d'une diffusion de chaleur. C'est un processus très lent.

#### Définition 60 : Flux Thermique

On le définira de la façon suivante :

$$(8.1) \quad \delta Q = \Phi dt$$

On prendra  $\varphi$  tel que  $\Phi = \varphi S$

#### Définition 61

Le transfert thermique passant à travers une surface fermée  $\vec{S}$  sera caractérisé par le vecteur  $\vec{j}_{th}$ . On le définit :

$$(8.2a) \quad \delta^2 Q = \vec{j}_{th} d\vec{S} dt$$

En notant  $d\vec{S}_M = dS \vec{n}_M$  :

$$(8.2b) \quad \varphi_{\vec{n}_M}(M, t) = \vec{j} \cdot \vec{n}_M$$

#### Théorème 61.1 : Loi de FOURIER

C'est une loi empirique qui donne la densité volumique de courant thermique  $\vec{j}_{th}$  en fonction de  $T$  un champ de températures :

(Fourier)

$$\vec{j}_{th} = - \underbrace{\lambda}_{\text{Conductivité Thermique}} \vec{\text{grad}}(T)$$

#### Théorème 61.2 : Premier principe de Thermodynamique

Le premier principe de thermodynamique (équation (1.5a) page 7) s'énonce, en diffu-

sion, avec :

$$(8.3) \quad dU = \delta Q + \mathcal{P}_{\text{prod}} dt$$

$$\text{Souvent, } \mathcal{P}_{\text{prod}} = \iiint \mathcal{P}_V dV$$

### Théorème 61.3 : Bilan local d'énergie

Pour un système  $\Sigma$  de matière dans un volume  $\mathcal{V}$  quelconque,

$$(8.4) \quad \mu c_v \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{th}(M, t) = \mathcal{P}_V(M, t)$$

**Preuve 61.3.1** On utilise le premier principe de thermodynamique vu plus haut. D'après un DL au premier ordre, on détermine :

$$\begin{aligned} dU &= \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c_v (T(M, t + dt) - T(M, t)) dV \\ &= \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu c_v \left( \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \right) \right) dt \end{aligned}$$

Le transfert thermique est, par définition de  $\vec{j}$  :

$$\delta Q = \left( - \oint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

Et enfin :

$$\mathcal{P}_{\text{prod}} dt = \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_V dV \right) dt$$

### Théorème 61.4 : Équation de diffusion thermique

Pour un champ  $T$  de températures, on a l'équation :

$$(8.5) \quad \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \overbrace{\Delta T}^{\text{Laplacien de } T} + P_v$$

avec  $c_v$  la capacité calorifique massique à volume constant,  $\mu$  la masse volumique, et  $\lambda$  définit comme précédemment.

### Définition 62 : Résistance thermique

C'est la grandeur  $R_{th}$  telle que :

$$(T_1 - T_2) = \Phi_{1 \rightarrow 2} R_{th}$$

### Théorème 62.1 : Résistances usuelles

Pour deux plaques parallèles de surfaces  $S$  distantes de  $L$  :

$$(8.7) \quad R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

Pour deux cylindres coaxiaux de hauteur  $H$ , de rayons  $R_1$  et  $R_2$

$$(8.8) \quad R_{th} = \frac{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}{2\pi\lambda H}$$

## 8.2 Convection

Bien plus rapide que la conduction, c'est quand la diffusion thermique est accompagnée d'un mouvement de particules (par exemple quand on ouvre une fenêtre)

---

### Définition 63

Encore une loi empirique, la loi phénoménologique de NEWTON :

(8.9) 
$$\varphi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = h(T_s - T_f)$$

Cette équation permet surtout de donner :  $\Phi_{\text{solide} \rightarrow \text{fluide}} = hS(T_s - T_f)$

Par définition de  $R_{th}$  et par identification, l'interface entre un solide et un fluide a donc pour résistance  $R_{th} = \frac{1}{hS}$

## Chapitre 9

# Rayonnement Thermique

### Méthode

#### Calculer un flux thermique

**Relation entre les flux**  $d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$

**Relation de STEFAN-BOLTZMANN**  $\varphi^0(T) = \sigma T^4$

**Loi de PLANCK** (*non exigible*) cf théorème 65.1

#### Définition 64 : Flux Thermique

La **densité surfacique d'énergie** est définie telle que la puissance électromagnétique reçue par un objet dans l'enceinte sous  $dS$  soit

$$(9.1) \quad d\Phi = \varphi^0 dS$$

L'exposant  $^0$  est là pour rappeler que  $\varphi$  ne dépend ni de la position, ni de  $dS$  : il ne dépend que de  $T$ .

