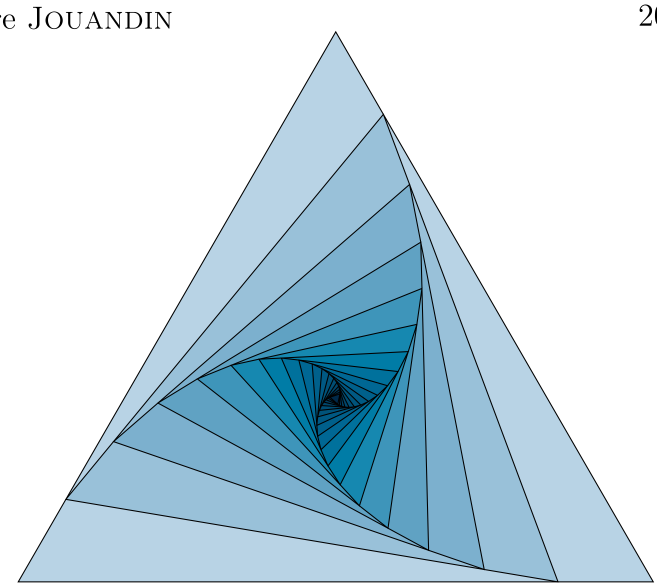
Cours de Prépa

Mathématiques

Écrit par
Alexandre Jouandin

Année
2013—2015



16 avril 2015

Table des matières

Première partie

Première année

Chapitre 1

Géométrie

1.1 Équations générales

Type	Équation
Droite	$ax + by + c = 0$
Plan	$ax + by + cz + d = 0$
Cercle	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
Sphère	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Chapitre 2

Calculs algébriques

2.1 Somme des termes d'une suite arithmétique

Définition 1

Soit I un ensemble fini, et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

La somme des x_i est notée $\sum_{i\in I} x_i$

Le produit des x_i est noté $\prod_{i\in I} x_i$

Théorème 1.1 : Somme des entiers de 1 à n

Pour tout n de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n-1)}{2} \tag{2.1}$$

Preuve 1.1.1

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 \quad + \quad 2 \quad + \cdots + n-1 + \quad n \\ + \quad S & = & n \quad + n-1 + \cdots + \quad 2 \quad + \quad 1 \\ \hline 2S & = & n+1+n+1+\cdots+n+1+n+1 \end{array} \tag{2.2}$$

d'où $2S = n \times (n+1)$, *et* $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Théorème 1.2 : Somme des premières puissances

Pour tout n entier naturel non nul, on a :

(2.3a)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(2.3b)
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Les démonstrations de ces formules se font par récurrence (en connaissant le résultat), ou en primitivant.

2.2 Coefficients binomiaux

Définition 2

Pour E un ensemble fini de n éléments, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de sous-parties de E à p éléments.

(2.4)
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Chapitre 3

Suites

Définition 3 : Borne supérieure

On appelle **borne supérieure** d'une partie F d'un ensemble ordonné fini E **le plus petit des majorants** de F.
En d'autres termes,

(3.1)
$$a = \sup F \Leftrightarrow \forall y \in F, \Big[a \leq y \Leftrightarrow (\forall x \in F, x \leq y)\Big]$$

Théorème 3.1 : Théorème de la suite monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si (u_n) est majorée, alors elle converge **vers sa borne supérieure**.
Sinon, si (u_n) n'est pas majorée, alors elle admet $+\infty$ pour limite.

3.1 Comparaison de suites

Définition 4 : Suites équivalentes

Deux suites u_n et v_n sont dites **équivalentes** en l'infini s'il existe une suite w_n tendant vers 1 en l'infini telle que $u_n = w_n \times v_n$.
Autrement dit :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \exists w_n \xrightarrow[+\infty]{} 1 \text{ tq } u_n = w_n v_n}$$

Définition 5 : $O(\cdots)$ et $o(\cdots)$

Si x_n est une suite de $(E, N)^{\mathbb{N}}$ et (α_n) une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

(3.3)
$$\begin{aligned} x_n = O(\alpha_n), \text{ si } \forall M \in R^+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad & n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq M|\alpha_n| \\ x_n = o(\alpha_n), \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad & n \geq n_0 \implies N(x_n) \leq \varepsilon|\alpha_n| \end{aligned}$$

Définition 6 : $O(\cdots)$ **et** $o(\cdots)$ **dans** $\mathbb{R}$

Si $(\alpha_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$,

(3.4)
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \text{ est bornée.}$$
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n), \text{ si et seulement si } \frac{x_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(**Attention**) Une suite ne peut pas, à notre niveau, être ~ 0, en $o(0)$ ou $O(0)$, car la définition dirait que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

3.2 Suites de Cauchy

Définition 7 : Suite de Cauchy

Une suite $(x_n)_n$ dans (E, N) est dite de Cauchy si

(3.5)
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geq n_0 \implies \boxed{N\big(x_{n+p} - x_n\big) < \varepsilon}$$

3.3 Suites usuelles

Méthode

Suite récurrente du premier ordre

Soit une suite récurrente linéaire u_n de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. On cherche λ un point fixe : $\lambda = a\lambda + b$. On trouve $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$.
2. On montre que la suite $v_n = (u_n - \lambda)$ est une suite géométrique de raison a.
3. Ainsi, $v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - \lambda)$. D'où $u_n = a^n(u_0 - \lambda) + \lambda$.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit une suite récurrente linéaire u_n de la forme :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

1. On pose la fonction caractéristique : $f(r) = r^2 - ar + b$

2. On calcule son déterminant $\Delta = (-a)^2 - 4b$. Deux cas se présentent :

   - $\Delta = 0$, alors $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u_n = (\lambda + \mu n)\left(\frac{a}{2}\right)^n$
   - $\Delta \neq 0$, alors $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 Plan complexe

Définition 8 : Corps complexe $(\mathbb{C}, +, \times)$

Un **nombre complexe** est un élément $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, c'est un corps muni des lois suivantes :

Addition $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
de neutre $(0, 0)$

Multiplication $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
de neutre $(1, 0)$

Théorème 8.1

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps (*cf.* tableau 4.1 page 18 pour la définition d'un corps)

Définition 9 : Module

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle **module** la valeur $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

4.2 Nombres complexes de module 1

Définition 10

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Le disque unité est l'ensemble de ses points.

Propriétés

- $\mathcal{U}$ est stable par le produit $\times$
- $z \in \mathcal{U} \Longleftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{z}$

Deuxième partie

Structures algébriques usuelles

		Groupe	Groupe Abélien	Anneau	Corps
Loi (+/*)	Neutre e (ou 0)	✓	✓	✓	✓
	Assossiative	✓	✓	✓	✓
	Symétrique (admet a^{-1})	✓	✓	✓	✓
	Commutative		✓	✓	✓
Loi $\times$	Neutre 1			✓	✓
	Associative			✓	✓
	Distributive de la loi +			✓	✓
	Commutative				✓
	Inversible				✓

Table 4.1 – Tableau récapitulatif des définitions

Chapitre 5

Groupes et sous-groupes

5.1 Groupes et sous-groupes

Définition 1 : Groupe

On appelle **groupe** le couple $(G, *)$ où G est un ensemble muni d'$*$, une Loi de Composition Interne (LCI) associative, symétrique, et admettant un neutre.

5.1.1 Produit fini de groupes

Définition 2 : Groupe Produit

Soient $(G, *)$ et $(G', \circ)$ deux groupes.
Le groupe $\left(G \times G', \square\right)$ tel que

$$(x, x')\square(y, y') = (x * y, x' \circ y')$$

est un groupe appelé **groupe produit** de G et G'

Exemple : Groupe de Klein

Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est appelé **groupe de Klein**. C'est un groupe produit, il n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et **il a la spécificité de ne pas être cyclique**.

5.1.2 Sous-groupe

Définition 4 : Sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe, et soit H une partie de G
On dit que H est un **sous-groupe** de G si, muni de la LCI $*$, H est un groupe stable par $*$.

Théorème 4.1 : Caractérisation d'un sous-groupe

Avec les notations précédentes, H est un sous-groupe de G si :

- H n'est pas vide
- $\forall (x, y) \in H^2$, $x * y^{-1} \in H$.

En général, pour vérifier que H est non vide, on vérifie que le neutre e de G est aussi dans G.

Théorème 4.2 : Intersection de sous-groupes

Soit $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-groupes.
Alors $H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i$ est un sous-groupe.

Preuve 4.2.1 *Avec les notations précédentes, montrons que H est un sous-groupe :*

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N},\, e \in H_i \quad &\Longrightarrow \quad e \in H \\ \forall (x, y) \in H^2,\, \forall i \in \mathbb{N},\, (x, y) \in H_i^2,\ \text{donc } x * y^{-1} \in H_i \quad &\Longrightarrow \quad x * y^{-1} \in H \end{aligned}$$

Ainsi, H respecte les propriétés de caractérisation d'un sous-groupe, donc H est un sous-groupe. $\square$

Définition 5 : Sous-groupe engendré

Soit G un groupe, et soit A une partie de G.
L'intersection des sous-groupes de G contenant A est le plus petit sous-groupe contenant A.
On le note $\langle A \rangle$, et on dit que c'est le **sous-groupe engendré** par A.

Théorème 5.1 : Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

Pour tout sous-groupe H de $(\mathbb{Z}, +)$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$

Preuve 5.1.1 *Soit H un sous-groupe. Si $H = \{0\}$, alors $H = 0\mathbb{Z}$.*
Supposons maintenant que H contient au moins un entier.
Soit n le plus petit entier de H. Il convient de dire que $n\mathbb{Z} \in H$.
Soit m un entier quelconque de H. Effectuons sa division euclidienne par n :

$$\begin{aligned} &m = nq + r \qquad 0 \leq r < n \\ &nq \in H,\, m \in H \implies \boxed{r \in H} \end{aligned}$$

Or n étant le plus petit entier dans H, r dans H étant inférieur à n, $r = 0$, donc $m = nq$ $\square$

5.2 Morphismes de groupes

5.2.1 Définition

Définition 6 : Morphisme de groupes

On appelle **morphisme** d'un groupe $(G, *)$ à un groupe $(H, \times)$ l'application f telle que

(5.1) $$\forall (x, y) \in G^2,\ f\,(x * y) = f(x) \times f(y)$$

5.2.2 Propriétés d'un morphisme de groupes

Théorème 6.1 : Image et image réciproque d'un sous-groupe

L'image d'un sous-groupe par un morphisme est un sous groupe.
L'image réciproque d'une sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe

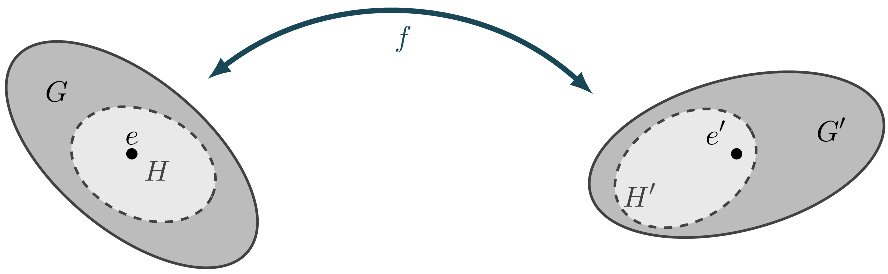


FIGURE 5.1 – Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme f

Théorème 6.2 : Condition d'injectivité d'un morphisme

Soit f un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(H, \times)$. Alors :

f est **injective** $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{e\}$
f est **surjective** $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = H$

Propriétés

Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes de neutres respectifs e et e'. Alors :

- $f(e) = e'$
- $\forall x \in G,\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

5.2.3 Isomorphismes

Définition 7 : Isomorphisme

Un morphisme de groupe **bijectif** est appelé **isomorphisme**

Théorème 7.1 : Réciproque d'un isomorphisme

La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

5.3 Groupes monogènes et cycliques

Définition 8 : Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la classe des éléments ayant tous le même reste par la division euclidienne par n.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.

E.g. : *Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, l'élément $\bar{1}$ est la classe des éléments de $\mathbb{Z}$ ayants tous le même reste $\bar{1}$ dans leur division par 3.*

Théorème 8.1 : Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les éléments générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les classes $\dot{k}$ où $k \wedge n = 1$.

Définition 9 : Groupe monogène

G est un **groupe monogène** s'il est engendré par un seul élément a, c'est-à-dire si $G = \langle a \rangle$.

Définition 10 : Groupe cyclique

Un groupe monogène fini est appelé **groupe cyclique**.
Plus visuellement, un groupe monogène est cyclique $G = \langle a \rangle$ s'il peut s'écrire sous la forme :

$$G = \left\{e, a, a^2, \ldots, a^n\right\}$$

Théorème 10.1

Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.
Tout groupe monogène fini de cardinal n (groupe cyclique d'ordre n) est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

5.4 Ordre d'un élément dans un groupe

Définition 11 : Ordre d'un groupe

L'**ordre** d'un groupe fini est son cardinal n.

Définition 12 : Ordre d'un élément dans un groupe

Soit $a \in G$. Si $\langle a \langle$ est fini, l'**ordre de a** est le cardinal de ce sous-groupe.

Théorème 12.1 : Théorème de Lagrange

Dans un groupe fini, l'ordre d'un sous-groupe est un **diviseur** de l'ordre du groupe.

Définition 13 : Éléments nilpotents

Un élément est **nilpotent** si, composé par lui même, il peut être nul :

$$\left\{\begin{array}{l} a \text{ nilpotent} \\ a \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^{\alpha} \text{ tel que } a^p = 0 \tag{5.2}$$

5.5 Classe d'équivalence

Définition 14 : Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est une relation binaire caractérisée de la manière suivante :

$$\left|\begin{array}{rll} \forall x \in E, & \boldsymbol{x\mathcal{R}x} & \textbf{(Réfléxivité)} \\ \forall (x,y) \in E^2, & x\mathcal{R}y \implies \boldsymbol{y\mathcal{R}x} & \textbf{(Symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in E^3, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies \boldsymbol{x\mathcal{R}z} & \textbf{(Transitivité)} \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Définition 15 : Relation d'ordre

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ est également une relation binaire. Elle se caractérise de la manière suivante :

$$\left|\begin{array}{rll} \forall x \in E, & \boldsymbol{x\mathcal{R}x} & \textbf{(Réfléxivité)} \\ \forall (x,y) \in E^2, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies \boldsymbol{x = y} & \textbf{(Anti-symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in E^3, & \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies \boldsymbol{x\mathcal{R}z} & \textbf{(Transitivité)} \end{array}\right. \tag{5.4}$$

(**Attention**) Bien savoir ce que signifient Symétrie et Anti-symétrie

Théorème 15.1 : Indicatrice d'Euler

C'est la fonction φ telle que

$$\varphi(n) = \text{Card}\big(\{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*\}\big)$$

Troisième partie

Algèbre

Chapitre 6

Fonctions convexes

6.1 Parties convexes d'un espace vectoriel réel

6.1.1 Barycentre

Définition 1 : Barycentre

Soit $\left(x_i, \alpha_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille finie de points pondérés telle que la somme des coefficients $\sum_i \alpha_i \neq 0$. On appelle **barycentre** des points x_i le point G tel que :

(6.1) $$G = \frac{\sum_i \alpha_i \; x_i}{\sum \alpha_i}$$

Rajouter les propriétés des barycentres

6.1.2 Partie convexe

La partie suivante est copiée de la sous-section 8.7.1 page 46 :

Définition 2 : Convexe

Un ensemble E est **convexe** si :

(6.2) $$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], \boxed{tx + (1 - t)y \in E}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

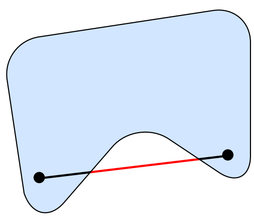


FIGURE 6.1 – Un ensemble non convexe

Théorème 2.1 : Intersection de convexes

L'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe.

Remarque : Ce théorème est même valable pour une famille infinie.

Théorème 2.2 : Convexe dans $\mathbb{R}$

I de $\mathbb{R}$ est convexe **si et seulement si** I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème 2.3 : Caractérisation à l'aide de barycentres

Une partie X de E est convexe **si et seulement si** le barycentre G de toute famille pondérée finie $\left(x_i, \alpha_i\right)_i$ telle que $\alpha_i \geq 0\ \forall i$ appartient à X :

$$G \in X \tag{6.3}$$

(Bien sûr, on a toujours $\sum \alpha_i \neq 0$.)

6.2 Fonctions convexes d'une variable réelle

La définition suivante est copiée de la définition 36 page 46.

Définition 3 : Fonction convexe

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite **convexe** si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in]0,1[, \boxed{f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)} \tag{6.4}$$

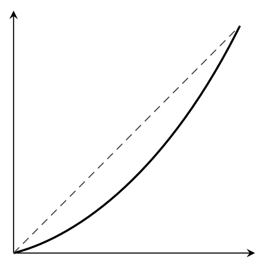


Figure 6.2 – Une fonction convexe

Théorème 3.1 : Position relative du graphe

Une fonction est convexe **si et seulement si** tout arc de son graphe est situé en-dessous de la corde correspondante.

Définition 4 : Épigraphe

Soit f une fonction de graphe $\Gamma_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$.
On appelle **épigraphe** de f l'ensemble Γ_f^+ des points situés au dessus du graphe Γ_f. C'est-à-dire :

$$\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\} \tag{6.5}$$

Théorème 4.1 : Convexité de l'épigraphe

Une fonction est convexe **si et seulement si** son épigraphe est convexe.

Théorème 4.2 : Inégalité de Jensen

Soit f une fonction **convexe** sur un intervalle I.
Soit $n \geq 2$. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in I^n$ une famille de points de I.
Pour toute famille de **réels positifs** $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

l'**inégalité de Jensen** donne :

(6.6)
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Démo épigraphe

Théorème 4.3

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.
Pour tout $x \in I$, soit Φ_x la fonction :

(6.7)
$$\Phi_x : t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

f est convexe sur I **si et seulement si** , pour tout $x \in I$, Φ_x est croissante sur $I \backslash \{x\}$.

Théorème 4.4 : Inégalité des pentes

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un **ouvert** $I \in \mathbb{R}$ tel que I n'est pas réduit à un singleton.
Si f est convexe, alors f est dérivable en tout point de I à gauche et à droite, et pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$:

(6.8)
$$f'_g(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_g(y) \leq f'_d(y)$$

Remarque : On déduit de la dérivabilité que f est continue sur I.

Définition 5 : Fonction concave

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite **concave** si son opposée $-f$ est une fonction convexe.

