

COURS DE PRÉPA

Mathématiques

Écrit par
Alexandre JOUANDIN

Année
2013—2015



4 mars 2015

Table des matières

I	Première année	7
1	Géométrie	8
1.1	Équations générales	8
2	Calculs algébriques	9
2.1	Somme des termes d'une suite arithmétique	9
2.2	Coefficients binomiaux	10
3	Suites	11
3.1	Comparaison de suites	11
3.2	Suites de Cauchy	12
4	Nombres complexes	13
4.1	Plan complexe	13
4.2	Nombres complexes de module 1	13
II	Structures algébriques usuelles	15
5	Groupes et sous-groupes	17
5.1	Définition d'un groupe	17
5.2	Produit fini de groupes	17
5.3	Sous-groupe	17
5.4	Morphismes de groupes	19
5.4.1	Définition	19
5.4.2	Propriétés d'un morphisme de groupe	19
5.4.3	Isomorphismes	19
5.5	Groupes monogènes et cycliques	20
5.6	Ordre d'un élément dans un groupe	20
5.7	Classe d'équivalence	20
5.8	Idéaux de \mathbb{Z}	21

III	Algèbre	22
6	Fonctions convexes	23
6.1	Parties convexes d'un espace vectoriel réel	23
6.1.1	Barycentre	23
6.1.2	Partie convexe	23
6.2	Fonctions convexes d'une variable réelle	25
6.3	Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	27
6.3.1	Dérivabilité et convexité	27
6.3.2	Position de la tangente	28
6.3.3	Exemples d'inégalités de convexité	28
7	Réduction des Endomorphismes	29
7.1	Généralités	30
7.1.1	Matrices carrées semblables	30
7.1.2	Sous-espace stable par un endomorphisme	31
7.2	Éléments propres d'un endomorphisme	31
7.2.1	Éléments propres	32
7.2.2	Éléments propres en dimension finie	32
7.3	Polynôme Caractéristique	34
7.4	Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	35
7.5	Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	36
7.6	Endomorphismes nilpotents	36
7.6.1	Définition	36
7.6.2	Propriétés en dimension finie	36
7.7	Polynômes d'un endomorphisme	37
7.8	Lemme de décomposition des noyaux	38
7.9	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	38
7.10	Endomorphismes à polynôme minimal scindé	38
8	Topologie des espaces vectoriels normés	39
8.1	Normes et espaces vectoriels normés	39
8.1.1	Rappels	39
8.1.2	Norme	40
8.1.3	Distance	40
8.1.4	Boules	41
8.2	Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	41
8.3	Comparaison des normes	41
8.4	Complets	41
8.5	Parties compactes d'un espace normé	42
8.6	Applications continues sur une partie compacte	43
8.7	Connexité par arcs	43
8.7.1	Convexité	43
8.7.2	Connexité	44
8.8	Topologie	46
IV	Analyse	49
9	Séries	50
9.1	Définitions	50

9.2	Séries à termes positifs	51
9.3	Complément sur les séries numériques	51
9.3.1	Règle de d'ALEMBERT	51
9.3.2	Séries alternées	52
9.3.3	Comparaison série intégrale	52
9.3.4	Comparaison des Série À Termes Positifs (SATP)	53
9.4	Hors programme	54
10	Familles sommables de nombres complexes	56
10.1	Dénombrement	56
10.2	Familles sommables	57
10.2.1	Pour les réels positifs	57
10.2.2	Pour les réels et les complexes	58
11	Probabilités sur un univers au plus dénombrable	60
11.1	Espace probabilisé	60
11.2	Conditionnement	62
11.3	Indépendance	62
12	Variables aléatoires discrètes	63
12.1	Espérance	63
12.1.1	Définitions	63
12.1.2	Propriétés	63
12.2	Variance	64
12.2.1	Moment	64
12.2.2	Variance et écart-type	64
12.2.3	Covariance	65
12.3	Lois usuelles	65
12.3.1	Loi binomiale	66
12.4	Fonctions génératrices	66
13	Suites de fonctions	67
13.1	Convergence de suites de fonctions	67
13.2	Convergence des Séries	69
13.3	Propriétés de la somme	70
13.4	Séries doubles	70
14	Séries Entières	72
14.1	Généralités	72
14.1.1	Rayon de Convergence	73
14.1.2	D'ALEMBERT	73
14.2	Série entière d'une variable réelle	74
14.2.1	Primitivation	74
14.2.2	Dérivation	74
14.3	Fonctions développables en série entière	75
14.4	Propriétés de la somme	75
15	Calcul Différentiel et Intégral	77
15.1	Dérivation	77
15.2	Intégration	78
15.3	Primitive	78
15.4	Accroissements finis	79

15.4.1	Cas réel	79
15.4.2	Cas vectoriel	79
15.5	Formules de Taylor	79
16	Intégrales sur un intervalle	82
16.1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	83
16.1.1	Définition	83
16.1.2	Propriétés de l'intégrale	83
16.2	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	84
16.3	Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	85
16.4	Intégration sur un intervalle quelconque	86
16.4.1	Sur un intervalle semi-ouvert	86
16.4.2	Sur un intervalle de la forme $]a, b[$	86
16.4.3	Sur un intervalle I quelconque	87
16.5	Intégration des relations de comparaison	88
16.6	Passage à la limite sous l'intégrale	89
16.6.1	Convergence dominée	89
16.6.2	Intégration terme à terme	89
16.7	Continuité d'une intégrale à paramètre	89
16.8	Dérivation d'un intégrale à paramètre	90
16.9	Intégrabilité (Ancienne version)	90
16.10	Intégrales classiques	91
16.11	Espaces vectoriels normés de fonction intégrables	91
16.12	Fonction Gamma	92
16.13	Intégrales doubles	93
17	Espaces Préhilbertiens réels	94
17.1	Produit scalaire	94
17.2	Orthogonalité	95
17.3	Automorphismes orthogonaux	96
18	Espaces Préhilbertiens complexes	98
18.1	Structure Préhilbertienne complexe	98
18.2	Orthogonalité	98
18.3	Séries de FOURIER	98
V	Équations Différentielles	104
19	Équations Différentielles Linéaire	105
19.1	Équations Différentielles Scalaire s d'ordre 1	105
19.2	Équations Différentielles Vectorielles d'ordre 1	106
19.3	Équations Différentielles linéaires du second ordre	107
19.3.1	Coefficients constants	108
19.3.2	Cas général	108
20	Équations Différentielles non linéaires	110
20.1	Équations autonomes	110
20.2	Équations non autonomes	111

21 Calcul différentiel	112
21.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	112
21.2 Différentielle	113
21.2.1 Application différentiable	113
21.2.2 Jacobien, Jacobienne	113
21.3 Opérations sur les applications différentiables	113
21.4 Cas des applications numériques	114
21.4.1 Gradient	114
21.4.2 Représentation des formes linéaires	114
21.4.3 Point critique	115
21.5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	115
21.6 Applications de classe \mathcal{C}^1	115
21.7 Applications de classe \mathcal{C}^k	115
22 Fonctions de plusieurs variables	116
22.1 Différentielle, dérivée	116
22.1.1 Différentielle	116
22.1.2 Dérivée selon un vecteur	116
22.2 Inversion locale	117
22.3 Complément sur les courbes planes	117
VI Géométrie	119
22.4 Arcs Paramétrés	120
22.5 Courbes Planes	120
22.5.1 En polaire	120
22.5.2 Étude d'une courbe paramétrée	121
VII Annexe	123
22.6 Équivalences	124
22.7 Trigonométrie	124
22.7.1 Définition	124
22.7.2 Addition / Produit	124
22.7.3 Dérivation	124
22.7.4 Formule de MOIVRE	125
22.8 Formules usuelles	125
22.9 Espaces vectoriels	125
22.10 Astuces	125
Liste des acronymes	127
Index	128

Première partie

Première année

Chapitre 1

Géométrie

1.1 Équations générales

Type	Équation
Droite	$ax + by + c = 0$
Plan	$ax + by + cz + d = 0$
Cercle	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
Sphère	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Chapitre 2

Calculs algébriques

2.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Définition 1

Soit I un ensemble fini, et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes.

La somme des x_i est notée $\sum_{i \in I} x_i$

Le produit des x_i est noté $\prod_{i \in I} x_i$

Théorème 1.1 : Somme des entiers de 1 à n

Pour tout n de 1 à n :

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n-1)}{2}$$

Preuve 1.1.1

$$(2.2) \quad \begin{array}{rcl} S & = & 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n \\ + S & = & n + n - 1 + \cdots + 2 + 1 \\ \hline 2S & = & n + 1 + n + 1 + \cdots + n + 1 + n + 1 \end{array}$$

$$d'où 2S = n \times (n + 1), \text{ et } S = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Théorème 1.2 : Somme des premières puissances

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$(2.3a) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(2.3b) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \end{aligned}$$

Les démonstrations de ces formules se font par récurrence (en connaissant le résultat), ou en primitivant.

2.2 Coefficients binomiaux

Définition 2

Pour E un ensemble fini de n éléments, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-parties de E à p éléments.

$$(2.4) \quad \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Chapitre 3

Suites

Définition 3 : Borne supérieure

On appelle **borne supérieure** d'une partie F d'un ensemble ordonné fini E le **plus petit** des majorants de F .

En d'autres termes,

$$(3.1) \quad a = \sup F \Leftrightarrow \forall y \in F, \left[a \leq y \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \leq y) \right]$$

Théorème 3.1 : Théorème de la suite monotone

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si (u_n) est majorée, alors elle converge vers sa borne supérieure.

Sinon, si (u_n) n'est pas majorée, alors elle admet $+\infty$ pour limite.

3.1 Comparaison de suites

Définition 4 : Suites équivalentes

Deux suites u_n et v_n sont dites **équivalentes** en l'infini s'il existe une suite w_n tendant vers 1 en l'infini telle que $u_n = w_n \times v_n$.

Autrement dit :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \exists w_n \xrightarrow{+\infty} 1 \text{ tq } u_n = w_n v_n$$

Définition 5 : $O(\dots)$ et $o(\dots)$

Si x_n est une suite de $(E, N)^{\mathbb{N}}$ et (α_n) une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(3.3)

$$\begin{aligned} x_n = O(\alpha_n), \text{ si } \forall M \in \mathbb{R}^+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq M|\alpha_n| \\ x_n = o(\alpha_n), \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq \varepsilon|\alpha_n| \end{aligned}$$

Définition 6 : $O(\dots)$ et $o(\dots)$ dans \mathbb{R}

Si $(\alpha_n)_n$ est une suite à valeurs dans \mathbb{R}^* ,

(3.4)

$$\begin{aligned} x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \text{ est bornée.} \\ x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

(ATTENTION)

Une suite ne peut pas, à notre niveau, être ~ 0 , en $o(0)$ ou $O(0)$, car la définition dirait que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

3.2 Suites de Cauchy

Définition 7 : Suite de CAUCHY

Une suite $(x_n)_n$ dans (E, N) est dite de Cauchy si

(3.5)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_0 \implies \boxed{N(x_{n+p} - x_n) < \varepsilon}$$

Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 Plan complexe

Définition 8 : Corps complexe $(\mathbb{C}, +, \times)$

Un **nombre complexe** est un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} , c'est un corps muni des lois suivantes :

Addition $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
de neutre $(0, 0)$

Multiplication $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
de neutre $(1, 0)$

Théorème 8.1

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps (*cf. tableau 4.1 page 16 pour la définition d'un corps*)

Définition 9 : Module

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle **module** la valeur $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

4.2 Nombres complexes de module 1

Définition 10

On note \mathcal{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Le disque unité est l'ensemble de ses points.

Propriétés

- \mathcal{U} est stable par le produit \times
- $z \in \mathcal{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$

Deuxième partie

Structures algébriques usuelles

		Groupe	Groupe Abélien	Anneau	Corps
Loi $(+/*)$	Neutre e (ou 0)	✓	✓	✓	✓
	Assossiative	✓	✓	✓	✓
	Symétrique (admet a^{-1})	✓	✓	✓	✓
	Commutative		✓	✓	✓
Loi \times	Neutre 1			✓	✓
	Associative			✓	✓
	Distributive de la loi $+$			✓	✓
	Commutative				✓
	Inversible				✓

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des définitions

Chapitre 5

Groupes et sous-groupes

5.1 Définition d'un groupe

Définition 1 : Groupe

On appelle **groupe** le couple $(G, *)$ où G est un ensemble muni d' $*$, une Loi de Composition Interne (LCI) associative, symétrique, et admettant un neutre.

5.2 Produit fini de groupes

Définition 2 : Groupe Produit

Soient $(G, *)$ et (G', \circ) deux groupes.
Le groupe $(G \times G', \square)$ tel que

$$(x, x') \square (y, y') = (x * y, x' \circ y')$$

est un groupe appelé **groupe produit** de G et G'

Exemple : Groupe de KLEIN

Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est appelé **groupe de KLEIN**. C'est un groupe produit, il n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et il a la spécificité de ne pas être cyclique.

5.3 Sous-groupe

Définition 4 : Sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe, et soit H une partie de G

On dit que H est un **sous-groupe** de G si, muni de la LCI $*$, H est un groupe stable par $*$.

Théorème 4.1 : Caractérisation d'un sous-groupe

Avec les notations précédentes, H est un sous-groupe de G si :

- H n'est pas vide
- $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$.

En général, pour vérifier que H est non vide, on vérifie que le neutre e de G est aussi dans G .

Théorème 4.2 : Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes.

Alors $H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i$ est un sous-groupe.

Preuve 4.2.1 Avec les notations précédentes, montrons que H est un sous-groupe :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, e \in H_i &\implies e \in H \\ \forall (x, y) \in H^2, \forall i \in \mathbb{N}, (x, y) \in H_i^2, \text{ donc } x * y^{-1} \in H_i &\implies x * y^{-1} \in H \end{aligned}$$

Ainsi, H respecte les propriétés de caractérisation d'un sous-groupe, donc H est un sous-groupe. \square

Définition 5 : Sous-groupe engendré

Soit G un groupe, et soit A une partie de G .

L'intersection des sous-groupes de G contenant A est le plus petit sous-groupe contenant A .

On le note $\langle A \rangle$, et on dit que c'est le **sous-groupe engendré** par A .

Quand $A = \{a\}$ est une partie à un seul élément, on dit que $\langle a \rangle$ est un **groupe monogène**

Théorème 5.1 : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Pour tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$

Preuve 5.1.1 Soit H un sous-groupe. Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que H contient au moins un entier.

Soit n le plus petit entier de H . Il convient de dire que $n\mathbb{Z} \in H$.

Soit m un entier quelconque de H . Effectuons sa division euclidienne par n :

$$m = nq + r \quad 0 \leq r < n$$

$$nq \in H, m \in H \implies \boxed{r \in H}$$

Or n étant le plus petit entier dans H , r dans H étant inférieur à n , $r = 0$, donc $m = nq$ \square

5.4 Morphismes de groupes

5.4.1 Définition

Définition 6 : Morphisme de groupe

On appelle **morphisme** d'un groupe $(G, *)$ à un groupe (H, \times) l'application f telle que

$$(5.1) \quad \forall (x, y) \in G^2, f(x * y) = f(x) \times f(y)$$

5.4.2 Propriétés d'un morphisme de groupe

Théorème 6.1 : Image et image réciproque d'un sous-groupe

L'image d'un sous-groupe par un morphisme est un sous groupe.

