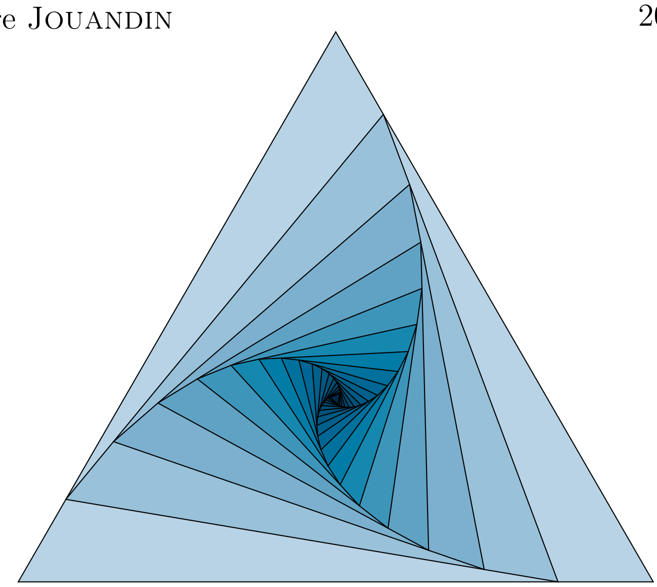
Cours de Prépa

Mathématiques

Écrit par
Alexandre Jouandin

Année
2013—2015



20 novembre 2014

Table des matières

I Première année **6**

1 Calculs algébriques **7**
- 1.1 Somme des termes d'une suite arithmétique 7
- 1.2 Coefficients binomiaux 8

2 Suites **9**
- 2.1 Comparaison de suites 9
- 2.2 Suites de Cauchy 10

3 Nombres complexes **11**
- 3.1 Plan complexe 11
- 3.2 Nombres complexes de module 1 11

II Structures algébriques usuelles **13**

4 Groupes et sous-groupes **15**
- 4.1 Définition d'un groupe 15
- 4.2 Produit fini de groupes 15
- 4.3 Sous-groupe 15
- 4.4 Morphismes de groupes 16
  - 4.4.1 Définition 16
  - 4.4.2 Propriétés d'un morphisme de groupe 17
  - 4.4.3 Isomorphismes 17
- 4.5 Groupes monogènes et cycliques 17
- 4.6 Ordre d'un élément dans un groupe 17
- 4.7 Classe d'équivalence 18
- 4.8 Idéaux de $\mathbb{Z}$ 18

III Algèbre 19

5 Réduction des Endomorphismes 20
5.1 Genéralités 20
5.2 Éléments propres d'un endomorphisme 21
5.2.1 Éléments propres 21
5.3 Polynôme Caractéristique 22
5.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables 23
5.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables 24
5.6 Endomorphismes nilpotents 24
5.7 Polynômes d'un endomorphisme 24
5.8 Lemme de décomposition des noyaux 24
5.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité 26
5.10 Endomorphismes à polynôme minimal scindé 26

6 Topologie d'un espace vectoriel normé 27
6.1 Norme 27
6.2 Complets 28
6.3 Compacts 28
6.4 Connexité par arcs 28
6.5 Topologie 29

IV Analyse 31

7 Séries 32
7.1 Définitions 32
7.2 Séries à termes positifs 33
7.2.1 Comparaison des Série À Termes Positifs (SATP) 33
7.2.2 Règle de d'Alembert 35
7.3 Séries alternées 35
7.4 Hors programme 35

8 Familles sommables de nombres complexes 37
8.1 Dénombrement 37
8.2 Familles sommables 38
8.2.1 Pour les réels positifs 38
8.2.2 Pour les réels et les complexes 39

9 Probabilités sur un univers au plus dénombrable 41
9.1 Espace probabilisé 41
9.2 Conditionnement 43
9.3 Indépendance 43

10 Variables aléatoires discrètes 44
10.1 Espérance 44
10.1.1 Définitions 44
10.1.2 Propriétés 44
10.2 Variance 45
10.2.1 Moment 45
10.2.2 Variance et écart-type 45
10.2.3 Covariance 45

10.3 Lois usuelles . . . 46
10.3.1 Loi binomiale . . . 46

11 Suites de fonctions **48**
11.1 Convergence de suites de fonctions . . . 48
11.2 Convergence des Séries . . . 50
11.3 Propriétés de la somme . . . 51
11.4 Séries doubles . . . 52

12 Calcul Différentiel et Intégral **53**
12.1 Dérivation . . . 53
12.2 Intégration . . . 54
12.3 Primitive . . . 54
12.4 Accroissements finis . . . 55
12.4.1 Cas réel . . . 55
12.4.2 Cas vectoriel . . . 55
12.5 Formules de Taylor . . . 55

13 Séries Entières **56**
13.1 Rayon de Convergence . . . 56
13.2 Propriétés de la somme . . . 57
13.3 Développement en Séries Entières . . . 58

14 Intégrales sur un intervalle **59**
14.1 Intégrabilité . . . 60
14.2 Intégrales classiques . . . 61
14.3 Espaces vectoriels normés de fonction intégrables . . . 61
14.4 Intégrales dépendant d'un paramètre . . . 62
14.5 Fonction Gamma . . . 62
14.6 Intégrales doubles . . . 63

15 Espaces Préhilbertiens réels **64**
15.1 Produit scalaire . . . 64
15.2 Orthogonalité . . . 65
15.3 Automorphismes ortogonaux . . . 65

16 Espaces Préhilbertiens complexes **67**
16.1 Structure Préhilbertienne complexe . . . 67
16.2 Orthogonalité . . . 67
16.3 Séries de Fourier . . . 67

V Équations Différentielles **72**

17 Équations Différentielles Linéaire **73**
17.1 Équations Différentielles **Scalaires** d'ordre 1 . . . 73
17.2 Équations Différentielles **Vectorielles** d'ordre 1 . . . 74
17.3 Équations Différentielles linéaires du second ordre . . . 75
17.3.1 Coefficients constants . . . 76
17.3.2 Cas général . . . 76

18 Équations Différentielles non linéaires **78**
18.1 Équations autonomes 78
18.2 Équations non autonomes 79

19 Fonctions de plusieurs variables **80**
19.1 Différentielle, dérivée 80
19.1.1 Différentielle 80
19.1.2 Dérivée selon un vecteur 80
19.2 Inversion locale 81
19.3 Complément sur les courbes planes 81

VI Géométrie **83**
19.4 Arcs Paramétrés 84
19.5 Courbes Planes 84
19.5.1 En polaire 84
19.5.2 Étude d'une courbe paramétrée 85

VII Annexe **86**
19.6 Équivalences 87
19.7 Trigonométrie 87
19.7.1 Définition 87
19.7.2 Addition / Produit 87
19.7.3 Dérivation 87
19.7.4 Formule de Moivre 88
19.8 Formules usuelles 88
19.9 Astuces 88

Liste des acronymes **89**

Index **90**

Première partie

Première année

Chapitre 1

Calculs algébriques

1.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Définition 1

Soit I un ensemble fini, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

La somme des x_i est notée $\sum_{i\in I} x_i$

Le produit des x_i est noté $\prod_{i\in I} x_i$

Théorème 1.1 : Somme des entiers de 1 à n

Pour tout n de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2} \tag{1.1}$$

Preuve 1.1.1

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + 2 + \cdots + n-1 + n \\ + \quad S & = & n + n-1 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S & = & n+1+n+1+\cdots+n+1+n+1 \end{array} \tag{1.2}$$

d'où $2S = n\times(n+1)$, *et* $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Théorème 1.2 : Somme des premières puissances

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1.3a}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{1.3b}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Les démonstrations de ces formules se font par récurrence (en connaissant le résultat), ou en primitivant.

1.2 Coefficients binomiaux

Définition 2

Pour E un ensemble fini de n éléments, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-parties de E à p éléments.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{1.4}$$

Chapitre 2

Suites

Définition 3 : Borne supérieure

On appelle **borne supérieure** d'une partie F d'un ensemble ordonné fini E **le plus petit des majorants** de F.
En d'autres termes,

$$a = \sup F \Leftrightarrow \forall y \in F, \left[a \leq y \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \leq y)\right] \tag{2.1}$$

Théorème 3.1 : Théorème de la suite monotone

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si (u_n) est majorée, alors elle converge **vers sa borne supérieure**.
Sinon, si (u_n) n'est pas majorée, alors elle admet $+\infty$ pour limite.

2.1 Comparaison de suites

Définition 4 : Suites équivalentes

Deux suites u_n et v_n sont dites **équivalentes** en l'infini s'il existe une suite w_n tendant vers 1 en l'infini telle que $u_n = w_n \times v_n$.
Autrement dit :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \exists w_n \xrightarrow[+\infty]{} 1 \text{ tq } u_n = w_n v_n}$$

Définition 5 : $O(\cdots)$ et $o(\cdots)$

Si x_n est une suite de $(E, N)^{\mathbb{N}}$ et (α_n) une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} x_n = O(\alpha_n), \text{ si } \forall M \in R^+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad & n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq M|\alpha_n| \\ x_n = o(\alpha_n), \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad & n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq \varepsilon|\alpha_n| \end{aligned} \tag{2.3}$$

Définition 6 : $O(\cdots)$ et $o(\cdots)$ dans $\mathbb{R}$

Si $(\alpha_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$,

(2.4)
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \text{ est bornée}$$
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(**Attention**) Une suite ne peut pas, à notre niveau, être ~ 0, en $o(0)$ ou $O(0)$, car la définition dirait que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

2.2 Suites de Cauchy

Définition 7 : Suite de Cauchy

Une suite $(x_n)_n$ dans (E, N) est dite de Cauchy si

(2.5)
$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall(n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_0 \implies \boxed{N\big(x_{n+p} - x_n\big) < \varepsilon}$$

Chapitre 3

Nombres complexes

3.1 Plan complexe

Définition 8 : Corps complexe $(\mathbb{C}, +, \times)$

Un **nombre complexe** est un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, c'est un corps muni des lois suivantes :

Addition $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
de neutre $(0, 0)$

Multiplication $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
de neutre $(1, 0)$

Théorème 8.1

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps (*cf.* tableau 3.1 page 14 pour la définition d'un corps)

Définition 9 : Module

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle **module** la valeur $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3.2 Nombres complexes de module 1

Définition 10

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Le disque unité est l'ensemble de ses points.

Propriétés

- $\mathcal{U}$ est stable par le produit $\times$
- $z \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

Deuxième partie

Structures algébriques usuelles

		Groupe	Groupe Abélien	Anneau	Corps
Loi (+/*)	Neutre e (ou 0)	✓	✓	✓	✓
	Assossiative	✓	✓	✓	✓
	Symétrique (admet a^{-1})	✓	✓	✓	✓
	Commutative		✓	✓	✓
Loi $\times$	Neutre 1			✓	✓
	Associative			✓	✓
	Distributive de la loi $+$			✓	✓
	Commutative				✓
	Inversible				✓

Table 3.1 – Tableau récapitulatif des définitions

Chapitre 4

Groupes et sous-groupes

4.1 Définition d'un groupe

Définition 1 : Groupe

On appelle **groupe** le couple $(G, *)$ où G est un ensemble muni d'$*$, une Loi de Composition Interne (LCI) associative, symétrique, et admettant un neutre.

4.2 Produit fini de groupes

Définition 2 : Groupe Produit

Soient $(G, *)$ et $(G', \circ)$ deux groupes.
Le groupe $\left(G \times G', \square\right)$ tel que

$$(x, x')\square(y, y') = (x * y, x' \circ y')$$

est un groupe appelé **groupe produit** de G et G'

Exemple : Groupe de Klein

Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est appelé **groupe de Klein**. C'est un groupe produit, il n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et **il a la spécificité de ne pas être cyclique**.