D'ici, on définit la **densité spectrale en longueur d'onde de flux surfacique** (notée  $\varphi_{\lambda}^0$ ) de manière analogue : elle est telle que la contribution à  $\varphi^0$  des photons de longueur d'onde comprises entre  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  soit

$$(9.2) \quad d\varphi^0 = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda$$

Pour résumer, on se rapportera à la figure 9.1 (page 64) et à la simple formule :

$$d\Phi = \varphi_{\lambda}^0 d\lambda = \varphi^0 dS$$

#### Définition 65 : Énergie d'un photon

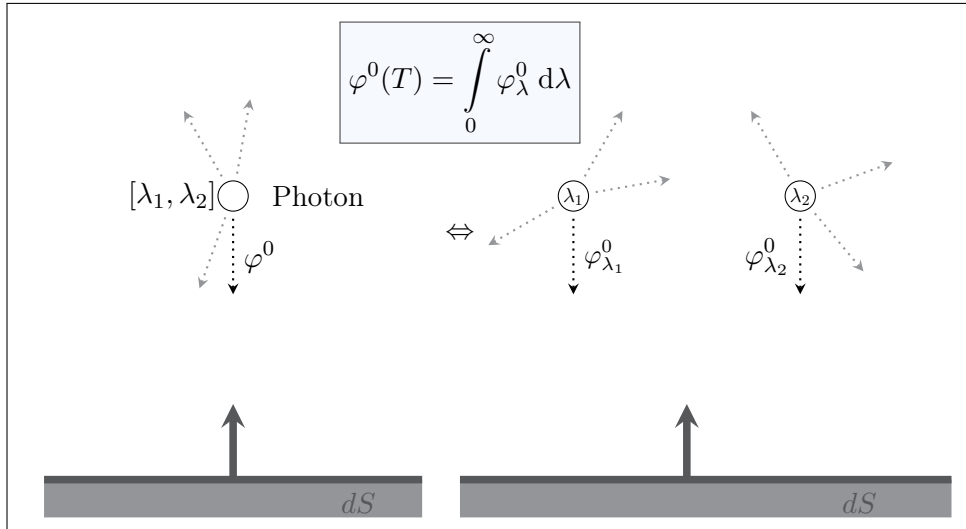


FIGURE 9.1 – Caractérisation des différents flux

(9.4)

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

#### Théorème 65.1 : Loi de PLANCK

La loi de PLANCK n'est pas exigible, mais elle permet de calculer la densité spectrale en longueur d'onde

$$\varphi^\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{A}{\frac{hc}{e\lambda k_B T} - 1}$$

avec :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

#### Théorème 65.2 : STEFAN-BOLTZMANN

(9.6)

$$\varphi^0(T) = \sigma T^4$$

où  $\sigma$  est la constante de STEFAN :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  C'est aussi le flux émis par un corps noir.

La densité spectrale en longueur d'onde du flux ( $\varphi_\lambda^0$ ) passe par un maximum pour une longueur d'onde  $\lambda_m$ . On l'obtient avec la loi de WIEN :

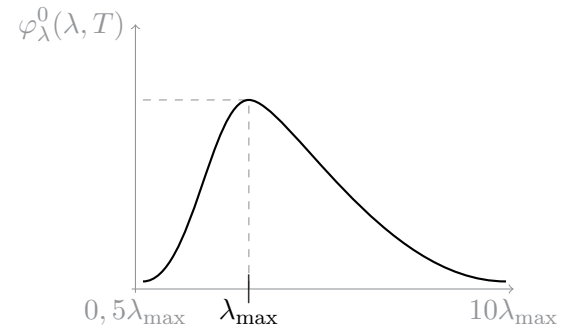


**Théorème 65.3 : Loi de WIEN**

$$(9.7) \quad \lambda_{\max} T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Pour retenir :  $\lambda_{\max} T = 2900 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K}$

**Remarque :** Le domaine spectral d'émission est compris dans  $[0, 5\lambda_{\max}, 10\lambda_{\max}]$



**Théorème 65.4 : Flux surfacique radiatif**

En un point  $P$ , le flux surfacique cédé par un corps noir opaque est :

$$(9.8) \quad \varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = \sigma T(P)^4 - \varphi_{\text{reçu}}(P)$$

et alors, le flux radiatif suit une loi de NEWTON  $\varphi_{\text{CN} \rightarrow \text{ext}}^{\text{rad}}(P) = h(T(P) - T_0)$  dont le coefficient est

$$(9.9) \quad h^{\text{rad}} = 4\sigma T_0^4$$

# Chapitre 10

## Annexe

### 10.1 Trigonométrie

#### 10.1.1 Définition

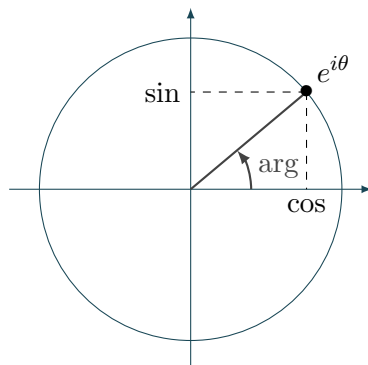
On aura souvent besoin de trigonométrie en Physique. Surtout les règles sur les sinus et cosinus. Bien sûr, la première chose à ne jamais oublier, c'est leur définition en exponentielle :

$$(10.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array} \right. \quad (10.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

#### 10.1.2 Addition / Produit

$$(10.3) \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \end{array} \right.$$

#### 10.1.3 Nombres complexes



## Opérations en complexes

|                 | Forme exponentielle                                 | Module   | Argument  |
|-----------------|---|--|---|
| <b>Produit</b>  | $z z' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$                 | $ z z'  =  z   z' $                              | $\arg(z z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$                    |
| <b>Quotient</b> | $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$ | $\left  \frac{z}{z'} \right  = \frac{ z }{ z' }$ | $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$ |
| <b>Exposant</b> | $z^n = r^n e^{in\theta}$                            | $ z^n  =  z ^n$                                  | $\arg(z^n) = n \times \arg z \quad [2\pi]$                      |
| <b>Conjugué</b> | $\bar{z} = r e^{-i\theta}$                          | $ \bar{z}  =  z $                                | $\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$                          |