L'image réciproque d'une sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe

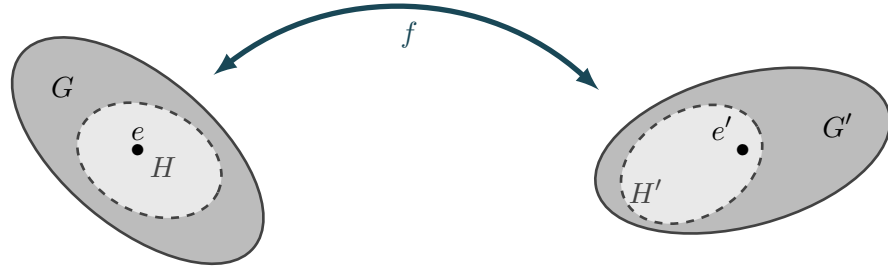


FIGURE 5.1 – Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme f

Théorème 6.2 : Condition d'injectivité d'un morphisme

Soit f un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans (H, \times) . Alors :

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker } f = \{e\}$$

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im } f = H$$

5.4.3 Isomorphismes

Définition 7 : Isomorphisme

Un morphisme de groupe bijectif est appelé **isomorphisme**

Théorème 7.1 : Réciproque d'un isomorphisme

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

5.5 Groupes monogènes et cycliques

5.6 Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 8 : Éléments nilpotents

Un élément est **nilpotent** si, composé par lui même, il peut être nul :

$$(5.2) \quad \begin{cases} a \text{ nilpotent} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^+ \text{ tel que } a^p = 0$$

5.7 Classe d'équivalence

Définition 9 : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence \mathcal{R} est une relation binaire caractérisée de la manière suivante :

$$(5.3) \quad \left| \begin{array}{ll} \forall x \in E, & x\mathcal{R}x & \text{(Réflexivité)} \\ \forall (x, y) \in E^2, & x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x & \text{(Symétrie)} \\ \forall (x, y, z) \in E^3, & (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z & \text{(Transitivité)} \end{array} \right.$$

Définition 10 : Relation d'ordre

Une relation d'ordre \mathcal{R} est également une relation binaire. Elle se caractérise de la manière suivante :

$$(5.4) \quad \left| \begin{array}{ll} \forall x \in E, & x\mathcal{R}x & \text{(Réflexivité)} \\ \forall (x, y) \in E^2, & (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y & \text{(Anti-symétrie)} \\ \forall (x, y, z) \in E^3, & (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z & \text{(Transitivité)} \end{array} \right.$$

(ATTENTION) Bien savoir ce que signifient Symétrie et Anti-symétrie

5.8 Idéaux de \mathbb{Z}

Définition 11

Un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la classe des éléments ayant tous le même reste par la division euclidienne par n .

E.g. : Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, l'élément $\bar{1}$ est la classe des éléments de \mathbb{Z} ayant tous le même reste $\bar{1}$ dans leur division par 3.

Théorème 11.1 : Indicatrice d'EULER

C'est la fonction φ telle que

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\})$$

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 6

Fonctions convexes

6.1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

6.1.1 Barycentre

Définition 1 : Barycentre

Soit $(x_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille finie de points pondérés telle que la somme des coefficients $\sum_i \alpha_i \neq 0$. On appelle **barycentre** des points x_i le point G tel que :

$$(6.1) \quad G = \frac{\sum_i \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}$$

Rajouter les propriétés des barycentres

6.1.2 Partie convexe

La partie suivante est copiée de la sous-section 8.7.1 page 43 :

Définition 2 : Convexe

Un ensemble E est **convexe** si :

$$(6.2) \quad \forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], \boxed{tx + (1 - t)y \in E}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

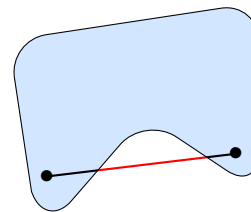


FIGURE 6.1 – Un ensemble non convexe

Théorème 2.1 : Intersection de convexes

L'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe.

Remarque : Ce théorème est même valable pour une famille infinie.

Théorème 2.2 : Convexe dans \mathbb{R}

I de \mathbb{R} est convexe si et seulement si I est un intervalle de \mathbb{R}

Théorème 2.3 : Caractérisation à l'aide de barycentres

Une partie X de E est convexe si et seulement si le barycentre G de toute famille pondérée finie $(x_i, \alpha_i)_i$ telle que $\alpha_i \geq 0 \forall i$ appartient à X :

$$(6.3) \quad G \in X$$

(Bien sûr, on a toujours $\sum \alpha_i \neq 0$.)

6.2 Fonctions convexes d'une variable réelle

La définition suivante est copiée de la définition 30 page 43.

Définition 3 : Fonction convexe

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite **convexe** si :

$$(6.4) \quad \forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[, \boxed{f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)}$$

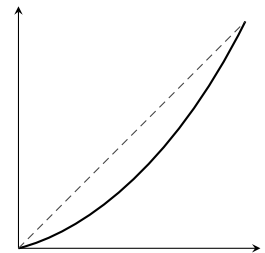


FIGURE 6.2 – Une fonction convexe

Théorème 3.1 : Position relative du graphe

Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de son graphe est situé en-dessous de la corde correspondante.

Définition 4 : Épigraphe

Soit f une fonction de graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$.

On appelle **épigraphe** de f l'ensemble Γ_f^+ des points situés au dessus du graphe Γ_f . C'est-à-dire :

$$(6.5) \quad \Gamma_f^+ = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

Théorème 4.1 : Convexité de l'épigraphe

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Théorème 4.2 : Inégalité de JENSEN

Soit f une fonction **convexe** sur un intervalle I .

Soit $n \geq 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ une famille de points de I .

Pour toute famille de **réels positifs** $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

l'**inégalité de JENSEN** donne :

$$(6.6) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démo
épi-
graphe

Théorème 4.3

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.

Pour tout $x \in I$, soit Φ_x la fonction :

$$(6.7) \quad \Phi_x : t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, Φ_x est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Théorème 4.4 : Inégalité des pentes

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie sur un **ouvert** $I \in \mathbb{R}$ tel que I n'est pas réduit

à un singleton.

Si f est convexe, alors f est dérivable en tout point de I à gauche et à droite, et pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$:

$$(6.8) \quad f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

Remarque : On déduit de la dérivabilité que f est continue sur I .

Définition 5 : Fonction concave

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite **concave** si son opposée $-f$ est une fonction convexe.

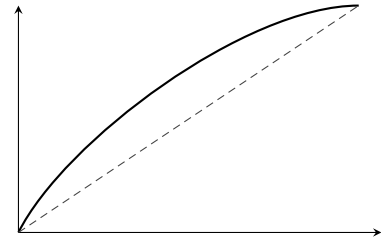


FIGURE 6.3 – Une fonction concave

6.3 Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

6.3.1 Dérivabilité et convexité

Théorème 5.1 : Caractérisation par la dérivabilité

Soit f une fonction dérivable sur I .

f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I .

Preuve 5.1.1 Si f est convexe, d'après le théorème 4.4 de l'inégalité des pentes, pour $x < y$, on a $f'(x) \leq f'(y)$. Donc f' est croissante.

Réciproquement, supposons f' croissante, et prenons deux points x et y de I tels que $x < y$. Soient a et b tels que $y = ax + b$ est l'équation de la droite joignant x et y . Soit $g(t) = f(t) - (at + b)$, de dérivée $g'(t) = f'(t) - a$ croissante. D'après le théorème 32.2 des accroissements finis (page 79), $\exists c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = a$, c'est-à-dire tel que $g'(c) = 0$. g' étant croissante, elle est négative sur $[x, c]$, et positive sur $[c, y]$. On en déduit le tableau de variation :

t	x	c	y
g'	–	0	+
g	0	\searrow	\nearrow 0

Donc g est toujours négative, donc $f(t) \leq (at + b)$ implique que la courbe est toujours en dessous de sa corde, donc f est convexe sur I .

Ainsi, f convexe $\iff f'$ est croissante.

□

Théorème 5.2 : Caractérisation par la dérivée double

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .

f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée double f'' est positive sur I :

(6.9)
$$f \text{ convexe sur } I \iff \forall x \in I, f''(x) > 0$$

6.3.2 Position de la tangente

Théorème 5.3 : Tangentes

Le graphe d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes

6.3.3 Exemples d'inégalités de convexité

Chapitre 7

Réduction des Endomorphismes

Méthode

Valeurs propres

Pour montrer que λ est une valeur propre d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E , on peut :

- Revenir à la définition, et trouver un vecteur propre x tel que $u(x) = \lambda x$
- Montrer que l'application $f - \lambda \text{Id}_E$ est non-injective, c'est-à-dire que

$$\det(f - \lambda \text{Id}_E) = 0$$

- Montrer que λ est une racine du polynôme caractéristique χ_u de u
- On sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace

Polynôme caractéristique

Si on cherche le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u , ces étapes peuvent permettre d'avancer sa détermination :

- Prendre le polynôme dont les racines sont les valeurs propres de u . C'est à dire le polynôme $\prod (X - \lambda_i)$
- Reconnaître les coefficients de degré $n - 1$ et 0 (*cf.* théorème 12.2 page 35).
- Si la matrice est triangulaire, faire le produit des éléments diagonaux.

Polynôme minimal

Si on cherche le polynôme minimal d'un endomorphisme u dans l'espace E de dimension finie, on peut avoir recours aux affirmations suivantes :

- Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de u d'ordre de multiplicité m_i , alors le polynôme minimal est la valeur minimale des m'_i tels que

$$\Pi_u(u) = \left(X - \lambda_i \right)^{m'_i} (u) = 0$$

- Si on a un polynôme annulateur P , on peut le factoriser pour obtenir les racines. Puisque le polynôme minimal Π_u divise P , il reste à essayer de combiner ces racines pour obtenir le polynôme de plus petit degré qui annule u .

Théorème de décomposition des noyaux

En général, dès qu'on voit une somme directe, on utilise le théorème de décomposition des noyaux.

Si on a P , un polynôme annulateur de u tel que $P(u) = 0$, alors on a $\text{Ker} P(u) = E$, et si $P(u)$ est le produit de plusieurs polynômes, par exemple A et B , on peut écrire

$$E = \text{Ker} A(u) \oplus \text{Ker} B(u)$$

Diagonalisation

7.1 Généralités

7.1.1 Matrices carrées semblables

Définition 6 : Matrices semblables

Deux matrices sont dites **semblables** si elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 6.1

Deux matrices sont **semblables** si et seulement si il existe une matrice P inversible telle que

$$(7.1) \quad A_1 = P A_2 P^{-1}$$

Théorème 6.2

Deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant. Ce sont des **invariants de similitude**.

C'est ce dernier théorème qui permet de confirmer l'unicité de la trace et du déterminant d'un endomorphisme.

7.1.2 Sous-espace stable par un endomorphisme

Définition 7 : Sous-espace stable

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , et u un endomorphisme de E . On dit que F est stable par u si :

$$(7.2) \quad \forall x \in F, u(x) \in F$$

On écrit alors que $u(F) \subset F$.

La restriction de u à F au départ et à l'arrivée est l'**endomorphisme induit**.

(ATTENTION)

La simple restriction de u à F ($u|_F$) est une application de F dans E et ce n'est pas un endomorphisme, alors que l'endomorphisme induit va de F à F .

Traduction matricielle

On va maintenant voir, conformément au programme, la traduction en termes de matrices. On se place donc dans E qui est cette fois de **dimension finie** n .

Si on reprend le sous-espace F , on peut trouver une base (e_1, \dots, e_p) . Cette base peut être complétée en une base de n vecteurs de E : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$. La matrice de u dans \mathcal{B} s'écrit :

$$\begin{matrix} & e_1 & \dots & e_p & | & \dots & e_n \\ \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ \hline \vdots \\ e_n \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \right) \end{matrix} \quad \text{où } B \text{ est la matrice de l'endomorphisme induit.}$$

7.2 Éléments propres d'un endomorphisme

Théorème 7.1 : Droite stable

Une **droite** est **stable** par un endomorphisme u ssi elle est engendrée par un vecteur propre de u .

7.2.1 Éléments propres

Définition 8 : Valeur propre, vecteur propre

Soit u un endomorphisme de E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x non nul de E tel que

$$(7.3) \quad u(x) = \lambda x$$

Si un tel vecteur x existe, on l'appellera **vecteur propre**.

Définition 9 : Sous-espace propre

Avec les notations précédentes, on appellera **sous-espace propre (s-ep)** associé à une valeur propre λ le sous-espace vectoriel E_λ :

$$(7.4) \quad E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$$

C'est donc le sous-espace de E contenant 0 et tous les vecteurs propres de u .

7.2.2 Éléments propres en dimension finie

(ATTENTION) On se place dans un espace E de dimension finie. Les théorèmes et définitions qui suivent ne sont valables (au programme) que dans ces conditions.

Définition 10 : Spectre

Le spectre d'un endomorphisme u de E , noté $\text{sp}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

Théorème 10.1 : Famille finie de s-ep

La somme d'une famille finie de sous-espace propre (s-ep) E_{λ_i} de valeurs propres λ_i deux à deux distinctes est directe :

(7.5)

$$\sum_i E_{\lambda_i} = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$$

Le programme officiel précise le corrolaire qui va avec :

Théorème 10.2 : Famille de vecteurs propres

Toute famille de vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont deux à deux distinctes est libre.

Théorème 10.3

Pour u un endomorphisme de E de dimension finie n , le spectre de u est fini, et de cardinal au plus n .

Théorème 10.4 : Endomorphismes commutant

Soient u et v sont deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie.
Si u et v commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v .

Preuve 10.4.1 Soit λ une valeur propre de u , et E_λ l'espace propre associé. On a :

$$E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda I)$$

Soit x_λ de E_λ . x_λ est un vecteur propre de u . Pour montrer qu'un sous-espace propre de u est stable par v , il faut montrer que $v(x_\lambda) \in \text{Ker}(u - \lambda I)$. Or :

$$\begin{aligned}(u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) &= u \circ v(x_\lambda) - \lambda v(x_\lambda) \\ &= v \circ u(x_\lambda) - v(\lambda x_\lambda) \\ &= v(u(x_\lambda) - \lambda x_\lambda)\end{aligned}$$

D'où :

$$(u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) = 0$$

Donc v est stable par tout s-ep de u . □

Définition 11 : Éléments propres d'une matrice

Soit A une matrice carrée de E un espace de dimension finie.

On appelle **valeur propre** de A un scalaire λ pour lequel il existe X tel que :

$$(7.6) \quad AX = \lambda X$$

Si ce vecteur X existe, on l'appelle **vecteur propre** de la matrice A pour la valeur propre λ .

Par extension, on définit le s-ep d'une matrice de manière similaire à la définition 9 page 32. L'ensemble des valeurs propres d'une matrice forme son spectre $\text{sp}(A)$.

7.3 Polynôme Caractéristique

Pour une matrice carrée M , on cherche un polynôme dont les valeurs propres sont les racines. C'est alors qu'est né le polynôme caractéristique.

Définition 12 : Polynôme caractéristique

Soit u un endomorphisme de E , un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit M sa matrice dans une base associée \mathcal{B} .