4.3 Sous-groupe

Définition 4 : Sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe, et soit H une partie de G
On dit que H est un **sous-groupe** de G si, muni de la LCI $*$, H est un groupe stable par $*$.

Théorème 4.1 : Caractérisation d'un sous-groupe

Avec les notations précédentes, H est un sous-groupe de G si :

- H n'est pas vide
- $\forall (x,y) \in H^2,\ x * y^{-1} \in H$.

En général, pour vérifier que H est non vide, on vérifie que le neutre e de G est aussi dans G.

Théorème 4.2 : Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes.
Alors $H = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} H_i$ est un sous-groupe.

Preuve 4.2.1 *Avec les notations précédentes, montrons que H est un sous-groupe :*

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N},\ e \in H_i &\implies e \in H \\ \forall (x,y) \in H^2, \forall i \in \mathbb{N},\ (x,y) \in H_i^2,\ \text{donc } x * y^{-1} \in H_i &\implies x * y^{-1} \in H \end{aligned}$$

Ainsi, H respecte les propriétés de caractérisation d'un sous-groupe, donc H est un sous-groupe. □

Définition 5 : Sous-groupe engendré

Soit G un groupe, et soit A une partie de G.
L'intersection des sous-groupes de G contenant A est le plus petit sous-groupe contenant A.
On le note $\langle A \rangle$, et on dit que c'est le **sous-groupe engendré** par A.
Quand $A = \{a\}$ est une partie à un seul élément, on dit que $\langle a \rangle$ est un **groupe monogène**

Théorème 5.1 : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Pour tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$

Preuve 5.1.1 *Soit H un sous-groupe. Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$.*
Supposons maintenant que H contient au moins un entier.
Soit n le plus petit entier de H. Il convient de dire que $n\mathbb{Z} \in H$.
Soit m un entier quelconque de H. Effectuons sa division euclidienne par n :

$$\begin{aligned} &m = nq + r \qquad 0 \leq r < n \\ &nq \in H,\ m \in H \implies \boxed{r \in H} \end{aligned}$$

Or n étant le plus petit entier dans H, r dans H étant inférieur à n, $r = 0$, donc $m = nq$ □

4.4 Morphismes de groupes

4.4.1 Définition

Définition 6 : Morphisme de groupe

On appelle **morphisme** d'un groupe $(G, *)$ à un groupe $(H, \times)$ l'application f telle que

(4.1) $$\forall (x, y) \in G^2,\ f\,(x * y) = f(x) \times f(y)$$

4.4.2 Propriétés d'un morphisme de groupe

Théorème 6.1 : Image et image réciproque d'un sous-groupe

L'image d'un sous-groupe par un morphisme est un sous groupe.
L'image réciproque d'une sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe

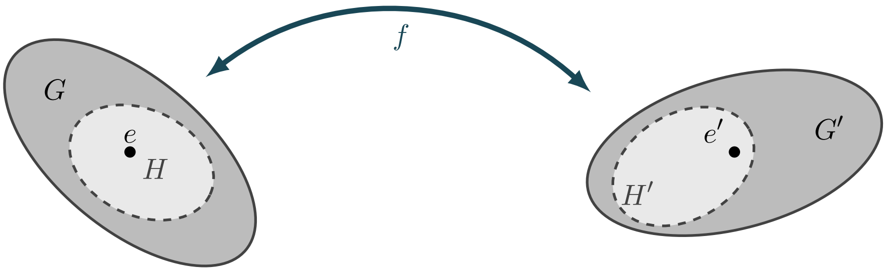


FIGURE 4.1 – Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme f

Théorème 6.2 : Condition d'injectivité d'un morphisme

Soit f un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(H, \times)$. Alors :

f est **injective** $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{e\}$
f est **surjective** $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = H$

4.4.3 Isomorphismes

Définition 7 : Isomorphisme

Un morphisme de groupe **bijectif** est appelé **isomorphisme**

Théorème 7.1 : Réciproque d'un isomorphisme

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

4.5 Groupes monogènes et cycliques

4.6 Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 8 : Éléments nilpotents

Un élément est **nilpotent** si, composé par lui même, il peut être nul :

$$\begin{cases} a \text{ nilpotent} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^{\alpha} \text{ tel que } a^p = 0 \tag{4.2}$$

4.7 Classe d'équivalence

Définition 9 : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est une relation binaire caractérisée de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{rll} \forall x \in E, & \boldsymbol{x \mathcal{R} x} & \textbf{(Réfléxivité)} \\ \forall (x,y) \in E^2, & x\mathcal{R}y \implies \boldsymbol{y \mathcal{R} x} & \textbf{(Symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in E^3, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies \boldsymbol{x \mathcal{R} z} & \textbf{(Transitivité)} \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Définition 10 : Relation d'ordre

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est également une relation binaire. Elle se caractérise de la manière suivante :

$$\left| \begin{array}{rll} \forall x \in E, & \boldsymbol{x \mathcal{R} x} & \textbf{(Réfléxivité)} \\ \forall (x,y) \in E^2, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies \boldsymbol{x = y} & \textbf{(Anti-symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in E^3, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies \boldsymbol{x \mathcal{R} z} & \textbf{(Transitivité)} \end{array} \right. \tag{4.4}$$

(**Attention**) Bien savoir ce que signifient Symétrie et Anti-symétrie

4.8 Idéaux de $\mathbb{Z}$

Définition 11

Un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la classe des éléments ayant tous le même reste par la division euclidienne par n.
E.g. *: Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, l'élément $\bar{1}$ est la classe des éléments de $\mathbb{Z}$ ayants tous le même reste $\bar{1}$ dans leur division par 3.*

Théorème 11.1 : Indicatrice d'Euler

C'est la fonction φ telle que

$$\varphi(n) = \mathrm{Card}\big(\{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\}\big)$$

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 5

Réduction des Endomorphismes

Méthode

Polynôme caractéristique

Polynôme minimal

Si on cherche le polynôme minimal d'un endomorphisme u dans l'espace E de **dimension finie**, on peut avoir recours aux affirmations suivantes :

- Le polynôme minimal divise le polynome caratéristique.
- Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de u d'ordre de multiplicité m_i, alors le polynôme minimal est la valeur minimale des m_i' tels que

$$\Pi_u(u) = \left(X - \lambda_i\right)^{m_i'}(u) = 0$$

- Si on a un polynôme annulateur P, on peut le factoriser pour obtenir les racines. Puisque le polynôme minimal Π_u divise P, il reste à essayer de combiner ces racines pour obtenir le polynôme de plus petit degré qui annule u.

Diagonalisation

5.1 Generalités

Définition 1 : Polynôme minimal

Il existe un unique polynôme unitaire Π_φ appelé le polynôme minimal tel que pour tout morphisme φ, $\Pi_\varphi(\varphi) = 0$ CÀD $(\Pi_\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$

Théorème 1.1 : Formule de Grassman

Si V et W sont deux espaces vectoriels de **dimension finie** de E alors :

(5.1) $$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

5.2 Éléments propres d'un endomorphisme

Théorème 1.2 : Droite stable

Une **droite** est **stable** par un endomorphisme u ssi elle est engendrée par un vecteur propre de u.

5.2.1 Éléments propres

Définition 2 : Valeur propre, vecteur propre

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x **non nul** de E tel que

(5.2) $$u(x) = \lambda x$$

Si un tel vecteur x existe, on l'appelera **vecteur propre**.

Définition 3 : Sous-espace propre

Avec les notations précédentes, on appelera **sous-espace propre (s-ep)** associé à une valeur propre λ le sous-espace vectoriel E_λ :

(5.3) $$E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id})$$

Éléments propres en dimension finie

(**Attention**) On se place dans un espace E de **dimension finie**. Les théorèmes et définitions qui suivent ne sont valables (au propgramme) que dans ces conditions.

Définition 4 : Spectre

Le spectre d'un endomorphisme u de E, noté $\mathrm{sp}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

Théorème 4.1 : Famille finie de s-ep

La somme d'une famille **finie** de sous-espace propre (s-ep) E_{λ_i} de valeurs propres λ_i deux à deux distinctes est directe :

(5.4) $$\sum_i E_{\lambda_i} = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$$

Le programme officiel précise le corrolaire qui va avec :

Théorème 4.2 : Famille de vecteurs propres

Toute famille de vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont deux à deux distinctes est libre.

Théorème 4.3

Pour u un endomorphisme de E de dimension finie n, le spectre de u est fini, et de cardinal **au plus** n.

Théorème 4.4 : Endomorphismes commutant

Soient u et v sont deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie.
Si u et v commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Preuve 4.4.1 *Soit λ une valeur propre de u, et E_λ l'espace propre associé. On a*

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda I)$$

Définition 5 : Éléments propres d'une matrice

Soit A est une matrice de E un espace de dimension finie.
On appelle **valeur propre** de A un scalaire λ pour lequel il existe X tel que :

(5.5) $$AX = \lambda X$$

Si ce vecteur X existe, on l'appelle **vecteur propre** de la matrice A pour la valeur propre λ.

Par extension, on définit le s-ep d'une matrice de manière similaire à la définition 3 page 21.
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice forme son spectre $\mathrm{sp}(A)$.

5.3 Polynôme Caractéristique

Définition 6 : Polynôme caractéristique

On appelle **Polynôme caractéristique**, et l'on note χ_M le déterminant de la matrice

$(M - X\,I_n)$
$\boxed{\chi_M = \det(M - XI_n)}$

Théorème 6.1

Pour une matrice M de rang n, on peut obtenir quelques coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_M = (-X)^n + \operatorname{tr}(M) \times (-X)^{n-1} + \cdots + \det(M)$$

Pour une matrice de rang 2, le polynôme caractéristique est donc donné par
$\boxed{\chi_M = X^2 - \operatorname{tr}(M)\,X + \det(M)}$

5.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Définition 7 : Endomorphisme diagonalisable

On dit que u est **diagonalisable** si et seulement si E est la **somme directe** des espaces propres de u.

Définition 8 : Quelques définitions

Quelques définitions portant sur le polynôme :

Racine simple Une racine α du polynôme P est dite simple si elle n'est pas multiple. On dit que son ordre de multiplicité est égal à 1.

Polynôme scindé P est scindé s'il peut s'écrire comme le produit de polynômes du premier degré.

Théorème 8.1 : Caractérisation de la diagonalisation

On donne des équivalences à "u diagonalisable" :

i. E admet une base formée des vecteurs propres de u

ii. E est somme directe d'espaces sur lesquels u induit des homothéties

iii. χ_u est scindé, et $\omega(\lambda) = \dim(E_\lambda)$

iv. $n = \sum \dim E_\lambda$

v. u admet pour matrice une matrice diagonalisable

5.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

5.6 Endomorphismes nilpotents

5.7 Polynômes d'un endomorphisme

Définition 9 : Polynôme d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on définit l'endomorphisme

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k \tag{5.6}$$

$P(u)$ est appelé **polynôme de l'endomorphisme** u.

Cayley-Hamilton

Théorème 9.1 : Cayley-Hamilton

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel fini, alors le polynôme caractéristique χ_u est un polynôme annulateur de u.
Le polynôme caractéristique est donc un multiple du polynôme minimal.

5.8 Lemme de décomposition des noyaux

Méthode

En général, dès qu'on voit une somme directe, on utilise le théorème de décomposition des noyaux.
Si on a P, un polynôme annulateur de u tel que $P(u) = 0$, alors on a $\mathrm{Ker}P(u) = E$, et si $P(u)$ est le produit de plusieurs polynômes, par exemple A et B, on peut écrire

$$E = \mathrm{Ker}A(u) \oplus \mathrm{Ker}B(u)$$

Théorème 9.2 : Théorème de décomposition des noyaux

Soient deux polynomes P et Q de $\mathbb{K}[X]$. Pour P et Q **premiers entre eux** :

$$\mathrm{Ker}\,[(PQ)(u)] = \mathrm{Ker}\,[P(u)] \oplus \mathrm{Ker}\,[Q(u)] \tag{5.7a}$$

Maintenant, on va voir le théorème dans une forme plus générale, qu'on déduit par récurrence sur le théorème précédent.