## 10.2 Calcul vectoriel

On a deux types de calculs vectoriels. Le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ . En physique, on les définit comme suit :

$$(10.4) \quad \left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u \cdot v \cdot \cos \theta \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &= u \cdot v \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ avec : } \begin{array}{c} \vec{v} \\ \swarrow \\ \theta \\ \searrow \vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} \end{array}$$

(ATTENTION) Il ne faut **pas oublier** que le produit scalaire renvoie un **scalaire**, et que le produit vectoriel renvoie un **vecteur perpendiculaire** au plan formé des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

### Propriétés Produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \lambda \vec{v}$$

Le produit vectoriel n'est pas associatif :

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w \quad \text{et}$$

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

## 10.3 Complément mathématique

### 10.3.1 Dérivée d'un vecteur

$$(10.5) \quad \frac{dx_i}{dt} \vec{i} = x_i \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

### 10.3.2 Équation différentielle

En général, on résout l'équation homogène, on trouve une solution particulière, puis la combinaison linéaire des deux donne la solution générale.

#### Au premier ordre

Dans le cas d'une équation de la forme :

$$y'(t) = ay(t) + b$$

La solution générale est

$$(10.6) \quad Ae^{ax} - \frac{b}{a}$$

#### Au second Ordre

Dans le cas de l'équation homogène suivante :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On calcule le discriminant  $\Delta$  du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution  $y(t)$  pour l'équation homogène :

|                 |                                  |
|-----------------|----------------------------------|
| $\Delta \neq 0$ | $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ |
| $\Delta = 0$    | $y(t) = (A + Bt)e^{rt}$          |

Ou encore :

|              |  |
|--------------|--|
| $\Delta > 0$ | $r_{\pm} = \alpha \pm \beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t))$ |
| $\Delta < 0$ | $r_{\pm} = \alpha \pm i\beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t))$  |
| $\Delta = 0$ | $r \text{ double} \quad y(t) = (A + Bt)e^{rt}$   |

(ATTENTION)

Pour déterminer la **solution particulière** quand le second membre n'est pas constant, on suppose que la solution est sinusoïdale et de même pulsation. Alors il n'y a plus qu'à réinjecter la solution dans l'équation différentielle pour déterminer les constantes restantes.

## 10.4 Repères en physique

### 10.4.1 Repère cartésien

Dans un repère en **coordonnées cartésiennes** (cf. figure 10.1), le point  $M$  est repéré par la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  :

$$(10.7) \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

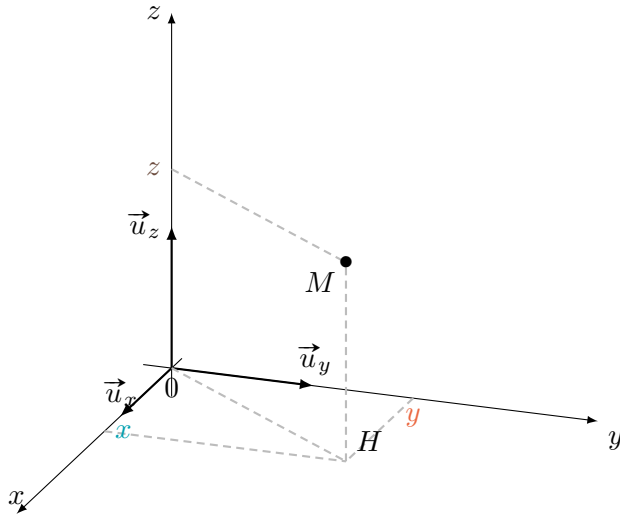


FIGURE 10.1 – Repère en coordonnées cartésiennes

#### 10.4.2 Repère cylindrique

Dans un repère en **coordonnées cylindriques** (cf. figure 10.2), le point  $M$  est repéré par la base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  :

$$(10.8) \quad \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$$

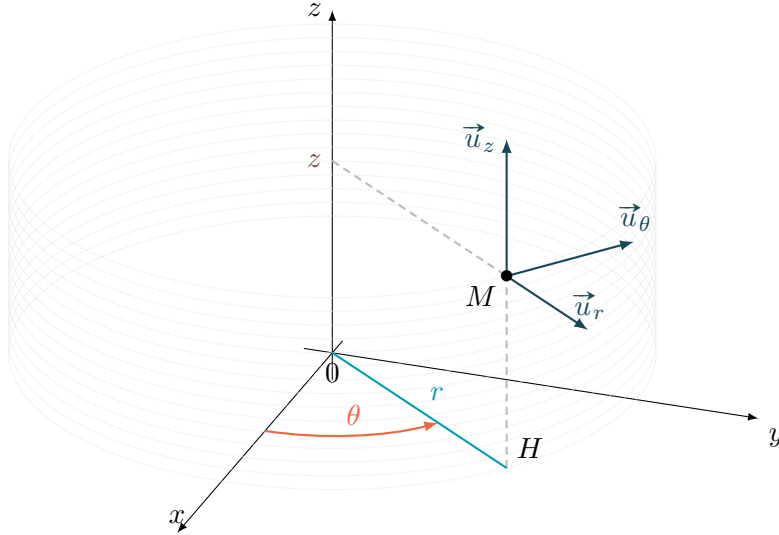


FIGURE 10.2 – Repère en coordonnées cylindriques

(**ATTENTION**)  $r$  se mesure sur le projeté :  $r = \|\overrightarrow{OH}\|$  , et non  $\overrightarrow{OM}$