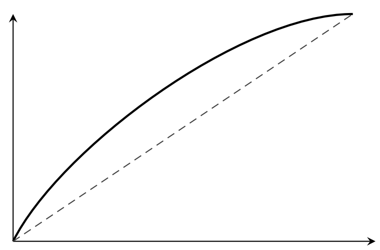


Figure 6.3 – Une fonction concave

6.3 Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

6.3.1 Dérivabilité et convexité

Théorème 5.1 : Caractérisation par la dérivabilité

Soit f une fonction dérivable sur I.
f est convexe sur I **si et seulement si** sa dérivée f' est croissante sur I.

Preuve 5.1.1 *Si f est convexe, d'après le théorème 4.4 de l'inégalité des pentes, pour $x < y$, on a $f'(x) \leq f(y)$. Donc f' est croissante.*

Réciproquement, supposons f' croissante, et prenons deux points x et y de I tels que $x < y$. Soient a et b tels que $y = ax + b$ est l'équation de la droite joignant x et y. Soit $g(t) = f(t) - (at + b)$, de dérivée $g'(t) = f'(t) - a$ croissante. D'après le théorème 45.2 des accroissements finis (page 93), $\exists c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = a$, c'est-à-dire tel que $g'(c) = 0$. g' étant croissante, elle est négative sur $[x, c]$, et positive sur $[c, y]$. On en déduit le tableau de variation :

t	x		c		y
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc g est toujours négative, donc $f(t) \leq (at + b)$ implique que la courbe est toujours en dessous de sa corde, donc f est convexe sur I.

Ainsi, f convexe $\iff$ f' est croissante. $\square$

Théorème 5.2 : Caractérisation par la dérivée double

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
f est convexe sur I **si et seulement si** sa dérivée double f'' est positive sur I :

$$f \text{ convexe sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in I,\ f''(x) > 0 \qquad (6.9)$$

6.3.2 Position de la tangente

Théorème 5.3 : Tangentes

Le graphe d'une fonction convexe **dérivable** est au-dessus de chacune de ses tangentes

6.3.3 Exemples d'inégalités de convexité

Chapitre 7

Réduction des Endomorphismes

Méthode

Valeurs propres

Pour montrer que λ est une valeur propre d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E, on peut :

- Revenir à la définition, et trouver un vecteur propre x tel que $u(x) = \lambda x$
- Montrer que l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est non-injective, c'est-à-dire que

  $$\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$$

- Montrer que λ est une racine du polynôme caractéristique χ_u de u
- On sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace

Polynôme caractéristique

Si on cherche le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u, ces étapes peuvent permettre d'avancer sa détermination :

- Prendre le polynôme dont les racines sont les valeurs propres de u. C'est à dire le polynôme $\prod(X - \lambda_i)$
- Reconnaitre les coefficients de degré $n-1$ et 0 (*cf.* théorème 12.2 page 34).
- Si la matrice est triangulaire, faire le produit des éléments diagonaux.

Polynôme minimal

Si on cherche le polynôme minimal d'un endomorphisme u dans l'espace E de **dimension finie**, on peut avoir recours aux affirmations suivantes :

- Le polynôme minimal divise le polynome caratéristique.
- Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de u d'ordre de multiplicité m_i, alors le polynôme minimal est la valeur minimale des m_i' tels que

$$\Pi_u(u) = \left(X - \lambda_i\right)^{m_i'}(u) = 0$$

- Si on a un polynôme annulateur P, on peut le factoriser pour obtenir les racines. Puisque le polynôme minimal Π_u divise P, il reste à essayer de combiner ces racines pour obtenir le polynôme de plus petit degré qui annule u.

Théorème de décomposition des noyaux

En général, dès qu'on voit une somme directe, on utilise le théorème de décomposition des noyaux. Si on a P, un polynôme annulateur de u tel que $P(u) = 0$, alors on a $\mathrm{Ker}P(u) = E$, et si $P(u)$ est le produit de plusieurs polynômes, par exemple A et B, on peut écrire

$$E = \mathrm{Ker}A(u) \oplus \mathrm{Ker}B(u)$$

Diagonalisation

Pour vérifier qu'une diagonalisation est possible, se rapporter au théorème 14.1 page 35 sur la caractérisation de la diagonalisation. Une fois vérifiée, la diagonalisation peut s'effectuer à l'aide des astuces suivantes :

- Chercher un vecteur propre évident, par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ si les lignes sont toutes de même somme ;
- Utiliser des opérations sur des lignes ou des colonnes et développer pour obtenir un déterminant plus simple à calculer ;
- Faire un pivot de Gauss pour obtenir une matrice triangulaire (ou éventuellement triangulaire par blocs) ;
- Calculer le polynôme caractéristique avec la méthode de Sarrus.

7.1 Generalités

7.1.1 Matrices carrées semblables

Définition 6 : Matrices semblables

Deux matrices sont dites semblables si elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 6.1

Deux matrices sont **semblables** **si et seulement si** il existe une matrice P inversible telle que

$$A_1 = PA_2P^{-1} \tag{7.1}$$

Théorème 6.2 : Trace et déterminant

Deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant. Ce sont des **invariants de similitude**.

C'est ce dernier théorème qui permet de confirmer l'unicité de la trace et du déterminant d'un endomorphisme.

7.1.2 Sous-espace stable par un endomorphisme

Définition 7 : Sous-espace stable

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et u un endomorphisme de E. On dit que F est stable par u si :

$$\forall x \in F,\, u(x) \in F \tag{7.2}$$

On écrit alors que $u(F) \subset F$.

La restriction de u à F au départ et à l'arrivée est l'**endomorphisme induit**.

(**Attention**) La simple restriction de u à F ($u_{|F}$) est une application de F dans E et ce n'est pas un endomorphisme, alors que l'endomorphisme induit va de F à F.

Traduction matricielle

On va maintenant voir, conformément au programme, la traduction en termes de matrices. On se place donc dans E qui est cette fois de **dimension finie** n.
Si on reprend le sous-espace F, on peut trouver une base $(e_1, \cdots, e_p)$. Cette base peut être complétée en une base de n vecteurs de E : $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p, \cdots, e_n)$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ \vdots \\ e_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} e_1 & \dots & e_p & \dots & e_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \end{array}$$

où B est la matrice de l'endomorphisme induit.

7.2 Éléments propres d'un endomorphisme

Théorème 7.1 : Droite stable

Une **droite** est **stable** par un endomorphisme u ssi elle est engendrée par un vecteur propre de u.

7.2.1 Éléments propres

Définition 8 : Valeur propre, vecteur propre

Soit u un endomorphisme de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un scalaire λ est appelé **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x **non nul** de E tel que

$$u(x) = \lambda x \tag{7.3}$$

Si un tel vecteur x existe, on l'appelera **vecteur propre**.

Définition 9 : Sous-espace propre

Avec les notations précédentes, on appelera **sous-espace propre (s-ep)** associé à une valeur propre λ le sous-espace vectoriel E_λ :

$$E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \tag{7.4}$$

C'est donc le sous-espace de E contenant 0 et tous les vecteurs propres de u.

7.2.2 Éléments propres en dimension finie

(Attention) On se place dans un espace E de **dimension finie**. Les théorèmes et définitions qui suivent ne sont valables (au programme) que dans ces conditions.

Définition 10 : Spectre

Le spectre d'un endomorphisme u de E, noté $\mathrm{sp}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

Théorème 10.1 : Famille finie de s-ep

La somme d'une famille finie de sous-espace propre (s-ep) E_{λ_i} de valeurs propres λ_i deux à deux distinctes est directe :

$$\sum_i E_{\lambda_i} = \bigoplus_i E_{\lambda_i} \tag{7.5}$$

Le programme officiel précise le corrolaire qui va avec :

Théorème 10.2 : Famille de vecteurs propres

Toute famille de vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont deux à deux distinctes est libre.

Théorème 10.3

Pour u un endomorphisme de E de dimension finie n, le **spectre** de u est fini, et de cardinal **au plus** n.

Théorème 10.4

Deux matrices semblables ont même spectre.

Théorème 10.5 : Endomorphismes commutant

Soient u et v sont deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie.
Si u et v commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Preuve 10.5.1 *Soit λ une valeur propre de u, et E_λ l'espace propre associé. On a :*

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda I)$$

*Soit x_λ de E_λ. x_λ est un vecteur propre de u. Pour montrer qu'un sous-espace propre de u est stable par v, **il faut montrer que** $v(x_\lambda) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda I)$. Or :*

$$\begin{aligned}(u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) &= u \circ v(x_\lambda) - \lambda v(x_\lambda) \\ &= v \circ u(x_\lambda) - v(\lambda x_\lambda) \\ &= v\Big(u(x_\lambda) - \lambda x_\lambda\Big)\end{aligned}$$

D'où :

$$(u - \lambda I) \circ v(x_\lambda) = 0$$

Donc v est stable par tout s-ep de u. □

Définition 11 : Éléments propres d'une matrice

Soit A une matrice carrée de E un espace de dimension finie.
On appelle **valeur propre** de A un scalaire λ pour lequel il existe X tel que :

$$AX = \lambda X \tag{7.6}$$

Si ce vecteur X existe, on l'appelle **vecteur propre** de la matrice A pour la valeur propre λ.

Par extension, on définit le s-ep d'une matrice de manière similaire à la définition 9 page 32.
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice forme son spectre $\mathrm{sp}(A)$.

7.3 Polynôme Caractéristique

Pour une matrice carrée M, on cherche un polynôme dont les valeurs propres sont les racines. C'est alors qu'est né le polynôme caractéristique.

Définition 12 : Polynôme caractéristique

Soit u un endomorphisme de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** n. Soit M sa matrice dans une base associée $\mathcal{B}$.
Le **polynôme caractéristique** de u, noté χ_u, est le déterminant de l'application $(u - X\,\mathrm{Id}_E)$
De même, le **polynôme caractéristique** de la matrice M, noté χ_M, est le déterminant de la matrice $(M - X\,I_n)$

(7.7) $$\chi_u = \det(u - X\,\mathrm{Id}_E) \qquad\qquad \chi_M = \det(M - X\,I_n)$$

Ce polynôme est de degré n. Le polynôme caractéristique doit être **unitaire**.
Bien sûr, on a :

(7.8) $$\chi_u = \chi_M$$

Théorème 12.1

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Preuve 12.1.1 ***(Facile)***
Soient A et A' nos deux matrices semblables. Elles représentent le même endomorphisme u dans des bases différentes. Donc

$$\begin{cases} \chi_u &= \chi_A \\ \chi_u &= \chi_{A'} \end{cases}$$

D'où $\chi_A = \chi_{A'}$. □

Théorème 12.2 : Valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$

Pour une matrice M de rang n, on peut obtenir quelques coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_M = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}(M) \times X^{n-1} + \cdots + \det(M)$$

Pour une matrice de rang 2, le polynôme caractéristique est donc donné par

$$\boxed{\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}(M)\,X + \det(M)}$$

Preuve 12.2.1 *Il suffit de développer le polynôme caractéristique, en sachant que les valeurs propres sont les racines, puis d'identifier.*

Théorème 12.3 : Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$\chi_A = \det(A - X\, I_n) = \prod (a_{i,i} - X) \tag{7.10}$$

Théorème 12.4 : Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Soit u un endomorphisme de E. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit de u divise χ_u.

7.4 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

7.4.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 13 : Endomorphisme diagonalisable

On dit qu'un endomorphisme u de E est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est **diagonale**.

On verra au théorème 14.1 que cette base $\mathcal{B}$ est constituée des vecteurs propres.

Définition 14 : Quelques définitions

Quelques définitions portant sur les polynômes :

Racine simple Une racine α du polynôme P est dite simple si elle n'est pas multiple. On dit que son ordre de multiplicité est égal à 1.

Polynôme scindé P est scindé s'il peut s'écrire comme le produit de polynômes du premier degré.

Théorème 14.1 : Caractérisation de la diagonalisation

On donne des équivalences à "u diagonalisable" :

i. E admet une base formée des vecteurs propres de u ;

ii. E est somme directe des espaces propres de u : $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda$;

iii. $\dim E = \sum \dim E_\lambda$;

iv. le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé, et $\omega(\lambda) = \dim(E_\lambda)$;

v. le polynôme minimal Π_u de u est scindé à racines simples ;

vi. u possède au moins un polynôme annulateur scindé à racines simples ;

vii. u admet pour matrice une matrice diagonalisable.

Enfin, une condition juste suffisante pour diagonaliser un endomorphisme :

Théorème 14.2 : Condition suffisante de diagonalisation

Si u admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes deux à deux, alors u est diagonalisable.

7.4.2 Matrice diagonalisable

Définition 15 : Matrice diagonalisable

Une matrice carrée A est dite **diagonalisable** si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.

On se servira plutôt du théorème suivant comme définition :

Théorème 15.1

Une matrice carrée A est diagonalisable **si et seulement si** elle est semblable à une matrice diagonale D :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad A = PDP^{-1} \tag{7.11}$$

P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de A.

On peut alors traduire matriciellement tous les théorèmes vus dans la section précédente, notamment le théorème 14.1 page 35 qui caractérise la diagonalisation.

7.5 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Définition 16 : Endomorphisme trigonalisable

On dit qu'un endomorphisme u de E est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est **triangulaire supérieure**.

Définition 17 : Matrice trigonalisable

Une matrice carrée A est dite **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T :

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad A = PTP^{-1} \tag{7.12}$$

Théorème 17.1 : Autre "définition"

Une matrice carrée est trigonalisable **si et seulement si** l'endomorphisme u canoniquement associé est trigonalisable.

Théorème 17.2 : Caractérisation de la trigonalisation

Un endomorphisme u est trigonalisable **si et seulement si** son polynôme caractéristique ou son polynôme annulateur est scindé.
Plus généralement, u est trigonalisable **si et seulement si** u possède au moins un polynôme annulateur scindé.

Théorème 17.3 : Trigonalisation dans $\mathbb{C}$

Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.

Ces deux théorèmes peuvent également se traduire matriciellement.

7.6 Endomorphismes nilpotents

7.6.1 Définition

Définition 18 : Endomorphisme nilpotent

On dit qu'un endormorphisme u est **nilpotent** d'indice $p \geq 1$ si $u^p = 0$ avec $u^{p-1} \neq 0$.

7.6.2 Propriétés en dimension finie

Théorème 18.1 : Endomorphisme nilpotent trigonalisable

Un endomorphisme u dans un espace E de dimension finie est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre.

Théorème 18.2 : Majoration de l'indice de nilpotence

Dans un espace E de dimension n, l'indice de nilpotence d'un endomorphisme ne dépasse pas n.

Si u est nilpotent d'indice n, il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \text{\huge 0} & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

7.7 Polynômes d'un endomorphisme

Définition 19 : Polynôme d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.

(7.14) Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on définit l'endomorphisme

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k$$

$P(u)$ est appelé **polynôme de l'endomorphisme** u.

Théorème 19.1 : Morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$

Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, l'application $P \mapsto P(u)$ est un **morphisme d'algèbre** de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$.

Noyau et Image de ce morphisme

7.7.1 Polynôme minimal

Définition 20 : Polynôme minimal

Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle **polynôme minimal** l'unique polynôme Π_u **unitaire** et **non nul**, s'il existe, tel que Π_u annule u et soit de plus petit degré ($\forall\ Q$ diviseur de Π_u distinct de Π_u, $Q(u) \neq 0$).

Théorème 20.1

Si d est le degré du polynôme minimal P_u de u, alors la famille $(u^k)_{k\in[0,d-1]}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Preuve 20.1.1 *Soit d le degré minimal du polynôme minimal P_u. La famille $(\mathrm{Id}, u, u^2, \ldots, u^{d-1})$ est libre.*

7.7.2 Valeur propre et polynôme annulateur

Théorème 20.2

Soit u un endomorphisme de E. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
Pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Preuve 20.2.1

$$\begin{aligned} u(x) = \lambda x &\implies u^k(x) = \lambda^k x \\ &\implies P(u)(x) = \sum_k a_k\ u^k(x) = P(\lambda)x \end{aligned}$$

On remarque que le vecteur propre associé à λ est aussi associé à $P(\lambda)$. $\square$

Théorème 20.3

Si P annule u, toute valeur propre de u est une racine de P.

Preuve 20.3.1 *On se sert du théorème précédent :*

$$\begin{aligned} P(u) = 0 &\implies P(u)(x) = 0 \\ &\implies P(\lambda)x = P(u)(x) = 0 \end{aligned}$$

Puisque $x \neq 0$, on retrouve que λ est racine de P. □

7.7.3 Cayley-Hamilton

Théorème 20.4 : Cayley-Hamilton

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel fini, alors le polynôme caractéristique χ_u est un polynôme annulateur de u.
Le polynôme caractéristique est donc un multiple du polynôme minimal.

7.8 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 20.5 : Théorème de décomposition des noyaux

Soient deux polynomes P et Q de $\mathbb{K}[X]$. Pour P et Q **premiers entre eux** :

(7.15a) $$\text{Ker}\left[(PQ)(u)\right] = \text{Ker}\left[P(u)\right] \oplus \text{Ker}\left[Q(u)\right]$$

Maintenant, on va voir le théorème dans une forme plus générale, qu'on déduit par récurrence sur le théorème précédent.

Théorème 20.6 : Théorème de décomposition des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et u un endomorphisme de E.
Si $A_1, \cdots, A_p$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ **premiers deux à deux**, alors :

(7.15b) $$\text{Ker}\Big((A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p)(u)\Big) = \bigoplus_{i=1}^{p} \text{Ker}\big(A_i(u)\big)$$

7.9 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Bouger Grass-dude

Théorème 20.7 : Formule de Grassman

Si V et W sont deux espaces vectoriels de **dimension finie** de E alors :

(7.16) $$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

7.10 Endomorphismes à polynôme minimal scindé

Définition 21 : Sous-espace caractéristique

Soit u un endomorphisme trigonalisable de E. Son polynôme caractéristique χ_u est scindé :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

On appelle **sous-espace caractéristique** de u les sous-espaces :

$$F_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i} \tag{7.17}$$

Théorème 21.1 : Décomposition avec les sous-espaces caractéristiques

Soit u un endomorphisme pour lequel il existe un polynôme annulateur scindé (c'est-à-dire u est trigonalisable).
L'endomorphisme $u_i : F_{\lambda_i} \to F_{\lambda_i}$ induit par u dans F_{λ_i} est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Preuve 21.1.1 *On a :*

$$u_i = \lambda_i \mathrm{Id}_E + (u_i - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$$

Ici, $\lambda_i \mathrm{Id}_E$ est une homothétie.
De plus, $(u_i - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i} = 0$ par définition de F_{λ_i}, donc $(u_i - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ est un endomorphisme nilpotent. □

Chapitre 8

Topologie des espaces vectoriels normés

Méthode

Application continue

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une application continue $f : E \to F$.