Théorème 9.3 : Théorème de décomposition des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

Si $A_1, \cdots, A_p$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ **premiers deux à deux**, alors :

$$\operatorname{Ker}\Big((A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p)(u)\Big) = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\big(A_i(u)\big) \tag{5.7b}$$

5.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

5.10 Endomorphismes à polynôme minimal scindé

Chapitre 6

Topologie d'un espace vectoriel normé

6.1 Norme

Définition 10 : Définition de la norme

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de $\mathbb{K}$. On définit une **norme** sur $\mathbb{E}$ comme une application vérifiant :

$$\left|\begin{array}{lll} (i) & \forall x \in \mathbb{E}, N(x) = 0 \implies x = 0 & \textbf{Séparation} \\ (ii) & \forall x \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) & \textbf{Homogénéité} \\ (iii) & \forall (x,y) \in \mathbb{E}^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y) & \textbf{Inégalité triangulaire} \end{array}\right.$$

Et le couple $(\mathbb{E}, N)$ est l'espace vectoriel normé associé.

Théorème 10.1 : Norme N_2

$$N_2 : f \mapsto \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ est une norme sur } \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{K}\right)$$

Définition 11 : Boule

Dans une espace vectoriel normé (E, N), on définit les boules centrées en a et de rayon r

Boule ouverte de rayon r centrée en a :	$x \in E \| N(x-a) < r$
Boule fermée de rayon r centrée en a :	$x \in E \| N(x-a) \leq r$
Sphère de rayon r centrée en a :	$x \in E \| N(x-a) = r$

Définition 12 : Convergence d'une suite

On dit que la suite des $(x_n)_n$ converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{array}{rl} (i) & \exists l \in E \text{ tel que } \big(N(x_n - l)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \big(n \geq n_0 \implies N(x_n - l) < \varepsilon\big) \\ (iii) & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \big(n \geq n_0 \implies x_n \in B(l, \varepsilon)\big) \end{array} \tag{6.1}$$

6.2 Complets

Définition 13 : Complet

A est un **complet** si toute suite de Cauchy $(c_n)_n \in A$ admet une limite $l \in A$
CÀD si toute suite de Cauchy est convergente

Remarque : Intuitivement, un espace est complet s'il n'a pas de « trou ». $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, car $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Définition 14 : Espace de Banach

Un **espace de Banach** est un espace-vectoriel normé et complet.

6.3 Compacts

Définition 15 : Compact

A **compact** si toute suite d'éléments $(x_n)_n \in A$ a au moins une valeur d'adhérence
CÀD on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge dans A

Théorème 15.1 : Théorème de Heine

Si (E, N) et (F, N) sont des espaces vectoriels normés, A une partie **compacte** de E, si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, alors f est **uniformément continue**.

Théorème 15.2

Toute partie fermée d'un compact est compact

6.4 Connexité par arcs

Définition 16 : Convexe

(6.2) Un ensemble E est **convexe** si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall t \in [0,1], \boxed{tx + (1-t)y \in E}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

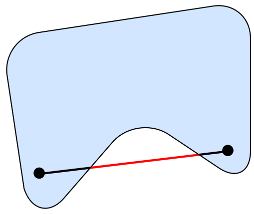


FIGURE 6.1 – Un ensemble non convexe

Définition 17 : Fonction convexe

(6.3) Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall t \in]0,1[, \boxed{f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)}$$

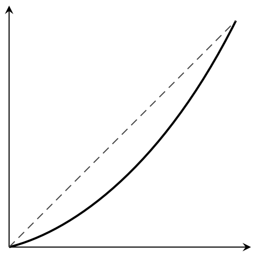


FIGURE 6.2 – Une fonction convexe

Théorème 17.1 : Convexe dans $\mathbb{R}$

I de $\mathbb{R}$ est convexe **si et seulement si** I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 18 : Connexe par arcs

Une partie A d'un espace vectoriel normé (E, N) est **connexe par arcs** si, pour tous points a et b de E, il existe une fonction $f : [0,1] \to E$ **continue** telle que

(6.4)
$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \\ f\big([0,1]\big) \subset A \end{cases}$$

Théorème 18.1 : Connexe dans $\mathbb{R}$

A non vide de $\mathbb{R}$ est connexe **si et seulement si** A est un intervalle de $\mathbb{R}$

6.5 Topologie

Voici plusieurs définitions utiles à l'étude d'espaces vectoriels normés :

Définition 19 : Ouvert

Une partie E est un **ouvert** si, pour tout élément x de E, il existe une boule centrée en x inclue dans E (*cf.* FIGURE 6.3)

Définition 20 : Fermé

Un espace vectoriel F est dit **fermé** si son complémentaire $\overline{F}$ est un ouvert

Pour différencier un ouvert d'un fermé, prenons le schéma ci-contre :
La partie en **rouge** est un ouvert noté O, celle en **bleue** est un fermé noté F.
En effet : il n'existe aucun disque centré en $y \in O + F$ inclus dans la partie $O + F$, donc $O + F$ n'est pas un ouvert. Par contre, pour tout point $x \in O$, on peut trouver une boule inclue dans O.

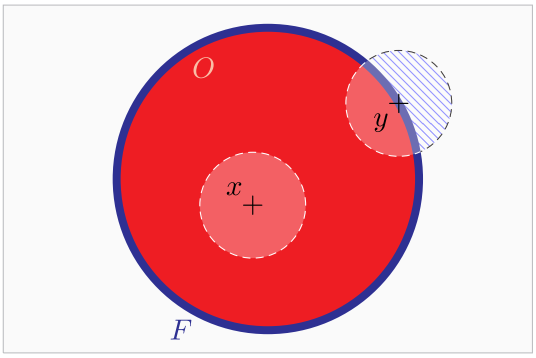


FIGURE 6.3 – Ouvert / Fermé

Théorème 20.1 : Caractérisation d'un fermé

$F \subset E$ est un **fermé** ssi toute suite convergente de F a sa limite dans F

Définition 21 : Intérieur, Adhérence

L'**intérieur** de B, noté $\overset{\circ}{B}$, est la réunion des parties ouvertes contenues dans B.
L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$ est l'intersection des parties fermées contenants A.

Propriétés

- A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- $\underbrace{\mathrm{Fr}(A)}_{\text{frontière}}$ est un fermé
- $\bigcup_{\text{finie}}$ fermés = fermé
- $\bigcap$ fermés = fermé

Théorème 21.1

Un **complet** A d'un espace vectoriel normé E est **fermé**.
La réciproque (*Les parties complètes sont les parties fermées*) est vraie si E est un espace de BANACH.

Quatrième partie

Analyse

Chapitre 7

Séries

Méthode

Étude d'une série

Prenons le cas d'étude d'une série : $\sum u_n$

1. Vérifier que $\sum u_n$ est positive.
   Si elle ne l'est pas, on peut prendre $N(\sum u_n)$. Dans $\mathbb{R}$, on prendra $\left|\sum u_n\right|$.
2. Utiliser un théorème de comparaison pour ramener à des séries facilement étudiables. On peut :
   - Trouver un équivalent (en utilisant des Développements Limités (DLs))
   - Trouver une domination en $o(\cdots)$ ou en $O(\cdots)$
   - Majorer/Minorer explicitement, mais c'est rare

7.1 Définitions

Définition 1

La série S de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où on définit S_n de manière suivante.

$$\underbrace{S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{u_n}_{\text{Terme général de la série}}}_{\text{Somme partielle}}}_{\text{Suite des sommes partielles}}$$

Définition 2 : Convergence d'une série

On dit que la série des u_n converge s'il existe l tel que $l = \lim_{n\to\infty} S_n$ existe.
S'il la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que sa série S_n **diverge grossièrement**

Théorème 2.1 : Théorème suite-série

La série $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{n+1} - a_n)$ converge **si et seulement si** la suite (a_n) converge.

7.2 Séries à termes positifs

Définition 3 : Série À Termes Positifs

On appelle **Série À Termes Positifs (SATP)** toute série de terme général u_n réel tel que, à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$.

Théorème 3.1 : Convergence des SATP

Si $\sum u_n$ est une SATP, alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_n \text{ est majorée} \tag{7.1}$$

7.2.1 Comparaison des SATP

Théorème 3.2 : Théorème de comparaison des SATPs

Si on a deux suites u_n et v_n de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles qu'on ait une des conditions suivantes :
$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ u_n = o(v_n) \\ u_n = O(v_n) \end{cases}$, alors $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.

On a également la contraposée : $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge

Théorème 3.3 : 2e théorème de comparaison des SATPs

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **deux suites positives**.
Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même nature.

Théorème 3.4 : Césaro

Si $\sum \alpha_n$ est une SATP divergente, et que (β_k) est une suite complexe convergente vers β, alors la suite (S_n) de terme général :

$$S_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k}$$

(définie à partir d'un certain rang) converge vers β.

7.2.2 Règle de d'Alembert

Lemme

Pour toute suite (u_n) strictement positive, s'il existe une suite (α_n) strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, alors

$$u_n \underset{+\infty}{=} O(\alpha_n) \tag{7.2}$$

Théorème 3.5 : Règle de d'Alembert

Si, à partir d'un certain rang, $\begin{cases} u_n > 0 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l \end{cases}$ alors :

$$\begin{cases} \text{Si } l > 1, \sum u_n \text{ converge} \\ \text{Si } l < 1, \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \end{cases} \tag{7.3}$$

Ce théorème est peu utile car il est « trop vrai ».

7.3 Séries alternées

Définition 4 : Série alternée

La série $\sum u_n$ est une **série alternée** s'il existe (α_n) une suite positive et $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ tels que $u_n = \varepsilon(-1)^n \alpha_n$

Théorème 4.1 : Théorème spécial des séries alternées (TSSA)

Si $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|) \text{ est décroissante} \\ (|u_n|) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \end{cases}$, alors $\sum u_n$ converge et $\forall n \geq 0, \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_n|$

(**Attention**) Ne pas oublier les valeurs absolues pour l'étude des séries alternées.

7.4 Hors programme

Tous les théorèmes vus ici sont à démontrer.

Théorème 4.2 : Transformation d'Abel

Soient deux suites (a_n) et (b_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Alors :

(7.4) $$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i$$

On peut en déduire, si on a les conditions $\begin{cases} \sum (a_i - a_{i+1}) \text{ CVA vers } 0 \\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \text{ est bornée} \end{cases}$, que $\sum a_k b_k$ converge.

Preuve 4.2.1 *On remarque que $b_i = B_i - B_{i-1}$, avec $b_0 = B_0$. Il vient :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(B_k - B_{k-1}\right) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \end{aligned}$$

On change d'indice sur la deuxième somme, et comme $b_0 = B_0$:

$$\begin{aligned} &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \end{aligned}$$

Chapitre 8

Familles sommables de nombres complexes

8.1 Dénombrement

Définition 5 : Ensemble fini

On dit que E est un **ensemble fini** de cardinal n si E est en bijection avec $[\![0, n[\![$

Définition 6 : Equipotence

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** (ou en bijection) s'il existe une application $\varphi : E \to F$ telle que φ soit bijective.

Définition 7 : Ensemble dénombrable

On dit que E est un **ensemble dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$

Théorème 7.1

Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Théorème 7.2

Un ensemble est fini ou dénombrable **si et seulement si** il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$

Théorème 7.3

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Preuve 7.3.1 *On utilise la fonction de couplage de* CANTOR *:*

(8.1) $$f(p,q) = q + \sum_{i=0}^{p+q} i$$

On montre que cette fonction est bijective.