## 10.5 Analyse Vectorielle

### 10.5.1 Généralités sur les champs

| Coordonnées  | Déplacement élémentaire  | Circulation élémentaire   |
|--------------|--|---|
| Cartésiennes | $dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$                                       | $d\mathcal{C} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$                                       |
| Cylindriques | $dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$                           | $d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_z dz$                           |
| Sphériques   | $dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$ | $d\mathcal{C} = a_r dr + a_\theta r d\theta + a_\varphi r \sin \theta d\varphi$ |

#### Définition 66 : Lignes et tubes de champ

Pour un champ de vecteurs  $\vec{A}(M)$ , une **ligne de champ** est une courbe sur laquelle, en tout point  $M$ ,  $\vec{A}(M)$  est tangent.

Si on note  $d\vec{M}$  le déplacement élémentaire, une ligne de champ vérifie :

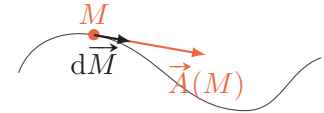


FIGURE 10.3 – Ligne de champ

$$(10.9) \quad d\vec{M} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

On appelle **tube de champ** un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

### 10.5.2 Opérateurs sur les champs

#### Définition 67 : Gradient

Soit  $U(M)$  un champ scalaire. La variation  $dU$  est lié au déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  par le **gradient** :

$$(10.10) \quad \overrightarrow{\text{grad}}(U(M)) \cdot d\vec{l}_M = dU$$

Ses expressions sont :

| Coordonnées  | Expressions   |
|--------------|---|
| Cartésiennes | $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$   |
| Cylindriques | $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$                                     |
| Sphériques   | $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$ |

#### Définition 68 : Divergence

Soit un volume élémentaire  $dV_M$  autour d'un point  $M$  et un champ de vecteur  $\vec{A}(M)$ . En notant  $d\Phi$  le flux de  $\vec{A}(M)$  traversant la surface entourant  $dV_M$ , la **divergence** est définie

par :

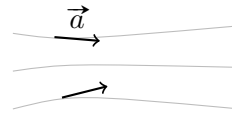
$$(10.11) \quad \operatorname{div}(\vec{A}(M)) \cdot dV_M = d\Phi(M)$$

Ses expressions sont :

| Coordonnées  | Expressions  |
|--------------|--|
| Cartésiennes | $\operatorname{div}(\vec{A}(M)) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ |

### Définition 69 : Circulation

Soit  $\vec{a}$  un champ de vecteur.



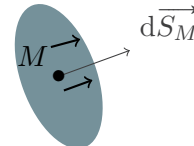
La **circulation élémentaire** du champ  $\vec{a}$  de vecteurs sur le déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  autour d'un point  $M$  est

$$(10.12) \quad d\mathcal{C} = \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}_M$$

Alors, la **circulation** le long d'un chemin  $\Gamma_{AB}$  est :

$$(10.13) \quad \mathcal{C}_a = \int_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{l}_M$$

On va maintenant définir le flux passant à travers une surface :



### Définition 70 : Flux

Le **flux élémentaire** du champs  $\vec{a}$  de vecteurs à travers une surface élémentaire  $d\vec{S}_M$  autour d'un point  $M$  est

$$(10.14) \quad d\Phi = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Alors, le **flux** le long d'un chemin  $\Gamma_{AB}$  est :

$$(10.15) \quad \Phi_a = \iint_{M \in \Gamma_{AB}} \vec{a} \cdot d\vec{S}_M$$

## 10.5.3 STOKES et OSTROGRADSKI

### Théorème 70.1 : Formules de STOKES et d'OSTROGRADSKI

(**Ostrogradski**)

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{E}) \cdot d\vec{V} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(Flux)

(**Stokes**)

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

(Contour fermé)

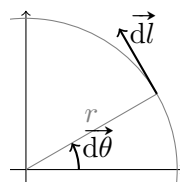
## 10.6 Règles générales

### 10.6.1 Relations entre les grandeurs

$$\text{Puissance} = \frac{d \text{ Travail}}{dt}$$

### 10.6.2 Longueurs de références

$$d\vec{l} = r d\vec{\theta}$$





Deuxième partie

Chimie

# Chapitre 11

## Première année

### 11.1 Configuration électronique

#### Définition 1 : Les nombres quantiques

Pour caractériser un électron, on définit :

- $n$ , le **nombre quantique principal**, définit la couche sur laquelle un électron est rangé
- $l \in [0, n - 1]$ , le **nombre quantique azimutal**, précise la sous-couche sur laquelle un électron est rangé
- $m_l \in [-l; l]$ , le **nombre quantique magnétique**, définit le nombre d'orbitales possibles. Chaque orbitale est appelée "case quantique".
- $m_s \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ , **nombre quantique de spin**, définit le sens de rotation des électrons d'une même case quantique.