Le **polynôme caractéristique** de u , noté χ_u , est le déterminant de l'application $(u - X \text{Id}_E)$. De même, le **polynôme caractéristique** de la matrice M , noté χ_M , est le déterminant de la matrice $(M - X I_n)$

$$(7.7) \quad \chi_u = \det(u - X \text{Id}_E) \qquad \chi_M = \det(M - X I_n)$$

Ce polynôme est de degré n . Le polynôme caractéristique doit être unitaire.

Bien sûr, on a :

$$(7.8) \quad \chi_u = \chi_M$$

Théorème 12.1

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Preuve 12.1.1 (Facile)

Soient A et A' nos deux matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes. Donc

$$\begin{cases} \chi_u &= \chi_A \\ \chi_u &= \chi_{A'} \end{cases}$$

D'où $\chi_A = \chi_{A'}$.

□

Théorème 12.2 : Valeurs des coefficients de degrés 0 et $n - 1$

Pour une matrice M de rang n , on peut obtenir quelques coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(M) \times X^{n-1} + \dots + \det(M)$$

Pour une matrice de rang 2, le polynôme caractéristique est donc donné par

$$\chi_M = X^2 - \operatorname{tr}(M) X + \det(M)$$

Preuve 12.2.1 *Il suffit de développer le polynôme caractéristique, en sachant que les valeurs propres sont les racines, puis d'identifier.*

Théorème 12.3 : Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

(7.10) $\chi_A = \det(A - X I_n) = \prod (a_{i,i} - X)$

Théorème 12.4 : Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soit u un endomorphisme de E . Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit de u divise χ_u .

7.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Définition 13 : Endomorphisme diagonalisable

On dit que u de E est **diagonalisable** s'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est diagonalisable.

Définition 14 : Matrice diagonalisable

Une matrice carrée est dite **diagonalisable** si l'endomorphisme de \mathbb{K}^n qui lui est canoniquement associé est diagonalisable.

Définition 15 : Quelques définitions

Quelques définitions portant sur les polynômes :

Racine simple Une racine α du polynôme P est dite simple si elle n'est pas multiple. On dit que son ordre de multiplicité est égal à 1.

Polynôme scindé P est scindé s'il peut s'écrire comme le produit de polynômes du premier degré.

Théorème 15.1 : Caractérisation de la diagonalisation

On donne des équivalences à “ u diagonalisable” :

- i. E admet une base formée des vecteurs propres de u
- ii. E est somme directe d'espaces sur lesquels u induit des homothéties
- iii. χ_u est scindé, et $\omega(\lambda) = \dim(E_\lambda)$
- iv. $n = \sum \dim E_\lambda$
- v. u admet pour matrice une matrice diagonalisable

7.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

7.6 Endomorphismes nilpotents

7.6.1 Définition

Définition 16 : Endomorphisme nilpotent

On dit qu'un endomorphisme u est **nilpotent** d'indice $p \geq 1$ si $u^p = 0$ avec $u^{p-1} \neq 0$.

7.6.2 Propriétés en dimension finie

Théorème 16.1 : Endomorphisme nilpotent trigonalisable

Un endomorphisme u dans un espace E de dimension finie est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre.

Théorème 16.2 : Majoration de l'indice de nilpotence

Dans un espace de dimension n , l'indice de nilpotence d'un endomorphisme ne dépasse pas n .

Si u est nilpotent d'indice n , il existe une base \mathcal{B} dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$(7.11) \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

7.7 Polynômes d'un endomorphisme

Définition 17 : Polynôme d'un endomorphisme

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, on définit l'endomorphisme

$$(7.12) \quad P(u) = \sum_{k=0}^p a_k u^k$$

$P(u)$ est appelé **polynôme de l'endomorphisme** u .

Théorème 17.1

Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, l'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$

Théorème 17.2

Si d est le degré du polynôme minimal P_u de u , alors la famille $(u^k)_{k \in [0, d-1]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Preuve 17.2.1 Soit d le degré minimal du polynôme minimal P_u . La famille $(\text{Id}, u, u^2, \dots, u^{d-1})$ est libre.

CAYLEY-HAMILTON

Théorème 17.3 : CAYLEY-HAMILTON

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel fini, alors le polynôme caractéristique χ_u est un polynôme annulateur de u .

Le polynôme caractéristique est donc un multiple du polynôme minimal.

7.8 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 17.4 : Théorème de décomposition des noyaux

Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}[X]$. Pour P et Q premiers entre eux :

$$(7.13a) \quad \text{Ker} [(PQ)(u)] = \text{Ker} [P(u)] \oplus \text{Ker} [Q(u)]$$

Maintenant, on va voir le théorème dans une forme plus générale, qu'on déduit par récurrence sur le théorème précédent.

Théorème 17.5 : Théorème de décomposition des noyaux

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et u un endomorphisme de E .

Si A_1, \dots, A_p sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers deux à deux, alors :

$$(7.13b) \quad \text{Ker} \left((A_1 \times A_2 \times \dots \times A_p)(u) \right) = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker} (A_i(u))$$

7.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Définition 18 : Polynôme minimal

Il existe un unique polynôme unitaire Π_φ appelé le polynôme minimal tel que pour tout morphisme φ , $\Pi_\varphi(\varphi) = 0$ CÀD $(\Pi_\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$

Théorème 18.1 : Formule de GRASSMAN

Si V et W sont deux espaces vectoriels de **dimension finie** de E alors :

$$(7.14) \quad \dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

7.10 Endomorphismes à polynôme minimal scindé

Chapitre 8

Topologie des espaces vectoriels normés

Méthode

Application continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une application continue $f : E \rightarrow F$.

- $f : A \in E \rightarrow F$ conserve :
 - les parties compactes
 - les parties connexes par arcs
- $f^{-1} : F \rightarrow E$ conserve :
 - les parties fermées
 - les parties ouvertes

8.1 Normes et espaces vectoriels normés

8.1.1 Rappels

Définition 19 : Espace vectoriel

Soit \mathbb{K} un corps (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

E est un \mathbb{K} -**espace vectoriel** s'il respecte les conditions suivantes :

- | | | | | |
|-------|-------|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| (8.1) | (i) | $(E, +)$ est un | <u>groupe abélien</u> | Groupe pour la loi + |
| | (ii) | $\forall x \in E,$ | $1 \cdot x = x$ | Neutre multiplicatif |
| | (iii) | $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E,$ | $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ | Distributivité pour \mathbb{K} |
| | (iv) | $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,$ | $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ | Distributivité pour E |
| | (v) | $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,$ | $\alpha \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ | Associativité |

8.1.2 Norme

Définition 20 : Définition de la norme

Soit E un espace vectoriel de \mathbb{K} . Une **norme** est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$(8.2) \quad \left| \begin{array}{ll} (i) & \forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0 \\ (ii) & \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ (iii) & \forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Séparation} \\ \text{Homogénéité} \\ \text{Inégalité triangulaire} \end{array}$$

Et le couple (E, N) est l'**espace vectoriel normé** associé.

Théorème 20.1 : Norme N_2

$$N_2 : f \mapsto \left(\int_{[a,b]} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ est une norme sur } \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$$

8.1.3 Distance

Il y a plusieurs manières de définir la distance. Si on se place dans un espace vectoriel normé, on peut utiliser la norme pour définir la distance, comme dans la définition 22. Sinon, si l'espace est quelconque, la distance peut avoir la définition générale suivante :

Définition 21 : Distance dans un espace quelconque

Soit E un ensemble. On appelle **distance** dans E toute application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

$$(8.3) \quad \left| \begin{array}{ll} (i) & \forall x \in E, \quad d(x, y) = 0 \implies x = y \\ (ii) & \forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x) \\ (iii) & \forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Séparation} \\ \text{Symétrie} \\ \text{Inégalité triangulaire} \end{array}$$

Définition 22 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé

La **distance** d associée à la norme $\|\cdot\|$ est l'application :

$$(8.4) \quad \begin{aligned} d : E^2 &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

8.1.4 Boules

Définition 23 : Boule

Dans un espace vectoriel normé (E, N) , on définit les boules centrées en a et de rayon r

Boule ouverte de rayon r centrée en a : $x \in E \mid N(x - a) < r$

Boule fermée de rayon r centrée en a : $x \in E \mid N(x - a) \leq r$

Sphère de rayon r centrée en a : $x \in E \mid N(x - a) = r$

Définition 24 : Convergence d'une suite

On dit que la suite des $(x_n)_n$ converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (8.5)
- (i) $\exists l \in E$ tel que $(N(x_n - l)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 - (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $(n \geq n_0 \implies N(x_n - l) < \varepsilon)$
 - (iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $(n \geq n_0 \implies x_n \in B(l, \varepsilon))$

8.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

8.3 Comparaison des normes

Définition 25 : Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si

(8.6)
$$\exists (c, C) \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$

Théorème 25.1 : Dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

8.4 Complets

Définition 26 : Complet

A est un **complet** si toute suite de Cauchy $(c_n)_n \in A$ admet une limite $l \in A$

CÀD si toute suite de Cauchy est convergente

Remarque : Intuitivement, un espace est complet s'il n'a pas de « trou ». \mathbb{Q} n'est pas complet, car $\sqrt{2}$ n'est pas dans \mathbb{Q} .

Définition 27 : Espace de BANACH

Un **espace de BANACH** est un espace-vectoriel normé et complet.

8.5 Parties compactes d'un espace normé

Théorème 27.1 : BOLZANO-WEIERSTRASS

Toute suite réelle bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Par extension : toute suite bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie possède au moins une valeur d'adhérence.

On va utiliser cette propriété pour définir un compact :

Définition 28 : Compact

A est un **compact** si toute suite d'éléments $(x_n)_n \in A$ a au moins une valeur d'adhérence
CÀD on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans A

Théorème 28.1

Soit E un espace vectoriel. Les parties compactes de E sont fermées et bornées.

Théorème 28.2 : Compacts en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée bornée.

Théorème 28.3

Toute partie fermée d'un compact est compact

Théorème 28.4

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A un compact de E .

Une suite d'éléments de A converge si et seulement si elle possède une unique valeur

d'adhérence :

$$(8.7) \quad \forall (x_n)_n \in A, x_n \text{ converge} \Leftrightarrow \exists ! l, x_n \rightarrow l$$

8.6 Applications continues sur une partie compacte

Théorème 28.5 : Image d'une partie compacte

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . Soit F un espace vectoriel normé.

Soit $f : A \rightarrow F$.

Si f est continue, l'image de tout compact de A est un compact de F .

Théorème 28.6

Soit E un espace vectoriel normé. Soit une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue, alors elle est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 28.7 : Théorème de HEINE

Si (E, N) et (F, N) sont des espaces vectoriels normés, A une partie **compacte** de E , si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, alors f est **uniformément continue**.

8.7 Connexité par arcs

8.7.1 Convexité

Définition 29 : Convexe

Un ensemble E est **convexe** si :

$$(8.8) \quad \forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in E$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

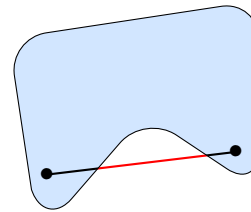


FIGURE 8.1 – Un ensemble non convexe

Définition 30 : Fonction convexe

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite convexe si :

(8.9)

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in]0, 1[, \boxed{f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)}$$

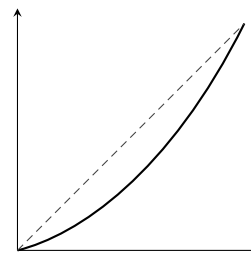


FIGURE 8.2 – Une fonction convexe

Théorème 30.1 : Convexe dans \mathbb{R}

I de \mathbb{R} est convexe si et seulement si I est un intervalle de \mathbb{R}

8.7.2 Connexité

Définition 31 : Connexe par arcs

Une partie A d'un espace vectoriel normé (E, N) est **connexe par arcs** si, pour tous points a et b de E , il existe une fonction $f : [0, 1] \rightarrow E$ continue telle que

(8.10)

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \\ f([0, 1]) \subset A \end{cases}$$

Théorème 31.1 : Relation d'équivalence

« Il existe un chemin continu d'un point x à un point y » est une relation d'équivalence sur une partie A de E .

Les **composantes connexes** sont les classes d'équivalences de A .

Théorème 31.2 : Connexe dans \mathbb{R}

A non vide de \mathbb{R} est connexe par arcs si et seulement si A est un intervalle de \mathbb{R}

Théorème 31.3 : Image continue d'une partie connexe

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit l'application $f : A \in E \rightarrow F$.
Si f est continue, alors l'image de toute partie connexe par arcs est connexe par arcs

dans F .

Théorème 31.4 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie connexe par arcs de E .
Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue qui atteint $(c, d) \in \mathbb{R}$. Alors f atteint toute valeur $f(x) \in [c, d]$.

8.8 Topologie

Voici plusieurs définitions utiles à l'étude d'espaces vectoriels normés :

Définition 32 : Ouvert

Une partie E est un **ouvert** si, pour tout élément x de E , il existe une boule centrée en x incluse dans E (cf. FIGURE 8.3)

Définition 33 : Fermé

Un espace vectoriel F est dit **fermé** si son complémentaire \bar{F} est un ouvert

Pour différencier un ouvert d'un fermé, prenons le schéma ci-contre :

La partie en **rouge** est un ouvert noté O , celle en **bleue** est un fermé noté F .

En effet : il n'existe aucun disque centré en $y \in O \cap F$ inclus dans la partie $O \cap F$, donc $O \cap F$ n'est pas un ouvert. Par contre, pour tout point $x \in O$, on peut trouver une boule incluse dans O .

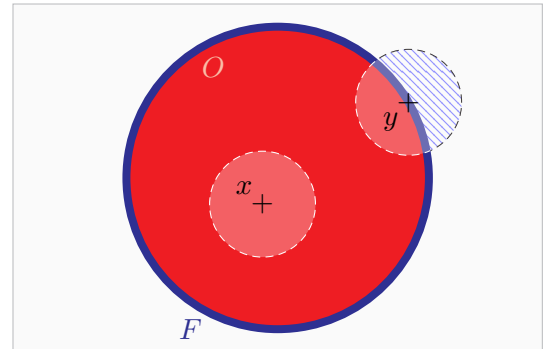


FIGURE 8.3 – Ouvert / Fermé

Théorème 33.1 : Caractérisation d'un fermé

$F \subset E$ est un **fermé ssi** toute suite convergente de F a sa limite dans F

Définition 34 : Intérieur, Adhérence

L'**intérieur** de B , noté $\overset{\circ}{B}$, est la réunion des parties ouvertes contenues dans B .

L'**adhérence** de A , notée \overline{A} est l'intersection des parties fermées contenants A .

Propriétés

- A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- $\underbrace{\text{Fr}(A)}_{\text{frontière}}$ est un fermé
- $\bigcup_{\text{finie}} \text{fermés} = \text{fermé}$
- $\bigcap \text{fermés} = \text{fermé}$

Théorème 34.1

Un **complet** A d'un espace vectoriel normé E est fermé.

La réciproque (*Les parties complètes sont les parties fermées*) est vraie si E est un espace de BANACH.

Quatrième partie

Analyse

Chapitre 9

Séries

Méthode

Étude d'une série

Prenons le cas d'étude d'une série : $\sum u_n$

1. Vérifier que $\sum u_n$ est positive.

Si elle ne l'est pas, on peut prendre $N(\sum u_n)$. Dans \mathbb{R} , on prendra $|\sum u_n|$.