- $f : A \in E \to F$ conserve :
  - les parties compactes
  - les parties connexes par arcs
- $f^{-1} : F \to E$ conserve :
  - les parties fermées
  - les parties ouvertes

8.1 Normes et espaces vectoriels normés

8.1.1 Rappels

Définition 22 : Espace vectoriel

Soit $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel s'il respecte les conditions suivantes :

$$\left|\begin{array}{llll} (i) & (E,+) \text{ est un} & \underline{\textbf{groupe abélien}} & \textbf{Groupe pour la loi } + \\ (ii) & \forall x \in E, & 1 \cdot x = x & \textbf{Neutre multiplicatif} \\ (iii) & \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, & (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x & \textbf{Distributivité pour } \mathbb{K} \\ (iv) & \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, & \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y & \textbf{Distributivité pour } \boldsymbol{E} \\ (v) & \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x,y) \in E^2, & \alpha \cdot (\beta \cdot y) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x & \textbf{Associativité} \end{array}\right. \tag{8.1}$$

8.1.2 Norme

Définition 23 : Définition de la norme

Soit E un espace vectoriel de $\mathbb{K}$. Une **norme** est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

(8.2)
$$\left|\begin{array}{lll} (i) & \forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0 & \textbf{Séparation} \\ (ii) & \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) & \textbf{Homogénéité} \\ (iii) & \forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y) & \textbf{Inégalité triangulaire} \end{array}\right.$$

Et le couple (E, N) est l'**espace vectoriel normé** associé.

Théorème 23.1 : Norme N_2

$N_2 : f \mapsto \left(\int_{[a,b]} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$

8.1.3 Distance

Il y a plusieurs manières de définir la distance. Si on se place dans un espace vectoriel normé, on peut utiliser la norme pour définir la distance, comme dans la définition 25. Sinon, si l'espace est quelconque, la distance peut avoir la définition générale suivante :

Définition 24 : Distance dans un espace quelconque

Soit E un ensemble. On appelle **distance** dans E toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

(8.3)
$$\left|\begin{array}{llll} (i) & \forall x \in E, & d(x,y) = 0 \implies x = y & \textbf{Séparation} \\ (ii) & \forall (x,y) \in E^2, & d(x,y) = d(y,x) & \textbf{Symétrie} \\ (iii) & \forall (x,y,z) \in E^3, & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) & \textbf{Inégalité triangulaire} \end{array}\right.$$

Définition 25 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé
La **distance** d associée à la norme $\|\cdot\|$ est l'application :

(8.4)
$$\begin{array}{rl} d : E^2 & \to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \mapsto \|x-y\| \end{array}$$

8.1.4 Boules

Définition 26 : Boule

Dans une espace vectoriel normé (E, N), on définit les boules centrées en a et de rayon r

Boule ouverte de rayon r centrée en a : $x \in E | N(x-a) < r$
Boule fermée de rayon r centrée en a : $x \in E | N(x-a) \leq r$
Sphère de rayon r centrée en a : $x \in E | N(x-a) = r$

8.1.5 Parties, suites, fonctions bornées

Définition 27 : Partie bornée

Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe une boule $B(a,r)$ la contenant :

(8.5) $$\exists (a,r),\ A \subset B(a,r)$$

Théorème 27.1 : CNS d'une partie bornée

Une partie A de E est **bornée** <u>**si et seulement si**</u> il existe un réel M tel que :

(8.6) $$\forall x \in A,\ \|A\| \leq M$$

(**Attention**) Le caractère borné d'une partie dépend de la norme. Il peut donc arriver qu'une partie soit bornée pour une norme et pas pour une autre.

Définition 28 : Application bornée

Une application $f : X \to E$ est dite **bornée** si l'ensemble $\{f(x),\ x \in X\}$ est borné.

8.1.6 Produit scalaire

Définition 29 : Produit scalaire

Le **produit scalaire** est défini comme suit :

$$\begin{array}{rrll}
(i) & \forall x \in E \backslash \{0\}, & \underline{\varphi(x,x) > 0} & \textbf{(définie positive)} \\
(ii) & \forall (x,y) \in E^2, & \underline{\varphi(x,y) = \varphi(y,x)} & \textbf{(symétrie)} \\
(iii) & \forall x \in E, & \underline{y \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire}} & \textbf{(linéaire à droite)}
\end{array}$$

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E. L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

Remarque : La symétrie et la linéarité impliquent la linéarité à gauche, donc la bilinéarité du produit scalaire.

Théorème 29.1 : Continuité du produit scalaire

Le produit scalaire est une application bilinéaire <u>**continue**</u> de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 29.2 : Norme associée

$x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E. On la note $||x||$, et $||x||^2 = (x|x)$.

Théorème 29.3 : Inégalité Cauchy-Schwarz

(8.7a) $$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \times \sqrt{(y|y)}$$

qu'on peut aussi écrire :

(8.7b) $$|(x|y)| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

8.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition 30 : Convergence d'une suite

On dit que la suite des $(x_n)_n$ converge si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(8.8) $$\begin{array}{rl} (i) & \exists l \in E \text{ tel que } \big(N(x_n - l)\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \big(n \geq n_0 \implies N(x_n - l) < \varepsilon\big) \\ (iii) & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que } \big(n \geq n_0 \implies x_n \in B(l, \varepsilon)\big) \end{array}$$

8.3 Comparaison des normes

Définition 31 : Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si

(8.9) $$\exists (c, C) \in {\mathbb{R}^+}^2, \forall x \in E, cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$

Théorème 31.1 : Dimension finie

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

8.4 Complets

Définition 32 : Complet

A est un complet si toute suite de Cauchy $(c_n)_n \in A$ admet une limite $l \in A$
CÀD si toute suite de Cauchy est convergente

Remarque : Intuitivement, un espace est complet s'il n'a pas de « trou ». $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, car $\sqrt{2}$ n'est pas dans $\mathbb{Q}$.

Définition 33 : Espace de Banach

Un espace de Banach est un espace-vectoriel normé et complet.

8.5 Parties compactes d'un espace normé

Théorème 33.1 : Bolzano-Weierstrass

Toute suite réelle **bornée** possède au moins une valeur d'adhérence.

Par extension : toute suite bornée dans un espace vectoriel normé de dimension finie possède au moins une valeur d'adhérence.

On va utiliser cette propriété pour définir un compact :

Définition 34 : Compact

A est un **compact** si toute suite d'éléments $(x_n)_n \in A$ a au moins une valeur d'adhérence
CÀD on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge dans A

Théorème 34.1

Soit E un espace vectoriel. Les parties compactes de E sont fermées et bornées.

Théorème 34.2 : Compacts en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Une partie de E est compacte **si et seulement si** elle est fermée bornée.

Théorème 34.3

Toute partie fermée d'un compact est compact

Théorème 34.4

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A un compact de E.
Une suite d'éléments de A converge **si et seulement si** elle possède une unique valeur d'adhérence :

$$\forall (x_n)_n \in A,\ x_n \text{ converge } \Leftrightarrow \exists! l,\ x_n \to l \tag{8.10}$$

8.6 Applications continues sur une partie compacte

Théorème 34.5 : Image d'une partie compact

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit F un espace vectoriel normé.
Soit $f : A \in E \to F$.
Si f est continue, l'image de tout compact de A est un compact de F.

Théorème 34.6

Soit E un espace vectoriel normé. Soit une application $f : E \to \mathbb{R}$.
Si f est continue, alors elle est bornée et **atteint ses bornes**.

Théorème 34.7 : Théorème de Heine

Si (E,N) et (F,N) sont des espaces vectoriels normés, A une partie **compacte** de E, si $f \in \mathcal{C}(A,F)$, alors f est **uniformément continue**.

8.7 Connexité par arcs

8.7.1 Convexité

Définition 35 : Convexe

Un ensemble E est **convexe** si :

(8.11) $$\forall (x,y) \in E^2, \forall t \in [0,1], \boxed{tx + (1-t)y \in E}$$

Intuitivement, un ensemble est convexe si on peut relier deux points avec une ligne contenue dans cet ensemble.

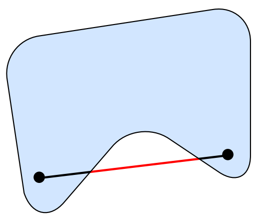


Figure 8.1 – Un ensemble non convexe

Définition 36 : Fonction convexe

Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite convexe si :

(8.12) $$\forall (a,b) \in I^2, \forall t \in]0,1[, \boxed{f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)}$$

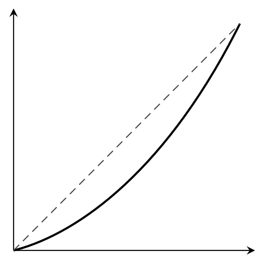


Figure 8.2 – Une fonction convexe

Théorème 36.1 : Convexe dans $\mathbb{R}$

I de $\mathbb{R}$ est convexe **si et seulement si** I est un intervalle de $\mathbb{R}$

8.7.2 Connexité

Définition 37 : Connexe par arcs

Une partie A d'un espace vectoriel normé (E,N) est **connexe par arcs** si, pour tous points a et b de E, il existe une fonction $f : [0,1] \to E$ **continue** telle que

$$
\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \\ f\big([0,1]\big) \subset A \end{cases} \tag{8.13}
$$

Théorème 37.1 : Relation d'équivalence

« Il existe un chemin continu d'un point x à un point y » est une relation d'équivalence sur une partie A de E.
Les **composantes connexes** sont les classes d'équivalences de A.

Théorème 37.2 : Connexe dans $\mathbb{R}$

A non vide de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs **si et seulement si** A est un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème 37.3 : Image continue d'une partie connexe

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit l'application $f : A \in E \to F$.
Si f est continue, alors l'image de toute partie connexe par arcs est connexe par arcs dans F.

Théorème 37.4 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie connexe par arcs de E.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue qui atteint $(c, d) \in \mathbb{R}$. Alors f atteint toute valeur $f(x) \in [c, d]$.

8.8 Topologie

Voici plusieurs définitions utiles à l'étude d'espaces vectoriels normés :

Définition 38 : Ouvert

Une partie E est un **ouvert** si, pour tout élément x de E, il existe une boule centrée en x inclue dans E (*cf.* FIGURE 8.3)

Définition 39 : Fermé

Un espace vectoriel F est dit **fermé** si son complémentaire $\overline{F}$ est un ouvert

Pour différencier un ouvert d'un fermé, prenons le schéma ci-contre :
La partie en **rouge** est un ouvert noté O, celle en **bleue** est un fermé noté F.
En effet : il n'existe aucun disque centré en $y \in O + F$ inclus dans la partie $O + F$, donc $O + F$ n'est pas un ouvert. Par contre, pour tout point $x \in O$, on peut trouver une boule incluse dans O.

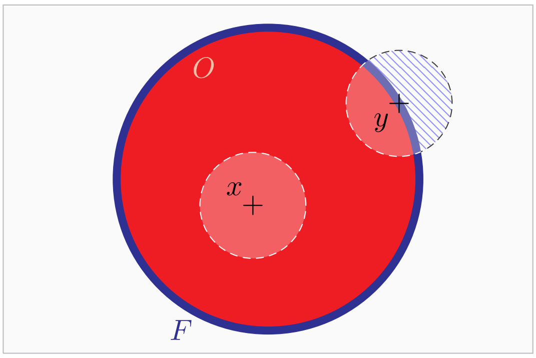


FIGURE 8.3 – Ouvert / Fermé

Théorème 39.1 : Caractérisation d'un fermé

$F \subset E$ est un **fermé** ssi toute suite convergente de F a sa limite dans F

Définition 40 : Intérieur, Adhérence

L'**intérieur** de B, noté $\mathring{B}$, est la réunion des parties ouvertes contenues dans B.
L'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$ est l'intersection des parties fermées contenants A.

Propriétés

- A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
- $\underbrace{\mathrm{Fr}(A)}_{\text{frontière}}$ est un fermé
- $\bigcup\limits_{\text{finie}}$ fermés = fermé
- $\cap$ fermés = fermé

Théorème 40.1

Un **complet** A d'un espace vectoriel normé E est **fermé**.
La réciproque (*Les parties complètes sont les parties fermées*) est vraie si E est un espace de BANACH.

Chapitre 9

Espaces Préhilbertiens réels

Dans cette section, on se placera dans $\mathbb{R}$.

Méthode

Définitions rapides

Produit Scalaire *cf.* définition 29 page 43

Éléments orthogonaux x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Famille orthogonale $(e_i|e_j) = \delta i, j$

Distance de x à une partie F $d(x, F) = \|x - p_f(x)\|$

9.1 Orthogonalité

Définition 41 : Éléments orthogonaux

Deux éléments x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$

Théorème 41.1 : Pythagore

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille d'éléments de E deux à deux **orthogonaux**, alors

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^2 \qquad (9.1)$$

(Attention) Ce sont bien des normes car x_i au carré n'existe pas (qu'est-ce que le produit de deux vecteurs ?), du coup on utilise $\|\cdot\|^2 = (\cdot|\cdot)$

Preuve 41.1.1 *On procède par récurrence. Avec une famille à deux éléments :*

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$$

Puisque x_1 et x_2 sont orthogonaux par hypothèse, on obtient :

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème 41.2 : Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Pour toute base de (e_i), il existe une base (ε_i) telle que :

$$\begin{cases} (\varepsilon_i) \text{ est une base } \underline{\text{orthonormée}} \\ \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \\ (e_i|\varepsilon_i) > 0 \end{cases} \tag{9.2}$$

On aura souvent recours à compléter une base $(e_i)_k$ avec $n-k$ vecteurs orthonormaux aux $(\varepsilon_i)_k$ par le théorème de la base incomplète.

Théorème 41.3 : Inégalité de Bessel

Si (e_i) est une base orthonormée : $\boxed{\sum_i (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2}$

9.2 Automorphismes ortogonaux

u est un endomorphisme, donc il est <u>linéaire</u>.

Définition 42

i. u un endomorphisme, il existe **un <u>unique</u>** endomorphisme u^* tel que

$$\forall (x, y) \in E, (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

u^* est l'**adjoint** de u.

ii. u est **autoadjoint** (symétrique) si $u^* = u$

iii. u est un **automorphisme orthogonal** si $u^* = u^{-1}$. On note $u \in \mathcal{O}(E)$

Propriétés

i. Si $M_{\mathcal{B}}(u) = A$, alors $M_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$

ii. $\mathrm{Ker}(u^*) = [\mathrm{Im}(u)]^{\perp}$

iii. $\mathrm{Im}(u^*) = [\mathrm{Ker}(u)]^{\perp}$

iv. $\chi_u = \chi_{u^*}$

v. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

Théorème 42.1 : Caractérisation d'un automorphisme orthogonal

u est un automorphisme orthogonal si les assertions suivantes (équivalentes) sont vérifiées :

i. u conserve la norme

ii. u conserve le produit scalaire

iii. $u\left(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}\right) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$

iv. $\forall \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}, \exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$ telle que $u\left(\mathcal{B}_{\text{orthonormée}}\right) = \mathcal{B}'_{\text{orthonormée}}$

v. $\exists \mathcal{B}_{\text{orthonormée}}$ telle que $\left|\begin{array}{c} U^tU = I_n \\ \text{ou} \\ {}^tUU = I_n \end{array}\right|$ où $U = M_{\mathcal{B}}(u)$

Théorème 42.2 : Théorème spectral

Tout **endomorphisme auto-adjoint** est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u.

Toute **matrice symétrique** **réelle** est diagonalisable. On peut aussi dire :

(9.3) $$\forall A \in S_n, \exists \left| \begin{array}{c} P \in \mathcal{O}(n) \\ D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \end{array} \right. \text{ tel que } A = PDP^{-1} = PD^tP$$

9.3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition 43 : Isométrie vectorielle d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien.
On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** si u est un endomorphisme qui **conserve la norme** :

(9.4) $$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\| = \|x\|$$

Théorème 43.1 : Bijectivité

Une isométrie vectorielle est bijective.

Preuve 43.1.1 *Une isométrie vectorielle est injective :*

$$\begin{aligned} u(x) = 0 &\implies \|u(x)\| = 0 \\ &\implies \|x\| = \|u(x)\| = 0 \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

Puisque E est un espace euclidien, il est de dimension finie. Ainsi injectivité $\Leftrightarrow$ bi-

jectivité, et u est bijective. $\square$

Théorème 43.2 : CNS avec le produit scalaire

$u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie vectorielle** <u>**si et seulement si**</u> u conserve le produit scalaire :

(9.5) $$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \Big(u(x) \Big| u(y)\Big) = (x|y)$$

Preuve 43.2.1 *Commençons par le sens « conserve le produit scalaire $\Longrightarrow$ isométrie vectorielle » :*

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x)|u(x))} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|$$

Réciproquement, montrons que « conserve le produit scalaire $\Longleftarrow$ isométrie vectorielle ».
Si u est une isométrie vectorielle, d'après les identités de polarisation :

$$\begin{aligned}(u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ &= (x|y)\end{aligned}$$

On a alors montré l'équivalence. $\square$

Chapitre 10

Espaces Préhilbertiens complexes

10.1 Structure Préhilbertienne complexe

On se place dans $\mathbb{C}$ et on établit de nouveau le produit scalaire comme à la définition 29 page 43 du chapitre précédent. À une différence prêt, la symétrie est appelée **symétrie hermitienne**

Définition 44 : Produit scalaire

Le produit scalaire est défini comme suit :

$$\begin{array}{rrll} (i) & \forall x \in E \backslash \{0\}, & \varphi(x,x) > 0 & \textbf{(définie positive)} \\ (ii) & \forall (x,y) \in E^2, & \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} & \textbf{(symétrie hermitienne)} \\ (iii) & \forall x \in E, & y \mapsto \varphi(x,y) \text{ est linéaire} & \textbf{(linéaire à droite)} \end{array}$$

On peut associer un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ à un espace vectoriel E. L'espace $(E, (\cdot|\cdot))$ est appelé **espace préhilbertien**.

10.2 Orthogonalité

Théorème 44.1 : Inégalité de Bessel

Si (e_i) est une base orthonormée : $\boxed{\sum_i |(e_i|x)|^2 \leq {N_2}^2(x)}$

10.3 Séries de Fourier

Méthode

Coefficients

Exponentiels $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,\mathrm{d}t$

Trigonométriques

- $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\,\mathrm{d}t$
- $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}t$

On note $\boldsymbol{\mathcal{C}_{2\pi}}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **2π-périodiques** et **continues** sur $[0, 2\pi]$.
On note $\boldsymbol{\mathcal{CM}_{2\pi}}$ l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **2π-périodiques** et **continues par morceaux** sur $[0, 2\pi]$.