Théorème 7.4

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Ainsi, $\mathbb{Q}$ est dénombrable :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Théorème 7.5

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

8.2 Familles sommables

8.2.1 Pour les réels positifs

Définition 8 : Famille sommable de réels positifs

Soit une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs. Une famille est sommable s'il existe un réel M tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait :

(8.2a) $$\sum_{i \in J} u_i \leq M$$

On définit la somme de cette famille par

(8.2b) $$\sum_{i \in I} u_i = \sup_J \sum_{n \in J} u_n$$

Théorème 8.1 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs.
Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition dénombrable de I.
La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable **si et seulement si** :

- la sous-famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable pour tout n
- la série $\sum_n \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est convergente

Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{n\in I} u_n \qquad (8.3)$$

Théorème 8.2 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

$$\begin{aligned} (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right) \text{ converge} \\ \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} \quad &= \quad \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right) \end{aligned} \qquad (8.4)$$

8.2.2 Pour les réels et les complexes

Définition 9 : Famille sommable

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Théorème 9.1

$(u_i)_{i\in I}$ **est sommable** $\Leftrightarrow \sum_{i\in I} u_i$ **absolument covergente**

Théorème 9.2 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition **dénombrable** de I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable **si et seulement si** :

- la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable pour tout n
- la série $\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ est convergente

Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{n\in I} u_n \qquad (8.5)$$

Théorème 9.3

Soient $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables. Alors la famille $\left(a_p b_q\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ sommable et

(**8.6**)
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} b_q\right)$$

Preuve 9.3.1 *Ce théorème est issu du théorème de* FUBINI *(cf. théorème 24.4 page 52) : les deux suites* $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ *sont sommables, donc leurs séries convergent absolument, et les hypothèse du théorème de* FUBINI *sont alors vérifiées.*

Théorème 9.4 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

(**8.7**)
$$\begin{aligned}(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable } &\Leftrightarrow \sum_n \left(\sum_{p+q=n} |u_{p,q}|\right) \text{ converge}\\ \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right)\end{aligned}$$

(**Attention**) Faire attention à bien mettre des modules partout

Chapitre 9

Probabilités sur un univers au plus dénombrable

9.1 Espace probabilisé

Définition 10 : Univers

Un **univers** Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des parties de l'univers Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$

Définition 11 : Tribu

Une **tribu** sur un univers Ω est un sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés :

- $\Omega \in \mathscr{T}$
- $\forall A \in \mathscr{T}, \overline{A} \in \mathscr{T}$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$

Le couple $(\Omega, \mathscr{T})$ est appelé **espace probabilisable**.

Propriétés

Si $(\Omega, \mathscr{T})$ est un espace probabilisable, et A_i un élément de $\mathscr{T}$:

- $\varnothing \in \mathscr{T}$
- $\bigcup\limits_{\text{finie}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\bigcap\limits_{\text{finie}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{T}$

- $\forall (A,B) \in \mathscr{T}^2,\ A \cap \overline{B} = A \backslash B$

Définition 12 : Incompatibilité, implication

Deux évènements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$
On dit que $A \underset{\text{implique}}{\Longrightarrow} B$ quand $A \subset B$

(**Attention**) Ne pas confondre $(A \cap B = \varnothing)$ et $(P(A \cap B) = 0)$

Définition 13 : Système complet d'évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable.
Soit I fini ou égal à $\mathbb{N}$
Un **système complet d'évènements** est <u>une suite d'évènements</u> $(A_i)_{i\in I}$ telle que :

- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
- $\forall (p,q) \in I^2,\ p \neq q,\ A_p \cap A_q = \varnothing$

Définition 14 : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable. La **probabilité** est l'application $\mathbb{P} : \mathscr{T} \to [0,1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ d'éléments <u>**deux à deux incompatibles**</u> :
  - $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge
  - $\displaystyle\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$
    (σ-additivité)

Le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**

(**Attention**) Espace propabilisable $(\Omega, \mathscr{T}) \neq$ Espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$

La propriété de σ-additivité existe sous forme d'inégalité quand les évènements ne sont pas incompatibles :

Théorème 14.1 : Inégalité de Boole

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probablilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors :

(9.1) $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve 14.1.1 *On se ramène à une suite d'évènements deux à deux disjoints en introduisant la suite (C_n) telle que :*

$$C_0 = A_0 \qquad C_n = A_n \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

Puisque $C_n \subset A_n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

9.2 Conditionnement

9.3 Indépendance

Définition 15 : Évènements indépendants

Deux évènements A et B sont indépendants lorsque

(9.2) $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Chapitre 10

Variables aléatoires discrètes

10.1 Espérance

10.1.1 Définitions

Définition 16 : Espérance d'une famille finie

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$. L'**espérance** de X est donnée par la somme finie :

(10.1)
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}_X(x_i)$$

On peut étendre la définition précédente au cas où les valeurs de X forment une famille sommable :

Définition 17 : Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire **réelle discrète**. On dit que X est d'**espérance** finie si la famille $(x\mathbb{P}_X(x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

10.1.2 Propriétés

Propriétés

- L'ensemble $\mathscr{E}$ des variables aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}$ et dont l'espérance est finie est un espace vectoriel
- L'espérance est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$
- $\forall X \in \mathscr{E}$, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \implies E(X) \geq 0$ (l'espérance est positive)
- Soit Y une variable aléatoire d'espérance finie, si X est une variable aléatoire telle que $|X| \leq Y$, alors X est d'espérance finie.
- Si X et Y sont deux lois **indépendantes et admettant chacune une espérance**

finie, alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

10.2 Variance

10.2.1 Moment

Définition 18 : Moment d'ordre n

Soit X une variale aléatoire discrète. On dit que X admet un **moment** d'ordre m si X^m admet **une espérance finie**.

Théorème 18.1

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance finie.

Théorème 18.2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes de moment d'ordre 2, alors XY a une espérance finie et

$$\Big(E(XY)\Big)^2 \leq E(X^2)\,E(Y^2) \tag{10.2}$$

10.2.2 Variance et écart-type

Définition 19 : Variance et Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète **admettant un moment d'ordre 2**.

On définit la **variance** par :

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) \tag{10.3a}$$

et l'**écart-type** par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{10.3b}$$

Théorème 19.1 : Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{10.4}$$

10.2.3 Covariance

Définition 20 : Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant un espérance finie**.

Si elle existe, on définit la **covariance** de X et de Y par :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\,\big(Y - E(Y)\big)\Big) \tag{10.5}$$

Théorème 20.1 : Existence de la covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires **admettant un moment d'ordre 2**. Alors la covariance de X et de Y existe et on a :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{10.6}$$

Preuve 20.1.1 *On a :*

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\,\big(Y - E(Y)\big)\Big)$$

On développe :

$$= E\Big(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\Big)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} &= E\big(XY\big) - E\big(E(X)Y\big) - E\big(E(Y)X\big) + E\big(E(X)E(Y)\big) \\ &= ??? \\ \operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

10.3 Lois usuelles

Définition 21 : Loi de Bernoulli

La **loi de Bernoulli** est une distribution discrète qui prend la valeur 1 avec une probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $(1-p)$.
Une variable alétoire qui suit cette loi est appelée variable de Bernoulli

10.3.1 Loi binomiale

Définition 22

La loi binomiale, de paramètres n et p, est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale au nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli, p étant la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli.

Autrement, c'est une variable aléatoire X telle que

$$X = Y_1 + Y_1 + \cdots + Y_n$$

où les Y_i sont des variables aléatoires **indépendantes** de loi de BERNOULLI.

La variable aléatoire suit une loi de probabilité :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (10.7)$$

Théorème 22.1 : Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binômiale. Alors :

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \qquad (10.8)$$

Chapitre 11

Suites de fonctions

Méthode

En général, pour la convergence simple, on **fixe** x. Pour la convergence uniforme, puisqu'on cherche la norme N_∞, on **dérive** $f_n(x)$ pour étudier ses variations.

11.1 Convergence de suites de fonctions

Définition 23

Définitions simplifiées des différents types de convergence

(11.1)

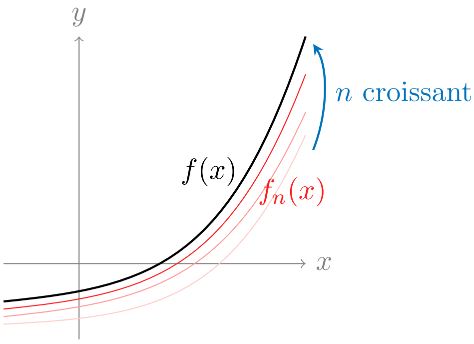
$$\begin{aligned}
\text{La suite des } (f_n) \text{ converge \textbf{simplement} vers } f &\Leftrightarrow \forall x, (f_n(x))_n \to f(x) \\
\text{La suite des } (f_n) \text{ converge \textbf{uniformément} vers } f &\Leftrightarrow N_\infty^A\left(\underbrace{f_n - f}_{\in B(A,F)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
(f_n(x))_n \text{ vérifie le \textbf{critère de Cauchy de CU}} &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 | n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow N_\infty^A((f_n - f)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Le critère de Cauchy de convergence uniforme est équivalent à la convergence uniforme.
$\boxed{\text{Critère de Cauchy} \Leftrightarrow \text{Convergence Uniforme}}$

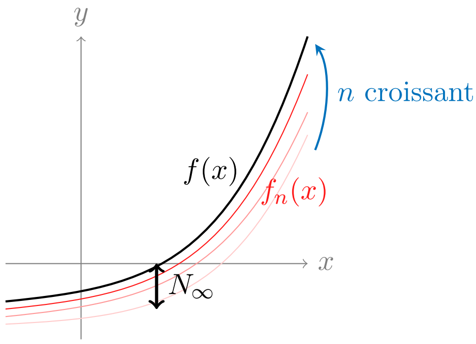
Pour illustrer, on peut faire les shémas suivants :

Propriétés de la simple convergence

- $\left\{\begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (f_n(x))_n \text{ est croissante} \\ (f_n(x))_n \xrightarrow[x\in A]{CVS} f \end{array}\right. \Leftrightarrow f \text{ est croissante}$
- (autres propriétés analogues de f_n appliquées à f par CVS)



(a) Convergence Simple



(b) Convergence Uniforme

FIGURE 11.1 – Les différents types de convergence de fonction

Théorème 23.1 : Convergence par changement de base

Si $(f_n(x))_n$ converge simplement ou uniformément <u>ssi</u> $(f_{n,i}(x))_n$ converge de la même manière dans la base $\mathcal{B} = (e_i)$

Théorème 23.2 : Conditions nécessaire de CU [a]

$$\left.\begin{array}{r} (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{CU}} f \\ (f_n(x))_n \quad \text{est } \textbf{bornée} \end{array}\right\} \implies f \text{ est } \textbf{uniformément convergente bornée}$$

Théorème 23.3 : Conditions nécessaire de <u>Non</u>-CU

Il suffit que : $\exists (x_n)$ tel que $f(x_n) \underset{x\to\infty}{\nrightarrow} 0$

a. **CU** pour **C**onvergence **U**niforme

On notera les fonctions f dont la dérivée est continue de $A \to B$ comme appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}(A, B)$

Théorème 23.4 : Continuité par convergence

$$\left.\begin{array}{r} (f_n(x))_n \ \textbf{continue} \text{ en a} \\ (f_n(x))_n \ \textbf{converge uniformément} \text{ vers } f \end{array}\right\} \implies f \text{ est continue en } a$$

$$\left.\begin{array}{r} (f_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \\ (f_n(x))_n \quad \textbf{converge uniformément} \text{ vers} \\ f \text{ sur tout compact} \subset A \end{array}\right\} \implies f \in \mathcal{C}(A, F)$$

Théorème 23.5 : Théorème de la double limite

Si $f_n(x)$ $\boxed{\textbf{converge uniformément}}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}$$

Théorème 23.6 : Théorème d'approximation de Weierstrass

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ est **limite uniforme** d'une suite $(\mathcal{P}_n(X))_n$ de fonctions polynômes.