2. Utiliser un théorème de comparaison pour ramener à des séries facilement étudiables. On peut :
 - Trouver un équivalent (en utilisant des Développements Limités (DLs))
 - Trouver une domination en $o(\dots)$ ou en $O(\dots)$
 - Majorer/Minorer explicitement, mais c'est rare

9.1 Définitions

Définition 1

La série S de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où on définit S_n de manière suivante.

$$\underbrace{S_n = \sum_{k=0}^n \underbrace{u_k}_{\text{Terme général de la série}}}_{\text{Somme partielle}}_{\text{Suite des sommes partielles}}$$

Définition 2 : Convergence d'une série

On dit que la série des u_n converge s'il existe l tel que $l = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe.
 S'il la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que sa série S_n **diverge grossièrement**

Théorème 2.1 : Théorème suite-série

La série $S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k)$ converge **si et seulement si** la suite (a_n) converge.

9.2 Séries à termes positifs

Définition 3 : Série À Termes Positifs

On appelle **Série À Termes Positifs (SATP)** toute série de terme général u_n réel tel que, à partir d'un certain rang, $u_n \geq 0$.

Théorème 3.1 : Convergence des SATP

Si $\sum u_n$ est une SATP, alors :

$$(9.1) \quad \sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n u_k \text{ est majorée}$$

9.3 Complément sur les séries numériques

9.3.1 Règle de d'ALEMBERT

Lemme

Pour toute suite (u_n) strictement positive, s'il existe une suite (α_n) strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, alors

$$(9.2) \quad u_n \underset{+\infty}{=} O(\alpha_n)$$

Théorème 3.2 : Règle de d'ALEMBERT

$$(9.3) \quad \begin{aligned} &\text{Si, à partir d'un certain rang, } \begin{cases} u_n > 0 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l \end{cases} \text{ alors :} \\ &\begin{cases} \text{Si } l > 1, \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \\ \text{Si } l < 1, \sum u_n \text{ converge} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce théorème est peu utile car il est « trop vrai ».

9.3.2 Séries alternées

Définition 4 : Série alternée

La série $\sum u_n$ est une **série alternée** s'il existe (α_n) une suite positive et $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ tels que $u_n = \varepsilon(-1)^n \alpha_n$

Théorème 4.1 : Théorème spécial des séries alternées (TSSA)

$$\text{Si } \begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|) \text{ est décroissante} \\ (|u_n|) \xrightarrow{+\infty} 0 \end{cases}, \text{ alors } \sum u_n \text{ converge et } \forall n \geq 0, \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_n|$$

(ATTENTION) Ne pas oublier les valeurs absolues pour l'étude des séries alternées.

9.3.3 Comparaison série intégrale

Théorème 4.2 : Comparaison d'une série à une intégrale

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive** et **décroissante** sur \mathbb{R}^+ , alors la série de terme général $\left(\int_{n-1}^n f \right) - f(n)$ est une SATP convergente.

$$(9.4) \quad f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \sum f(n) \text{ converge}$$

$$\text{En cas de divergence, } \int f \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum f(n)$$

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive**, **croissante** et majorée sur \mathbb{R}^+ , alors la série de terme général $\left(\int_n^{n+1} f \right) - f(n)$ est une SATP convergente.

9.3.4 Comparaison des SATP

Théorème 4.3 : Théorème de comparaison des SATPs

Si on a deux suites u_n et v_n de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles qu'on ait une des conditions suivantes :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ u_n = o(v_n) \end{cases}, \text{ alors } \sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge.}$$

On a également la contraposée : $\sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge}$

Théorème 4.4 : 2^e théorème de comparaison des SATPs

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **deux suites positives**.

Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même nature.

Théorème 4.5 : CÉSARO

Si $\sum \alpha_n$ est une SATP divergente, et que (β_k) est une suite complexe convergente vers β , alors la suite (S_n) de terme général :

$$S_n = \frac{\sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$$

(définie à partir d'un certain rang) converge vers β .

La moyenne de CÉSARO apparaît en prenant la suite $\alpha_k = 1 \forall k$, car alors $\sum \alpha_k = n$ et :

$$S_n = \frac{\sum_{k=0}^n \beta_k}{n}$$

C'est la moyenne des termes de la suite β_k , et on sait qu'elle converge si β_k converge.

Preuve 4.5.1 *L'idée est de séparer la somme en deux. Prenons $\varepsilon > 0$. Soit l la limite de la suite β_k .*

Soit N tel que $\forall n \geq N, |\beta_n - l| < \varepsilon$. Alors :

$$S_n - l = \frac{\sum_{k=0}^N \alpha_k (\beta_k - l)}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} + \frac{\sum_{k=N}^n \alpha_k (\beta_k - l)}{\sum_{k=0}^n \alpha_k}$$

La somme allant jusqu'à N ne dépendant plus de n :

$$S_n - l \leq \frac{\text{constante}}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} + \frac{\sum_{k=N}^n \alpha_k}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} \cdot \varepsilon$$

$$S_n - l \leq \frac{\text{constante}}{\pm \infty} + 1 \cdot \varepsilon$$

On a majoré par quelque chose d'aussi petit qu'on veut, et alors S_n converge \square

9.4 Hors programme

Tous les théorèmes vus ici sont à démontrer.

Théorème 4.6 : Transformation d'ABEL

Soient deux suites (a_n) et (b_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Alors :

$$(9.5) \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i$$

On peut en déduire, si on a les conditions $\begin{cases} \sum (a_i - a_{i+1}) \text{ CVA vers } 0 \\ B_n = \sum_{k=0}^n b_k \text{ est bornée} \end{cases}$, que $\sum a_k b_k$ converge.

Preuve 4.6.1 On remarque que $b_i = B_i - B_{i-1}$, avec $b_0 = B_0$. Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1} \end{aligned}$$

On change d'indice sur la deuxième somme, et comme $b_0 = B_0$:

$$\begin{aligned} &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \end{aligned}$$

Chapitre 10

Familles sommables de nombres complexes

10.1 Dénombrement

Définition 5 : Ensemble fini

On dit que E est un **ensemble fini** de cardinal n si E est en bijection avec $\llbracket 0, n \rrbracket$

Définition 6 : Equipotence

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** (ou en bijection) s'il existe une application $\varphi : E \rightarrow F$ telle que φ soit bijective.

Définition 7 : Ensemble dénombrable

On dit que E est un **ensemble dénombrable** s'il est équipotent à \mathbb{N}

Théorème 7.1

Toute partie infinie de \mathbb{N} est dénombrable.

Théorème 7.2

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il est équipotent à une partie de \mathbb{N}

Théorème 7.3

L'ensemble \mathbb{N}^2 est dénombrable.

Preuve 7.3.1 On utilise la fonction de couplage de CANTOR :

(10.1)
$$f(p, q) = q + \sum_{i=0}^{p+q} i$$

On montre que cette fonction est bijective.

Fonction de Cantor

Théorème 7.4

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Ainsi, \mathbb{Q} est dénombrable :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Théorème 7.5

L'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

10.2 Familles sommables

10.2.1 Pour les réels positifs

Définition 8 : Famille sommable de réels positifs

Soit une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs. Une famille est **sommable** s'il existe un réel M tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait :

(10.2a)
$$\sum_{i \in J} u_i \leq M$$

On définit la somme de cette famille par

(10.2b)
$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_J \sum_{n \in J} u_n$$

Théorème 8.1 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition dénombrable de I .

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si :

- la sous-famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable pour tout n
- la série $\sum_n \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est convergente

Dans ce cas :

$$(10.3) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = \sum_{n \in I} u_n$$

Théorème 8.2 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

$$(10.4) \quad \begin{aligned} (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} &\Leftrightarrow \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \text{ converge} \\ \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \end{aligned}$$

10.2.2 Pour les réels et les complexes

Définition 9 : Famille sommable

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est **sommable** si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Théorème 9.1

$$(u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \Leftrightarrow \sum_{i \in I} u_i \text{ absolument convergente}$$

Théorème 9.2 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels positifs.

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition dénombrable de I .

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si :

- la sous-famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable pour tout n
- la série $\sum_n \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$ est convergente

Dans ce cas :

$$(10.5) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = \sum_{n \in I} u_n$$

Théorème 9.3

Soient $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q \in \mathbb{N}}$ deux familles sommables. Alors la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ sommable et

$$(10.6) \quad \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q \right)$$

Preuve 9.3.1 Ce théorème est issu du théorème de FUBINI (cf. théorème 25.4 page 70) : les deux suites $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q \in \mathbb{N}}$ sont sommables, donc leurs séries convergent absolument, et les hypothèses du théorème de FUBINI sont alors vérifiées.

Théorème 9.4 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

$$(10.7) \quad \begin{aligned} (u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \text{ est sommable} &\Leftrightarrow \sum_n \left(\sum_{p+q=n} |u_{p,q}| \right) \text{ converge} \\ \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q} \right) \end{aligned}$$

(ATTENTION) Faire attention à bien mettre des modules partout

Chapitre 11

Probabilités sur un univers au plus dénombrable

11.1 Espace probabilisé

Définition 10 : Univers

Un **univers** Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des parties de l'univers Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$

Définition 11 : Tribu

Une **tribu** sur un univers Ω est un sous-ensemble \mathcal{T} de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés :

- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} \in \mathcal{T}$
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Le couple (Ω, \mathcal{T}) est appelé **espace probabilisable**.

Propriétés

Si (Ω, \mathcal{T}) est un espace probabilisable, et A_i un élément de \mathcal{T} :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\bigcup_{\text{finie}} A_i \in \mathcal{T}$
- $\bigcap_{\text{finie}} A_i \in \mathcal{T}$

- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{T}^2, A \cap \overline{B} = A \setminus B$

Définition 12 : Incompatibilité, implication

Deux évènements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$
 On dit que $A \xRightarrow{\text{implique}} B$ quand $A \subset B$

(ATTENTION) Ne pas confondre $(A \cap B = \emptyset)$ et $(P(A \cap B) = 0)$

Définition 13 : Système complet d'évènements

Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable.

Soit I fini ou égal à \mathbb{N}

Un **système complet d'évènements** est une suite d'évènements $(A_i)_{i \in I}$ telle que :

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
- $\forall (p, q) \in I^2, p \neq q, A_p \cap A_q = \emptyset$

Définition 14 : Probabilité

Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace probabilisable. La **probabilité** est l'application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux incompatibles :
 - $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge
 - $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$
 (σ -additivité)

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**

(ATTENTION) Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T}) \neq$ Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$

La propriété de σ -additivité existe sous forme d'inégalité quand les évènements ne sont pas incompatibles :

Théorème 14.1 : Inégalité de BOOLE

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probablilisé.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors :

$$(11.1) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve 14.1.1 On se ramène à une suite d'évènements deux à deux disjoints en introduisant la suite (C_n) telle que :

$$C_0 = A_0 \qquad C_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

Puisque $C_n \subset A_n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

11.2 Conditionnement

11.3 Indépendance

Définition 15 : Évènements indépendants

Deux évènements A et B sont indépendants lorsque

$$(11.2) \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Chapitre 12

Variables aléatoires discrètes

12.1 Espérance

12.1.1 Définitions

Définition 16 : Espérance d'une famille finie

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs x_1, x_2, \dots, x_n . L'**espérance** de X est donnée par la somme finie :

(12.1)
$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}_X(x_i)$$

On peut étendre la définition précédente au cas où les valeurs de X forment une famille sommable :

Définition 17 : Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On dit que X est d'**espérance** finie si la famille $(x \mathbb{P}_X(x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

12.1.2 Propriétés

Propriétés

- L'ensemble \mathcal{E} des variables aléatoire de Ω dans \mathbb{R} et dont l'espérance est finie est un espace vectoriel
- L'espérance est une forme linéaire sur \mathcal{E}
- $\forall X \in \mathcal{E}, X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \implies E(X) \geq 0$ (l'espérance est positive)
- Soit Y une variable aléatoire d'espérance finie, si X est une variable aléatoire telle que $|X| \leq Y$, alors X est d'espérance finie.

- Si X et Y sont deux lois indépendantes et admettant chacune une espérance finie, alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

12.2 Variance

12.2.1 Moment

Définition 18 : Moment d'ordre n

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet un **moment** d'ordre m si X^m admet une espérance finie.

Théorème 18.1

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance finie.

Théorème 18.2 : Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes de moment d'ordre 2, alors XY a une espérance finie et

$$(12.2) \quad \left(E(XY)\right)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$$

12.2.2 Variance et écart-type

Définition 19 : Variance et Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2.

On définit la **variance** par :

$$(12.3a) \quad V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

et l'**écart-type** par :

$$(12.3b) \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Théorème 19.1 : Formule de KÖNIG-HUYGENS

(12.4)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

12.2.3 Covariance

Définition 20 : Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance finie.

Si elle existe, on définit la **covariance** de X et de Y par :

(12.5)

$$\text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

Théorème 20.1 : Existence de la covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors la covariance de X et de Y existe et on a :

(12.6)

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Exis-
tence

Preuve 20.1.1 On a :

$$\text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

On développe :

$$= E\left(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\right)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$= E(XY) - E(E(X)Y) - E(E(Y)X) + E(E(X)E(Y))$$

$$= ???$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Finir la
demo

12.3 Lois usuelles

Définition 21 : Loi de BERNOULLI

La **loi de BERNOULLI** est une distribution discrète qui prend la valeur 1 avec une probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $(1 - p)$.

Une variable aléatoire qui suit cette loi est appelée variable de BERNOULLI

12.3.1 Loi binomiale

Définition 22

La loi binomiale, de paramètres n et p , est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale au nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli, p étant la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli.

Autrement, c'est une variable aléatoire X telle que

$$X = Y_1 + Y_1 + \cdots + Y_n$$

où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi de BERNOULLI.

La variable aléatoire suit une loi de probabilité :

$$(12.7) \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Théorème 22.1 : Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale. Alors :

$$(12.8) \quad E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

12.4 Fonctions génératrices

Définition 23 : Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . On définit la **fonction génératrice** G_X de X par :

$$(12.9) \quad G_X(t) = E(t^X) = \sum_k \mathbb{P}(X = k) t^k$$

pour les valeurs de t telles que la variable aléatoire t^X admette une espérance finie.

Chapitre 13

Suites de fonctions

Méthode

En général, pour la convergence simple, on **fixe** x . Pour la convergence uniforme, puisqu'on cherche la norme N_∞ , on **dérive** $f_n(x)$ pour étudier ses variations.

13.1 Convergence de suites de fonctions

Définition 24

Définitions simplifiées des différents types de convergence

(13.1)

La suite des (f_n) converge **simplement** vers $f \Leftrightarrow \forall x, (f_n(x))_n \rightarrow f(x)$

La suite des (f_n) converge **uniformément** vers $f \Leftrightarrow N_\infty^A \left(\underbrace{f_n - f}_{\in B(A, F)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$(f_n(x))_n$ vérifie le **critère de Cauchy de CU** $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 | n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow N_\infty^A((f_n - f)) < \varepsilon$

Le critère de Cauchy de convergence uniforme est équivalent à la convergence uniforme.