#### Théorème 1.1 : Principe d'exclusion de PAULI

Deux électrons ne peuvent avoir 4 nombres quantiques identiques

#### Théorème 1.2 : Règle de stabilité de KLECHKOWSY

Le remplissage des orbitales atomiques se fait par ordre des  $(n + l)$  croissants.

#### Théorème 1.3 : Règle de remplissage de HUND

Lorsqu'un niveau d'énergie est **dégénéré** — c'est à dire pour deux orbitales de même nombre quantique principal  $n$  — et que le nombre d'électrons n'est pas suffisant pour sauter le niveau :

- L'état de plus basse énergie est obtenu en utilisant un maximum d'orbitales
- Les spins des électrons non appariés (les électrons célibataires) d'une même orbitale étant parallèles

| n \ l | 1               | 2               | 3                | 4                |
|-------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 1     | 1s <sup>2</sup> |                 |                  |                  |
| 2     | 2s <sup>2</sup> | 2p <sup>6</sup> |                  |                  |
| 3     | 3s <sup>2</sup> | 3p <sup>6</sup> | 3d <sup>10</sup> |                  |
| 4     | 4s <sup>2</sup> | 4p <sup>6</sup> | 4d <sup>10</sup> | 4f <sup>14</sup> |

FIGURE 11.1 – Tableau des sous-couches électroniques

## 11.2 Représentation moléculaire

### Méthode

#### Représentation de LEWIS

La **charge formelle** d'un atome est déterminée par :

$$(11.1) \quad CF_A = n_{\text{Atome}}(e^-) - n_{\text{Molécule}}(e^-)$$

1. On compte le nombre  $N$  d'électrons pour connaître le nombre  $\frac{N}{2}$  de doublets à répartir
2. On minimise le nombre de charges formelles en multipliant les liaisons
3. On distribue les charges formelles par ordre d'électronégativité

#### Méthode VSEPR

Le **moment dipolaire**  $\vec{\mu}$  est le vecteur caractérisant une liaison entre deux charges  $(-\delta e)$  et  $(+\delta e)$  distancées de  $d$ . Ses caractéristiques sont :

**Direction** Celle de la liaison

**Sens** Du  $-$  au  $+$  (donc de  $(-\delta e)$  vers  $(+\delta e)$ )

**Norme**  $\|\vec{\mu}\| = \delta e \times d$

La notation VSEPR s'exprime par :

$$(VSEPR) \quad A X_m E_n$$

où  $m$  est le nombre d'atomes liés à l'atome central et  $n$  est le nombre d'entités non liantes (doublets ou électron célibataire).

## 11.3 Cristallographie

---

**Définition 2 : Cristal**

---

Un cristal est défini par une **maille** et un **motif**. Un motif est une translation de la maille selon un vecteur  $\vec{t}$ .

---

**Définition 3 : Compacité**

---

En considérant les atomes comme des sphères, la **compacité**  $C$  se définit dans une maille par :

(11.2) 
$$C = \frac{\text{Volume des atomes de la maille}}{\text{Volume de la maille}}$$

## Chapitre 12

# Thermochimie

### Méthode

|                 |              |  |   |
|-----------------|--------------|--|---|
| Enthalpie       | $H = U + PV$ | Capacité thermique molaire<br>à volume constant    | $c_v = \frac{(\partial U_m)}{\partial T}$ |
| Energie libre   | $F = U - TS$ | Capacité thermique molaire<br>à pression constante | $c_v = \frac{(\partial H_m)}{\partial T}$ |
| Enthalpie libre | $G = H - TS$ | Avancement   | $\xi_i = \frac{n_i - n_i^o}{\nu_i}$       |
|                 |              | Vitesse de réaction                                | $v = \frac{d\xi}{dt} = k \prod_i c_i$     |

### 12.1 Grandeurs extensives

#### Définition 4 : Grandeure intensive/extensive

Une grandeur extensive est une grandeur proportionnelle à la taille du système qu'elle caractérise.

#### Propriétés

- extensive  $\times$  intensive = intensive
- $\frac{\text{extensive}}{\text{extensive}} = \text{intensive}$
- $J_{\text{extensive}}(\alpha n, \alpha V) = \alpha J(n, V)$

#### Définition 5

Pour toute grandeur extensive  $J$ , on définit :

$$(12.1) \quad \Delta_r J = \left( \frac{\partial J}{\partial \xi} \right)_{T, P \text{ fixés}}$$

#### Théorème 5.1

$$(12.2) \quad \Delta_r J = \sum_{\text{Produits}} J_m - \sum_{\text{Réactifs}} J_m$$

#### Définition 6 : Variance

La **variance** d'un système est le nombre maximal de paramètres intensifs que l'on peut choisir sans remettre en cause l'équilibre du système étudié.