Le même théorème existe pour les fonctions (T-périodiques à valeurs complexes) limites d'une suite de polynômes trigonométriques.

11.2 Convergence des Séries

Définition 24

Définitions simplifiées des convergences de Séries de fonctions :

$$\sum f_n \text{ converge } \textbf{simplement} \quad \text{si} \quad \forall x \in A, \text{ la série } \sum f_n(x) \text{ converge}$$

$$\sum f_n \text{ converge } \textbf{uniformément} \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \in A, \text{ la série } (S_n) = \displaystyle\sum_0^n f_n(x) \\ \qquad\qquad \text{converge uniformément} \\ \\ x \in A, \text{ la série } (R_n) = \displaystyle\sum_n^\infty f_n(x) \\ \qquad\qquad \text{converge uniformément} \end{cases} \tag{11.2}$$

$$\sum f_n \text{ converge } \textbf{normalement} \quad \text{si} \quad \sum N_\infty(f_n) \text{ converge}$$

Pour les définitions de convergence de fonctions, se référer aux définitions 11.1.

On retrouve certaines propriétés des fonctions :

Théorème 24.1

$$\left. \begin{array}{r} (u_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \\ (u_n(x))_n \ \textbf{converge uniformément} \text{ sur } A \end{array} \right\} \Longrightarrow \sum u_n \text{ est continue sur } A$$

Théorème 24.2 : Théorème de la double limite

Si $\sum f_n$ **converge uniformément**, et qu'il existe (v_n) telle que $v_n = \lim\limits_{x \to a} f_n(x)$, alors $\sum v_n$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\lim_{x \to a} f_n(x)\right)}_{=v_n} = \lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x))}$$

Preuve 24.2.1 *C'est le théorème 23.5 de la double limite de suites de fonctions appliqué aux séries*

11.3 Propriétés de la somme

Théorème 24.3 : Intégration sous le signe somme

$$\left\{\begin{array}{l} u_k \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C}) \text{ et intégrable sur } I \\ S \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C}) \\ \sum u_n \to S \\ \boxed{\sum |u_n| \text{ converge}} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} S \text{ est intégrable, et} \\ \int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n\right) \end{array} \tag{11.3}$$

11.4 Séries doubles

Théorème 24.4 : Interversion des sommations de Fubini

Si $\left\{\begin{array}{l} (u_{p,q})_{p,q} \text{ est une suite double complexe} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \left(\sum |u_{p,q}|\right)_{p,q} \text{ converge} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right) \text{ converge} \end{array}\right|$, alors :

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \tag{11.4}$$

Avec les deux séries $\left(\sum\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_q$ et $\left(\sum\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_p$ qui convergent

Chapitre 12

Calcul Différentiel et Intégral

12.1 Dérivation

Définition 25 : Dérivabilité

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

On notera $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 25.1

f dérivable $\Leftrightarrow \exists l$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x - a)l + (x - a)\varepsilon(x)$
Alors, l est la dérivée en a de f

Propriétés

Continuité f dérivable $\implies$ f continue

Linéarité $(f + \alpha g)' = f' + \alpha g'$

Dérivées usuelles

- **Application linéaire** u linéaire, f dérivable ; $(u \circ f)'(x) = u \circ f'(x)$
- **Application multi-linéaire** φ une application n-linéaire ;
$$\Big(\varphi(f_1, \cdots, f_n)\Big)'(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi\Big(f_1(x), \cdots, f_{i-1}(x), f_i'(x), f_{i+1}(x), \cdots, f_n(x)\Big)$$
- **Quotient** u et v dérivables ; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- **Composition** f et g dérivables ; $(f \circ g)' = f' \, g'(f)$

Définition 26 : Application $\mathcal{C}^1$

$f \in \mathcal{C}^1\big(E, F\big)$ si l'application $f' : a \mapsto f'(a)$ existe et est continue.

Définition 27 : Dérivée k-ième

On définit récursivement la dérivée k-ième $f^{(k)}$:

(12.1) $$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

Définition 28 : Application de classe $\mathcal{C}^k$

f est $\mathcal{C}^k$ si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.

Théorème 28.1 : Leibniz

Soit φ une application bilinéaire, alors :

(Leibniz) $$\varphi^{(n)}(f,g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right)$$

12.2 Intégration

Inégalité de la moyenne

Théorème 28.2 : Cas réel

Si f est **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et qu'il existe m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors

(12.2) $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

12.3 Primitive

Définition 29 : Primitive

F est une **primitive** de f si $\forall x, F'(x) = f(x)$.

Théorème 29.1

Si F est la primitive de f,

(12.3) $$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

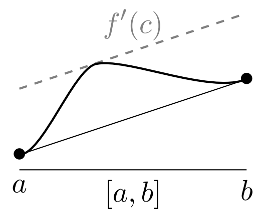
12.4 Accroissements finis

12.4.1 Cas réel

Théorème 29.2 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{D}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$, alors

$$\exists\, c \in]a,b[\text{ tel que } \boxed{f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)} \tag{12.4}$$

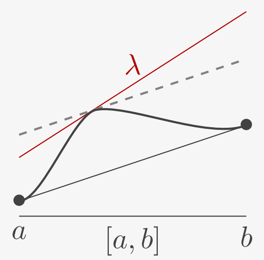


12.4.2 Cas vectoriel

Théorème 29.3 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$
Si $\exists\, \lambda$ tel que $\forall t \in]a,b[, N(f'(t)) \leq \lambda$, alors

$$\boxed{N\big(f(b) - f(a)\big) \leq \lambda\big((b-a)\big)} \tag{12.5}$$



12.5 Formules de Taylor

Théorème 29.4 : Formules de Taylor

$f \in \mathcal{C}^{k+1}(I,E)$, avec $(a,b) \in I^2$

Taylor-Young $$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad + \quad o\left((x-a)^n\right)$$

Taylor-Laplace $$f(x) = \overbrace{\sum_{p=0}^{k} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)}^{T_k(x)} \quad + \quad \underbrace{\overbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt}^{\text{Reste intégral } R_k(x)}}_{= (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}\left((1-u)a+ux\right) du}$$

Taylor-Lagrange $$f(x) = N\left(f(b) - f(a) - \sum_{p=1}^{k} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)\right) \leq \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} N_\infty^{[a,b]}\left(f^{(k+1)}\right)$$

Chapitre 13

Séries Entières

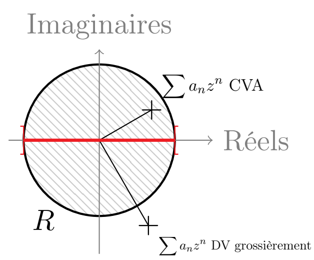
Certains objets mathématiques ont des développements de Taylor exacts. C'est le cas notamment des polynômes, qui sont déjà des développements de Taylor. Les séries géométriques par exemple ont également un développement de Taylor exact : pour la série de terme général q^k, on a $\sum_0^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$. Sinon, la plupart du temps, le développement de Taylor est précis jusqu'à un dernier terme qu'on ne peut calculer, mais qu'on peut quand même approximer en $o(\cdots)$ ou en $O(\cdots)$

13.1 Rayon de Convergence

Définition 30

Soit $\sum a_n z^k$ une série entière. Le **rayon de convergence** est la borne supérieure de $I = \{z \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| z^k \text{ converge}\}$. C'est en fait la valeur maximale de z pour laquelle la série converge.

Pour calculer le rayon de convergence, il importera peu de l'étudier pour les valeurs absolues, les nombres imaginaires, etc... car c'est seulement un rayon. Dans les réels, on appèlera l'intervalle $]-R, R[$ l'intervalle ouvert de convergence.



Lemme d'Abel

S'il existe ρ tel que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée, alors

$$\forall z < \rho, \boxed{|a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n}$$

Théorème 30.1

Sur le disque ouvert D_R de convergence $]-R,R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge **absolument**.

Théorème 30.2

Sur le disque ouvert D_R de convergence $]-R,R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge **uniformément** et sa somme est une fonction **continue**.

Pour déterminer le rayon, il existe plusieurs méthodes, mais on se servira principalement du théorème suivant étant une conséquence de la règle de d'Alembert :

Théorème 30.3 : Règle de d'Alembert

Pour la série entière $\sum a_n z^k$ non nulle à partir d'un certain rang, et qu'il existe l tel que

$$\boxed{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l} \text{ alors } l = \frac{1}{R}$$

La réciproque est fausse : si on connait R, on a pas $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Sinon, on a aussi $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Preuve 30.3.1 *Il suffit d'appliquer d'Alembert (cf. théorème 3.5 page 35) à la série de terme général $|a_n z^k|$ (qui est une SATP) qu'on prend à partir d'un certain rang tel que $a_n \neq 0$. Donc il existe une limite l telle que*

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^z|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$$

Donc $|a_n z^n|$ converge si $l|z| < 1$, et diverge si $l|z| > 1$.

Puisque toute série entière de rayon de convergence $R > 0$ est absolument convergente dans son disque ouvert de convergence.

13.2 Propriétés de la somme

Continuité

Théorème 30.4

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence R

Dérivabilité

Théorème 30.5 : Dérivées successives

Les dérivées successives d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ont toutes le même rayon de convergence R

Théorème 30.6

Pour des séries entières avec $R = \min(R_a, R_b)$, alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$$

13.3 Développement en Séries Entières

Définition 31 : Fonction développable en série entière

$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ admet un DSE en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que

$$\forall z \in \overset{\text{boule ouverte de centre 0}}{V}, f(z) = \sum a_n z^n$$

Théorème 31.1 : CNS d'un DSE

$$f : \mathbb{R} \to K \text{ est un DSE en } 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} 0}$$

Chapitre 14

Intégrales sur un intervalle

Méthode

Définitions rapides

Intégrabilité $f(x)$ intégrable si $\displaystyle\int |f(x)| < +\infty$

Norme de la convergence en moyenne

$N_1 : \displaystyle\int_I |f|$

Norme de la convergence en moyenne quadratique

$N_2 : f \to (f|f)^{\frac{1}{2}}$ (*cf* théorème 35.1 de la page 64)

Pour prouver l'intégrabilité

1. Vérifier la continuité sur l'intervalle étudié
2. Remplacer la fonction par sa valeur absolue
3. Étudier les problèmes aux bornes
   - Trouver un équivalent
   - Trouver un $o(\cdots)$
   - Avoir une primitive finie
4. Comparer la fonction
   On pourra utiliser :
   - La fonction exponentielle

- L'intégrale de **Riemann** : $\frac{1}{t^\alpha}$
  En particulier : f est intégrable si $\exists \alpha < 1$ tel que $f(x)\, x^\alpha \xrightarrow[x \to 0]{} 0$
- L'intégrale de **Bertrand** : $\frac{1}{|\ln(t)|^\beta t^\alpha}$

Pour intégrer

On utilisera

1. Les intégrations par partie
2. Un changement de variable
3. Cauchy-Schwarz
4. L'intégrale d'un polynôme est un polynôme

Souvent, on ne peut intégrer sur tout un intervalle comme $[0; +\infty]$. Pour y remédier, on peut poser $a > 0$ tel que notre fonction soit intégrable sur $[a; +\infty[$. Alors, la fonction est intégrable sur $\cup[a; +\infty[= \mathbb{R}^+$

14.1 Intégrabilité

À l'origine, on donne plusieurs définitions de l'intégrabilité : d'abord pour les fonctions positives, puis pour les autres en disant que c'est si $|f|$ est intégrable. On donne ici une définition plus générale :

Définition 32 : Fonction intégrable

$f(x) \in \mathcal{CM}$ est intégrable sur I si
$\forall x \in \underbrace{J}_{\text{segment}} \subset I, \exists M \in \mathbb{R}^+$ **tel que** $\int_J |f| \leq M$

Théorème 32.1 : Comparaison à une série

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive** et **décroissante** sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\left(\int_{n-1}^{n} f\right) - f(n)$ est une SATP convergente.

$$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \sum f(n) \text{ converge} \tag{14.1}$$

En cas de divergence, $\int f \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum f(n)$

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive**, **croissante** et majorée sur

$\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\left(\int_n^{n+1} f\right) - f(n)$ est une SATP convergente.