(**Attention**) Sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$, N_1, N_2 et N_∞ ne sont plus des normes, mais elles fonctionnent toujours de la même manière

Cette sous-section se base sur le théorème suivant :

Théorème 44.2

Pour toute fonction dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$, il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\boxed{N_2(f - f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

L'objectif des séries de Fourier est de « transposer »une fonction dans une base de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

On prendra pour bases $(e^{it}, e^{2it}, \cdots e^{int})$ ou $(cos(t), cos(2t), \cdots, cos(nt))$ par exemple, et grâce à un produit scalaire, on obtient la décomposition de notre fonction dans la base. C'est ainsi qu'on définit les coefficients :

Définition 45 : Coefficients exponentiels

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$\boxed{c_n(f) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}}_{\text{on est sur } \mathcal{CM}_{2\pi}} e^{-i\cdot n\cdot t} f(t)\,dt}$$

En effet : $c_n(f) = (e_n|f)$ avec $e_n = e^{int}$. Or le produit scalaire pour des fonctions est $(g|f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{g(t)}\, f(t)\,dt$, d'où $(e_n|f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{e^{int}}\, f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{-int}\, f(t)\,dt$

On aurait très bien pu intégrer sur $[-\pi, \pi]$ au lieu de $[0, 2\pi]$. C'est ce qu'on fera plus tard avec les coefficients trigonométriques.

Propriétés

- $g : t \mapsto f(-t)$, $c_n(g) = c_{-n}(f)$

- $f_a : t \mapsto f(t+a)$, $c_n(f_a) = e^{ina} c_n(f)$

Théorème 45.1 : Dérivée de f

$c_n(f') = in\, c_n(f)$

d'où, par récurrence : $\boxed{c_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k c_n(f)}$

Définition 46 : Coefficients trigonométriques

Pour une fonction f dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$:

$$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\, dt} \text{ et } \boxed{b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\, dt}$$

Ici, c'est $\dfrac{1}{\pi}$ en facteur, car $N_2^2\left(\cos(n\bullet)\right) = \dfrac{1}{2}$

Propriétés

- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) + c_{-n}(f))$
- Si f est paire, alors $b_n = 0\ \forall n$
- Si f est impaire, alors $a_n = 0\ \forall n$

En général, on utilisera ces coefficients si f présente une parité.

Définition 47 : Série de Fourier

On appelle **série de Fourier** de f la série $\sum u_n$ où $\left|\begin{array}{lcl} u_0 & = & c_0(f)\, e_0 \\ u_n & = & c_n(f)\, e_n + c_{-n}(f)\, e_{-n} \end{array}\right.$

$S_n(f)$ est appelée **somme partielle de rang n de la série de Fourier**

Théorème 47.1 : Inégalité de Bessel

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, alors :

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_n(f)|^2 \leq N_2^2(f)$$

Théorème 47.2 : Théorème de convergence Parseval

Si f est une fonction de $\underline{\mathcal{CM}_{2\pi}}$, alors $\boxed{N_2\left(f - S_n(f)\right)_n}$ converge vers 0

Avec ce nouveau théorème, on trouve le cas d'égalité de l'inégalité de Bessel :

Théorème 47.3 : Égalité de Parseval

Si f est une fonction de $\underline{\mathcal{CM}_{2\pi}}$:

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = N_2^2(f)}$$

En réel, cette égalité devient :

$$N_2^2(f) = \left(\frac{a_0(f)}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n^2(f) + b_n(f)^2\right]$$

Théorème 47.4 : Calcul des Coefficients

Si on a la suite s_n telle que $\left|\begin{array}{l} s_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k \\ N_2(s_k - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right.$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \alpha_n$

Preuve 47.4.1
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|c_k(s_n - f)| \leq N_2(s_n - f)$. *Donc* $|c_k(f) - \alpha_k| \leq N_2(s_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, *d'où, quand* $n \to +\infty$, $c_n(f) = \alpha_n$.

Théorème 47.5 : Théorème de convergence normale

Si f est $\underline{\mathcal{C}_{2\pi} \text{ et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$[a]

alors sa série de Fourier **converge normalement** et sa somme vaut f
sa somme partielle de sa série de Fourier S_n **converge uniformément**

a. $\mathcal{C}^1$ par morceaux c'est à dire que la dérivée est continue par morceaux, à ne pas confondre avec $f \in \mathcal{CM}$

Définition 48 : Noyau de Dirichlet

On appelle **noyau de Dirichlet**, et on note $D_p(t)$ la somme : $D_p(t) = \displaystyle\sum_{k=-p}^{p} e^{ikt}$

Théorème 48.1 : Noyau de Dirichlet

Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier **converge simplement** sur $\mathbb{R}$.
Sa somme au point x, notée $\widetilde{f}(x)$ est égale à $\dfrac{1}{2}\lim_{h\to0^+}[f(x+h) + f(x-h)]$. Si f est **continue**, alors $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

Quatrième partie

Analyse

Chapitre 11

Séries numériques et vectorielles

Méthode

Étude d'une série

Prenons le cas d'étude d'une série : $\sum u_n$

1. Vérifier que $\sum u_n$ est positive.
   Si elle ne l'est pas, on peut prendre $N(\sum u_n)$. Dans $\mathbb{R}$, on prendra $\left|\sum u_n\right|$.
2. Utiliser un théorème de comparaison pour ramener à des séries facilement étudiables. On peut :
   - Trouver un équivalent (en utilisant des Développements Limités (DLs))
   - Trouver une domination en $o(\cdots)$ ou en $O(\cdots)$
   - Majorer/Minorer explicitement, mais c'est rare

11.1 Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Définition 1

La **série** S de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où on définit S_n de manière suivante.

$$\underbrace{S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{u_n}_{\text{Terme général de la série}}}_{\text{Somme partielle}}}_{\text{Suite des sommes partielles}} \tag{11.1}$$

On appelle **reste** d'ordre n de la série la différence $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$

Définition 2 : Convergence d'une série

On dit que la série des u_n **converge** s'il existe l tel que $l = \lim_{n\to\infty} S_n$ existe.
Si la suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que sa série S_n **diverge grossièrement**

Théorème 2.1

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

(**Attention**) La réciproque n'est pas souvent vraie. Exemple classique : $\sum \frac{1}{n}$

Théorème 2.2 : Théorème suite-série

La série $S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{n+1} - a_n)$ converge **si et seulement si** la suite (a_n) converge.

11.1.1 Convergence absolue

Définition 3 : Convergence absolue

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, (u_n) une suite d'éléments de E.
La série $\sum u_n$ de E est dite **absolument convergente** si la série des normes $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 3.1

Convergence absolue $\implies$ convergence.

11.1.2 Série À Termes Positifs

Définition 4 : Série À Termes Positifs

On appelle **Série À Termes Positifs (SATP)** toute série de terme général u_n réel telle que, **à partir d'un certain rang**, $u_n \geq 0$.

Théorème 4.1 : Convergence des SATP

Si $\sum u_n$ est une SATP, alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_n \text{ est majorée} \qquad (11.2)$$

11.2 Complément sur les séries numériques

11.2.1 Règle de d'Alembert

Lemme

Pour toute suite (u_n) strictement positive, s'il existe une suite (α_n) strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, alors

(11.3) $$u_n \underset{+\infty}{=} O(\alpha_n)$$

Théorème 4.2 : Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E, telle que (à partir d'un certain rang) $u_n \neq 0$.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors :

(11.4) $$\begin{cases} \text{Si } L > 1, \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \\ \text{Si } L < 1, \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$$

Ce théorème est peu utile car il est « trop vrai », mais on l'introduit principalement en vue de l'étude des séries entières.

11.2.2 Séries alternées

Définition 5 : Série alternée

La série $\sum u_n$ est une **série alternée** s'il existe (α_n) une suite positive et $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ tels que $u_n = \varepsilon(-1)^n \alpha_n$

Théorème 5.1 : Théorème spécial des séries alternées (TSSA)

Si $\begin{cases} \sum u_n \text{ est une série alternée} \\ (|u_n|) \text{ est décroissante} \\ (|u_n|) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \end{cases}$, alors $\sum u_n$ converge et $\forall n \geq 0$, $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_n|$

(**Attention**) Ne pas oublier les valeurs absolues pour l'étude des séries alternées.

11.2.3 Comparaison série intégrale

Théorème 5.2

Soit f telle que $u_n = f(n)$.
Si f est **décroissante** et **continue** sur l'intervalle $[0, +\infty[$, alors on peut encadrer :

(11.5a) $$\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \geq f(n) \geq \int_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$$

Si f est croissante et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, alors on peut encadrer :

(11.5b) $$\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 5.3 : Comparaison d'une série à une intégrale

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive** et **décroissante** sur $\mathbb{R}^+$. Notons $w_n = \left(\int_{n-1}^{n} f\right) - f(n)$. La série $\sum w_n$ est une SATP convergente.

(11.6) $$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \sum f(n) \text{ converge}$$

En cas de divergence, $\int_0^n f \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum f(n)$

Si f est une fonction continue par morceaux, **positive**, **croissante** et majorée sur $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\left(\int_{n}^{n+1} f\right) - f(n)$ est une SATP convergente.

11.2.4 Comparaison des SATP

Théorème 5.4 : Théorème de comparaison des SATPs

Si on a deux suites u_n et v_n de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles qu'on ait une des conditions suivantes :
$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ u_n = o(v_n) \\ u_n = O(v_n) \end{cases}, \text{ alors } \sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge.}$$

On a également la contraposée : $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge

Théorème 5.5 : 2e théorème de comparaison des SATPs

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives.
Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même nature.

Théorème 5.6 : Sommation des relations de comparaison (convergence)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs.
Notons R_n et R'_n leurs restes respectifs d'ordre n.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $R_n = O(R'_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $R_n = o(R'_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $R_n \sim R'_n$.

Théorème 5.7 : Sommation des relations de comparaison (divergence)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **divergentes** à termes positifs.
Notons S_n et S'_n leurs sommes partielles respectives d'ordre n.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n = O(S'_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(S'_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim S'_n$.

Théorème 5.8 : Césaro

Si $\sum \alpha_n$ est une SATP divergente, et que (β_k) est une suite complexe convergente vers β, alors la suite (S_n) de terme général :

$$S_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$$

(définie à partir d'un certain rang) converge vers β.

La moyenne de Césaro apparait en prenant la suite $\alpha_k = 1\ \forall k$, car alors $\sum \alpha_k = n$ et :

$$S_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k}{n}$$

C'est la moyenne des termes de la suite β_k, et on sait qu'elle converge si β_k converge.

Preuve 5.8.1 *L'idée est de séparer la somme en deux. Prenons $\varepsilon > 0$. Soit l la limite de la suite β_k.*
Soit N tel que $\forall n \geq N$, $|\beta_n - l| < \varepsilon$. Alors :

$$S_n - l = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\beta_k - l)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} \alpha_k(\beta_k - l)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k}$$

La somme allant jusqu'à N ne dépendant plus de n :

$$S_n - l \leq \frac{constante}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} + \frac{\displaystyle\sum_{k=N}^{n} \alpha_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} \cdot \varepsilon$$

$$S_n - l \leq \frac{constante}{\pm\infty} + 1 \cdot \varepsilon$$

On a majoré par quelque chose d'aussi petit qu'on veut, et alors S_n converge $\square$

11.3 Hors programme

Tous les théorèmes vus ici sont à démontrer.

Théorème 5.9 : Transformation d'Abel

Soient deux suites (a_n) et (b_n) de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i \tag{11.7}$$

On peut en déduire, si on a les conditions $\begin{cases} \sum (a_i - a_{i+1}) \text{ CVA vers } 0 \\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \text{ est bornée} \end{cases}$, que $\sum a_k b_k$ converge.

Preuve 5.9.1 *On remarque que $b_i = B_i - B_{i-1}$, avec $b_0 = B_0$. Il vient :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \end{aligned}$$

On change d'indice sur la deuxième somme, et comme $b_0 = B_0$:

$$\begin{aligned} &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \end{aligned}$$

Chapitre 12

Familles sommables de nombres complexes

12.1 Ensembles dénombrables

Définition 6 : Ensemble fini

On dit que E est un **ensemble fini** de cardinal n si E est en bijection avec $[\![0, n[\![$

Définition 7 : Equipotence

Deux ensembles E et F sont dits **équipotents** (ou en bijection) s'il existe une application $\varphi : E \to F$ telle que φ soit bijective.

Définition 8 : Ensemble dénombrable

On dit que E est un **ensemble dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$

Théorème 8.1

Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Théorème 8.2

Un ensemble est fini ou dénombrable (**au plus dénombrable**) **si et seulement si** il est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$

Théorème 8.3

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Preuve 8.3.1 *On utilise la fonction de couplage de* CANTOR *:*

(12.1) $$f(p,q) = q + \sum_{i=0}^{p+q} i$$

On montre que cette fonction est bijective.

Fonction de Cantor

Définition 9 : Produit cartésien

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème 9.1

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Ainsi, $\mathbb{Q}$ est dénombrable :

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}^*} \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z} \right\}$$

Théorème 9.2

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

12.2 Familles sommables

12.2.1 Pour les réels positifs

Définition 10 : Famille sommable de réels positifs

Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs. Une famille est sommable s'il existe un réel M tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait :

(12.2a) $$\sum_{i\in J} u_i \leq M$$

On définit la somme de cette famille par

(12.2b) $$\sum_{i\in I} u_i = \sup_J \sum_{n\in J} u_n$$

Théorème 10.1 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition dénombrable de I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable **si et seulement si** :

- la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable pour tout n
- la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ est convergente

Dans ce cas :

(12.3) $$\sum_{n\in I} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

Théorème 10.2 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

(12.4) $$\begin{aligned}(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable } &\Leftrightarrow \sum_n\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right) \text{ converge}\\ \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right)\end{aligned}$$

12.2.2 Pour les réels et les complexes

Définition 11 : Famille sommable

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Théorème 11.1

$(u_i)_{i\in I}$ **est sommable** $\Leftrightarrow \sum_{i\in I} u_i$ **absolument covergente**

Théorème 11.2 : Sommation par paquets

Soit une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels positifs.
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition **dénombrable** de I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable **si et seulement si** :

- la sous-famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable pour tout n
- la série $\sum_n\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ est convergente

Dans ce cas :

(12.5) $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = \sum_{n\in I} u_n$$

Théorème 11.3

Soient $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables. Alors la famille $\big(a_pb_q\big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

(12.6)
$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_pb_q = \left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p\right)\left(\sum_{q\in\mathbb{N}} b_q\right)$$

Preuve 11.3.1 *Ce théorème est issu du théorème de* Fubini *(cf. théorème 38.4 page 86) : les deux suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ sont sommables, donc leurs séries convergent absolument, et les hypothèse du théorème de* Fubini *sont alors vérifiées.*

Théorème 11.4 : Sommation triangulaire

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(12.7)
$$\begin{aligned}(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable } &\Leftrightarrow \sum_n \left(\sum_{p+q=n} |u_{p,q}|\right) \text{ converge}\\ \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} &= \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right)\end{aligned}$$

(**Attention**) Faire attention à bien mettre des modules partout

Définition 12 : Produit de Cauchy

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres complexes. On appelle **produit de Cauchy** des séries la série $\displaystyle\sum_{p+q=n} u_p\, v_q = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

Théorème 12.1

Avec les notations précédentes, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergente, alors leur produit de Cauchy est une série absolument convergente et :

(12.8)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\, v_{n-k} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$$

Chapitre 13

Variables aléatoires discrètes

Méthode

Prouver qu'une application p_ω est une probabilité

On se sert du théorème 17.1 page 70, et on prend des éléments élémentaires (de la forme $\{\omega\}$). On montre que $(p_\omega)_\omega$ est une famille sommable de somme 1, et le tour est joué ! L'application probabilité est alors $\mathbb{P} : A = \{\omega_i, \omega_j, \cdots\} \longmapsto \sum_{\omega \in A} p_\omega$.

13.1 Espace probabilisé

Définition 13 : Univers

Un **univers** Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
L'ensemble des parties de l'univers Ω est noté $\mathscr{P}(\Omega)$

Définition 14 : Tribu, espace probabilisable, évènement

Une **tribu** sur un univers Ω est un sous-ensemble $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés :

- $\Omega \in \mathscr{T}$
- $\forall A \in \mathscr{T}, \overline{A} \in \mathscr{T}$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$

Le couple $(\Omega, \mathscr{T})$ est appelé **espace probabilisable**.
Un élément de la tribu $\mathscr{T}$ est appelé un **évènement**

Propriétés

Si $(\Omega, \mathscr{T})$ est un espace probabilisable, et A_i un élément de $\mathscr{T}$:

- $\varnothing \in \mathscr{T}$
- $\displaystyle\bigcup_{\text{finie}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\displaystyle\bigcap_{\text{finie}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{T}$
- $\forall (A,B) \in \mathscr{T}^2, A \cap \overline{B} = A \backslash B$

Définition 15 : Incompatibilité, implication

Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
On dit que $A \underset{\text{implique}}{\Longrightarrow} B$ quand $A \subset B$

(**Attention**) Ne pas confondre $(A \cap B = \varnothing)$ et $(P(A \cap B) = 0)$

Définition 16 : Système complet d'évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable.
Soit I fini ou égal à $\mathbb{N}$.
Un **système complet d'évènements** est une suite d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ telle que :

- $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
- $\forall (p,q) \in I^2, p \neq q, A_p \cap A_q = \varnothing$

Définition 17 : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable. La **probabilité** est l'application $\mathbb{P} : \mathscr{T} \to [0,1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ d'évènements **deux à deux incompatibles** :
  - $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge
  - $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

    (σ-additivité)

Le triplet $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**

(**Attention**) Espace propabilisable $(\Omega, \mathscr{T}) \neq$ Espace probablilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$

Théorème 17.1 : Caractérisation par une famille sommable

Soit Ω un univers fini ou dénombrable.
Soit une application $\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \omega & \longmapsto & p_\omega \end{array}\right.$ telle que $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ soit une **famille sommable** de somme 1.
Soit $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\omega\in A} p_\omega \end{array}\right.$
Alors $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}\big)$ est un espace probabilisé.

13.2 Propriétés élémentaires des probabilités

Théorème 17.2 : Théorème de la limité monotone

Soit $\big(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P}\big)$ un espace probabilisé.