#### Théorème 6.1 : Règle de GIBBS

La règle de GIBBS permet de déterminer la **variance**  $v$  d'un système en connaissant :

- i. Le nombre  $\varphi$  de phases distinctes
- ii. Le nombre  $c$  de constituants
- iii. Le nombre  $r$  de réactions chimiques

Alors, on a :

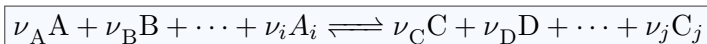
$$(12.3) \quad v = c - r + 2 - \varphi$$

(ATTENTION)

Il faut faire attention en comptant  $\varphi$  dans un système : les phases doivent être distinctes. Par exemple,  $\varphi = 2$  pour un liquide et un gaz,  $\varphi = 2$  pour deux états solides (car ils sont non miscibles), et  $\varphi = 1$  pour deux liquides ou deux gaz miscibles

## 12.2 Équilibre d'une réaction

On considère une réaction du type :



Les  $\nu_i$  et les  $\nu_j$  sont les coefficients stœchiométriques associés à chaque constituant  $i$ . Ceux des réactifs (les  $\nu_i$ ) sont comptés négativement.

Les  $n_k$  sont les quantités de matière associées à chaque constituant  $P_k$  de la réaction.

### 12.2.1 Enthalpie libre

---

**Définition 7 : Enthalpie libre de réaction**

---

L'**enthalpie libre**  $G$  est une fonction d'état associée au deuxième principe de la thermodynamique :

$$(12.5a) \quad \begin{aligned} G &= H - TS \\ \boxed{G &= U + PV - TS} \end{aligned}$$

La version différentielle :

$$(12.5b) \quad dG = Vdp - SdT + \delta W_{\text{rév}}$$

Et  $G$  étant une fonction d'état extensive :

$$(12.5c) \quad \Delta_r G = \sum_i \nu_i \mu_i$$

$\Delta_r G^\circ$  caractérise l'équilibre de réaction, et  $\Delta_r G$  son sens.

$$(12.6) \quad \begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= -RT \ln K \\ \Delta_r G &= \Delta_r G^\circ + RT \ln Q \\ &= RT \ln \frac{Q}{K} \\ \Delta_r G \leq 0 &\Leftrightarrow \text{Sens direct} \end{aligned}$$

À l'équilibre,  $Q = K$ , donc  $\Delta_r G = 0$ .

### 12.2.2 Avancement

---

**Définition 8 : Avancement**

---

L'**avancement** d'une réaction est défini par

$$(12.7) \quad \xi_i = \frac{n_i - n_i^\circ}{\nu_i}$$

Où  $n_i$  est la quantité molaire du constituant  $A_i$ ,  $n_i^\circ$  sa quantité molaire initiale, et  $\nu_i$  son coefficient stœchiométrique.  
 $\xi$  est en mol

---

**Définition 9 : Vitesse de réaction**

---

La vitesse de réaction est la variation de l'avancement :

$$(12.8) \quad v_{\text{réaction}} = \frac{d\xi}{dt}$$

Dans les systèmes à volumes constants, on parle de **vitesse volumique de réaction** :

$$v_{\text{vol}} = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_i} \frac{dc_i}{dt}$$

#### Théorème 9.1 : Loi de vitesse

On peut relier la vitesse de réaction à la constante de vitesse  $k$  et les concentrations  $c_i$  :

(12.9a) 
$$v = k \cdot f(c_i)$$

où  $f(c_i)$  est une fonction des concentrations. Souvent, on a :

(12.9b) 
$$v = k \prod_i c_i$$

### 12.2.3 Loi d'action de masse

#### Théorème 9.2 : Loi d'action de masse

La **loi d'action de masse**, aussi appelée **Loi de GULDERG et WAAGE**, permet de calculer la constante  $K$  :

(12.10) 
$$K = \prod_i a_i^{\nu_i}$$



## Chapitre 13

# Diagramme Potentiel-pH

Pour un couple Oxydant-Réducteur, le diagramme potentiel-pH représente l'évolution du potentiel d'oxydo-réduction en fonction du pH.

### 13.1 Rappels

Le **produit ionique de l'eau**  $K_e$  est le coefficient de réaction d'autoprotolyse de l'eau.

$$(13.1a) \quad K_e = [\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]$$

Le  $pK_e$  est son potentiel :

$$(13.1b) \quad \begin{aligned} pK_e &= -\log K_e \\ pK_e &= p\text{OH} + p\text{H} \end{aligned}$$

À 25°C,  $K_e = 10^{-14}$ .

### 13.2 Méthode

On va prendre pour exemple le fer :  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3(s)/\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2(s)/\text{Fe}(s)$ , à une concentration de tracé  $c_{\text{tra}} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

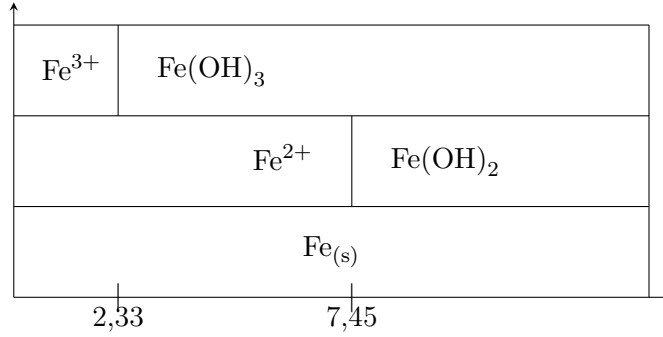
1. Créer un diagramme de situation

- Calculer les **nombre d'oxydation** ( $\sum q = \sum n_0$ )  
$$\begin{array}{ccccccc} \text{Fe}^{3+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_3(s) & / & \text{Fe}^{2+} & / & \text{Fe}(\text{OH})_2(s) & / & \text{Fe}(s) \\ +III & & +III & & +II & & +II & & 0 \end{array}$$
- Pour un même nombre d'oxydation, on regarde les gammes de pH.
  - (a) Avec la concentration de tracé  $c_{\text{tra}} = [\text{Fe}^{2+}]$ , on écrit une équation, par exemple  
$$\text{Fe}^{2+} + 2 \text{OH}^- = \text{Fe}(\text{OH})_2$$
  - (b) On utilise la loi d'action de masse pour trouver le pH en connaissant le  $K_e = 10^{-14}$  et le  $K_{s2} = [\text{OH}^-]^2[\text{Fe}^{2+}]$