Critère de Cauchy \Leftrightarrow Convergence Uniforme

Pour illustrer, on peut faire les schémas suivants :

Propriétés de la simple convergence

- $\left\{ \begin{array}{l} f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (f_n(x))_n \text{ est croissante} \\ (f_n(x))_n \xrightarrow[x \in A]{CVS} f \end{array} \right. \Leftrightarrow f \text{ est croissante}$
- (autres propriétés analogues de f_n appliquées à f par CVS)

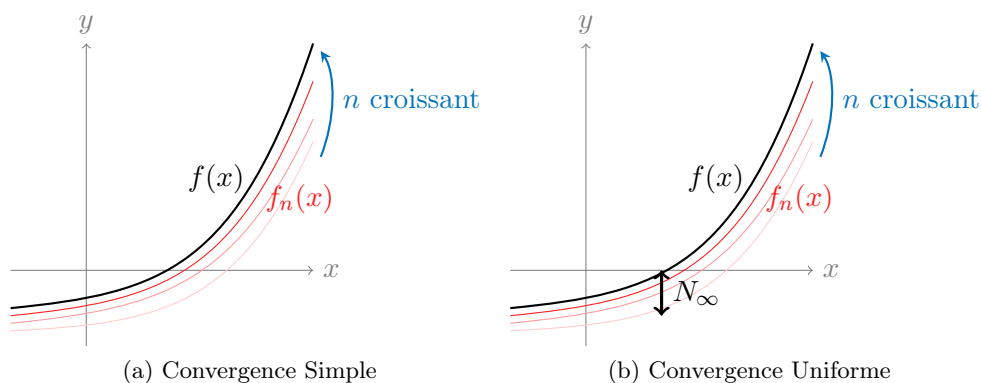


FIGURE 13.1 – Les différents types de convergence de fonction

Théorème 24.1 : Convergence par changement de base

Si $(f_n(x))_n$ converge simplement ou uniformément ssi $(f_{n,i}(x))_n$ converge de la même manière dans la base $\mathcal{B} = (e_i)$

Théorème 24.2 : Conditions nécessaire de CU ^a

$$\left. \begin{array}{l} (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\text{CU}} f \\ (f_n(x))_n \text{ est bornée} \end{array} \right\} \implies f \text{ est uniformément convergente bornée}$$

Théorème 24.3 : Conditions nécessaire de Non-CU

Il suffit que : $\exists (x_n)$ tel que $f(x_n) \not\rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$

a. CU pour Convergence Uniforme

On notera les fonctions f dont la dérivée est continue de $A \rightarrow B$ comme appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}(A, B)$

Théorème 24.4 : Continuité par convergence

$$\left. \begin{array}{l} (f_n(x))_n \text{ continue en } a \\ (f_n(x))_n \text{ converge uniformément vers } f \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ est continue en } a$$

$$\left. \begin{array}{l} (f_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \\ (f_n(x))_n \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout compact } \subset A \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{C}(A, F)$$

Théorème 24.5 : Théorème de la double limite

Si $f_n(x)$ converge uniformément

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$

Théorème 24.6 : Théorème d'approximation de WEIERSTRASS

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ est limite uniforme d'une suite $(\mathcal{P}_n(X))_n$ de fonctions polynômes.

Le même théorème existe pour les fonctions (T-périodiques à valeurs complexes) limites d'une suite de polynômes trigonométriques.

13.2 Convergence des Séries

Définition 25

Définitions simplifiées des convergences de Séries de fonctions :

$$(13.2) \quad \begin{array}{ll} \sum f_n \text{ converge simplement} & \text{si } \forall x \in A, \text{ la série } \sum f_n(x) \text{ converge} \\ \sum f_n \text{ converge uniformément} & \text{si } \left\{ \begin{array}{l} x \in A, \text{ la série } (S_n) = \sum_0^n f_n(x) \\ \text{converge uniformément} \\ x \in A, \text{ la série } (R_n) = \sum_n^\infty f_n(x) \\ \text{converge uniformément} \end{array} \right. \\ \sum f_n \text{ converge normalement} & \text{si } \sum N_\infty(f_n) \text{ converge} \end{array}$$

Pour les définitions de convergence de fonctions, se référer aux définitions 13.1.

On retrouve certaines propriétés des fonctions :

Théorème 25.1

$$\left. \begin{array}{l} (u_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \\ (u_n(x))_n \text{ converge uniformément sur } A \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n \text{ est continue sur } A$$

Théorème 25.2 : Théorème de la double limite

Si $\sum f_n$ converge uniformément, et qu'il existe (v_n) telle que $v_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$, alors $\sum v_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)}_{=v_n} = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x))$$

Preuve 25.2.1 C'est le théorème 24.5 de la double limite de suites de fonctions appliqué aux séries

13.3 Propriétés de la somme

Théorème 25.3 : Intégration sous le signe somme

$$(13.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_k \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C}) \text{ et intégrable sur } I \\ S \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{C}) \\ \sum u_n \rightarrow S \\ \sum |u_n| \text{ converge} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} S \text{ est intégrable, et} \\ \int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n \right) \end{array}$$

13.4 Séries doubles

Théorème 25.4 : Intversion des sommations de FUBINI

(13.4)

Si $\left\{ \begin{array}{l} (u_{p,q})_{p,q} \text{ est une suite double complexe} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \left(\sum |u_{p,q}| \right)_{p,q} \text{ converge} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) \text{ converge} \end{array} \right. , \text{ alors :}$

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$$

Avec les deux séries $\left(\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \right)_q$ et $\left(\sum \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \right)_p$ qui convergent

Chapitre 14

Séries Entières

Certains objets mathématiques ont des développements de Taylor exacts. C'est le cas notamment des polynômes, qui sont déjà des développements de Taylor. Les séries géométriques par exemple ont également un développement de Taylor exact : pour la série de terme général q^k , on a $\sum_0^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$. Sinon, la plupart du temps, le développement de Taylor est précis jusqu'à un dernier terme qu'on ne peut calculer, mais qu'on peut quand même approximer en $o(\dots)$ ou en $O(\dots)$

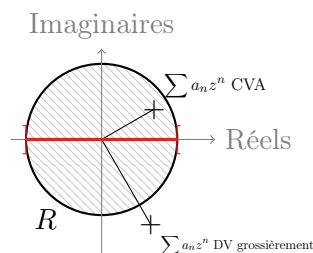
14.1 Généralités

Définition 26

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. On appelle **série entière** de la variable complexe z la série de fonctions $\sum a_n z^n$.

Le **rayon de convergence** est la borne supérieure de $I = \{z \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| z^k \text{ converge}\}$. C'est en fait la valeur maximale de z pour laquelle la série converge.

Pour calculer le rayon de convergence, il importera peu de l'étudier pour les valeurs absolues, les nombres imaginaires, etc... car c'est seulement un rayon. Dans les réels, on appellera l'intervalle $]-R, R[$ l'intervalle ouvert de convergence.



Lemme d'ABEL

S'il existe ρ tel que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée, alors

$$(14.1) \quad \forall z < \rho, |a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \quad \text{et} \quad \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

14.1.1 Rayon de Convergence

Théorème 26.1 : Relations de comparaisons

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , alors :

- i. Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$
- ii. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$
- iii. Si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$
- iv. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$

Théorème 26.2

Sur le disque ouvert D_R de convergence $] - R, R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Théorème 26.3

Sur le disque ouvert D_R de convergence $] - R, R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément et sa somme est une fonction continue.

Théorème 26.4

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Pour déterminer le rayon, il existe plusieurs méthodes, mais on se servira principalement du théorème suivant étant une conséquence de la règle de d'ALEMBERT :

14.1.2 D'ALEMBERT

Théorème 26.5 : Règle de d'ALEMBERT

Pour la série entière $\sum a_n z^n$ non nulle à partir d'un certain rang, et qu'il existe l tel que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \text{ alors } l = \frac{1}{R}$$

La réciproque est fautive : si on connaît R , on n'a pas $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
 Sinon, on a aussi $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

Preuve 26.5.1 Il suffit d'appliquer d'Alembert (cf. théorème 3.2 page 51) à la série de terme général $|a_n z^n|$ (qui est une SATP) qu'on prend à partir d'un certain rang tel que $a_n \neq 0$. Donc il existe une limite l telle que

$$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l|z|$$

Donc $|a_n z^n|$ converge si $l|z| < 1$, et diverge si $l|z| > 1$.

Puisque toute série entière de rayon de convergence $R > 0$ est absolument convergente dans son disque ouvert de convergence.

(ATTENTION)

En général, il vaut mieux utiliser le théorème original (théorème 3.2 page 51). En effet, ce théorème ne s'applique que pour des séries entières fonctions de z^n . Pour une série entière du type $\sum a_n z^{n^2}$, il n'est plus valable !

14.2 Série entière d'une variable réelle

14.2.1 Primitivation

Théorème 26.6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Sa primitive est :

$$(14.2) \quad \forall z \in]-R; R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Et la série entière $\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence R .

14.2.2 Dérivation

Théorème 26.7

La somme d'une série entière est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Théorème 26.8 : Dérivation terme à terme

(14.3)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Sa dérivée est :

$$\forall z \in]-R; R[, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Et la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence.

(ATTENTION)

Le théorème de dérivation n'est valable qu'à l'intérieur du disque de convergence !

14.3 Fonctions développables en série entière

Définition 27 : Fonction développable en série entière

$f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ admet un DSE en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que

(14.4)

boule ouverte de centre 0
 $\forall z \in V, f(z) = \sum a_n z^n$

Cette boule ouverte de centre 0 est incluse dans le disque de convergence du Développement en Série Entière (DSE) : $V \subset]-R; R[$.

Théorème 27.1 : Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) d'un DSE

$$f : \mathbb{R} \rightarrow K \text{ est un DSE en } 0 \Leftrightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

14.4 Propriétés de la somme

Continuité

Théorème 27.2

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence R

Dérivabilité

Théorème 27.3 : Dérivées successives

Les dérivées successives d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ont toutes le même rayon de convergence R

Théorème 27.4

Pour des séries entières avec $R = \min(R_a, R_b)$, alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$$

Chapitre 15

Calcul Différentiel et Intégral

15.1 Dérivation

Définition 28 : Dérivabilité

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

On notera $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans \mathbb{R} .

Théorème 28.1

f dérivable $\Leftrightarrow \exists l$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x - a)l + (x - a)\varepsilon(x)$
Alors, l est la dérivée en a de f

Propriétés

Continuité f dérivable $\Rightarrow f$ continue

Linéarité $(f + \alpha g)' = f' + \alpha g'$

Dérivées usuelles

Application linéaire u linéaire, f dérivable; $(u \circ f)'(x) = u \circ f'(x)$

Application multi-linéaire φ une application n -linéaire;

$$\left(\varphi(f_1, \dots, f_n) \right)'(x) = \sum_{i=0}^n \varphi \left(f_1(x), \dots, f_{i-1}(x), f'_i(x), f_{i+1}(x), \dots, f_n(x) \right)$$

Quotient u et v dérivables; $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Composition f et g dérivables; $(f \circ g)' = f' g'(f)$

Définition 29 : Application \mathcal{C}^1

$f \in \mathcal{C}^1(E, F)$ si l'application $f' : a \mapsto f'(a)$ existe et est continue.

Définition 30 : Dérivée k -ième

On définit récursivement la dérivée k -ième $f^{(k)}$:

$$(15.1) \quad f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

Définition 31 : Application de classe \mathcal{C}^k

f est \mathcal{C}^k si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.

Théorème 31.1 : LEIBNIZ

Soit φ une application bilinéaire, alors :

$$(Leibniz) \quad \varphi^{(n)}(f, g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

15.2 Intégration

Inégalité de la moyenne

Théorème 31.2 : Cas réel

Si f est **continue** sur un intervalle $[a, b]$ et qu'il existe m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors

$$(15.2) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

15.3 Primitive

Définition 32 : Primitive

F est une **primitive** de f si $\forall x, F'(x) = f(x)$.

Théorème 32.1

Si F est la primitive de f ,

$$(15.3) \quad \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

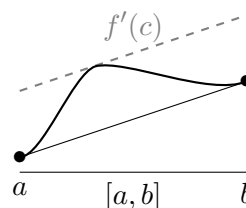
15.4 Accroissements finis

15.4.1 Cas réel

Théorème 32.2 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$, alors

$$(15.4) \quad \exists c \in]a, b[\text{ tel que } \boxed{f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)}$$



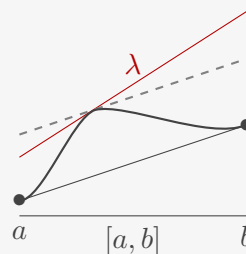
15.4.2 Cas vectoriel

Théorème 32.3 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$

Si $\exists \lambda$ tel que $\forall t \in]a, b[, N(f'(t)) \leq \lambda$, alors

$$(15.5) \quad \boxed{N(f(b) - f(a)) \leq \lambda(b - a)}$$



15.5 Formules de Taylor

Théorème 32.4 : Formules de Taylor

$f \in \mathcal{C}^{k+1}(I, E)$, avec $(a, b) \in I^2$

$$\textbf{Taylor-Young} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

$$\textbf{Taylor-Laplace} \quad f(x) = \overbrace{\sum_{p=0}^k \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)}^{T_k(x)} + \overbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt}^{\text{Reste intégral } R_k(x)}$$

$$(x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}((1-u)a + ux) du$$

$$\textbf{Taylor-Lagrange} \quad f(x) = N \left(f(b) - f(a) - \sum_{p=1}^k \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) \right) \leq \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} N_{\infty}^{[a,b]} (f^{(k+1)})$$

Chapitre 16

Intégrales sur un intervalle

Méthode

Définitions rapides

Intégrabilité $f(x)$ intégrable si $\int |f(x)| < +\infty$

Norme de la convergence en moyenne

$$N_1 : \int_I |f|$$

Norme de la convergence en moyenne quadratique

$$N_2 : f \rightarrow (f|f)^{\frac{1}{2}} \text{ (cf théorème 42.1 de la page 95)}$$

Pour prouver l'intégrabilité

1. Vérifier la continuité sur l'intervalle étudié
2. Remplacer la fonction par sa valeur absolue
3. Étudier les problèmes aux bornes
 - Trouver un équivalent
 - Trouver un $o(\dots)$
 - Avoir une primitive finie
4. Comparer la fonction
On pourra utiliser :
 - La fonction **exponentielle**

- L'intégrale de **Riemann** : $\frac{1}{t^\alpha}$
En particulier : f est intégrable si $\exists \alpha < 1$ tel que $f(x) x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- L'intégrale de **Bertrand** : $\frac{1}{|\ln(t)|^\beta t^\alpha}$

Pour intégrer

On utilisera

1. Les intégrations par partie
2. Un changement de variable
3. Cauchy-Schwarz
4. L'intégrale d'un polynôme est un polynôme

Souvent, on ne peut intégrer sur tout un intervalle comme $[0; +\infty[$. Pour y remédier, on peut poser $a > 0$ tel que notre fonction soit intégrable sur $[a; +\infty[$. Alors, la fonction est intégrable sur $\cup[a; +\infty[= \mathbb{R}^+$

16.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

16.1.1 Définition

Définition 33 : Intégrale convergente

Pour $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction \mathcal{CPM} , l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite **convergente** si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $x \rightarrow +\infty$.

Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

16.1.2 Propriétés de l'intégrale

Définition 34 : Notation $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$

Soient E et F deux intervalles de \mathbb{K} .