- Si A_n est une suite croissante d'évènements $(A_n \subset A_{n+1})$, alors :

(13.1a) $$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

- Si A_n est une suite décroissante d'évènements $(A_{n+1} \subset A_n)$, alors :

(13.1b) $$\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$$

Dans la définition 17 de la probabilité, la propriété de σ-additivité nécessite que les évènements soient incompatibles. Cette propriété existe sous forme d'inégalité quand les évènements ne sont pas incompatibles :

Théorème 17.3 : Inégalité de Boole

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probablilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors :

(13.2) $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve 17.3.1 *On se ramène à une suite d'évènements deux à deux disjoints* *en introduisant la suite (C_n) telle que :*

$$C_0 = A_0 \qquad\qquad C_n = A_n \backslash \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$$

Puisque $C_n \subset A_n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Évènements négligeables / presque sûrs

13.3 Probabilités conditionnelles et indépendance

13.3.1 Probabilités conditionnelles

Théorème 17.4 : Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $A \in \mathscr{T}$ de probabilité non nulle.
L'application

(13.3) $$\mathbb{P}_A : \begin{cases} \mathscr{T} & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{cases}$$

est une probabilité appellée **probabilité sachant A**.

On notera également $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}_A(B)$ pour "probabilité de B sachant A".

Théorème 17.5 : Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (A_n) une suite d'évènements de $\mathscr{T}$ telle que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) > 0$. Alors :

(13.4) $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \times \mathbb{P}\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{k=1}^{n-2} A_k\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_1)$$

Théorème 17.6 : Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un **système complet** d'évènements de probabilités non nulles. Alors :

(13.5) $$\forall B \in \mathscr{T}, \qquad \mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n)$$

Preuve 17.6.1 *$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, les évènements $B \cap A_n$ sont deux à deux incompatibles, et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) = B$. Or $\mathbb{P}_{A_n}(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A_n \cap B)}{\mathbb{P}(A_n)}$, ainsi :*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\mathbb{P}(A_n)$$

Théorème 17.7 : Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un **système complet** d'évènements de probabilités non nulles. Alors :

(**13.6**) $$\forall B \in \mathscr{T},\ \forall i \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i)}{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B)\,\mathbb{P}(A_n)}$$

13.3.2 Indépendance

Définition 18 : Évènements indépendants

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Deux évènements A et B de $\mathscr{T}$ sont dits **indépendants** lorsque

(**13.7**) $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

On peut généraliser la définition suivante à une famille entière :

Définition 19 : Famille quelconque d'évènements mutuellement indépendants

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Une famille $(A_n)_{n\in I}$ d'évènements de $\mathscr{T}$ est dite **suite d'évènements mutuellements indépendants** lorsque :

(**13.8**) $$\forall J \subset I, \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_J A_n\right) = \prod_J \mathbb{P}(A_n)$$

13.4 Variables aléatoires discrètes

Définition 20 : Variable aléatoire

Soit E un ensemble. On appelle **variable aléatoire** discrète une application $X : \Omega \to E$ telle que :

- $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'image réciproque de $\{x\}$ par X est un évènement. On notera cet

évènement $(X = x)$.

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire est réelle.

Définition 21 : Loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire discrète de Ω dans E.
On note $\mathscr{P}\Big(X(\Omega)\Big)$ l'ensemble des parties de $X(\Omega)$. L'application $\mathbb{P}_X(\Omega)$:

(13.9)
$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathscr{P}\Big(X(\Omega)\Big) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

13.5 Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

13.5.1 Couple de variables aléatoires

Définition 22 : Loi conjointe

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes.
On appelle **loi conjointe** de X_1 et X_2 la loi $X = (X_1, X_2)$ déterminée par :

- $X(\Omega) = \Big\{\Big(x_1 \in X_1(\Omega), x_2 \in X_2(\Omega)\Big)\Big\} = X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)$
- $\mathbb{P}_X(x_1, x_2) = \mathbb{P}_X\Big(\Big(x_1 = X_1(\Omega) \cap x_2 = X_2(\Omega)\Big)\Big)$

À partir de deux variables X_1 et X_2, on peut déterminer une troisième variable (X_1, X_2) et sa loi. Les lois marginales vont nous permettre de faire l'inverse :

Théorème 22.1 : Lois marginales

Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple de variables aléatoires discrètes.
On note $X(\Omega) = \Big\{(x_1, x_2) \,|\, i \in I,\, j \in J\Big\}$
On peut déterminer la loi de X_1 ou de X_2 à partir de la loi $\mathbb{P}_X$ de la manière suivante :

(13.10)
$$X_1(\Omega) = \{x_i,\, i \in I\} \qquad \mathbb{P}_{X_1}(x_1) = \sum_{j \in J} \mathbb{P}(X = (x_i, x_j))$$

(13.11)
$$X_2(\Omega) = \{x_j,\, j \in J\} \qquad \mathbb{P}_{X_2}(x_2) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = (x_i, x_j))$$

13.5.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 23 : Suite finie de variables aléatoires indépendantes

Soient n variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$.

On dit qu'elles sont **indépendantes** si pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont indépendants.

Définition 24 : Suite de variables aléatoires indépendantes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit qu'elles sont **indépendantes** si pour tout sous-ensemble I de $\mathbb{N}$ la famille finie $(X_n)_{n\in I}$ est indépendante.

Théorème 24.1

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout $m \in [1, n-1]$ et pour toutes fonctions g et g, les variables $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

13.6 Lois usuelles

Définition 25 : Loi de Bernoulli

La **loi de Bernoulli** est une distribution discrète qui prend la valeur 1 avec une probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $(1-p)$.
Une variable aléatoire qui suit cette loi est appelée variable de Bernoulli

13.6.1 Loi binomiale

Définition 26

Une **loi binomiale** de paramètres n et p est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale au nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli, p étant la probabilité de succès d'une épreuve de Bernoulli.

Autrement, c'est une variable aléatoire X telle que

$$X = Y_1 + Y_1 + \dots + Y_n$$

où les Y_i sont des variables aléatoires **indépendantes** de loi de Bernoulli.

La variable aléatoire suit une loi de probabilité :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{13.12}$$

Théorème 26.1 : Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres p et n. Alors :

$$E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p) \tag{13.13}$$

13.6.2 Loi géométrique

Définition 27

Une **loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale au rang k du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètres p.

Une telle loi vérifie $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

(13.14) $$\forall k > 0, \qquad \mathbb{P}_X(k) = p(1-p)^{k-1}$$

Une loi géométrique se note $\mathscr{G}(p)$.

Théorème 27.1 : Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p. Alors :

(13.15) $$E(X) = \frac{1}{p} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Théorème 27.2 : Caractérisation comme loi sans mémoire

La loi géométrique est la seule loi de probabilité discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

(13.16) $$\mathbb{P}\Big(X > (n+k) \Big| X > n\Big) = \mathbb{P}(X > k)$$

pour tous entiers n et m.

13.6.3 Loi de Poisson

Définition 28 : Loi de Poisson

On dit d'une variable aléatoire X que c'est une **loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

(13.17) $$\mathbb{P}_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Une telle loi se note $\mathscr{P}(\lambda)$.

Théorème 28.1 : Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors :

(13.18) $$E(X) = \lambda \qquad V(X) = \lambda$$

Théorème 28.2 : Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson

Si, pour tout n, X_n est une loi binomiale de paramètre n, p_n, et si le produit $n \cdot p_n$

converge vers λ, alors :

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \tag{13.19}$$

Propriétés

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors la loi $X+Y$ suit une loi de poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

13.7 Espérance

13.7.1 Définitions

Définition 29 : Espérance d'une famille finie

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. L'**espérance** de X est donnée par la somme finie :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}_X(x_i) \tag{13.20a}$$

Remarque : On assimile souvent l'espérance à la moyenne, car puisque la somme des probabilités est 1, on peut très bien écrire que :

$$E(X) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}_X(x_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_X(x_i)} \tag{13.20b}$$

Si X ne prend pas un nombre fini de valeurs, on peut étendre la définition précédente au cas où les valeurs de X forment une famille sommable :

Définition 30 : Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire **réelle discrète**. On dit que X est d'**espérance finie** si la famille $\big(x\mathbb{P}_X(x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
La somme est appellée **espérance de X**.

Définition 31 : Variable centrée

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance finie.
La variable aléatoire $X - E(X)$ est appelée **variable centrée associée** à X.
Son espérance $E\big(X - E(X)\big)$ est nulle.

13.7.2 Propriétés de l'espérance

Propriétés

- L'ensemble $\mathscr{E}$ des variables aléatoire de Ω dans $\mathbb{R}$ et dont l'espérance est finie est un espace vectoriel
- L'espérance est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$
- $\forall X \in \mathscr{E},\ X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \implies E(X) \geq 0$ (l'espérance est positive)
- L'espérance est croissante : $\forall (X, Y) \in \Omega^2,\ X \leq Y \implies E(X) \leq E(Y)$
- Soit Y une variable aléatoire d'espérance finie, si X est une variable aléatoire telle que $|X| \leq Y$, alors X est d'espérance finie.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes et admettant chacune une espérance finie**, alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

Par récurrence, on vérifie que pour n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes :

$$E\left(\prod_i X_i\right) = \prod_i E(X_i)$$

Théorème 31.1 : Formule de transfert

Soit X une variable aléatoire discrète.
Soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$.
La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie **si et seulement si** la famille $\Big(f(x) \cdot P(X = x)\Big)$ est sommable. Si tel est le cas :

(13.21) $$E\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

Théorème 31.2 : Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle discrète **positive** admettant une espérance finie. Alors, pour tout $a > 0$, l'**inégalite de Markov** nous donne :

(13.22) $$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

13.8 Variance

13.8.1 Moment

Définition 32 : Moment d'ordre n

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet un **moment** d'ordre m si X^m admet **une espérance finie**.

Théorème 32.1

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance finie.

Théorème 32.2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes de moment d'ordre 2, alors XY a une espérance finie et

$$\Big(E(XY)\Big)^2 \leq E(X^2)\,E(Y^2) \tag{13.23}$$

Théorème 32.3 : Espace vectoriel

L'ensemble des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et d'espérance finie.

13.8.2 Variance et écart-type

On relarquera que dans cette sous-section, on fera tout le temps l'hypothèse d'une variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, c'est-à-dire telle que X^2 admette une espérance finie.

Définition 33 : Variance et Écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète **admettant un moment d'ordre 2**.

On définit la **variance** par :

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) \tag{13.24a}$$

et l'**écart-type** par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{13.24b}$$

Théorème 33.1 : Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{13.25}$$

Théorème 33.2

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors pour tous réels a et b :

(**13.26**) $$V(aX+B) = a^2 V(X)$$

Définition 34 : Variables réduites

Soit X une variable aléatoire discrète **admettant un moment d'ordre 2** et telle que $\sigma(X) > 0$.

La variable aléatoire $\dfrac{X}{\sigma(X)}$ est appelée **variable réduite** associée à X.

Son écart-type est égal à 1.

La variable aléatoire $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **variable centrée réduite** associée à X.

Son espérance est nulle et son écart-type est égal à 1.

Théorème 34.1 : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète **admettant un moment d'ordre 2**. Alors :

(**13.27**) $$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\Big(\big|X - E(X)\big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve 34.1.1 *On applique le théorème 31.2 de* Markov *page 77 à la variable aléatoire* $Y = (X-E(X))^2$ *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\Big(\big|X - E(X)\big| \geq \varepsilon\Big) = \mathbb{P}(Y^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E\big((X-E(X))^2\big)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Ce dernier théorème permet de majorer la probabilité que X prenne une valeur dont la distance à $E(X)$ (c'est-à-dire à la moyenne) serait supérieure à ε.

13.8.3 Covariance

Définition 35 : Covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant une espérance finie**.

Si elle existe, on définit la **covariance** de X et de Y par :

(**13.28**) $$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\big(X-E(X)\big)\,\big(Y-E(Y)\big)\Big)$$

Théorème 35.1 : Existence de la covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires **admettant un moment d'ordre 2**. Alors la covariance de X et de Y existe et on a :

(**13.29**) $$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Preuve 35.1.1 *X et Y étant des variables aléatoires d'ordre 2, elles admettent une espérance finie.*
De plus, on a :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\,\big(Y - E(Y)\big)\Big)$$

On développe :

$$= E\Big(XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\Big)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
&= E\big(XY\big) - E\big(E(X)Y\big) - E\big(E(Y)X\big) + E\big(E(X)E(Y)\big)\\
&= E\big(XY\big) - E(X)E(Y) - \cancel{E(Y)E(X)} + \cancel{E(X)E(Y)}\\
\operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

Du théorème précédent, on déduit le théorème suivant :

Théorème 35.2 : Covariance de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** admettant un moment d'ordre 2, alors $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

Théorème 35.3

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **admettant un moment d'ordre 2**. Alors :

- $X + Y$ a un moment d'ordre 2 et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$;
- si X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Par récurrence, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 35.4 : Variance d'une somme finie

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes admettant toutes des moment d'ordre 2. Alors :

- la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ a un moment d'ordre 2 et :

(13.30a)
$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V\big(X_k\big) + \sum_{1 \le i \le j \le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

- si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

(13.30b)
$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V\big(X_k\big)$$

13.9 Loi faible des grands nombres

Théorème 35.5 : Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = E(X_1)$, on a :

(13.31a)
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Pour avoir la formule en tête de manière plus visuelle, même si c'est plus lourd :

(13.31b)
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Formule citée par le programme

13.10 Fonctions génératrices

Définition 36 : Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice G_X de X par :

(13.32)
$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_k \mathbb{P}(X = k)t^k$$

pour les valeurs de t telles que la variable aléatoire t^X admette une espérance finie.

Théorème 36.1 : Détermination de la loi de X

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- La série entière G_X est de rayon $R \geq 1$ et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 ;
- Soit $k \in \mathbb{N}$, alors :

(13.33)
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

- Si $R > 1$, alors X admet un moment d'ordre k quelconque dans $\mathbb{N}^*$ et :

(13.34a)
$$G'_X(1) = E(X)$$
(13.34b)
$$G''_X(1) = E\big(X(X-1)\big)$$
(13.34c)
$$G_X^{(k)}(1) = E\Big(X(X-1)\cdots(X-k+1)\Big)$$

Dans ce cas, $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1)$.

La dernière partie de ce théorème peut se généraliser même si $R \geq 1$:

Théorème 36.2

Soit X une variable aléatoire.

- X admet une espérance finie **si et seulement si** G_X est dérivable à gauche en 1 ; dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$.
- X admet un second moment **si et seulement si** G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 ; dans ce cas $G''_X(1) = E\big(X(X-1)\big)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'^2_X(1)$.

Théorème 36.3 : Somme de variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans N et indépendantes, alors :

(13.35) $$\boxed{\forall t \in]-1,1[} \qquad G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t)$$

On peut généraliser à n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes :

(13.36) $$\boxed{\forall t \in]-1,1[} \qquad G_{\sum X_k}(t) = \prod G_{X_k}(t)$$

Chapitre 14

Suites de fonctions

Méthode

En général, pour la convergence simple, on **fixe** x. Pour la convergence uniforme, puisqu'on cherche la norme N_∞, on **dérive** $f_n(x)$ pour étudier ses variations.

14.1 Convergence de suites de fonctions

Définition 37

Définitions simplifiées des différents types de convergence

(14.1)

$$\begin{aligned}
\text{La suite des } (f_n) \text{ converge } \textbf{simplement} \text{ vers } f &\Leftrightarrow \forall x, (f_n(x))_n \to f(x) \\
\text{La suite des } (f_n) \text{ converge } \textbf{uniformément} \text{ vers } f &\Leftrightarrow N_\infty^A \left(\underbrace{f_n - f}_{\in B(A,F)} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\
(f_n(x))_n \text{ vérifie le } \textbf{critère de Cauchy de CU} &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 | n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow N_\infty^A ((f_n - f)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

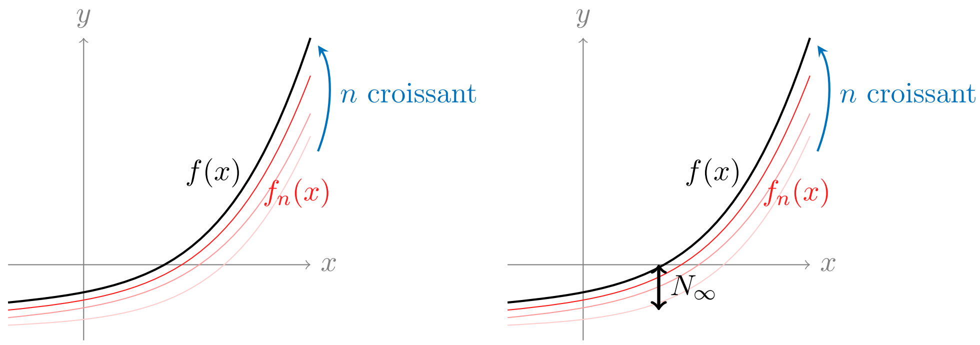
Le critère de Cauchy de convergence uniforme est équivalent à la convergence uniforme. $\boxed{\text{Critère de Cauchy} \Leftrightarrow \text{Convergence Uniforme}}$

Pour illustrer, on peut faire les shémas suivants :

Propriétés de la simple convergence

- $\begin{cases} f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (f_n(x))_n \text{ est croissante} \\ (f_n(x))_n \xrightarrow[x \in A]{CVS} f \end{cases} \Leftrightarrow f \text{ est croissante}$

- (autres propriétés analogues de f_n appliquées à f par CVS)



(a) Convergence Simple

(b) Convergence Uniforme

FIGURE 14.1 – Les différents types de convergence de fonction

Théorème 37.1 : Convergence par changement de base

Si $(f_n(x))_n$ converge simplement ou uniformément <u>**ssi**</u> $(f_{n,i}(x))_n$ converge de la même manière dans la base $\mathcal{B} = (e_i)$

Théorème 37.2 : Conditions nécessaire de CU [a]

$$\left.\begin{array}{r}(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\textbf{CU}} f \\ (f_n(x))_n \quad \text{est } \textbf{bornée}\end{array}\right\} \implies f \text{ est } \textbf{uniformément convergente bornée}$$

Théorème 37.3 : Conditions nécessaire de <u>Non</u>-CU

Il suffit que : $\exists (x_n)$ tel que $f(x_n) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$

a. **CU** pour **C**onvergence **U**niforme

On notera les fonctions f dont la dérivée est continue de $A \to B$ comme appartenant à l'ensemble $\mathcal{C}(A, B)$

Théorème 37.4 : Continuité par convergence

$$\left.\begin{array}{r}(f_n(x))_n \ \textbf{continue} \text{ en a} \\ (f_n(x))_n \ \textbf{converge uniformément} \text{ vers } f\end{array}\right\} \implies f \text{ est continue en } a$$

$$\left.\begin{array}{r}(f_n(x))_n \in \mathcal{C}(A, F) \\ (f_n(x))_n \quad \textbf{converge uniformément} \text{ vers} \\ f \text{ sur tout compact} \subset A\end{array}\right\} \implies f \in \mathcal{C}(A, F)$$

Théorème 37.5 : Théorème de la double limite

Si $f_n(x)$ $\boxed{\text{converge uniformément}}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}$$

Théorème 37.6 : Théorème d'approximation de Weierstrass

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ est **limite uniforme** d'une suite $(\mathcal{P}_n(X))_n$ de fonctions polynômes.