$$\begin{aligned}
K_{s_2} &= [\text{OH}^-]^2 [\text{Fe}^{2+}] \\
pH &= -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \\
&= -\log \left( \frac{K_e}{[\text{OH}^-]} \right) \\
&= -\log \left( \frac{K_e}{\sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}}} \right) = pK_e + \log \left( \sqrt{\frac{K_{s_2}}{[\text{Fe}^{2+}]}} \right)
\end{aligned}$$

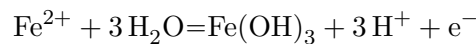
Les données renvoient les frontières  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}(\text{OH})_3$  respectivement à 7,5 et 2,3

- On en déduit un diagramme de situation :



2. On étudie, pour les frontières existantes, l'équation de la droite

- Pour les équations ne faisant pas intervenir  $\text{H}^+$ , comme par exemple à la frontière  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{s})$  où l'équation est  $\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Fe}$ , ou à la frontière  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}^{3+}$ , la frontière sera horizontale, d'équation  $E^\circ$
- Pour les autres, on applique simplement NERNST pour exprimer  $E$  en fonction du pH. Par exemple :



Alors,

$$\begin{aligned}
E &= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ + 0,06 (3 \log [\text{H}^+] - \log [\text{Fe}^{2+}]) \\
&= E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}] - 0,18\text{pH}
\end{aligned}$$

$E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}}^\circ - \log [\text{Fe}^{2+}]$  étant constant, on peut le déterminer par continuité avec la frontière de  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  à  $\text{pH} = 2,3$

3. On trace le diagramme Potentiel-pH

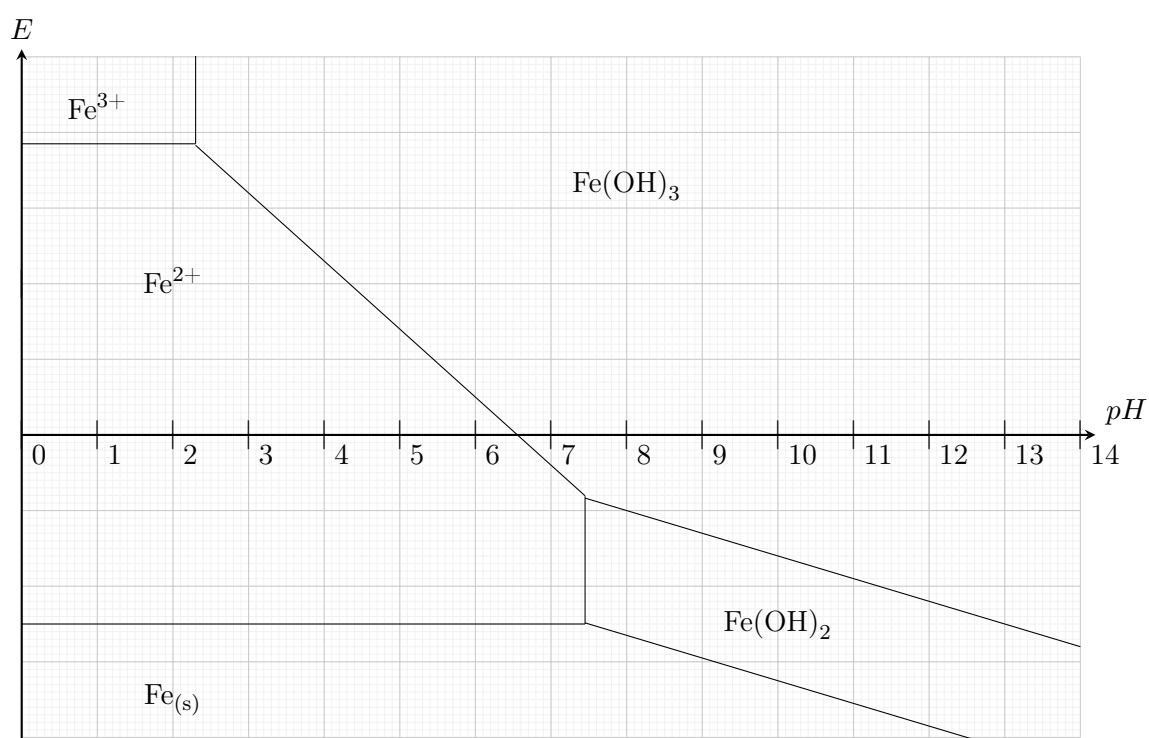


FIGURE 13.1 – Diagramme potentiel-pH du fer

# Liste des acronymes

|      |   |
|------|---|
| AO   | Amplificateur Opérationnel. 2, 14                           |
| ARQS | Approximation des Régimes<br>Quasi-Stationnaires. 2, 11, 85 |
| FEM  | Force Électromotrice. 13                                    |
| OEM  | Onde Électromagnétique. 11, 33                              |
| OPP  | Onde Plane Progressive. 53, 54, 55, 56, 57                  |
| OPPM | Onde Plane Progressive Monochromatique.<br>55, 56           |
| PFD  | Principe Fondamental de la Dynamique. 28,<br>29             |
| TMC  | Théorème du Moment Cinétique. 23, 29                        |
| TRC  | Théorème de la Résultante Cinétique. 28, 48                 |