On note $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(E, F)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CPM}(E, F)$ dont la valeur absolue $|f|$ est intégrable sur E .

(**ATTENTION**) Cette notation n'existe pas, je l'ai inventée pour alléger la suite

Théorème 34.1 : Linéarité de l'intégration

$\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^{+\infty} f \end{array} \right\}$ est **linéaire**.

Théorème 34.2 : Positivité

Soit $f \in \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Si f est positive, alors :

$$(16.1) \quad \int_a^{+\infty} f \geq 0$$

De plus, si f est continue sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} f = 0$, alors f est nulle sur $[a, +\infty[$.

Théorème 34.3 : Dérivation

Soit f une application continue de $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_x^{+\infty} f \end{array} \right\}$ est **dérivable** et de dérivée $(-f)$ sur $[a, +\infty[$.

16.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 35 : Fonction intégrable

Soit f une fonction \mathcal{CPM} de $[a, +\infty[$ dans \mathbb{K} .

On dit que f est **intégrable** sur $[a, +\infty[$ si $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente :

$$(16.2) \quad f \text{ intégrable si } |f| \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$$

Remarque : Cela revient à dire que f est intégrable si $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument.

Définition 36 : Notation \mathcal{L}^1

Soient E et F deux intervalles de \mathbb{K} .

On note $\mathcal{L}^1(E, F)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CPM}(E, F)$ dont la valeur absolue $|f|$ est intégrable sur E .

(ATTENTION)

Une fonction dont l'intégrale converge n'est pas forcément intégrable (cf. définition 35 page 84), c'est sa valeur absolue qui doit avoir une intégrale convergente !

Si $\int_a^{+\infty} f$ est seulement convergente, l'intégrale est dite **semi-convergente**

Théorème 36.1

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

16.3 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Théorème 36.2 : Fonction positive intégrable

Soit f une fonction positive sur $[a, +\infty[$.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^{+\infty} f$ est majorée :

$$(16.3) \quad \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \iff \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \int_a^{+\infty} f \leq M$$

Théorème 36.3 : Intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$

Soit α dans \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

On étudie ici des intervalles du type $[a, +\infty[$, mais il peut être bon de savoir que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[0, 1[$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 36.4 : Relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions réelles, positives, et continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

si $0 \leq f \leq g$, $g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, $g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, $g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \iff f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

16.4 Intégration sur un intervalle quelconque

16.4.1 Sur un intervalle semi-ouvert

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant $+\infty$ par un réel b quelconque de \mathbb{R} . On effectue alors l'étude sur un semi-ouvert $[a, b[$. On retrouve alors :

- la définition 33 d'une intégrale convergente ;
- la définition 35 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 36.2, CNS d'une fonction positive intégrable ;
- le théorème 36.4 des relations de comparaisons.

Théorème 36.5 : Intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$

Soit α dans \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ($x-a > 0$).

La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ si et seulement si $\alpha < 1$ ($x-a < 0$).

16.4.2 Sur un intervalle de la forme $]a, b[$

Définition 37 : L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(**ATTENTION**) L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ n'a aucune des propriétés algébriques familières qu'on a dans \mathbb{R} : par exemple, $a+b = a+c \implies b=c$ n'est plus vrai dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 38 : Intégrale convergente sur un ouvert

Soit f une fonction $\mathcal{CPM}(]a, b[, \mathbb{K})$. Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

(16.4) L'intégrale $\int_a^b f$ est dite **convergente** s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent sur leur intervalle semi-ouvert. On pose alors :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant $+\infty$ par un réel b quelconque de \mathbb{R} . On effectue alors l'étude sur un ouvert $]a, b[$ et on retrouve :

- la définition 33 d'une intégrale convergente ;
- la définition 35 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 36.2, CNS d'une fonction positive intégrable.

16.4.3 Sur un intervalle I quelconque

Théorème 38.1 : Relation de CHASLES

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I, \mathbb{K})$ dont l'intégrale sur I converge. Pour tout $(a, b, c) \in \bar{I}^3$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, la **relation de CHASLES** nous donne :

(Chasles)
$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Soit I un intervalle quelconque entre deux bornes a et b .

Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, on note $\int_I f$ l'intégrale $\int_a^b f$. On retrouve :

- le théorème 34.1 de linéarité de l'intégration : $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel ;
- le théorème 34.2 de positivité de l'intégration.

Théorème 38.2 : Inégalité triangulaire

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{K})$ avec $p \in \mathbb{R}$. L'**inégalité triangulaire** des intégrales donne :

(16.5)
$$\left(\int_I |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

C'est l'inégalité de MINKOWSKI appliquée aux intégrales. Elle est au programme dans le chapitre 6 des fonctions convexes (page 23), en tant qu'« exemple d'inégalités de convexité ».

Théorème 38.3 : Changement de variable

Soit f une fonction **continue** sur $]a, b[$ et soit $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une fonction **bijective** (donc strictement monotone) et de classe \mathcal{C}^1 .

Les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$ sont de même nature. Si elles convergent, elles sont égales :

$$(16.6) \quad \int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du$$

Remarque : On a nécessairement $\lim_{x \rightarrow \alpha} \varphi(x) = a$ et $\lim_{x \rightarrow \beta} \varphi(x) = b$.

Théorème 38.4 : Intégration par parties

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Soient f et g deux fonctions \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Si $f \cdot g$ possède des limites finies aux bornes a et b de l'intervalle, alors les intégrales

$\int_a^b f \cdot g'$ et $\int_a^b f' \cdot g$ sont de même nature.

Si les intégrales convergent :

$$(16.7) \quad \int_a^b f(t)g'(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

où $[fg]_a^b = \lim_{x \rightarrow b} (f \cdot g)(x) - \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$

16.5 Intégration des relations de comparaison

Théorème 38.5 : 1^{er} théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{CPM}([a, b[, \mathbb{R}^+)$ telles qu'on ait une des conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \leq g \\ f = o(g) \text{ (cf. définition 6 page 12), alors :} \\ f = O(g) \end{array} \right.$$

$$(16.8a) \quad \int_a^b g \text{ converge} \implies \int_a^b f \text{ converge}$$

On a également la contraposée :

$$(16.8b) \quad \int_a^b f \text{ diverge} \implies \int_a^b g \text{ diverge}$$

Remarque : D'après le programme officiel, seule la fonction de référence doit être positive.

Théorème 38.6 : 2^e théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{CPM}([a, b[, \mathbb{R}^+)$.
Si $f \sim g$, alors f et g sont de même nature.

16.6 Passage à la limite sous l'intégrale

16.6.1 Convergence dominée

Théorème 38.7 : Convergence dominée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonction de $\mathcal{CPM}(I, K)$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CPM}(I, K)$, et s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$,
alors $f \in \mathcal{L}$ et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$

Para-
mètre
réel

16.6.2 Intégration terme à terme

Théorème 38.8 : Intégration terme à terme

(16.9) Si
$$\left. \begin{array}{l} \sum \underbrace{f_n}_{f_n \in \mathcal{L}^1} \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ \sum \int_I \underbrace{|f_n|}_{\text{converge}} \end{array} \right\}, \text{ alors } f \text{ est intégrable et :}$$

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Remarque : L'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |f_n|$ est en faite une hypothèse de domination.

16.7 Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 38.9 : Continuité

(16.10) La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t)$ est définie et continue sur A si

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in A, & t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{CM} \quad (\mathcal{CPM} \text{ pour } t) \\ \forall t \in I, & x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C} \quad (\text{Continue pour } x) \\ \forall (x, t) \in (A \times I) & |f(x, t)| \leq \varphi \quad (\text{Domination}) \\ \exists \varphi \in \mathcal{L}^1 \text{ tel que} & \end{array} \right.$$

On a aussi la version avec \mathcal{C}^k mais ce n'est pas au programme

16.8 Dérivation d'un intégrale à paramètre

Théorème 38.10 : Dérivabilité

(16.11) La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t)$ est dérivable et continue (\mathcal{C}^1) sur A si

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{CM} \quad (f \text{ intégrable pour } t) \\ f \text{ admet une dérivée partielle qui vérifie} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{CM} & (\mathcal{CPM} \text{ pour } t) \\ \forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C} & (\text{Continue pour } x) \end{array} \right. \\ \forall (x, t) \in A \times \underbrace{[a, b]}_{\in I}, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \in \mathcal{L}^1 \quad (\text{Domination}) \end{array} \right.$$

Alors, la dérivée de g est $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

16.9 Intégrabilité (Ancienne version)

À l'origine, on donne plusieurs définitions de l'intégrabilité : d'abord pour les fonctions positives, puis pour les autres en disant que c'est si $|f|$ est intégrable. On donne ici une définition plus générale :

Définition 39 : Fonction intégrable

$f(x) \in \mathcal{CM}$ est intégrable sur I si

$\forall x \in \underbrace{J}_{\text{segment}} \subset I, \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \int_J |f| \leq M$

Théorème 39.1 : CNS de l'intégration

$f(x)$ est intégrable sur I si
 $\forall x \in I, \int_I |f| \leq \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}^1$

Théorème 39.2

Si f est une fonction intégrable sur I ,

$$(16.12) \quad \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

16.10 Intégrales classiques

Théorème 39.3

Si $-\infty < a < b < +\infty$, alors $f : t \mapsto \frac{1}{(b-a)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $\alpha < 1$

Théorème 39.4 : Intégrale de Riemann

$$f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \text{ est l'intégrale de Riemann, } \begin{cases} \int_0^1 f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha < 1 \\ \int_1^{+\infty} f(x)dx & \text{existe} \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$$

16.11 Espaces vectoriels normés de fonction intégrables

Théorème 39.5 : Convergence dominée

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonction de $\mathcal{CM}(I, K)$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, K)$, et s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telle que $\forall n, |f_n| \leq \varphi$,
alors $f \in \mathcal{L}$ et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$

Théorème 39.6 : Intégration terme à terme

$$(16.13) \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f_n}_{f_n \in \mathcal{L}^1} \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ \sum \int_I \underbrace{|f_n|}_{\text{converge}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}^1 \\ \sum f_n \text{ converge} \\ \int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{array}$$

16.12 Fonction Gamma

Définition 40 : Fonction Gamma

On définit Γ de $]0, +\infty[$ par $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Cette fonction est convexe (comme produit de deux applications $x \mapsto t^{x-1}$ et $x \mapsto e^{-t}$ convexes), donc continue.

Théorème 40.1 : Étude de Γ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \dots = \sqrt{\pi}$

Preuve 40.1.1 Vérifions que Γ est une fonction continue. On utilise le théorème de continuité de fonctions paramétrés, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue par morceaux, $x \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue.

Pour dominer $t^{x-1} e^{-t}$, avec $x \in [a, b]$, on prend $\varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$

Maintenant qu'on a étudié la continuité, on peut faire une intégration par partie de $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$ en posant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(t) = t^n & \Rightarrow & u'(t) = nt^{n-1} \\ v(t) = -e^{-t} & \Rightarrow & v'(t) = e^{-t} \end{cases} \\ \Rightarrow \Gamma(n+1) = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^\infty}_{=-0+0} - \underbrace{\int_0^\infty -t^{n-1} e^{-t}}_{\Gamma(n)} \\ \Rightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n! \underbrace{\Gamma(1)}_{=1} \end{aligned}$$

d'où $\Gamma(n+1) = n!$ CQFD.

16.13 Intégrales doubles

Définition 41 : Intégrale double

f une fonction continue de $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ dans \mathbb{C} .

Alors
$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right) dt$$

Chapitre 17

Espaces Préhilbertiens réels

Dans cette section, on se placera dans \mathbb{R} .

Méthode

Définitions rapides

Produit Scalaire cf. définition 42 page 94

Éléments orthogonaux x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Famille orthogonale $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$

Distance de x à une partie F $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

17.1 Produit scalaire

Définition 42 : Produit scalaire

Le produit scalaire est défini comme suit :

- (i) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \varphi(x, x) > 0$ (définie positive)
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie)
- (iii) $\forall x \in E, \underline{y \mapsto \varphi(x, y) \text{ est linéaire}}$ (linéaire à droite)

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E . L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

Remarque : La symétrie et la linéarité impliquent la linéarité à gauche, donc la bilinéarité du produit scalaire.

Théorème 42.1 : Norme associée

$x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E . On la note $\|x\|$, et $\|x\|^2 = (x|x)$.

Théorème 42.2 : Inégalité CAUCHY-SCHWARZ

$$(17.1a) \quad |(x|y)| \leq (x|x)^{\frac{1}{2}} \times (y|y)^{\frac{1}{2}}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$(17.1b) \quad |(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Théorème 42.3 : Pythagore

Si x_1, \dots, x_n sont des éléments de E deux à deux orthogonaux, alors

$$(17.2) \quad \left\| \sum_{i=0}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=0}^n \|x_i\|^2$$

(ATTENTION) Ce sont bien des normes car x_i au carré n'existe pas (qu'est-ce que le produit de deux vecteurs ?), du coup on utilise $\|\cdot\|^2 = (\cdot|\cdot)$

17.2 Orthogonalité

Définition 43 : Éléments orthogonaux

Deux éléments x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Théorème 43.1 : Procédé d'orthonormalisation de SCHMIDT

Pour toute base de (e_i) , il existe une base (ε_i) telle que :

$$(17.3) \quad \begin{cases} (\varepsilon_i) \text{ est une base orthonormée} \\ \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \\ (e_i|\varepsilon_i) > 0 \end{cases}$$

On aura souvent recours à compléter une base $(e_i)_k$ avec $n - k$ vecteurs orthonormaux aux $(\varepsilon_i)_k$ par le théorème de la base incomplète.

Théorème 43.2 : Inégalité de BESSEL

Si (e_i) est une base orthonormée : $\sum_i (e_i | x)^2 \leq \|x\|^2$

17.3 Automorphismes orthogonaux

u est un endomorphisme, donc il est linéaire.

Définition 44

- i. u un endomorphisme, il existe un unique endomorphisme u^* tel que

$$\forall (x, y) \in E, (u(x) | y) = (x | u^*(y))$$

u^* est l'**adjoint** de u .

- ii. u est **autoadjoint** (symétrique) si $u^* = u$
 iii. u est un **automorphisme orthogonal** si $u^* = u^{-1}$. On note $u \in \mathcal{O}(E)$

Propriétés

- i. Si $M_{\mathcal{B}}(u) = A$, alors $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t A$
 ii. $\text{Ker}(u^*) = [\text{Im}(u)]^\perp$
 iii. $\text{Im}(u^*) = [\text{Ker}(u)]^\perp$
 iv. $\chi_u = \chi_{u^*}$
 v. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

Théorème 44.1 : Caractérisation d'un automorphisme orthogonal

u est un automorphisme orthogonal si les assertions suivantes (équivalentes) sont vérifiées :

- i. u conserve la norme
 ii. u conserve le produit scalaire
 iii. $u(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$
 iv. $\forall \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}, \exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$ telle que $u(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$

$$\text{v. } \exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}} \text{ telle que } \left| \begin{array}{c} U^t U = I_n \\ \text{ou} \\ {}^t U U = I_n \end{array} \right| \text{ où } U = M_{\mathcal{B}}(u)$$

Théorème 44.2 : Théorème spectral

Tout **endomorphisme auto-adjoint** est diagonalisable, et il existe une base ortho-normale de vecteurs propres de u .