Théorème 32.2 : CNS de l'intégration

$f(x)$ est intégrable sur I si

$\forall x \in I, \boxed{\int_I |f| \leq \varphi}$ où $\varphi \in \mathcal{L}^1$

Théorème 32.3

Si f est une fonction intégrable sur I,

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| \tag{14.2}$$

14.2 Intégrales classiques

Théorème 32.4

Si $-\infty < a < b < +\infty$, alors $f : t \mapsto \dfrac{1}{(b-a)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $\boxed{\alpha < 1}$

Théorème 32.5 : Intégrale de Riemann

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est l'intégrale de Riemann, } \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

14.3 Espaces vectoriels normés de fonction intégrables

Théorème 32.6 : Convergence dominée

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonction de $\mathcal{CM}(I, K)$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, K)$, et s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$,

alors $f \in \mathcal{L}$ et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n \to +\infty}, \int_I f_n$

Théorème 32.7 : Intégration terme à terme

$$\left.\begin{array}{lll}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & \underbrace{f_n}_{} & \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ & f_n \in \mathcal{L}^1 & \\ \displaystyle\sum \int_I & \overbrace{|f_n|}^{} & \text{converge}\end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \\ \sum f_n \text{ converge} \\ \int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{array} \tag{14.3}$$

14.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 32.8 : Continuité

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)$ est <u>définie et continue</u> sur A si

$$\begin{cases} \forall x \in A, & t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{CM} & \textbf{(}\boldsymbol{\mathcal{CPM}}\textbf{ pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ \forall t \in I, & x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C} & \textbf{(Continue pour } \boldsymbol{x}\textbf{)} \\ \quad \forall (x,t) \in (A \times I) & & \\ \quad \exists \varphi \in \mathcal{L}^1 \text{ tel que} & |f(x,t)| \leq \varphi & \textbf{(Domination)} \end{cases} \tag{14.4}$$

On a aussi la version avec $\mathcal{C}^k$ mais ce n'est pas au programme

Théorème 32.9 : Dérivabilité

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)$ est <u>dérivable et continue $(\mathcal{C}^1)$</u> sur A si

$$\begin{cases} \forall x \in A, t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{CM} \quad \textbf{(}\boldsymbol{f}\textbf{ intégrable pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ f \text{ admet une dérivée partielle qui vérifie} \\ \begin{cases} \forall x \in A, t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{CM} & \textbf{(}\boldsymbol{\mathcal{CPM}}\textbf{ pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ \forall t \in I, x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{C} & \textbf{(Continue pour } \boldsymbol{x}\textbf{)} \\ \forall (x,t) \in A \times \underbrace{[a,b]}_{\in I}, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \in \mathcal{L}^1 & \textbf{(Domination)} \end{cases} \end{cases}$$

Alors, la dérivée de g est $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$

14.5 Fonction Gamma

Définition 33 : Fonction Gamma

On définit Γ de $]0,+\infty[$ par $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

Cette fonction est convexe (comme produit de deux applications $x \mapsto t^{x-1}$ et $x \mapsto e^{-t}$ convexes), donc continue.

Théorème 33.1 : Étude de Γ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \cdots = \sqrt{\pi}$

Preuve 33.1.1 *Vérifions que Γ est une fonction continue. On utilise le théorème de continuité de fonctions paramétrés, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue.*
Pour dominer $t^{x-1}e^{-t}$, avec $x \in [a,b]$, on prend $\varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$

Maintenant qu'on a étudié la continuité, on peut faire une intégration par partie de $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}dt$ en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t^n & \Longrightarrow \quad u'(t) = nt^{n-1} \\ v(t) = -e^{-t} & \Longrightarrow \quad v'(t) = e^{-t} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \Gamma(n+1) = \underbrace{\left[-t^n e^{-t}\right]_0^{\infty}}_{=-0+0} - \underbrace{\int_0^{\infty} -t^{n-1}e^{-t}}_{\Gamma(n)}$$

$$\Longrightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n!\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}$$

d'où $\Gamma(n+1) = n!$ CQFD.

14.6 Intégrales doubles

Définition 34 : Intégrale double

f une fonction continue de $[\alpha,\beta] \times [a,b]$ dans $\mathbb{C}$.
Alors $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)dt\right)dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right)dt$

Chapitre 15

Espaces Préhilbertiens réels

Dans cette section, on se placera dans $\mathbb{R}$.

Méthode

Définitions rapides

Produit Scalaire *cf.* définition 35 page 64

Éléments orthogonaux x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Famille orthogonale $(e_i|e_j) = \delta i, j$

Distance de x à une partie F $d(x, F) = \|x - p_f(x)\|$

15.1 Produit scalaire

Définition 35 : Produit scalaire

Le produit scalaire est défini comme suit :

$$\begin{array}{rrll} (i) & \forall x \in E\backslash\{0\}, & \underline{\varphi(x,x) > 0} & \textbf{(définie positive)} \\ (ii) & \forall (x,y) \in E^2, & \underline{\varphi(x,y) = \varphi(y,x)} & \textbf{(symétrie)} \\ (iii) & \forall x \in E, & \underline{y \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire}} & \textbf{(linéaire à droite)} \end{array}$$

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E. L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

Remarque : La symétrie et la linéarité impliquent la linéarité à gauche, donc la bilinéarité du produit scalaire.

Théorème 35.1 : Norme associée

$x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E. On la note $||x||$, et $||x||^2 = (x|x)$.

Théorème 35.2 : Inégalité CAUCHY-SCHWARZ

(15.1a)
$$|(x|y)| \leq (x|x)^{\frac{1}{2}} \times (y|y)^{\frac{1}{2}}$$

qu'on peut aussi écrire :

(15.1b)
$$|(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Théorème 35.3 : Pythagore

Si $x_1, \cdots, x_n$ sont des éléments de E deux à deux orthogonaux, alors

(15.2)
$$\left\|\sum_{i=0}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^2$$

(ATTENTION) Ce sont bien des normes car x_i au carré n'existe pas (qu'est-ce que le produit de deux vecteurs ?), du coup on utilise $\|\cdot\|^2 = (\cdot|\cdot)$

15.2 Orthogonalité

Définition 36 : Éléments orthogonaux

Deux éléments x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Théorème 36.1 : Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT

Pour toute base de (e_i), il existe une base (ε_i) telle que :

(15.3)
$$\begin{cases} (\varepsilon_i) \text{ est une base orthonormée} \\ \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \\ (e_i|\varepsilon_i) > 0 \end{cases}$$

On aura souvent recours à compléter une base $(e_i)_k$ avec $n-k$ vecteurs orthonormaux aux $(\varepsilon_i)_k$ par le théorème de la base incomplète.

Théorème 36.2 : Inégalité de BESSEL

Si (e_i) est une base orthonormée : $\boxed{\sum_i (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2}$

15.3 Automorphismes ortogonaux

u est un endomorphisme, donc il est linéaire.

Définition 37

i. u un endomorphisme, il existe **un unique** endomorphisme u^* tel que

$$\forall (x,y) \in E, (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

u^* est l'**adjoint** de u.

ii. u est **autoadjoint** (symétrique) si $u^* = u$

iii. u est un **automorphisme orthogonal** si $u^* = u^{-1}$. On note $u \in \mathcal{O}(E)$

Propriétés

i. Si $M_{\mathcal{B}}(u) = A$, alors $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$

ii. $\mathrm{Ker}(u^*) = [\mathrm{Im}(u)]^{\perp}$

iii. $\mathrm{Im}(u^*) = [\mathrm{Ker}(u)]^{\perp}$

iv. $\chi_u = \chi_{u^*}$

v. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

Théorème 37.1 : Caractérisation d'un automorphisme orthogonal

u est un automorphisme orthogonal si les assertions suivantes (équivalentes) sont vérifiées :

i. u conserve la norme

ii. u conserve le produit scalaire

iii. $u\left(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}\right) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$

iv. $\forall \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}, \exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$ telle que $u\left(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}\right) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$

v. $\exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$ telle que $\left|\begin{array}{c} U^tU = I_n \\ \text{ou} \\ {}^tUU = I_n \end{array}\right|$ où $U = M_{\mathcal{B}}(u)$

Théorème 37.2 : Théorème spectral

Tout **endomorphisme auto-adjoint** est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u.

Toute **matrice symétrique réelle** est diagonalisable. On peut aussi dire :

$$\forall A \in S_n, \exists \left|\begin{array}{l} P \in \mathcal{O}(n) \\ D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \end{array}\right. \text{ tel que } A = PDP^{-1} = PD^tP \qquad (15.4)$$

Chapitre 16

Espaces Préhilbertiens complexes

16.1 Structure Préhilbertienne complexe

On se place dans $\mathbb{C}$ et on établit de nouveau le produit scalaire comme à la définition 35 page 64 du chapitre précédent. À une différence prêt, la symétrie est appelée **symétrie hermitienne**

Définition 38 : Produit scalaire

Le produit scalaire est défini comme suit :

$$\begin{array}{llll} (i) & \forall x \in E\backslash\{0\}, & \varphi(x,x) > 0 & \textbf{(définie positive)} \\ (ii) & \forall (x,y) \in E^2, & \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} & \textbf{(symétrie hermitienne)} \\ (iii) & \forall x \in E, & y \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire} & \textbf{(linéaire à droite)} \end{array}$$

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E. L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

16.2 Orthogonalité

Théorème 38.1 : Inégalité de Bessel

Si (e_i) est une base orthonormée : $\boxed{\sum_i |(e_i|x)|^2 \leq {N_2}^2(x)}$

16.3 Séries de Fourier

Méthode

Coefficients

Exponentiels $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,\mathrm{d}t$

Trigonométriques

- $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\,\mathrm{d}t$
- $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}t$

On note $\boldsymbol{\mathcal{C}_{2\pi}}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **2π-périodiques** et **continues** sur $[0, 2\pi]$.
On note $\boldsymbol{\mathcal{CM}_{2\pi}}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **2π-périodiques** et **continues par morceaux** sur $[0, 2\pi]$.

(**Attention**) Sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$, N_1, N_2 et N_∞ ne sont plus des normes, mais elles fonctionnent toujours de la même manière

Cette sous-section se base sur le théorème suivant :

Théorème 38.2

Pour toute fonction dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\boxed{N_2(f - f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

L'objectif des séries de Fourier est de « transposer »une fonction dans une base de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

On prendra pour bases $(e^{it}, e^{2it}, \cdots e^{int})$ ou $(cos(t), cos(2t), \cdots, cos(nt))$ par exemple, et grâce à un produit scalaire, on obtient la décomposition de notre fonction dans la base. C'est ainsi qu'on définit les coefficients :

Définition 39 : Coefficients exponentiels

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$\boxed{c_n(f) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\text{on est sur } \mathcal{CM}_{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-i\cdot n\cdot t} f(t)\,dt}$$

En effet : $c_n(f) = (e_n|f)$ avec $e_n = e^{int}$. Or le produit scalaire pour des fonctions est $(g|f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{g(t)}\, f(t)\,dt$, d'où $(e_n|f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{e^{int}}\, f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, f(t)\,dt$

On aurait très bien pu intégrer sur $[-\pi, \pi]$ au lieu de $[0, 2\pi]$. C'est ce qu'on fera plus tard avec les coefficients trigonométriques.