# Index

- D'ALEMBERT, 46
- Aplanétisme, 32
- ARCHIMÈDE, 10
- ARQS, 12
- Avancement, 79
  
- Biot et Savart, 43
- BODE, 19
  
- Capacité calorifique, 7
- Champ
  - électromoteur, 52
- Charge formelle, 75
- Chemin optique, 35
- Circulation, 71
- Cirulation
  - élémentaire, 71
- Compacité, 76
- Constante
  - STEFAN, 64
- Coordonnées
  - cartésiennes, 68
  - cylindriques, 69
  
- Dégénéré, 74
- Densité
  - spectrale d'onde de flux surfacique, 63
  - surfacique
    - d'énergie, 63
  - volumique d'énergie électromagnétique, 49
  - volumique de force électromagnétique, 48
- DESCARTES, 32
- Deuxième principe, 8
- Diagramme
  - potentiel-pH, 81
- Dipôle
  - magnétique, 44
- Dipôle
  - électrostatique, 42
  
- Divergence, 70
  
- Éclairement  $\mathcal{E}$ , 34
- Energie
  - d'un dipôle, 16
- Énergie
  - cinétique, 22
  - potentielle, 22
- Enthalpie, 7
  - libre, 79
- Entropie, 8
- Équilibre de Réaction, 79
- Grandeur Extensive, 77
  
- FARADAY, 50
- Filtre, 17
- Flux, 71
  - élémentaire, 71
  - radiatif, 65
  - thermique, 59
- Fonction
  - de transfert, 17
- Force
  - centrale, 22
  - conservative, 21
  - de CORIOLIS, 25
  - de COULOMB, 39
  - électromotrice induite, 52
  - de LAPLACE, 44, 51
  - de LORENTZ, 44
  - de rappel, 21
- FRAUNHOFER, 37
  
- Gain, 18
- GALILÉEN, 24
- Gradient, 70
  
- HUND, 74
- HUYGENS-FRESNEL, 37
  
- Impédance, 15
- Inductance
  - propre, 52

$\vec{j}$  (Densité Volumique de Courant), 43  
 KEPLER, 23  
 KLECHKOWSY, 74  
 LAPLACE, 48  
 LEWIS, 75  
 Ligne de champ, 70  
 Loi  
     d'action de masse, 80  
     de COULOMB, 25, 30  
     de FOURIER, 59  
     de GULDERG et WAAGE, 80  
     de KIRCHOFF, 11  
     des mailles, 11  
     des nœuds, 11  
     de PLANCK, 64  
     de STEFAN-BOLTZMANN, 64  
     de WIEN, 65  
 Longueur d'onde  $\lambda$ , 34  
 Masse  
     volumique, 10  
 MAXWELL  
     AMPÈRE, 44  
     GAUSS, 41  
 MILLMAN, 16  
 Module d'onde  $k$ , 34  
 Moment  
     cinétique, 27  
     dipolaire, 75  
     dipolaire(Electrostatique), 42  
     d'une force, 26  
     d'inertie, 28  
     magnétique, 44  
 Lumière monochromatique, 34  
 NEUMANN, 52  
 Nombre d'onde  $\sigma$ , 34  
 Nombre quantique, 74  
     azimutal  $l$ , 74  
     magnétique  $m_l$ , 74  
     principal  $n$ , 74  
     de spin  $m_s$ , 74  
 NORTON, 13  
 Loi d'OHM  
     Globale, 50  
 Onde  
     électromagnétique, 33  
     plane, 53  
     polarisée rectilignement, 57  
     progressive, 54  
     transversale, 54  
 Ostrogradski, 72  
 Paraxial(rayon), 32  
 PAULI, 74  
 Période, 34  
 Phase, 18  
 Plasma, 57  
 POISSON, 48  
 Potentiel  
     électrostatique, 41  
 POYNTING  
     équation locale, 49  
     vecteur, 49  
 Premier principe, 7  
 Pression, 10  
 Puissance  
     d'une force, 21  
     instantanée, 16  
     moyenne, 16  
 Pulsation  
     de coupure, 19  
     plasma, 58  
 Pulsation  $\omega$ , 34  
 Rétroaction, 14  
 Stigmatisme  
     approché, 32  
     rigoureux, 32  
 Stokes, 72  
 Système  
     conservatif, 21  
 THÉVENIN, 13  
 Torseur  
     cinétique, 27  
 Transfert thermique, 7  
 Transverse, 54  
 Travail d'une force, 21  
 Troisième principe, 8  
 Tube de champ, 70  
 Valeur  
     efficace, 16  
     moyenne, 16  
 Variance, 78  
 VARIGNON, 26  
 Vibration lumineuse, 33