Le même théorème existe pour les fonctions (T-périodiques à valeurs complexes) limites d'une suite de polynômes trigonométriques.

14.2 Convergence des Séries

Définition 38

Définitions simplifiées des convergences de Séries de fonctions :

$$\begin{array}{lll} \sum f_n \text{ converge } \textbf{simplement} & \text{si} & \forall x \in A, \text{ la série } \sum f_n(x) \text{ converge} \\ \sum f_n \text{ converge } \textbf{uniformément} & \text{si} & \begin{cases} x \in A, \text{ la série } (S_n) = \sum\limits_0^n f_n(x) \\ \qquad \text{converge uniformément} \\ x \in A, \text{ la série } (R_n) = \sum\limits_n^\infty f_n(x) \\ \qquad \text{converge uniformément} \end{cases} \\ \sum f_n \text{ converge } \textbf{normalement} & \text{si} & \sum N_\infty(f_n) \text{ converge} \end{array} \tag{14.2}$$

Pour les définitions de convergence de fonctions, se référer aux définitions 14.1.

On retrouve certaines propriétés des fonctions :

Théorème 38.1

$$\left.\begin{array}{r} (u_n(x))_n \in \mathcal{C}(A,F) \\ (u_n(x))_n \ \textbf{converge uniformément} \text{ sur } A \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum u_n \text{ est continue sur } A$$

Théorème 38.2 : Théorème de la double limite

Si $\sum f_n$ **converge uniformément**, et qu'il existe (v_n) telle que $v_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x)$, alors

$\sum v_n$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)}_{=v_n} = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(x))}$$

Preuve 38.2.1 *C'est le théorème 37.5 de la double limite de suites de fonctions appliqué aux séries*

14.3 Propriétés de la somme

Théorème 38.3 : Intégration sous le signe somme

$$\begin{cases} u_k \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C}) \text{ et intégrable sur } I \\ S \in \mathcal{CM}(I,\mathbb{C}) \\ \sum u_n \to S \\ \boxed{\sum |u_n| \text{ converge}} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} S \text{ est intégrable, et} \\ \int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n\right) \end{array} \tag{14.3}$$

14.4 Séries doubles

Théorème 38.4 : Interversion des sommations de Fubini

Si $\begin{cases} (u_{p,q})_{p,q} \text{ est une suite double complexe} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \left(\sum |u_{p,q}|\right)_{p,q} \text{ converge} \\ \forall q \in \mathbb{C}, \sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right) \text{ converge} \end{cases}$, alors :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) \tag{14.4}$$

Avec les deux séries $\left(\sum \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_q$ et $\left(\sum \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)\right)_p$ qui convergent

Chapitre 15

Séries Entières

Certains objets mathématiques ont des développements de Taylor exacts. C'est le cas notamment des polynômes, qui sont déjà des développements de Taylor. Les séries géométriques par exemple ont également un développement de Taylor exact : pour la série de terme général q^k, on a $\sum_{0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$. Sinon, la plupart du temps, le développement de Taylor est précis jusqu'à un dernier terme qu'on ne peut calculer, mais qu'on peut quand même approximer en $o(\cdots)$ ou en $O(\cdots)$

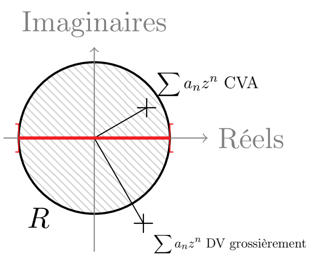
15.1 Généralités

Définition 39

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes. On appelle **série entière** de la variable complexe z la série de fonctions $\sum a_n z^n$.

Le **rayon de convergence** est la borne supérieure de $I = \{z \in \mathbb{R}_+, \sum |a_n| z^k \text{ converge}\}$. C'est en fait la valeur maximale de z pour laquelle la série converge.

Pour calculer le rayon de convergence, il importera peu de l'étudier pour les valeurs absolues, les nombres imaginaires, etc... car c'est seulement un rayon. Dans les réels, on appèlera l'intervalle $]-R, R[$ l'intervalle ouvert de convergence.



Lemme d'Abel

S'il existe ρ tel que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée, alors

$$\forall z < \rho, |a_n z^n| \leq M \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \qquad \text{et } \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \tag{15.1}$$

15.1.1 Rayon de Convergence

Théorème 39.1 : Relations de comparaisons

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors :

i. Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$

ii. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$

iii. Si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$

iv. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$

Théorème 39.2

Sur le disque ouvert D_R de convergence $]-R, R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge **absolument**.

Théorème 39.3

Sur le disque ouvert D_R de convergence $]-R, R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge **uniformément** et sa somme est une fonction **continue**.

Théorème 39.4

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Pour déterminer le rayon, il existe plusieurs méthodes, mais on se servira principalement du théorème suivant étant une conséquence de la règle de d'Alembert :

15.1.2 D'Alembert

Théorème 39.5 : Règle de d'Alembert

Pour la série entière $\sum a_n z^k$ non nulle à partir d'un certain rang, et qu'il existe l tel que

$$\boxed{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l} \text{ alors } l = \frac{1}{R}$$

La réciproque est fausse : si on connait R, on n'a pas $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Sinon, on a aussi $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Preuve 39.5.1 *Il suffit d'appliquer d'Alembert (cf. théorème 4.2 page 60) à la série de terme général $|a_n z^k|$ (qui est une SATP) qu'on prend à partir d'un* *certain rang tel que $a_n \neq 0$. Donc il existe une limite l telle que*

$$\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^z|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$$

Donc $|a_n z^n|$ converge si $l|z| < 1$, et diverge si $l|z| > 1$.

Puisque toute série entière de rayon de convergence $R > 0$ est absolument convergente dans son disque ouvert de convergence.

(**Attention**) En général, il vaut mieux utiliser le théorème original (théorème 4.2 page 60). En effet, ce théorème ne s'applique que pour des séries entières fonctions de z^n. Pour une série entière du type $\sum a_n z^{n^2}$, il n'est plus valable !

15.2 Série entière d'une variable réelle

15.2.1 Primitivation

Théorème 39.6

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa primitive est :

(15.2)
$$\forall z \in]-R;R[, \qquad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Et la série entière $\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence R.

15.2.2 Dérivation

Théorème 39.7

La somme d'une série entière est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Théorème 39.8 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa dérivée est :

(15.3)
$$\forall z \in]-R;R[, \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Et la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence.

(**Attention**) Le théorème de dérivation n'est valable qu'à l'intérieur du disque de convergence !

15.3 Fonctions développables en série entière

Définition 40 : Fonction développable en série entière

$f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ admet un DSE en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ telle que

(15.4) $$\forall z \in \overset{\text{boule ouverte de centre 0}}{V}, f(z) = \sum a_n z^n$$

Cette boule ouverte de centre 0 est inclue dans le disque de convergence du Développement en Série Entière (DSE) : $V \subset]-R; R[$.

Théorème 40.1 : Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) d'un DSE

$$f : \mathbb{R} \to K \text{ est un DSE en } 0 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt \underset{n\to\infty}{\to} 0}$$

15.4 Propriétés de la somme

Continuité

Théorème 40.2

La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence R

Dérivabilité

Théorème 40.3 : Dérivées successives

Les dérivées successives d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ ont toutes le même rayon de convergence R

Théorème 40.4

Pour des séries entières avec $R = \min(R_a, R_b)$, alors :

$$\forall x \in]-R, R[, \sum a_n x^n = \sum b_n x^n \implies \forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$$

Chapitre 16

Calcul Différentiel et Intégral

16.1 Dérivation

Définition 41 : Dérivabilité

$f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

On notera $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème 41.1

f dérivable $\Leftrightarrow \exists l$ tel que $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)l + (x-a)\varepsilon(x)$
Alors, l est la dérivée en a de f

Propriétés

Continuité f dérivable $\implies f$ continue

Linéarité $(f + \alpha g)' = f' + \alpha g'$

Dérivées usuelles

Application linéaire u linéaire, f dérivable ; $(u \circ f)'(x) = u \circ f'(x)$

Application multi-linéaire φ une application n-linéaire ;

$$\Big(\varphi(f_1, \cdots, f_n)\Big)'(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi\Big(f_1(x), \cdots, f_{i-1}(x), f_i'(x), f_{i+1}(x), \cdots, f_n(x)\Big)$$

Quotient u et v dérivables ; $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Composition f et g dérivables ; $(f \circ g)' = f'\, g'(f)$

Définition 42 : Application $\mathcal{C}^1$

$f \in \mathcal{C}^1\big(E, F\big)$ si l'application $f' : a \mapsto f'(a)$ existe et est continue.

Définition 43 : Dérivée k-ième

On définit récursivement la dérivée k-ième $f^{(k)}$:

(16.1) $$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$$

Définition 44 : Application de classe $\mathcal{C}^k$

f est $\mathcal{C}^k$ si f est k fois dérivable et si $f^{(k)}$ est continue.

Théorème 44.1 : Leibniz

Soit φ une application bilinéaire, alors :

(Leibniz) $$\varphi^{(n)}(f,g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi\left(f^{(k)}, g^{(n-k)}\right)$$

16.2 Intégration

Inégalité de la moyenne

Théorème 44.2 : Cas réel

Si f est **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et qu'il existe m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Alors

(16.2) $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

16.3 Primitive

Définition 45 : Primitive

F est une **primitive** de f si $\forall x, F'(x) = f(x)$.

Théorème 45.1

Si F est la primitive de f,

(16.3) $$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

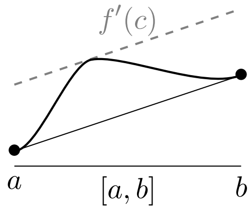
16.4 Accroissements finis

16.4.1 Cas réel

Théorème 45.2 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{D}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$, alors

$$\exists\, c \in]a,b[\text{ tel que } \boxed{f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)} \tag{16.4}$$

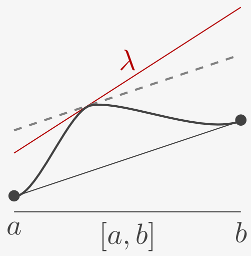


16.4.2 Cas vectoriel

Théorème 45.3 : Accroissements finis

$f \in \mathcal{C}\big(]a,b[,\mathbb{R}\big)$
Si $\exists\, \lambda$ tel que $\forall t \in]a,b[,\ N(f'(t)) \leq \lambda$, alors

$$\boxed{N\big(f(b)-f(a)\big) \leq \lambda\big((b-a)\big)} \tag{16.5}$$



16.5 Formules de Taylor

Théorème 45.4 : Formules de Taylor

$f \in \mathcal{C}^{k+1}(I,E)$, avec $(a,b) \in I^2$

Taylor-Young $\quad f(x) \underset{x\to a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \ + \ o\left((x-a)^n\right)$

Taylor-Laplace $\quad f(x) = \overbrace{\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)}^{T_k(x)} \ + \ \underset{(x-a)^{k+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}((1-u)a+ux)\,du}{\underset{=}{\overbrace{\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt}^{\text{Reste intégral } R_k(x)}}}$

Taylor-Lagrange $\quad f(x) = N\left(f(b)-f(a)-\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a)\right) \leq \dfrac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} N_\infty^{[a,b]}\left(f^{(k+1)}\right)$

Chapitre 17

Intégrales sur un intervalle

Méthode

Définitions rapides

Intégrabilité $f(x)$ intégrable si $\int |f(x)| < +\infty$

Norme de la convergence en moyenne

$N_1 : \int_I |f|$

Norme de la convergence en moyenne quadratique

$N_2 : f \to (f|f)^{\frac{1}{2}}$ (*cf* théorème 29.2 de la page 43)

Pour prouver l'intégrabilité

1. Vérifier la continuité sur l'intervalle étudié
2. Remplacer la fonction par sa valeur absolue
3. Étudier les problèmes aux bornes
   - Trouver un équivalent
   - Trouver un $o(\cdots)$
   - Avoir une primitive dont la limite vers la borne est finie
4. Comparer la fonction

   On pourra utiliser :
   - La fonction **exponentielle** ;
   - Les croissances comparées ;

- L'intégrale de **Riemann** : $\dfrac{1}{t^\alpha}$ (théorème 49.3 page 97)
- Une extension de Riemann : par exemple, f est intégrable sur $]0,1[$ si $\exists \alpha < 1$ tel que $f(x)\,x^\alpha \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, car alors, quand x tend vers 0, $x^\alpha f(x) \leq 1$ et on retrouve Riemann.
- L'intégrale de **Bertrand** (hors programme) : $\dfrac{1}{|\ln(t)|^\beta t^\alpha}$

Pour intégrer

On utilisera

1. Les intégrations par partie
2. Un changement de variable
3. Cauchy-Schwarz
4. L'intégrale d'un polynôme est un polynôme

Souvent, on ne peut intégrer sur tout un intervalle comme $[0;+\infty]$. Pour y remédier, on peut poser $a > 0$ tel que notre fonction soit intégrable sur $[a;+\infty[$. Alors, la fonction est intégrable sur $\cup[a;+\infty[= \mathbb{R}^+$

Formes usuelles

Forme	Méthode
$\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{x}$	Multiplier le dénominateur et le numérateur par le conjugué $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pour obtenir $a-b$ en haut
$\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$	On remarque que $x^{\frac{\alpha+1}{2}}\dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. On a alors $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$. Plus qu'à appliquer Riemann.
$\dfrac{1}{(x+a)\cdots(x+z)}$	Décomposition en éléments simples !

Applications classiques des théorèmes

Convergence dominée - (51.7)	Montrer que $\lim\left(\int\cdots\right) = \int(\lim\cdots)$
Intégration terme-à-terme - (51.9)	Montrer une égalité du type $\int f_{\text{DSE}} = \int\left(\sum(DSE)\right) = \sum\left(\int\cdots\right)$
Dérivation d'une intégrale à paramètre - (51.11)	Dériver une fonction de type $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$

17.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

17.1.1 Définition

Définition 46 : Intégrale convergente

Pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction $\mathcal{CPM}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite **convergente** si la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $x \to +\infty$.

Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite.

17.1.2 Propriétés de l'intégrale

Définition 47 : Notation $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}$

Soient E et F deux intervalles de $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}(E, F)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CPM}(E, F)$ dont la valeur absolue $|f|$ est intégrable sur E.

(**Attention**) Cette notation n'existe pas, je l'ai inventée pour alléger la suite

Théorème 47.1 : Linéarité de l'intégration

$\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^{+\infty} f \end{array}\right\}$ est **linéaire**.

Théorème 47.2 : Positivité

Soit $f \in \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}\Big([a, +\infty[, \mathbb{K}\Big)$.
Si f est positive, alors :

$$\int_a^{+\infty} f \geq 0 \tag{17.1}$$

De plus, si f est **continue** sur $[a, +\infty[$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = 0$, alors f est nulle sur $[a, +\infty[$.

Théorème 47.3 : Dérivation

Soit f une application continue de $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{+\infty} f \end{array}\right\}$ est **dérivable** et de dérivée $(-f)$ sur $[a, +\infty[$.

17.2 Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 48 : Fonction intégrable

Soit f une fonction $\mathcal{CPM}$ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$.
On dit que f est **intégrable** sur $[a, +\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente :

$$f \text{ intégrable si } |f| \in \mathcal{L}^1\Big([a, +\infty[, \mathbb{K}\Big) \tag{17.2}$$

Remarque : Cela revient à dire que f est intégrable si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument.

Définition 49 : Notation $\mathcal{L}^1$

Soient E et F deux intervalles de $\mathbb{K}$.
On note $\mathcal{L}^1(E, F)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{CPM}(E, F)$ dont la valeur absolue $|f|$ est intégrable sur E.

(**Attention**) Une fonction dont l'intégrale converge n'est pas forcément intégrable (*cf.* définition 48 page 97), c'est sa valeur absolue qui doit avoir une intégrale convergente !
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est seulement convergente, l'intégrale est dite **semi-convergente**

Théorème 49.1

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

17.3 Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Théorème 49.2 : Fonction positive intégrable

Soit f une fonction positive sur $[a, +\infty[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge <u>**si et seulement si**</u> $x \longmapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est majorée :

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge} \iff \exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \int_a^{+\infty} f \leq M \tag{17.3}$$

Théorème 49.3 : Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$

Soit α dans $\mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ <u>**si et seulement si**</u> $\alpha > 1$.

On étudie ici des intervalles du type $[a, +\infty[$, mais il peut être bon de savoir que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[0, 1[$ **si et seulement si** $\alpha < 1$.

Théorème 49.4 : Relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions **réelles**, **positives**, et **continues par morceaux** sur $[a, +\infty[$:

si $\quad 0 \leq f \leq g \quad , \qquad g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big), \qquad g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \implies f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

si $\quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x) \quad , \qquad g \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R}) \iff f \in \mathcal{L}^1([a, +\infty[, \mathbb{R})$

17.4 Intégration sur un intervalle quelconque

17.4.1 Sur un intervalle semi-ouvert

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant $+\infty$ par un réel b quelconque de $\mathbb{R}$. On effectue alors l'étude sur un semi-ouvert $[a, b[$. On retrouve alors :

- la définition 46 d'une intégrale convergente ;
- la définition 48 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 49.2, CNS d'une fonction positive intégrable ;
- le théorème 49.4 des relations de comparaisons.

Théorème 49.5 : Intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$

Soit α dans $\mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a, b]$ **si et seulement si** $\alpha < 1$ $(x - a > 0)$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|^\alpha}$ est intégrable sur $[b, a[$ **si et seulement si** $\alpha < 1$ $(x - a < 0)$.

17.4.2 Sur un intervalle de la forme $]a, b[$

Définition 50 : L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(Attention) L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ n'a aucune des propriétés algébriques familières qu'on a dans $\mathbb{R}$: par exemple, $a + b = a + c \implies b = c$ n'est plus vrai dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 51 : Intégrale convergente sur un ouvert

Soit f une fonction $\mathcal{CPM}\big(]a,b[,\mathbb{K}\big)$. Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est dite **convergente** s'il existe $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent sur leur intervalle semi-ouvert. On pose alors :

(**17.4**)
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Les définitions et théorèmes vus dans les sections précédentes s'appliquent en remplaçant $+\infty$ par un réel b quelconque de $\mathbb{R}$. On effectue alors l'étude sur un ouvert $]a,b[$ et on retrouve :

- la définition 46 d'une intégrale convergente ;
- la définition 48 d'une fonction intégrable ;
- le théorème 49.2, CNS d'une fonction positive intégrable.