Toute **matrice symétrique réelle** est diagonalisable. On peut aussi dire :

$$(17.4) \quad \forall A \in S_n, \exists \left| \begin{array}{c} P \in \mathcal{O}(n) \\ D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \end{array} \right| \text{ tel que } A = P D P^{-1} = P D^t P$$

Chapitre 18

Espaces Préhilbertiens complexes

18.1 Structure Préhilbertienne complexe

On se place dans \mathbb{C} et on établit de nouveau le produit scalaire comme à la définition 42 page 94 du chapitre précédent. À une différence prêt, la symétrie est appelée **symétrie hermitienne**

Définition 45 : Produit scalaire

Le produit scalaire est défini comme suit :

- (i) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x, x) > 0$ (définie positive)
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (symétrie hermitienne)
- (iii) $\forall x \in E, \quad y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (linéaire à droite)

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E . L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

18.2 Orthogonalité

Théorème 45.1 : Inégalité de BESSEL

Si (e_i) est une base orthonormée :
$$\sum_i |(e_i|x)|^2 \leq N_2^2(x)$$

18.3 Séries de FOURIER

Méthode

Coefficients

Exponentiels $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt$

Trigonométriques

- $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt$
- $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) dt$

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ **2π -périodiques** et **continues** sur $[0, 2\pi]$.

On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ **2π -périodiques** et **continues par morceaux** sur $[0, 2\pi]$.

(**ATTENTION**)

Sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$, N_1, N_2 et N_∞ ne sont plus des normes, mais elles fonctionnent toujours de la même manière

Cette sous-section se base sur le théorème suivant :

Théorème 45.2

Pour toute fonction dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que

$$N_2(f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

L'objectif des séries de FOURIER est de « transposer » une fonction dans une base de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

On prendra pour bases $(e^{it}, e^{2it}, \dots, e^{int})$ ou $(\cos(t), \cos(2t), \dots, \cos(nt))$ par exemple, et grâce à un produit scalaire, on obtient la décomposition de notre fonction dans la base. C'est ainsi qu'on définit les coefficients :

Définition 46 : Coefficients exponentiels

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{-i \cdot n \cdot t}}_{\text{on est sur } \mathcal{C}_{2\pi}} f(t) dt$$

En effet : $c_n(f) = (e_n | f)$ avec $e_n = e^{int}$. Or le produit scalaire pour des fonctions est $(g | f) = \int_0^{2\pi} \overline{g(t)} f(t) dt$, d'où $(e_n | f) = \int_0^{2\pi} \overline{e^{int}} f(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt$

On aurait très bien pu intégrer sur $[-\pi, \pi]$ au lieu de $[0, 2\pi]$. C'est ce qu'on fera plus tard avec les coefficients trigonométriques.

Propriétés

- $g : t \mapsto f(-t)$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$
- $f_a : t \mapsto f(t+a)$, $c_n(f_a) = e^{ina} c_n(f)$

Théorème 46.1 : Dérivée de f

$$c_n(f') = in c_n(f)$$

$$\text{d'où, par récurrence : } c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Définition 47 : Coefficients trigonométriques

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) dt$$

Ici, c'est $\frac{1}{\pi}$ en facteur, car $N_2^2(\cos(n\bullet)) = \frac{1}{2}$

Propriétés

- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$
- Si f est paire, alors $b_n = 0 \forall n$
- Si f est impaire, alors $a_n = 0 \forall n$

En général, on utilisera ces coefficients si f présente une parité.

Définition 48 : Série de FOURIER

On appelle **série de FOURIER** de f la série $\sum u_n$ où
$$\begin{cases} u_0 &= c_0(f) e_0 \\ u_n &= c_n(f) e_n + c_{-n}(f) e_{-n} \end{cases}$$

 $S_n(f)$ est appelée **somme partielle de rang n de la série de FOURIER**

Théorème 48.1 : Inégalité de Bessel

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$\sum_{k=-n}^n |c_n(f)|^2 \leq N_2^2(f)$$

Théorème 48.2 : Théorème de convergence PARSEVAL

Si f est une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$, alors $N_2(f - S_n(f))$ converge vers 0

Avec ce nouveau théorème, on trouve le cas d'égalité de l'inégalité de Bessel :

Théorème 48.3 : Égalité de Parseval

Si f est une fonction de $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = N_2^2(f)$$

En réel, cette égalité devient :

$$N_2^2(f) = \left(\frac{a_0(f)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n^2(f) + b_n^2(f)]$$

Théorème 48.4 : Calcul des Coefficients

Si on a la suite s_n telle que
$$\begin{cases} s_n = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e_k \\ N_2(s_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \alpha_n$$

Preuve 48.4.1

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|c_k(s_n - f)| \leq N_2(s_n - f)$. Donc $|c_k(f) - \alpha_k| \leq N_2(s_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où, quand $n \rightarrow +\infty$, $c_n(f) = \alpha_n$.

Théorème 48.5 : Théorème de convergence normale

Si f est $\mathcal{C}_{2\pi}$ et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux ^a

alors sa série de FOURIER converge normalement et sa somme vaut f
sa somme partielle de sa série de FOURIER S_n converge uniformément

$a. C^1$ par morceaux c'est à dire que la dérivée est continue par morceaux, à ne pas confondre avec $f \in \mathcal{CM}$

Définition 49 : Noyau de DIRICHLET

On appelle **noyau de DIRICHLET**, et on note $D_p(t)$ la somme : $D_p(t) = \sum_{k=-p}^p e^{ikt}$

Théorème 49.1 : Noyau de DIRICHLET

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et C^1 par morceaux, alors sa série de FOURIER **converge simplement** sur \mathbb{R} .

Sa somme au point x , notée $\tilde{f}(x)$ est égale à $\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} [f(x+h) + f(x-h)]$. Si f est **continue**, alors $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Cinquième partie

Équations Différentielles

Chapitre 19

Équations Différentielles Linéaire

Méthode

Résoudre une équation différentielle

Scalaire du 1^{er} ordre Méthode algorithmique, cf. preuve 1.1.1 page 106

Vectérielles du 1^{er} ordre

- Avec les coefficients constants
- Avec une matrice Diagonalisable
- Avec une matrice Trigonalisable

Scalaire du second ordre

Définition 1

I un \mathbb{K} -Algèbre

On appelle Équation différentielle l'équation (\mathcal{L}) :

$$(\mathcal{L}) \quad a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t)$$

(a_0, \dots, a_n) est dans $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}))^{n+1}$. L'ensemble des solutions de \mathcal{L} dans I est noté $S_I(\mathcal{L})$

19.1 Équations Différentielles **Scalaire**s d'ordre 1

Théorème 1.1 : Solution de l'équation différentielle scalaire

Si $y' = a(t)y + b(t)$, alors $S_I(\mathcal{L})$ est un sous-espace affine

Preuve 1.1.1 (Algorithmique) Par hypothèse, $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, donc $a(t)$ admet une primitive $P(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-P(t)} y(t)) &= -P'(t) e^{-P(t)} y(t) + e^{-P(t)} y'(t) \\ &= \underbrace{-a(t)}_{-a(t)} y(t) e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \left(\underbrace{a(t) y(t) + b(t)}_{a(t) y(t) + b(t)} \right) \\ &= e^{-P(t)} b(t) \end{aligned}$$

Si c est intégrable, $\exists C$ tel que :

$$\begin{aligned} e^{-P(t)} y(t) &= \int_{t_0}^t (e^{-P(u)} b(u) du + C) \\ y(t) &= \int_{t_0}^t (e^{-P(u)} b(u) du + C) e^{P(t)} \end{aligned}$$

est solution de l'équation.

19.2 Équations Différentielles Vectorielles d'ordre 1

Définition 2 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

$$(\mathcal{L}) \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$. Le **Problème de CAUCHY** revient à trouver, pour tout (t_0, x_0) dans $I \times F$, une solution φ de (\mathcal{L})

(**ATTENTION**) a est une application de I dans $\mathcal{L}(F)$. Donc $a(t)$ est une application linéaire, pas un scalaire

Théorème 2.1 : Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire

Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall (t_0, x_0) \in (I, F), \exists! \varphi \text{ telle que } \begin{cases} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Système fondamental

Définition 3 : Système Fondamental

Un système fondamental de solutions est une base dans l'espace $S_I(\mathcal{H})$ des solutions.

Propriétés

- Si $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de $S_I(\mathcal{L})$, alors, $\forall t \in I$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base dans F

Définition 4 : Wronskien

Le Wronskien est le déterminant d'un système fondamental de solution.

(Wronskien)

$$W(t) = \det_{\mathcal{B}} \left(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \right)$$

(ATTENTION)

Le Wronskien est une fonction de t

Propriétés

- $W'(t) = \text{tr}(a) W(t)$
- $W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(s) ds}$

Théorème 4.1 : Variation des constantes

Soit $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ une base de $S_I(\mathcal{H})$.

Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$, $\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une unique famille } \overbrace{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}^{\text{dans } \mathcal{C}^1(I, F)} \text{ telle que } \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i \\ \varphi \in S_I(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \forall t \in I, \sum_{i=1}^n \lambda'_i(t) \varphi_i(t) = b(t) \end{array} \right.$

Pour une équation à coefficients a et b constants $x' = ax + b(t)$, la solution générale est

$$y(t) = e^{(t-t_0)a} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a} b(s) ds$$

19.3 Équations Différentielles linéaires du second ordre

Définition 5 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

$$(\mathcal{L}) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = \gamma(t)$$

L'équation homogène est

$$(\mathcal{H}) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On note $f(r) = r^2 + a \times r + b$ son polynôme caractéristique

19.3.1 Coefficients constants

Théorème 5.1 : Résolution de l'équation

Dans le cas de l'équation homogène (\mathcal{H}) , on calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution $y(t)$ pour l'équation homogène :

$$\begin{array}{l|l} \Delta \neq 0 & y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \\ \Delta = 0 & y(t) = (A + Bt)e^{rt} \end{array}$$

Ou encore :

$$\begin{array}{l|l} \Delta > 0 & r_{\pm} = \alpha \pm \beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t)) \\ \Delta < 0 & r_{\pm} = \alpha \pm i\beta \quad y(t) = e^{\alpha t} (A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t)) \\ \Delta = 0 & r \text{ double} \quad y(t) = (A + Bt)e^{rt} \end{array}$$

Théorème 5.2

Si dans (\mathcal{L}) , $\gamma(t) = P(t)e^{\lambda t}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, alors on peut donner une solution :

$$(19.2) \quad t \mapsto t^{\omega(\lambda)} Q(t)e^{\lambda t}$$

où $\omega(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de f et $Q \in \mathbb{C}[X]$ est de même degré que P .

19.3.2 Cas général

Théorème 5.3 : Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire

Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{L}) \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = \gamma(t)$$

où $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall (t_0, (x_0, x'_0)) \in (I, \mathbb{K}^2), \exists! \varphi \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ soit solution de l'équation (E)} \\ \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x'_0 \end{array} \right.$$

Preuve 5.3.1

Le théorème est une conséquence du théorème 2.1 si on résout plutôt $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}(t) \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$

Définition 6 : Wronskien

Si u et v sont des I -solutions, le **Wronskien** est l'application définie par

$$W = uv' - u'v$$

Propriétés

Dans l'équation $(\mathcal{H}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$,

- $W + aW = 0$
- (u, v) libre $\Leftrightarrow \exists t_0$ tel que $W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t, W(t) \neq 0$

Théorème 6.1 : Méthode de variation des constantes

En connaissant (u, v) un système fondamental de solutions, on cherche une solution de la forme $y(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t)$. On détermine c_1 et c_2 avec :

$$(19.3) \quad c'_1 \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + c'_2 \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Chapitre 20

Équations Différentielles non linéaires

20.1 Équations autonomes

Définition 7 : Champ de Vecteur

On appelle **champ de vecteurs** l'application qui à un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $\overrightarrow{V(M)} \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} U \in \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{C}^1} & \mathbb{R}^2 \\ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \overrightarrow{V(M)} \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition 8 : Système Autonome

On appelle **système autonome** associé au champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ le système différentiel

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \overrightarrow{V(M)}}$$

Le mot *autonome* témoigne de la non-dépendance en t du champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$

Théorème 8.1 : CAUCHY-LIPSCHITZ (*admis*)

Avec les données précédentes, pour tout couple $(t_0, (x_0, y_0)) \in (I \times U)$, il existe une unique I -solution maximale $\varphi : t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, telle que $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Une **solution maximale** est une solution qui n'est la restriction d'aucune autre. Son intervalle de définition est l'intervalle maximal.

20.2 Équations non autonomes

Dans cette section on appelle **équation différentielle** :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = f(t, x)$$

où f est une fonction de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

Théorème 8.2 : CAUCHY-LIPSCHITZ (*admis*)

U un intervalle ouvert de \mathbb{R}^2 , et en reprenant l'équation (\mathcal{E}) :

$$\forall (t_0, x_0) \in U, \exists! \varphi \text{ telle que } \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ soit } \textbf{solution maximale} \text{ de l'équation } (\mathcal{E}) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Chapitre 21

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on se place dans (E, N) et (F, P) , des espaces vectoriels normés de dimension finie. U est un ouvert de E

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow F \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

21.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition 9 : Dérivée selon un vecteur

Soit $f : U \rightarrow F$ la fonction définie précédemment.

Soit v un vecteur non nul de E , et t un réel tel que $a + tv \in U$.

On dit que f **admet une dérivée selon le vecteur v au point a** (ou admet une **dérivée directionnelle**) si la fonction réelle $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. Cette dérivée en a est notée $D_v f(a)$.

On a alors :

$$(21.1) \quad D_v f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Définition 10 : Dérivées partielles dans une base

Soit $f : U \rightarrow F$ la fonction définie précédemment.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . On appelle **dérivée partielle** de f dans $(e_n)_n$ ses dérivées par rapport aux vecteurs. La i -ième dérivée partielle en a est notée $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ainsi :

$$(21.2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

21.2 Différentielle

21.2.1 Application différentiable

Définition 11 : Application différentiable au point a

Soit $f : U \rightarrow F$ la fonction définie précédemment.

On dit que f est **différentiable** au point a s'il existe une fonction linéaire $df(a) : E \rightarrow F$ telle que :

$$(21.3) \quad \forall h \in E, f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(h)$$

(ATTENTION) $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application linéaire de E dans F . On l'applique sur un vecteur h en notant $df(a)(h)$ ou $df(a) \cdot h$

Théorème 11.1 : f dérivable en a

Soit f la fonction définie précédemment.

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et est dérivable en a selon tout vecteur. Sa dérivée selon le vecteur v est alors :

$$(21.4) \quad D_v f(a) = df(a)(v)$$

21.2.2 Jacobien, Jacobienne

Définition 12 : Jacobienne, Jacobien

Soient $(e_i)_i$ et $(e'_i)_i$ deux bases de respectivement E et F .

Soit $f = (f_j)_j$ la fonction définie précédemment telle que $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i f_i(x_i) \cdot e'_i$. On

définit la **Jacobienne** $\mathcal{J}_a(f)$ comme la matrice de terme général $j_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = D_j f_i(a)$.

Le **Jacobien** est le déterminant de cette matrice.

Exemple : La Jacobienne de la fonction polaire (qui à (r, θ) associe $(r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)$) est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$. Son Jacobien est donc $r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r$

21.3 Opérations sur les applications différentiables

Théorème 12.1 : Différentielle d'une composée d'applications

Soient E, F et G trois espaces vectoriels **normés réels** de dimension finie.

Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\begin{array}{lcl} f & : & E \rightarrow F \\ g & : & F \rightarrow G \end{array}$$

Alors, la fonction $g \circ f$ est différentiable sur un ouvert de E et :

(21.5)
$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

21.4 Cas des applications numériques

21.4.1 Gradient

Définition 13 : Gradient

Soit E un espace euclidien, et f une application allant de U un ouvert de E à \mathbb{R} .
On appelle **gradient** de f en a l'unique vecteur de E , noté $\text{Grad } f(a)$, tel que :

(21.6)
$$\forall v \in E, \quad df(a) \cdot v = (\text{Grad } f(a) | v)$$

Expres-
sion
dans
une base
ortho-
normé

Remarque : Parfois, le gradient de f en a , $\text{Grad } f(a)$, est aussi noté $\nabla f(a)$

21.4.2 Représentation des formes linéaires

Définition 14 : Dual d'un Espace Vectoriel (ev) réel

Soit E un espace euclidien.

On appelle **dual** de E , et on note $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ ou E^* , l'ensemble des formes linéaires de E dans \mathbb{R} .

Théorème 14.1 : Représentation des formes linéaires

Soit E un espace euclidien.

Pour toute forme linéaire f de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$:

(21.7)
$$\exists ! y, \forall x \in E, \quad f(x) = (x | y)$$

Preuve 14.1.1 Pour tout $y \in E$, on peut associer l'application $\theta_y : x \mapsto (x | y)$. Cette application est linéaire. L'application

$$\left| \begin{array}{lcl} \theta & : & E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ y & \mapsto & \theta_y \end{array} \right.$$

est également linéaire. Son noyau $\text{Ker}(\theta)$ étant nul, θ est injective. Mais E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ étant de même dimension, elle est donc **bijective**.

Toute forme linéaire a donc un antécédant par θ . □

21.4.3 Point critique

Définition 15 : Point critique

On appelle **point critique** d'une application différentiable $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ tout point de E tel que

$$(21.8) \quad df(a) = 0$$

Définition 16 : Extremum local

Soit E un espace euclidien, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f présente un **extremum local** en un point a si pour tout voisinage de a :

$$(21.9a) \quad \forall x \in V, f(x) \leq f(a) \quad (\text{Maximum local})$$

$$(21.9b) \quad \forall x \in V, f(x) \geq f(a) \quad (\text{Minimum local})$$

Théorème 16.1 : Condition nécessaire d'existence d'extremum

Soit E un espace euclidien, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une **fonction différentiable**.
Si f présente un extremum local en un point a , alors $df(a) = 0$.

(ATTENTION) La réciproque de ce théorème est fausse

21.5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

21.6 Applications de classe \mathcal{C}^1

21.7 Applications de classe \mathcal{C}^k

Chapitre 22

Fonctions de plusieurs variables

Méthode

Étude d'une fonction à deux variables

Passer en polaire

Dans ce chapitre, on se place dans (E, N) et (F, P) , des espaces vectoriels normés de dimension finie. U est un ouvert de E

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow F \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

22.1 Différentielle, dérivée

22.1.1 Différentielle

Définition 17 : Différentielle

Il existe au plus un élément φ de $\mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

φ est appelée la **différentielle** de f . On la note $df(a)$

Remarque : a et h sont des vecteurs. Donc sous la forme $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. De plus, $\varphi(h)$

est une application linéaire : $\varphi(h) \in \mathcal{L}(E, F)$

22.1.2 Dérivée selon un vecteur

Définition 18 : Dérivée en un point

On note $\varphi_h : t \mapsto f(a + th)$.

f admet une dérivée en a selon h si φ_h est dérivable en 0.

Alors, on note cette dérivée $D_h f(a) = \varphi'_h$. Si elle existe :

$$D_h f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

On a alors la dérivée pour tout a définie par la fonction $D_h f : a \mapsto D_h f(a)$

Définition 19 : Application de classe \mathcal{C}^1

f est de classe \mathcal{C}^1 sur U si $\forall j \in [1, n], D_j f$ existe et est continue sur U

Définition 20 : \mathcal{C}^k -difféomorphisme

f (bijective) est un **\mathcal{C}^k -difféomorphisme** si elle et son inverse sont \mathcal{C}^k . C'est-à-dire :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(U, V) \\ f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, U) \end{cases}$$

22.2 Inversion locale

Théorème 20.1 : Théorème d'inversion locale (*admis*)

$f \in \mathcal{C}(U, F)$ injective est \mathcal{C}^k -difféomorphisme

\Leftrightarrow

$\forall a \in U, df(a)$ isomorphisme de E dans F

22.3 Complément sur les courbes planes

Théorème 20.2 : Formule de GREEN-RIEMANN

Un compact D délimitée par une courbe plane Γ positivement orientée et \mathcal{CM}^1 . Soient P et Q deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert dans lequel Γ est tracé. On

(22.2)

admet la formule de GREEN-RIEMANN :

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] (x, y) \, dx \, dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

Sixième partie

Géométrie

22.4 Arcs Paramétrés

Définition 1 : Arc Paramétré

On appelle **arc paramétré** de classe \mathcal{C}^k un couple (I, f) avec $\begin{cases} I & \text{un intervalle de } \mathbb{R} \\ f & \text{une application de } \mathcal{C}^k(I, E) \end{cases}$

Définition 2

Quelques autres définitions :

Valeur Régulière	t_0	$f'(t_0) \neq 0$
Valeur Birégulière	t_0	$(f'(t_0), f''(t_0))$ est libre
Abscisse Curviligne	s	$s' = N_2(f'(t))$ sur un intervalle
Paramétrage normal	(J, g)	—

Exemple d'abscisse curviligne : $s : t \mapsto \sinh(t)$ car $N_2(s(t)) = \sqrt{\int |\sinh(t)|^2} = \sinh'(t) = \cosh(t)$. L'avantage d'une abscisse curviligne est de pouvoir simplifier l'étude d'une courbe.

22.5 Courbes Planes

22.5.1 En polaire

Définition 3 : Fonction arg

$\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une bijection de $] -\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Sa réciproque est l'application $u \mapsto \arg(u)$

Si on prend $u \in \mathbb{U}$, en notant $u = x + iy$, alors $\arg(u) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$

Théorème 3.1 : Théorème du Relèvement

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{U})$ (avec $n \neq 0$).

$\exists \theta \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ tel que $f(t) = e^{i\theta(t)}$. θ est appelé **relèvement** de f .

Preuve 3.1.1 Si elle existe, θ n'est pas unique ($t \mapsto \theta(t) + 2\pi$ convient aussi).

Donc $f'(t) = i\theta'(t)f(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = -i \frac{f'(t)}{f(t)}$.

On peut alors intégrer : $\theta(t) = C - i \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$, et il ne reste plus qu'à prouver l'existence en ayant cette expression de $\theta(t)$

Définition 4 : Tangente

Si θ est une valeur régulière, on note V l'angle $\left(\vec{u}_\theta, \frac{d\vec{M}_\theta}{d\theta}\right)$, et on définit $\tan(V) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$

22.5.2 Étude d'une courbe paramétrée

Méthode

Étude de courbes paramétrées

Quelques conseils :

- On essaye, si possible, de passer en polaire
- Ne pas oublier de vérifier les ensembles de définition
- Lors de l'étude **au voisinage d'un point**, il suffit d'étudier les dérivées successives grâce à un développement limité

On a l'expression de x et y en fonction de t : $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Pour étudier la courbe :

1. Ensemble de **définition** $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_g$
2. Étude des **variations** : on étudie x' , y' et $\frac{y'}{x'}$
3. **Branches infinies**
 - $x = \lim f$ ou $y = \lim g$ sont des asymptotes (avec $\lim f$ et $\lim g$ des limites finies)
 - Si, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ les deux fonctions tendent simultanément vers l'infini, on étudie $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y}{x}$

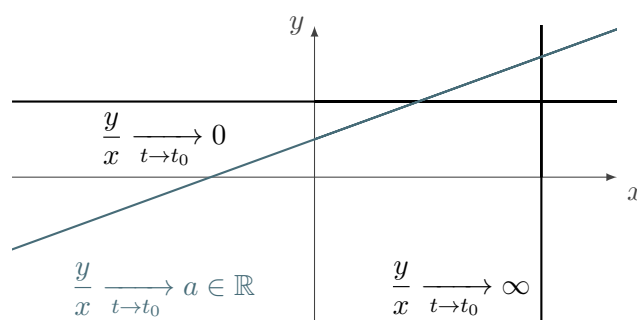


FIGURE 22.1 – Différents types d'asymptotes en fonction de $\frac{y}{x}$

Dans le cas où $\frac{y}{x} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} a \in \mathbb{R}$, on peut déterminer b de l'équation $y = ax + b$ en examinant $y - ax$

Septième partie

Annexe

22.6 Équivalences

Pour une définition de l'équivalence, cf. définition 4 page 11

Formule de STIRLING
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Équivalence de \ln
$$\frac{\ln(u)}{t^\alpha} \sim t^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

Équivalents usuels en 0

$\sin(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cos(u)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$	$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$
$\sinh(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cosh(u)-1 \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$	$e^u-1 \underset{0}{\sim} u$

22.7 Trigonométrie

22.7.1 Définition

$$(22.3) \quad \begin{cases} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases} \quad (22.4) \quad \begin{cases} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

22.7.2 Addition / Produit

$$(22.5) \quad \begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} & \begin{array}{l} \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin a \sin b \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b \end{array} \end{array}$$

22.7.3 Dérivation

Dérivées des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \tan' x &= \frac{1}{1 + \cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ \arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan' x &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

22.7.4 Formule de MOIVRE

$$(22.6) \quad (\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Généralités

Conjugué $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Convexité La fonction **exponentielle** est **convexe**, la fonction **logarithme** est **concave**

Inégalités

Modules	$\left\ \sum_i x_i \right\ \leq \sum_i \ x_i\ $	
Module d'intégrales	$\left \int_I f \right \leq \int_I f $	(16.12)
Inégalité de la Moyenne	$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$	(15.2)

22.8 Formules usuelles

$$\begin{array}{l}
 a^k - b^k = (a - b) \left(\sum_{p=0}^{k-1} a^p b^{k-1-p} \right) \\
 \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\
 \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}
 \end{array}
 \right.$$

22.9 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels normés usuels :
 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathbb{C}_n[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}),$ _____

22.10 Astuces

Primitives de 1 Dans une IPP, on peut primitiver 1 par $1+x$ pour enlever un terme au dénominateur. *Exemple* : $(\ln(1+x))^n$

Fontion k -lipschitzienne Il suffit de montrer que $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $|f'(t)| \leq k$

Inverse d'une Matrice 2×2 Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $M^{-1} = \frac{1}{da - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dérivée de a^x On a $a^x = e^{x \ln(a)}$, donc sa dérivée est $\boxed{\ln(a) \times a^x}$

Liste des acronymes

CNS	Condition Nécessaire et Suffisante. 75, 86, 87, 91
DL	Développement Limité. 50
DSE	Développement en Série Entière. 75
ev	Espace Vectoriel. 114
LCI	Loi de Composition Interne. 17
s-ep	sous-espace propre. 32, 33
SATP	Série À Termes Positifs. 4, 51, 52, 53, 74

Index

- Abscisse curviligne, 120
- Accroissements finis, 79
- Adhérence, 48
- Adjoint, 96
- Arc paramétré, 120
- Autoadjoint, 96
- Automorphisme orthogonal, 96

- BANACH
 - Espace, 42
- Barycentre, 23
- BERNOULLI, 65
- BOLZANO
 - WEIERSTRASS, 42

- CANTOR, 57
- CAUCHY-LIPSCHITZ, 106, 108, 110, 111
- CAYLEY-HAMILTON, 38
- CÉSARO, 53
- CHASLES, 87
- C^k -difféomorphisme, 117
- Compact, 42
- Complet, 41
- Complexe, 13
- Composante connexe, 44
- Concave, 27
- Connexe par arcs, 44
- Variation des Constantes, 107
- Convergence
 - dominée, 89, 91
 - série, 50
- Convexe, 23, 25, 43
- Covariance, 65

- Dérivabilité, 77
- Dérivée
 - partielle, 112
- Développement en Série Entière, 75
- Diagonalisable, 35
- Différentiable, 113
- Différentielle, 116
- DIRICHLET
 - Noyau, 103
- Distance, 40
- Diverge
 - grossièrement, 51
- Droite
 - stable, 32
- Dual, 114

- Écart-type, 64
- Endomorphisme
 - induit, 31
- Ensemble
 - dénombrable, 56
 - équipotent, 56
 - fini, 56
- Épigraphe, 26
- Équation Différentielle, 105
 - du 2^e ordre, 108
 - scalaire, 105
 - vectorielle, 106
- Équivalence, 11
- Espace
 - normé, 40
 - préhilbertien, 94, 98
 - probabilisable, 60
 - probabilisé, 61
 - vectriel, 39
- Espérance, 63
- EULER, 21
- Extremum
 - local, 115

- Famille
 - sommable, 57, 58
- Fermé, 46
- Fonction génératrice, 66
- Série de FOURIER, 101
- FUBINI, 70

- Gamma, 92
- Gradient, 114
- GRASSMAN, 38

GREEN-RIEMANN, 118
 Groupe, 17
 de KLEIN, 17
 monogène, 18
 produit, 17
 HEINE, 43
 Inégalité
 de JENSEN, 26
 Inégalité
 de BESSEL, 96, 98, 101
 de CAUCHY-SCHWARZ, 64, 95
 triangulaire, 40
 Intégrable, 84
 Intégrale
 convergente, 83, 87
 semi-convergente, 85
 Intérieur, 47
 Isomorphisme, 20
 Jacobien(ne), 113
 k -lipschitzienne, 125
 Matrice
 semblable, 30
 Module, 13
 Moment(Probabilités), 64
 Monogène, 18
 Morphisme
 de groupe, 19
 Nilpotent, 20, 36
 Norme, 40
 Euclidienne, 40
 Ouvert, 46
 PARSEVAL
 théorème de convergence, 102
 égalité, 102
 Point critique, 115
 Polynôme
 caractéristique, 34
 d'un endomorphisme, 37
 Polynôme
 caractéristique(Équation différentielle), 108
 Primitive, 79
 Probabilité, 61
 Problème de CAUCHY, 106
 Procédé
 d'Orthonormalisation de SCHMIDT, 95
 Produit scalaire, 94, 98
 Rayon de convergence, 72
 Relèvement, 120
 SATP, 51
 Série
 alternée, 52
 entière, 72
 Solution
 maximale, 110
 Sous-espace
 propre, 32
 Sous-groupe, 17
 engendré, 18
 STIRLING, 124
 Système
 autonome, 110
 fondamental de solutions, 107
 Système complet(probabilités), 61
 Tangente, 121
 Taylor
 (Formules), 80
 Lagrange, 81
 Laplace, 81
 Young, 81
 Tribu, 60
 TSSA, 52
 univers, 60
 Valeur
 birégulière, 120
 propre, 32, 34
 régulière, 120
 Variance, 64
 Vecteur
 propre, 32, 34
 Champ de Vecteur, 110
 WEIERSTRASS
 approximation, 69
 Wronskien, 107, 109