Propriétés

- $g : t \mapsto f(-t)$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$

- $f_a : t \mapsto f(t+a)$, $c_n(f_a) = e^{ina} c_n(f)$

Théorème 39.1 : Dérivée de f

$c_n(f') = in\, c_n(f)$
d'où, par récurrence : $\boxed{c_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k c_n(f)}$

Définition 40 : Coefficients trigonométriques

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\, dt} \text{ et } \boxed{b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\, dt}$$

Ici, c'est $\frac{1}{\pi}$ en facteur, car $N_2^2\left(\cos(n\bullet)\right) = \frac{1}{2}$

Propriétés

- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) + c_{-n}(f))$
- Si f est paire, alors $b_n = 0\ \forall n$
- Si f est impaire, alors $a_n = 0\ \forall n$

En général, on utilisera ces coefficients si f présente une parité.

Définition 41 : Série de Fourier

On appelle **série de Fourier** de f la série $\sum u_n$ où $\left|\begin{array}{lcl} u_0 & = & c_0(f)\, e_0 \\ u_n & = & c_n(f)\, e_n + c_{-n}(f)\, e_{-n} \end{array}\right.$
$S_n(f)$ est appelée **somme partielle de rang n de la série de Fourier**

Théorème 41.1 : Inégalité de Bessel

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_n(f)|^2 \leq N_2^2(f)$$

Théorème 41.2 : Théorème de convergence Parseval

Si f est une fonction de $\underline{\mathcal{CM}_{2\pi}}$, alors $\boxed{N_2\left(f - S_n(f)\right)_n}$ converge vers 0

Avec ce nouveau théorème, on trouve le cas d'égalité de l'inégalité de Bessel :

Théorème 41.3 : Égalité de Parseval

Si f est une fonction de $\underline{\mathcal{CM}_{2\pi}}$:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = N_2^2(f)}$$

En réel, cette égalité devient :

$$N_2^2(f) = \left(\frac{a_0(f)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n^2(f) + b_n(f)^2\right]$$

Théorème 41.4 : Calcul des Coefficients

Si on a la suite s_n telle que $\left|\begin{array}{l} s_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k \\ N_2(s_k - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right.$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \alpha_n$

Preuve 41.4.1
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|c_k(s_n - f)| \leq N_2(s_n - f)$. *Donc* $|c_k(f) - \alpha_k| \leq N_2(s_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *d'où, quand* $n \to +\infty$, $c_n(f) = \alpha_n$.

Théorème 41.5 : Théorème de convergence normale

Si f est $\underline{\mathcal{C}_{2\pi}}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux [a]

alors sa série de Fourier **converge normalement** et sa somme vaut f
sa somme partielle de sa série de Fourier S_n **converge uniformément**

a. $\mathcal{C}^1$ par morceaux c'est à dire que la dérivée est continue par morceaux, à ne pas confondre avec $f \in \mathcal{CM}$

Définition 42 : Noyau de Dirichlet

On appelle **noyau de Dirichlet**, et on note $D_p(t)$ la somme : $D_p(t) = \displaystyle\sum_{k=-p}^{p} e^{ikt}$

Théorème 42.1 : Noyau de Dirichlet

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier **converge simplement** sur $\mathbb{R}$.

Sa somme au point x, notée $\widetilde{f}(x)$ est égale à $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0^+}[f(x+h)+f(x-h)]$. Si f est **continue**, alors $\widetilde{f}(x)=f(x)$.

Cinquième partie

Équations Différentielles

Chapitre 17

Équations Différentielles Linéaire

Méthode

Résoudre une équation différentielle

Scalaire du 1^er^ ordre Méthode algorithmique, *cf.* preuve 1.1.1 page 73

Vectorielles du 1^er^ ordre

- Avec les coefficients constants
- Avec une matrice Diagonalisable
- Avec une matrice Trigonalisable

Scalaire du second ordre

Définition 1

I un $\mathbb{K}$-Algèbre
On appelle Équation différentielle l'équation $(\mathcal{L})$:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t) \tag{$\mathcal{L}$}$$

$\big(a_0, \cdots, a_n\big)$ est dans $(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}))^{n+1}$. L'ensemble des solutions de $\mathcal{L}$ dans I est noté $S_I(\mathcal{L})$

17.1 Équations Différentielles Scalaires d'ordre 1

Théorème 1.1 : Solution de l'équation différentielle scalaire

Si $y' = a(t)y + b(t)$, alors $S_I(\mathcal{L})$ est un sous-espace affine

Preuve 1.1.1 (Algorithmique) *Par hypothèse, $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, donc $a(t)$ admet* *une primitive* $P(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\, ds$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(e^{-P(t)}\, y(t)\right) &= \quad -P'(t) \quad e^{-P(t)} y(t) \;+ e^{-P(t)} \qquad \overbrace{\left(a(t)\, y(t) + b(t)\right)}^{y'(t)} \\
&= \overbrace{-a(t)}^{} \quad y(t)\, e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \left(a(t)\, y(t) + b(t)\right) \\
&= e^{-P(t)} b(t)
\end{aligned}$$

Si c'est intégrable, $\exists\, C$ *tel que :*

$$\begin{aligned}
e^{-P(t)}\, y(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} \left(e^{-P(u)}\, b(u)\, du + C\right) \\
y(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} \left(e^{-P(u)}\, b(u)\, du + C\right) e^{P(t)}
\end{aligned}$$

est solution de l'équation.

17.2 Équations Différentielles Vectorielles d'ordre 1

Définition 2 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \qquad (\mathcal{L})$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathcal{L}(F)\right)$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$. Le **Problème de Cauchy** revient à trouver, pour tout (t_0, x_0) dans $I \times F$, une solution φ de $(\mathcal{L})$

(**Attention**) a est une application de I dans $\underline{\mathcal{L}(F)}$. Donc $a(t)$ est une application linéaire, pas un scalaire

Théorème 2.1 : Théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire

Soit l'équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \qquad (E)$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathcal{L}(F)\right)$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall (t_0, x_0) \in (I, F), \exists!\, \varphi \text{ telle que } \left|\begin{array}{l} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array}\right.$$

Système fondamental

Définition 3 : Système Fondamental

Un système fondamental de solutions est une base dans l'espace $S_I(\mathcal{H})$ des solutions.

Propriétés

- Si $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ est une base de $S_I(\mathcal{L})$, alors, $\forall t \in I$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$ est une base dans F

Définition 4 : Wronskien

Le Wronskien est le déterminant d'un système fondamental de solution.

(**Wronskien**) $$W(t) = \det_{\mathcal{B}}\Big(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\Big)$$

(**Attention**) Le Wronskien est une fonction de t

Propriétés

- $W'(t) = \mathrm{tr}(a)\, W(t)$
- $W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(s)\, ds}$

Théorème 4.1 : Variation des constantes

Soit $\Big(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\Big)$ une base de $S_I(\mathcal{H})$.

Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$, $\begin{cases} \text{Il existe une \underline{unique} famille } \overbrace{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}^{\text{dans } \mathcal{C}^1(I,F)} \text{ telle que } \varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi_i \\ \varphi \in S_I(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in I, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\, \varphi_i(t) = b(t)} \end{cases}$

Pour une équation à coefficients a et b constants $x' = ax + b(t)$, la solution générale est

$$\boxed{y(t) = e^{(t-t_0)a} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} b(s)\, ds}$$

17.3 Équations Différentielles linéaires du second ordre

Définition 5 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

($\mathcal{L}$) $$y''(t) + a(t)y'(t) + a(t)y(t) = \gamma(t)$$

L'équation homogène est

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \qquad (\mathcal{H})$$

On note $f(r) = r^2 + a \times r + b$ son polynôme caractéristique

17.3.1 Coefficients constants

Théorème 5.1 : Résolution de l'équation

Dans le cas de l'équation homogène ($\mathcal{H}$), on calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution $y(t)$ pour l'équation homogène :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_\pm = \alpha \pm \beta$	$y(t) = e^{\alpha t}(A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t))$
$\Delta < 0$	$r_\pm = \alpha \pm i\beta$	$y(t) = e^{\alpha t}(A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t))$
$\Delta = 0$	r double	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Théorème 5.2

Si dans ($\mathcal{L}$), $\gamma(t) = P(t)e^{\lambda t}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, alors on peut donner une solution :

$$t \mapsto t^{\omega(\lambda)} Q(t)e^{\lambda t} \qquad (17.2)$$

où $\omega(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine du polynome caractéristique de f et $Q \in \mathbb{C}[X]$ est de même degré que P.

17.3.2 Cas général

Théorème 5.3 : Théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire

Soit l'équation différentielle

$$y''(t) + a(t)y'(t) + a(t)y(t) = \gamma(t) \qquad (\mathcal{L})$$

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall \big(t_0, (x_0, x_0')\big) \in (I, \mathbb{K}^2), \exists!\, \varphi \text{ telle que } \left|\begin{array}{l} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x_0' \end{array}\right.$$

Preuve 5.3.1

Le théorème est une conséquence du théorème 2.1 si on résout plutôt $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' =$

$$\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}(t)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$$

Définition 6 : Wronskien

Si u et v sont des I-solutions, le **Wronskien** est l'application définie par

(**Wronskien**)
$$W = uv' - u'v$$

Propriétés

Dans l'équation $(\mathcal{H}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$,

- $W + aW = 0$
- (u, v) libre $\Leftrightarrow \exists t_0$ tel que $W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t, W(t) \neq 0$

Théorème 6.1 : Méthode de variation des constantes

En connaissant (u, v) un système fondamental de solutions, on cherche une solution de la forme $y(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)u(t)$. On détermine c_1 et c_2 avec :

(**17.3**)
$$c_1'\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + c_2'\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Chapitre 18

Équations Différentielles non linéaires

18.1 Équations autonomes

Définition 7 : Champ de Vecteur

On appelle **champ de vecteurs** l'application qui à un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe $\overrightarrow{V(M)}\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} U \in \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{C}^1} & \mathbb{R}^2 \\ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & \overrightarrow{V(M)}\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 8 : Système Autonome

On appelle **système autonome** associé au champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ le système différentiel

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \overrightarrow{V(M)}}$$

Le mot *autonome* témoigne de la non-dépendance en t du champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$

Théorème 8.1 : Cauchy-Lipshitz (*admis*)

Avec les données précédentes, pour tout couple $\big(t_0,(x_0,y_0)\big) \in (I \times U)$, il existe une unique I-solution maximale $\varphi : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, telle que $\left|\begin{array}{lcl} x(t_0) & = & x_0 \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$

Une **solution maximale** est une solution qui n'est la restriction d'aucune autre. Son intervalle de définition est l'intervalle maximal.