17.4.3 Sur un intervalle I quelconque

Théorème 51.1 : Relation de Chasles

Soit $f \in \mathcal{CPM}(I,\mathbb{K})$ dont l'intégrale sur I converge. Pour tout $(a,b,c) \in \overline{I}^3$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, la **relation de Chasles** nous donne :

(**Chasles**)
$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Soit I un intervalle quelconque entre deux bornes a et b.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, on note $\displaystyle\int_I f$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$. On retrouve :

- le théorème 47.1 de linéarité de l'intégration : $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;
- le théorème 47.2 de positivité de l'intégration.

Théorème 51.2 : Inégalité triangulaire

Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^p(I,\mathbb{K})$ avec $p \in \mathbb{R}$. L'**inégalité triangulaire** des intégrale donne :

(**17.5**)
$$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

C'est l'inégalité de Minkowski appliquée aux intégrales. Elle est au programme dans le chapitre 6 des fonctions convexes (page 25), en tant qu'« exemple d'inégalités de convexité ».

Démo de Minkowski

Théorème 51.3 : Changement de variable

Soit f une fonction **continue** sur $]a,b[$ et soit $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une fonction **bijective** (donc strictement monotone) et de classe $\mathscr{C}^1$.
Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi\cdot|\varphi'|$ sont de même nature. Si elles convergent, elles sont égales :

(17.6) $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\Big(\varphi(u)\Big)\cdot\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Remarque : On a nécessairement $\lim\limits_{x\to\alpha}\varphi(x)=a$ et $\lim\limits_{x\to\beta}\varphi(x)=b$.

Théorème 51.4 : Intégration par parties

Soit $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$. Soient f et g deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
Si $f\cdot g$ possède des limites finies aux bornes a et b de l'intervalle, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f\cdot g'$ et $\displaystyle\int_a^b f'\cdot g$ sont de même nature.
Si les intégrales convergent :

(17.7) $$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t$$

où $[fg]_a^b = \lim\limits_{x\to b}(f\cdot g)(x) - \lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)$

17.5 Intégration des relations de comparaison

Théorème 51.5 : 1er théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{CPM}\Big([a,b[,\mathbb{R}^+\Big)$ telles qu'on ait une des conditions suivantes : $\begin{cases} f\leq g \\ f=o(g) \quad (\textit{cf.}\text{ définition 6 page 13}) \\ f=O(g)\end{cases}$, alors :

(17.8a) $$\int_a^b g \text{ converge} \implies \int_a^b f \text{ converge}$$

On a également la contraposée :

(17.8b) $$\int_a^b f \text{ diverge} \implies \int_a^b g \text{ diverge}$$

Remarque : D'après le programme officiel, seule la fonction de référence doit être positive.

Théorème 51.6 : 2e théorème d'intégration des relations de comparaison

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{CPM}\Big([a,b[,\mathbb{R}^+\Big)$.
Si $f \sim g$, alors f et g sont de même nature.

17.6 Passage à la limite sous l'intégrale

17.6.1 Convergence dominée

Théorème 51.7 : Convergence dominée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\left(f_n\right)_n$ est une suite de fonction de $\mathcal{CPM}(I,K)$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CPM}(I,K)$, et s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$, alors $f \in \mathcal{L}^1$ et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty}\int_I f_n$

Théorème 51.8 : Convergence dominée de fonction à paramètre réel

Soit $\lambda \in J \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- $\left(f_\lambda\right)_\lambda$ est une suite de fonction de $\mathcal{CPM}(I,K)$;
- pour tout $x \in I$, pour tout $\lambda_0 \in \overline{J}$, $f_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} f(x)$ avec $f \in \mathcal{CPM}(I,K)$;
- il existe $\varphi \in \mathcal{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_\lambda| \leq \varphi}$.

Alors, $f \in \mathcal{L}^1$, et $\displaystyle\int_I f = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_I f_\lambda$

Démo !

17.6.2 Intégration terme à terme

Théorème 51.9 : Intégration terme à terme

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum \underbrace{f_n}_{f_n \in \mathcal{L}^1} \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ \displaystyle\sum \int_I \color{red}{|}\overbrace{f_n}\color{red}{|} \quad \text{converge} \end{array}\right\}, \text{ alors } f \text{ est intégrable et :}$$

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n \tag{17.9}$$

Remarque : L'hypothèse de convergence de $\displaystyle\sum\int_I |f_n|$ est en faite une hypothèse de domination.

17.7 Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 51.10 : Continuité

Soit A une partie d'un espace normé, et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : \big(A \times I\big) \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Si :

(17.10)
$$\begin{cases} \forall x \in A, & t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{CM} & \textbf{(}\boldsymbol{\mathcal{CPM}}\textbf{ pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ \forall t \in I, & x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C} & \textbf{(Continue pour } \boldsymbol{x}\textbf{)} \\ \quad \forall (x,t) \in (A \times I) \\ \quad \exists \varphi \in \mathscr{L}^1 \text{ tel que} & |f(x,t)| \leq \varphi & \textbf{(Domination)} \end{cases}$$

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)$ est définie et continue sur A si

17.8 Dérivation d'un intégrale à paramètre

Théorème 51.11 : Dérivabilité d'un intégrale à paramètre

Soient I et A des intervalles quelconques de $\mathbb{R}$.
Soit $f : \big(A \times I\big) \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Si :

(17.11a)
$$\begin{cases} \forall x \in A, t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{L}^1 \quad \textbf{(}\boldsymbol{f}\textbf{ intégrable pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ f \text{ admet une dérivée partielle qui vérifie} \\ \begin{cases} \forall x \in A, t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{L}^1 & \textbf{(}\boldsymbol{\mathcal{CPM}}\textbf{ pour } \boldsymbol{t}\textbf{)} \\ \forall t \in I, x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{C} & \textbf{(}\boldsymbol{\mathscr{C}^1}\textbf{ pour } \boldsymbol{x}\textbf{)} \\ \forall (x,t) \in A \times \underbrace{[a,b]}_{\in I}, \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t) \in \mathscr{L}^1 & \textbf{(Domination)} \end{cases} \end{cases}$$

alors, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)$ est dérivable et $\mathscr{C}^1$ sur A, et :

(17.11b)
$$\forall x \in A, \qquad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Théorème 51.12 : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soient I et A des intervalles quelconques de $\mathbb{R}$.
Soit $f : \big(A \times I\big) \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Si :

(17.12a)
$$\begin{cases} \forall x \in A, \forall j \in [\![0, k-1]\!], \quad t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{L}^1 \quad (\boldsymbol{f} \textbf{ intégrable } \boldsymbol{k} \textbf{ fois pour } \boldsymbol{t}) \\ \begin{cases} \forall x \in A, t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \in \mathcal{CPM} \ (\boldsymbol{\mathcal{C}^k\mathcal{PM}} \textbf{ pour } \boldsymbol{t}) \\ \forall t \in I, \forall j \in [\![0, k]\!], x \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t) \in \mathcal{C} \qquad (\boldsymbol{\mathscr{C}^k} \textbf{ pour } \boldsymbol{x}) \\ \forall (x,t) \in A \times \underbrace{[a,b]}_{\in I}, \left| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \varphi(t) \in \mathscr{L}^1 \quad \textbf{(Domination)} \end{cases} \end{cases}$$

Alors $t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A, et :

(17.12b)
$$\forall x \in A, \qquad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t$$

17.9 Intégrabilité (Ancienne version)

À l'origine, on donne plusieurs définitions de l'intégrabilité : d'abord pour les fonctions positives, puis pour les autres en disant que c'est si $|f|$ est intégrable. On donne ici une définition plus générale :

Définition 52 : Fonction intégrable

$f(x) \in \mathcal{CM}$ est intégrable sur I si

$\forall x \in \underbrace{J}_{\text{segment}} \subset I, \exists M \in \mathbb{R}^+$ **tel que** $\displaystyle\int_J |f| \leq M$

Théorème 52.1 : CNS de l'intégration

$f(x)$ est intégrable sur I si

$\forall x \in I, \boxed{\displaystyle\int_I |f| \leq \varphi}$ où $\varphi \in \mathscr{L}^1$

Théorème 52.2

Si f est une fonction intégrable sur I,

(17.13)
$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

17.10 Intégrales classiques

Théorème 52.3

Si $-\infty < a < b < +\infty$, alors $f : t \mapsto \dfrac{1}{(b-a)^\alpha}$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $\boxed{\alpha < 1}$

Théorème 52.4 : Intégrale de Riemann

$f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est l'intégrale de Riemann, $\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \quad \text{existe} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1 \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx \quad \text{existe} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1 \end{cases}$

17.11 Espaces vectoriels normés de fonction intégrables

Théorème 52.5 : Convergence dominée

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonction de $\mathcal{CM}(I, K)$ convergeant simplement vers une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, K)$, et s'il existe $\varphi \in \mathscr{L}^1$ telle que $\boxed{\forall n, |f_n| \leq \varphi}$,
alors $f \in \mathscr{L}$ et $\displaystyle\int_I f = \lim_{n \to +\infty}, \int_I f_n$

Théorème 52.6 : Intégration terme à terme

$$\left.\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} & \underbrace{f_n}_{} & \xrightarrow{\text{CVS}} f \\ & f_n \in \mathscr{L}^1 & \\ \displaystyle\sum \int_I & \overbrace{|\, f_n \,|}^{} & \text{converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \in \mathscr{L}^1 \\ \sum f_n \text{ converge} \\ \int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{array} \tag{17.14}$$

17.12 Fonction Gamma

Définition 53 : Fonction Gamma

On définit Γ de $]0, +\infty[$ par $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Cette fonction est convexe (comme produit de deux applications $x \mapsto t^{x-1}$ et $x \mapsto e^{-t}$ convexes), donc continue.

Théorème 53.1 : Étude de Γ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
- $\Gamma(n+1) = n!$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \cdots = \sqrt{\pi}$

Preuve 53.1.1 *Vérifions que Γ est une fonction continue. On utilise le théorème de continuité de fonctions paramétrés, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue.*
Pour dominer $t^{x-1}e^{-t}$, avec $x \in [a,b]$, on prend $\varphi(t) = e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$

Maintenant qu'on a étudié la continuité, on peut faire une intégration par partie de $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}dt$ en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t^n & \Longrightarrow \quad u'(t) = nt^{n-1} \\ v(t) = -e^{-t} & \Longrightarrow \quad v'(t) = e^{-t} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \Gamma(n+1) = \underbrace{\left[-t^n e^{-t}\right]_0^{\infty}}_{=-0+0} - \underbrace{\int_0^{\infty} -t^{n-1}e^{-t}}_{\Gamma(n)}$$
$$\Longrightarrow \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n!\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}$$

d'où $\Gamma(n+1) = n!$ CQFD.

17.13 Intégrales doubles

Définition 54 : Intégrale double

f une fonction continue de $[\alpha,\beta] \times [a,b]$ dans $\mathbb{C}$.
Alors $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)dt\right)dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right)dt$

Cinquième partie

Équations Différentielles

Chapitre 18

Équations Différentielles Linéaires

Méthode

Résoudre une équation différentielle

Scalaire du 1er ordre Méthode algorithmique, *cf.* preuve 6.2.1 page 109

Vectorielles du 1er ordre

- Avec les coefficients constants
- Avec une matrice Diagonalisable
- Avec une matrice Trigonalisable

Scalaire du second ordre

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

18.1 Généralités

18.1.1 Équation différentielle linéaire

Définition 1 : Équation différentielle linéaire d'ordre 1

On appelle **équation différentielle d'ordre 1** l'équation $(\mathcal{L})$:

$$x' = a(t)(x) + b(t) \qquad (\mathcal{L})$$

avec $a \in \mathcal{C}\big(I, \mathscr{L}(E)\big)$ et $b \in \mathcal{C}\big(I, E\big)$.
L'application $x : I \to E$, dérivable, est **solution** de l'équation $(\mathcal{L})$ si :

$$\forall t \in I, \qquad x'(t) = a(t)\Big(x(t)\Big) + b(t) \qquad (18.1)$$

(Attention) a est une application de I dans $\mathscr{L}(F)$. Donc $a(t)$ est une application linéaire, pas un scalaire

Définition 2 : Forme matricielle

En choisissant une base de E, l'équation peut s'écrire matriciellement :

(18.2) $$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec $A \in \mathcal{C}\Big(I, M_n(\mathbb{R})\Big)$ et $B \in \mathcal{C}\big(I, \mathbb{R}^n\big)$

Définition 3 : Équation homogène associée

On appelle **équation homogène** associée à l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ l'équation :

$(\mathcal{H})$ $$x' = a(t)(x)$$

Théorème 3.1 : Principe de superposition

Si x_1 est solution de $x' = a(t)\ x + b_1(t)$
et x_2 ——— $x' = a(t)\ x + b_2(t)$
alors $x_1 + x_2$ est solution de

(18.3) $$x' = a(t)(x) + b_1(t) + b_2(t)$$

18.1.2 Problème de Cauchy

Définition 4 : Problème de Cauchy

On appelle **problème de Cauchy** pour l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ l'ensemble constitué par $(\mathcal{L})$ et un couple (t_0, x_0) formant une condition initiale :

(18.4) $$\begin{cases} x'(t) &= a(t)\big(x(t)\big) + b(t) & (\mathcal{L}) \\ x(t_0) &= x_0 & \text{(Condition initiale)} \end{cases}$$

Théorème 4.1 : Mise sous forme intégrale

$x \in \mathcal{C}(I, F)$ est solution du problème de Cauchy (18.4) si et seulement si :

(18.5) $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(a(u)\big(x(u)\big) + b(u)\Big)\mathrm{d}u$$

18.1.3 Équation scalaire linéaire d'ordre n

Définition 5 : Équation scalaire linéaire

Avec les notations précédentes, une équation de la forme

(18.6) $$x' = a(t)x + b(t)$$

est scalaire si $n = \dim E = 1$.

Définition 6 : Équation différentielle linéaire d'ordre n

On appelle **équation différentielle d'ordre n** l'équation $(\mathscr{L})$:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t) \tag{$\mathscr{L}$}$$

$\left(a_0, \cdots, a_n\right)$ est dans $\Big(\mathcal{C}(I, \mathbb{R})\Big)^{n+1}$.
Cette équation est équivalente à un système différentiel linéaire de la forme

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

avec $A \in \mathcal{C}\Big(I, M_n(\mathbb{R})\Big)$ et $B \in \mathcal{C}\big(I, \mathbb{R}^n\big)$

18.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

Théorème 6.1 : Théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire

Soit l'équation différentielle

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{E}$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathscr{L}(F)\right)$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall (t_0, x_0) \in (I, F), \exists!\ \varphi \text{ telle que } \left|\begin{array}{l}\varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0\end{array}\right. \tag{18.7}$$

Cas des équations d'ordre n

18.3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

18.4 Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

18.5 Méthode de variation des constantes

18.6 Équations différentielles scalaires du second ordre

18.7 Équations Différentielles Scalaires d'ordre 1

Théorème 6.2 : Solution de l'équation différentielle scalaire

Si $y' = a(t)y + b(t)$, alors $S_I(\mathscr{L})$ est un sous-espace affine

Preuve 6.2.1 (Algorithmique) *Par hypothèse, $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, donc $a(t)$ admet* *une primitive* $P(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\, ds$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-P(t)}\, y(t)\right) &= \underbrace{-P'(t)}_{-a(t)}\ \ e^{-P(t)} y(t)\ + e^{-P(t)}\ \overbrace{y'(t)}^{a(t)\, y(t) + b(t)} \\ &= -a(t)\ \ y(t)\, e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \left(a(t)\, y(t) + b(t)\right) \\ &= e^{-P(t)} b(t)\end{aligned}$$

Si c'est intégrable, $\exists\, C$ *tel que :*

$$\begin{aligned} e^{-P(t)}\, y(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} \left(e^{-P(u)}\, b(u)\, du + C\right) \\ y(t) &= \int\limits_{t_0}^{t} \left(e^{-P(u)}\, b(u)\, du + C\right) e^{P(t)} \end{aligned}$$

est solution de l'équation.

18.8 Équations Différentielles Vectorielles d'ordre 1

Problème de Cauchy

Définition 7 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

$$x'(t) = a(t) x(t) + b(t) \qquad (\mathscr{L})$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathscr{L}(F)\right),\ b \in \mathcal{C}(I, F)$.
Le **Problème de Cauchy** revient à trouver, pour tout $(t_0, x_0 = x(t_0))$ dans $I \times F$, une solution φ de $(\mathscr{L})$

(**Attention**) a est une application de I dans $\underline{\mathscr{L}(F)}$. Donc $a(t)$ est une application linéaire, pas un scalaire

Système fondamental

Définition 8 : Système Fondamental

Un **système fondamental** de solutions est une base dans l'espace $S_I(\mathcal{H})$ des solutions.

Propriétés

- Si $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$ est une base de $S_I(\mathscr{L})$, alors, $\forall t \in I$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$ est une base dans F

Définition 9 : Wronskien

Le Wronskien est le déterminant d'un système fondamental de solution.

(**Wronskien**)
$$W(t) = \det_{\mathcal{B}}\Big(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\Big)$$

(**Attention**) Le Wronskien est une fonction de t

Propriétés

- $W'(t) = \mathrm{tr}(a)\ W(t)$
- $W(t) = W(t_0)\ e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(s)\ ds}$

Théorème 9.1 : Variation des constantes

Soit $\Big(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\Big)$ une base de $S_I(\mathcal{H})$.

Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$, $\left\{\begin{array}{l} \text{Il existe une \underline{unique} famille } \overbrace{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)}^{\text{dans } \mathcal{C}^1(I,F)} \text{ telle que } \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \varphi_i \\ \varphi \in S_I(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in I, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)\, \varphi_i(t) = b(t)} \end{array}\right.$

Pour une équation à coefficients a et b constants $x' = ax + b(t)$, la solution générale est

$$\boxed{y(t) = e^{(t-t_0)a} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)a} b(s)\ ds}$$

18.9 Équations Différentielles linéaires du second ordre

Définition 10 : Équation Différentielle Vectorielle

C'est une équation sous la forme

($\mathscr{L}$)
$$y''(t) + a(t)y'(t) + a(t)y(t) = \gamma(t)$$

L'équation homogène est

($\mathcal{H}$)
$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

On note $f(r) = r^2 + a \times r + b$ son polynôme caractéristique

18.9.1 Coefficients constants

Théorème 10.1 : Résolution de l'équation

Dans le cas de l'équation homogène $(\mathcal{H})$, on calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique. Suivant les cas, on a la solution $y(t)$ pour l'équation homogène :

$\Delta \neq 0$	$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Ou encore :

$\Delta > 0$	$r_\pm = \alpha \pm \beta$	$y(t) = e^{\alpha t}\left(A \cdot \cosh(\beta t) + B \cdot \sinh(\beta t)\right)$
$\Delta < 0$	$r_\pm = \alpha \pm i\beta$	$y(t) = e^{\alpha t}\left(A \cdot \cos(\beta t) + B \cdot \sin(\beta t)\right)$
$\Delta = 0$	r double	$y(t) = (A + Bt)e^{rt}$

Théorème 10.2

Si dans $(\mathscr{L})$, $\gamma(t) = P(t)e^{\lambda t}$, $P \in \mathbb{C}[X]$, alors on peut donner une solution :

$$t \mapsto t^{\omega(\lambda)} Q(t) e^{\lambda t} \tag{18.9}$$

où $\omega(\lambda)$ est la multiplicité de λ en tant que racine du polynome caractéristique de f et $Q \in \mathbb{C}[X]$ est de même degré que P.

18.9.2 Cas général

Théorème 10.3 : Théorème de Cauchy-Lipshitz linéaire

Soit l'équation différentielle

$$y''(t) + a(t)y'(t) + a(t)y(t) = \gamma(t) \tag{$\mathscr{L}$}$$

où $a \in \mathcal{C}\left(I, \mathscr{L}(F)\right)$, $b \in \mathcal{C}(I, F)$, alors

$$\forall \big(t_0, (x_0, x_0')\big) \in (I, \mathbb{K}^2), \exists! \, \varphi \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ soit solution de l'équation } (E) \\ \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x_0' \end{array} \right.$$

Preuve 10.3.1

Le théorème est une conséquence du théorème 6.1 si on résout plutôt $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}(t)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$

Définition 11 : Wronskien

Si u et v sont des I-solutions, le **Wronskien** est l'application définie par

$$W = uv' - u'v \tag{Wronskien}$$

Propriétés

Dans l'équation $(\mathcal{H}) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$,

- $W + aW = 0$
- (u, v) libre $\Leftrightarrow \exists t_0$ tel que $W(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow \forall t, W(t) \neq 0$

Théorème 11.1 : Méthode de variation des constantes

En connaissant (u, v) un système fondamental de solutions, on cherche une solution de la forme $y(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)u(t)$. On détermine c_1 et c_2 avec :

$$c_1' \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} + c_2' \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{18.10}$$

Chapitre 19

Équations Différentielles non linéaires

19.1 Équations autonomes

Définition 12 : Champ de Vecteur

On appelle **champ de vecteurs** l'application qui à un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe $\overrightarrow{V(M)}\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} U\in\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{C}^1} & \mathbb{R}^2 \\ M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & \overrightarrow{V(M)}\begin{pmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix}\end{array}$$

Définition 13 : Système Autonome

On appelle **système autonome** associé au champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$ le système différentiel

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{V(M)}}$$

Le mot *autonome* témoigne de la non-dépendance en t du champ de vecteur $\overrightarrow{V(M)}$

Théorème 13.1 : Cauchy-Lipshitz (*admis*)

Avec les données précédentes, pour tout couple $\big(t_0,(x_0,y_0)\big)\in(I\times U)$, il existe une unique I-solution <u>maximale</u> $\varphi : t\mapsto M(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, telle que $\left|\begin{array}{ccc}x(t_0)&=&x_0\\y(t_0)&=&y_0\end{array}\right.$

Une **solution maximale** est une solution qui n'est la restriction d'aucune autre. Son intervalle de définition est l'intervalle maximal.

19.2 Équations non autonomes

Dans cette section on appelle **équation différentielle** :

$(\mathcal{E})\qquad x'=f(t,x)$

où f est une fonction de $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

Théorème 13.2 : Cauchy-Lipshitz (*admis*)

U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}^2$, et en reprenant l'équation $(\mathcal{E})$:

$$\forall (t_0, x_0) \in U, \exists!\, \varphi \text{ telle que } \left| \begin{array}{l} \varphi \text{ soit } \textbf{solution maximale} \text{ de l'équation } (\mathcal{E}) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{array} \right.$$

Chapitre 20

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, on se place dans (E, N) et (F, P), des espaces vectoriels normés de dimension finie. U est un ouvert de E

$$\begin{array}{cccc} f & : & U & \to & F \\ & & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

20.1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition 14 : Dérivée selon un vecteur

Soit $f : U \to F$ la fonction définie précédemment.
Soit v un vecteur non nul de E, et t un réel tel que $a + tv \in U$.
On dit que f **admet une dérivée selon le vecteur v au point a** (ou admet une **dérivée directionnelle**) si la fonction réelle $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. Cette dérivée en a est notée $D_v f(a)$.
On a alors :

(20.1)
$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Définition 15 : Dérivées partielles dans une base

Soit $f : U \to F$ la fonction définie précédemment.
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On appelle **dérivée partielle** de f dans $(e_n)_n$ ses dérivées par rapport aux vecteurs. La i-ième dérivée partielle en a est notée $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ainsi :

(20.2)
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

20.2 Différentielle

20.2.1 Application différentiable

Définition 16 : Application différentiable au point a

Soit $f : U \to F$ la fonction définie précédemment.
On dit que f est **différentiable** au point a s'il existe une fonction linéaire $\mathrm{d}f(a) : E \to F$ telle que :

(20.3) $$\forall h \in E,\ f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(h)$$

(**Attention**) $\mathrm{d}f(a) \in \mathscr{L}(E,F)$ est une application linéaire de E dans F. On l'applique sur un vecteur h en notant $\mathrm{d}f(a)(h)$ ou $\mathrm{d}f(a) \cdot h$

Théorème 16.1 : f dérivable en a

Soit f la fonction définie précédemment.
Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et est dérivable en a selon tout vecteur. Sa dérivée selon le vecteur v est alors :

(20.4) $$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$$

20.2.2 Jacobien, Jacobienne

Définition 17 : Jacobienne, Jacobien

Soient $(e_i)_i$ et $(e'_i)_i$ deux bases de respectivement E et F.
Soit $f = (f_j)_j$ la fontion définie précédemment telle que $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_i f_i(x_i) \cdot e'_i$. On définit la **Jacobienne** $\mathcal{J}_a(f)$ comme la matrice de terme général $j_{i,j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = D_j f_i(a)$.
Le **Jacobien** est le déterminant de cette matrice.

Exemple : La Jacobienne de la fonction polaire (qui à (r,θ) associe $(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$) est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$. Son Jacobien est donc $r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r$

20.3 Opérations sur les applications différentiables

Théorème 17.1 : Différentielle d'une composée d'applications

Soient E,F et G trois espaces vectoriels **normés réels** de **dimension finie**.
Soient f et g deux fonctions telles que :

$$\begin{array}{ccccccc} f & : & E & \to & F & & \\ g & : & & & F & \to & G \end{array}$$

Alors, la fonction $g \circ f$ est différentiable sur un ouvert de E et :

(20.5) $$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a)$$

20.4 Cas des applications numériques

20.4.1 Gradient

Définition 18 : Gradient

Soit E un espace euclidien, et f une application allant de U un ouvert de E à $\mathbb{R}$.
On appelle **gradient** de f en a l'unique vecteur de E, noté $\operatorname{Grad} f(a)$, tel que :

(20.6) $$\forall v \in E, \qquad \mathrm{d}f(a) \cdot v = (\operatorname{Grad} f(a)|u)$$

Expression dans une base orthonormée

Remarque : Parfois, le gradient de f en a, $\operatorname{Grad} f(a)$, est aussi noté $\nabla f(a)$

20.4.2 Représentation des formes linéaires

Définition 19 : Dual d'un Espace Vectoriel (ev) réel

Soit E un espace euclidien.
On appelle **dual** de E, et on note $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ ou E^*, l'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Théorème 19.1 : Représentation des formes linéaires

Soit E un espace euclidien.
Pour toute forme linéaire f de $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$:

(20.7) $$\exists! y, \forall x \in E, \qquad f(x) = (x|y)$$

Preuve 19.1.1 *Pour tout $y \in E$, on peut associer l'application $\theta_y : x \mapsto (x|y)$. Cette application est linéaire. L'application*

$$\left| \begin{array}{ccccc} \theta & : & E & \to & \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) \\ & & y & \mapsto & \theta_y \end{array} \right.$$

*est également linéaire. Son noyau $\operatorname{Ker}(\theta)$ étant nul, θ est injective. Mais E et $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ étant de même dimension, elle est donc **bijective**.*
Toute forme linéaire a donc un antécédant par θ. □

20.4.3 Point critique

Définition 20 : Point critique

On appelle **point critique** d'une application différentiable $f : E \to \mathbb{R}$ tout point de E tel que

(20.8) $$\mathrm{d}f(a) = 0$$

Définition 21 : Extremum local

Soit E un espace euclidien, et soit $f : E \to \mathbb{R}$.

On dit que f présente un **extremum local** en un point a si pour tout voisinage de a :

(**20.9a**) $$\forall x \in V, f(x) \leq f(a) \qquad \text{(Maximum local)}$$

(**20.9b**) $$\forall x \in V, f(x) \geq f(a) \qquad \text{(Minimum local)}$$

Théorème 21.1 : Condition nécessaire d'éxistence d'extremum

Soit E un espace euclidien, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une **fonction différentiable**.
Si f présente un extremum local en un point a, alors $\mathrm{d}f(a) = 0$.

(**Attention**) La réciproque de ce théorème est fausse

20.5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

20.6 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

20.7 Applications de classe $\mathcal{C}^k$

Chapitre 21

Fonctions de plusieurs variables

Méthode

Étude d'une fonction à deux variables

Passer en polaire

Dans ce chapitre, on se place dans (E, N) et (F, P), des espaces vectoriels normés de dimension finie. U est un ouvert de E

$$f : \begin{array}{ccc} U & \to & F \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

21.1 Différentielle, dérivée

21.1.1 Différentielle

Définition 22 : Différentielle

Il existe au plus un élément φ de $\mathscr{L}(E, F)$ tel que

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

φ est appelée la **différentielle** de f. On la note $df(a)$

Remarque : a et h sont des vecteurs. Donc sous la forme $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. De plus, $\varphi(h)$ est une application linéaire : $\varphi(h) \in \mathscr{L}\big(E, F\big)$

21.1.2 Dérivée selon un vecteur

Définition 23 : Dérivée en un point

On note $\varphi_h : t \mapsto f(a+th)$.
f admet une dérivée en a selon h si $\underline{\varphi_h \text{ est dérivable en } 0}$.
Alors, on note cette dérivée $D_h f(a) = \varphi_h'$. Si elle existe :

$$\boxed{D_h f(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}}$$

On a alors la dérivée pour tout a définie par la fonction $D_h f : a \mapsto D_h f(a)$

Définition 24 : Application de classe $\mathcal{C}^1$

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si $\forall j \in [1, n], D_j f$ existe et est continue sur U

Définition 25 : $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme

f (bijective) est un **$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme** si elle et son inverse sont $\mathcal{C}^k$. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}^1(U, V) \\ f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, U) \end{cases}$$

21.2 Inversion locale

Théorème 25.1 : Théorème d'inversion locale *(admis)*

$$f \in \mathcal{C}(U, F) \text{ injective est } \mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall a \in U, df(a) \text{ isomorphisme de } E \text{ dans } F$$

21.3 Complément sur les courbes planes

Théorème 25.2 : Formule de Green-Riemann

Un compact D délimitée par un une courbe plane Γ positivemment orientée et $\mathcal{CPM}^1$.
Soient P et Q deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert dans lequel Γ est tracé. On admet la formule de Green-Riemann :

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right](x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \tag{21.2}$$

Sixième partie

Géométrie

21.4 Arcs Paramétrés

Définition 1 : Arc Paramétré

On appelle **arc paramétré** de classe $\mathcal{C}^k$ un couple (I, f) avec $\begin{cases} I & \text{un intervalle de } \mathbb{R} \\ f & \text{une application de } \mathcal{C}^k(I, E) \end{cases}$

Définition 2

Quelques autres définitions :

Valeur Régulière	t_0	— $f'(t_0) \neq 0$
Valeur Birégulière	t_0	— $\left(f'(t_0), f''(t_0)\right)$ est libre
Abscisse Curviligne	s	— $s' = N_2\left(f'(t)\right)$ sur un intervalle
Paramétrage normal	(J, g)	—

Exemple d'abscisse curviligne : $s : t \mapsto \sinh(t)$ car $N_2(s(t)) = \sqrt{\int |\sinh(t)|^2} = \sinh'(t) = \cosh(t)$. L'avantage d'une abscisse curvligne est de pouvoir simplifier l'étude d'une courbe.

21.5 Courbes Planes

21.5.1 En polaire

Définition 3 : Fonction $\arg$

$\boxed{\theta \mapsto e^{i\theta} \text{ est une bijection de }]-\pi, \pi[\text{ sur } \mathbb{U}\backslash\{-1\}}$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$

Sa réciproque est l'application $u \mapsto \arg(u)$

Si on prend $u \in \mathbb{U}$, en notant $u = x + iy$, alors $\arg(u) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+1}\right)$

Théorème 3.1 : Théorème du Relèvement

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{U})$ (avec $n \neq 0$).
$\exists\, \theta \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ tel que $f(t) = e^{i\theta(t)}$. θ est appelé **relèvement** de f.

Preuve 3.1.1 *Si elle existe, θ n'est pas unique ($t \mapsto \theta(t) + 2\pi$ convient aussi).*
Donc $f'(t) = i\theta' f(t) \Leftrightarrow \theta'(t) = -i\frac{f'(t)}{f(t)}$.

On peut alors intégrer : $\theta(t) = C - i\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du$, et il ne reste plus qu'à prouver l'existence en ayant cette expression de $\theta(t)$

Définition 4 : Tangente

Si θ est une valeur régulière, on note V l'angle $\left(\overrightarrow{u_\theta}, \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M_\theta}}{\mathrm{d}\theta}\right)$, et on définit $\boxed{\tan(V) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}}$

21.5.2 Étude d'une courbe paramétrée

Méthode

Étude de courbes paramétrées

Quelques conseils :

- On essaye, si possible, de **passer en polaire**
- Ne pas oublier de vérifier les **ensembles de définition**
- Lors de l'étude **au voisinage d'un point**, il suffit d'étudier les dérivées successives grâce à un développement limité

On a l'expression de x et y en fonction de t : $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Pour étudier la courbe :

1. Ensemble de **définition** $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f \bigcup \mathcal{D}_g$
2. Étude des **variations** : on étudie x', y' et $\frac{y'}{x'}$
3. **Branches infinies**
   - $x = \lim f$ ou $y = \lim g$ sont des asymptotes (avec $\lim f$ et $\lim g$ des limites finies)
   - Si, pour $t_0 \in \mathbb{R}$ les deux fonctions tendent simultanément vers l'infini, on **étudie** $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y}{x}$

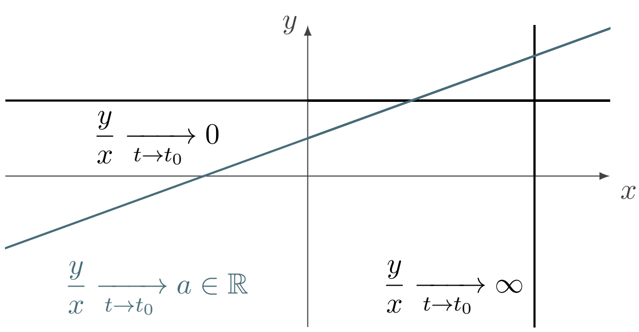


Figure 21.1 – Différents types d'asymptotes en fonction de $\frac{y}{x}$

Dans le cas où $\frac{y}{x} \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R}$, on peut déterminer b de l'équation $y = ax + b$ en examinant $y - ax$

Septième partie

Annexe

21.6 Équivalences

Pour une définition de l'équivalence, *cf.* définition 4 page 12

Formule de Stirling $\boxed{n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$

Équivalence de ln $\frac{\ln(u)}{t^\alpha} \sim t^{\frac{\alpha+1}{2}}$

Équivalents usuels en 0

$\sin(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cos(u)-1 \underset{0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$	$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$
$\sinh(u) \underset{0}{\sim} u$	$\cosh(u)-1 \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2}$	$e^u-1 \underset{0}{\sim} u$

21.7 Trigonométrie

21.7.1 Définition

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos x & = & \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x & = & \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\end{array}\right. \tag{21.3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cosh x & = & \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\ \sinh x & = & \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\end{array}\right. \tag{21.4}$$

21.7.2 Addition / Produit

$$\begin{array}{r|r}
\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b & \cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b \\
\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b & \cos(a+b)-\cos(a-b) = 2\sin a\sin b \\
\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b & \sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b \\
\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b & \sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b
\end{array} \tag{21.5}$$

21.7.3 Dérivation

Dérivées des fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\tan' x &= \frac{1}{1+\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \\
\arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arccos' x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\arctan' x &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

21.7.4 Formule de Moivre

(21.6) $$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Généralités

Conjugué $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Convexité La fonction **exponentielle** est **convexe**, la fonction **logarithme** est **concave**

Inégalités

Modules	$\left\| \left\| \sum_i x_i \right\| \right\| \leq \sum_i \|x_i\|$	
Module d'intégrales	$\left\| \int_I f \right\| \leq \int_I \|f\|$	(17.13)
Inégalité de la Moyenne	$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$	(16.2)

21.8 Formules usuelles

$$a^k - b^k = (a-b)\left(\sum_{p=0}^{k-1} a^p b^{k-1-p}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

21.9 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels normés usuels :
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathbb{C}_n[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}),$

21.10 Astuces

Primitives de 1 Dans une IPP, on peut primitiver 1 par $1+x$ pour enlever un terme au dénominateur. *Exemple :* $(\ln(1+x))^n$

Fontion k-lipschitzienne Il suffit de montrer que $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\boxed{|f'(t)| \leq k}$

Inverse d'une Matrice 2×2 Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $M^{-1} = \frac{1}{da - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Dérivée de $\boldsymbol{a^x}$ On a $a^x = e^{x\ln(a)}$, donc sa dérivée est $\boxed{\ln(a) \times a^x}$

Liste des acronymes

CNS Condition Nécessaire et Suffisante. 43, 52, 90, 98, 99, 103

DL Développement Limité. 58

DSE Développement en Série Entière. 90, 94

ev Espace Vectoriel. 118

LCI Loi de Composition Interne. 19

s-ep sous-espace propre. 32, 33

SATP Série À Termes Positifs. 4, 59, 61, 62, 88

Index