18.2 Équations non autonomes

Dans cette section on appelle **équation différentielle** :

$$(\mathcal{E}) \qquad x' = f(t, x)$$

où f est une fonction de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

Théorème 8.2 : Cauchy-Lipshitz (*admis*)

U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^2$, et en reprenant l'équation $(\mathcal{E})$:

$$\forall (t_0, x_0) \in U, \exists! \, \varphi \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ soit } \textbf{solution maximale} \text{ de l'équation } (\mathcal{E}) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Chapitre 19

Fonctions de plusieurs variables

Méthode

Étude d'une fonction à deux variables

Passer en polaire

Dans ce chapitre, on se place dans (E, N) et (F, P), des espaces vectoriels normés de dimension finie. U est un ouvert de E

$$\begin{array}{cccc} f & : & U & \to & F \\ & & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

19.1 Différentielle, dérivée

19.1.1 Différentielle

Définition 9 : Différentielle

Il existe au plus un élément φ de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

φ est appelée la **différentielle** de f. On la note $df(a)$

Remarque : a et h sont des vecteurs. Donc sous la forme $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. De plus, $\varphi(h)$ est une application linéaire : $\varphi(h) \in \mathcal{L}\big(E, F\big)$

19.1.2 Dérivée selon un vecteur

Définition 10 : Dérivée en un point

On note $\varphi_h : t \mapsto f(a+th)$.
f admet une dérivée en a selon h si $\underline{\varphi_h \text{ est dérivable en } 0}$.
Alors, on note cette dérivée $D_h f(a) = \varphi_h'$. Si elle existe :

$$\boxed{D_h f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}}$$

On a alors la dérivée pour tout a définie par la fonction $D_h f : a \mapsto D_h f(a)$

Définition 11 : Application de classe $\mathcal{C}^1$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si $\forall j \in [1, n], D_j f$ existe et est continue sur U

Définition 12 : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

f (bijective) est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** si elle et son inverse sont $\mathcal{C}^k$. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(U, V) \\ f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, U) \end{cases}$$

Définition 13 : Jacobienne, Jacobien

On définit la **Jacobienne** $\mathcal{J}_a(f)$ comme la matrice de terme général $j_{i,j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = D_j f_i(a)$.
Le **Jacobien** est le déterminant de cette matrice.

Exemple : La Jacobienne de la fonction polaire (qui à (r, θ) associe $(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$) est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$. Son Jacobien est donc $r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r$

19.2 Inversion locale

Théorème 13.1 : Théorème d'inversion locale ***(admis)***

$$f \in \mathcal{C}(U, F) \text{ injective est } \mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall a \in U, df(a) \text{ isomorphisme de } E \text{ dans } F$$

19.3 Complément sur les courbes planes

Théorème 13.2 : Formule de Green-Riemann

Un compact D délimitée par un une courbe plane Γ positivemment orientée et $\mathcal{CM}^1$. Soient P et Q deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert dans lequel Γ est tracé. On admet la formule de Green-Riemann :

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right](x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \tag{19.2}$$

Sixième partie

Géométrie

19.4 Arcs Paramétrés

Définition 1 : Arc Paramétré

On appelle **arc paramétré** de classe $\mathcal{C}^k$ un couple (I, f) avec $\begin{cases} I & \text{un intervalle de } \mathbb{R} \\ f & \text{une application de } \mathcal{C}^k(I, E) \end{cases}$

Définition 2

Quelques autres définitions :

Valeur Régulière	t_0	— $f'(t_0) \neq 0$
Valeur Birégulière	t_0	— $\left(f'(t_0), f''(t_0)\right)$ est libre
Abscisse Curviligne	s	— $s' = N_2\left(f'(t)\right)$ sur un intervalle
Paramétrage normal	(J, g)	—

Exemple d'abscisse curviligne : $s : t \mapsto \sinh(t)$ car $N_2(s(t)) = \sqrt{\int |\sinh(t)|^2} = \sinh'(t) = \cosh(t)$. L'avantage d'une abscisse curvligne est de pouvoir simplifier l'étude d'une courbe.

19.5 Courbes Planes

19.5.1 En polaire

Définition 3 : Fonction $\arg$

$\boxed{\theta \mapsto e^{i\theta} \text{ est une bijection de }]-\pi, \pi[\text{ sur } \mathbb{U}\backslash\{-1\}}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$
Sa réciproque est l'application $u \mapsto \arg(u)$
Si on prend $u \in \mathbb{U}$, en notant $u = x + iy$, alors $\arg(u) = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+1}\right)$

Théorème 3.1 : Théorème du Relèvement

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{U})$ (avec $n \neq 0$).
$\exists\, \theta \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ tel que $f(t) = e^{i\theta(t)}$. θ est appelé **relèvement** de f.

Preuve 3.1.1 *Si elle existe, θ n'est pas unique ($t \mapsto \theta(t) + 2\pi$ convient aussi).*
Donc $f'(t) = i\theta' f(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = -i\dfrac{f'(t)}{f(t)}$.
On peut alors intégrer : $\theta(t) = C - i\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$, *et il ne reste plus qu'à prouver l'existence en ayant cette expression de* $\theta(t)$

Définition 4 : Tangente

Si θ est une valeur régulière, on note V l'angle $\left(\overrightarrow{u_\theta}, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_\theta}}{\mathrm{d}\theta}\right)$, et on définit $\boxed{\tan(V) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}}$

19.5.2 Étude d'une courbe paramétrée

Méthode

Étude de courbes paramétrées

Quelques conseils :

- On essaye, si possible, de **passer en polaire**
- Ne pas oublier de vérifier les **ensembles de définition**
- Lors de l'étude **au voisinage d'un point**, il suffit d'étudier les dérivées successives grâce à un développement limité

On a l'expression de x et y en fonction de t : $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Pour étudier la courbe :

1. Ensemble de **définition** $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \bigcup \mathcal{D}_g$
2. Étude des **variations** : on étudie x', y' et $\dfrac{y'}{x'}$
3. **Branches infinies**
   - $x = \lim f$ ou $y = \lim g$ sont des asymptotes (avec $\lim f$ et $\lim g$ des limites finies)
   - Si, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ les deux fonctions tendent simultanément vers l'infini, on **étudie** $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y}{x}$

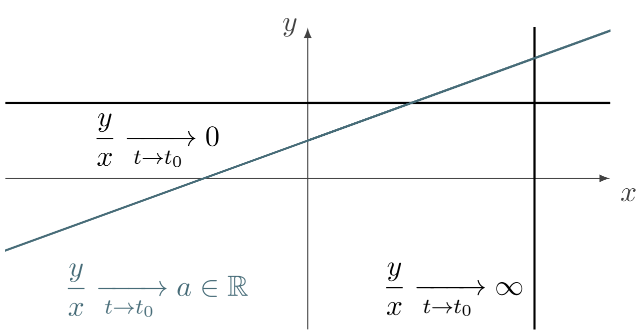


Figure 19.1 – Différents types d'asymptotes en fonction de $\dfrac{y}{x}$

Dans le cas où $\dfrac{y}{x} \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R}$, on peut déterminer b de l'équation $y = ax + b$ en examinant $y - ax$

Septième partie

Annexe

19.6 Équivalences

Pour une définition de l'équivalence, *cf.* définition 4 page 9

Formule de Stirling $\boxed{n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

Équivalence de ln $\dfrac{\ln(u)}{t^\alpha} \sim t^{\frac{\alpha+1}{2}}$

Équivalents usuels en 0

$\sin(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cos(u)-1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{u^2}{2}$	$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$
$\sinh(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cosh(u)-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$	$e^u-1 \underset{0}{\sim} u$

19.7 Trigonométrie

19.7.1 Définition

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos x &=& \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x &=& \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{array}\right. \tag{19.3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cosh x &=& \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ \sinh x &=& \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2} \end{array}\right. \tag{19.4}$$

19.7.2 Addition / Produit

$$\begin{array}{r|r} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b & \cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b & \cos(a+b)-\cos(a-b) = 2\sin a\sin b \\ \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b & \sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b & \sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b \end{array} \tag{19.5}$$

19.7.3 Dérivation

Dérivées des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \tan' x &= \frac{1}{1+\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \\ \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

19.7.4 Formule de Moivre

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx) \tag{19.6}$$

Généralités

Conjugué $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Convexité La fonction **exponentielle** est **convexe**, la fonction **logarithme** est **concave**

Inégalités

Modules	$\left\|\left\|\sum_i x_i\right\|\right\| \leq \sum_i \|\|x_i\|\|$	
Module d'intégrales	$\left\|\int_I f\right\| \leq \int_I \|f\|$	(14.2)
Inégalité de la Moyenne	$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$	(12.2)

19.8 Formules usuelles

$$a^k - b^k = (a-b)\left(\sum_{p=0}^{k-1} a^p b^{k-1-p}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

19.9 Astuces

Primitives de 1 Dans une IPP, on peut primitiver 1 par $1+x$ pour enlever un terme au dénominateur. *Exemple :* $(\ln(1+x))^n$

Fontion k-lipschitzienne Il suffit de montrer que $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\boxed{|f'(t)| \leq k}$

Inverse d'une Matrice 2×2 Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $M^{-1} = \frac{1}{da - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dérivée de a^x On a $a^x = e^{x\ln(a)}$, donc sa dérivée est $\boxed{\ln(a) \times a^x}$

Liste des acronymes

DL	Développement Limité. 32
LCI	Loi de Composition Interne. 15
s-ep	sous-espace propre. 21, 22
SATP	Série À Termes Positifs. 3, 33, 57, 60

Index

Abscisse curviligne, 84
Accroissements finis, 55
Adhérence, 30
Adjoint, 66
Arc paramétré, 84
Autoadjoint, 66
Automorphisme orthogonal, 66

Banach
- Espace, 28

Bernoulli, 46

Cantor, 38
Cauchy-Lipshitz, 74, 76, 78, 79
Cayley-Hamilton, 24
Césaro, 34
$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, 81
Compact, 28
Complet, 28
Complexe, 11
Connexe par arcs, 29
Variation des Constantes, 75
Convergence
- dominée, 61
- série, 32

Convexe, 29
Covariance, 46

Dérivabilité, 53
Développement en Série Entière, 58
Diagonalisable, 23
Différentielle, 80
Dirichlet
- Noyau, 70

Diverge
- grossièrement, 32

Droite
- stable, 21

Écart-type, 45
Ensemble
- dénombrable, 37
- équipotent, 37
- fini, 37

Équation Différentielle, 73
- du 2e ordre, 75
- scalaire, 73
- vectorielle, 74

Équivalence, 9
Espace
- Normé, 27
- Préhilbertien, 64, 67

Espace probabilisable, 41
Espace probabilisé, 42
Espérance, 44
Euler, 18

Famille
- sommable, 38, 39

Fermé, 30
Série de Fourier, 69
Fubini, 52

Gamma, 62
Grassman, 21
Green-Riemann, 82
Groupe, 15
- de Klein, 15
- monogène, 16
- produit, 15

Heine, 28

Inégalité
- de Bessel, 65, 67, 69
- de Cauchy-Schwarz, 45, 65
- triangulaire, 27

Intérieur, 30
Isomorphisme, 17

Jacobien(ne), 81

k-lipschitzienne, 88

Module, 11

Moment(Probabilités), 45
Monogène, 16
Morphisme
de groupe, 17

Nilpotent, 18
Norme, 27
Euclidienne, 27

Ouvert, 30

PARSEVAL
théorème de convergence, 70
égalité, 70
Polynôme
caractéristique, 22
d'un endomorphisme, 24
Polynôme
caractéristique(Équation différentielle), 76
Primitive, 54
Probabilité, 42
Problème de CAUCHY, 74
Procédé
d'Orthonormalisation de SCHMIDT, 65
Produit scalaire, 64, 67

Rayon de convergence, 56
Relèvement, 84

SATP, 33
Série
alternée, 35
Solution
maximale, 78
Sous-espace
propre, 21
Sous-groupe, 15
engendré, 16
STIRLING, 87
Système
autonome, 78
fondamental de solutions, 74
Système complet(probabilités), 42

Tangente, 85
Taylor
(Formules), 55
Lagrange, 55
Laplace, 55
Young, 55
Tribu, 41
TSSA, 35

univers, 41

Valeur
birégulière, 84
propre, 21, 22
régulière, 84
Variance, 45
Vecteur
propre, 21, 22
Champ de Vecteur, 78

WEIERSTRASS
approximation, 50
Wronskien, 75, 77