Подборка экзаменов по теории вероятностей. Факультет экономики, НИУ ВШЭ

Коллектив кафедры
математической экономики и эконометрики, талантливые студенты,
фольклор

14 июля 2018 г.

Содержание

Описание

Свежую версию можно скачать с github-репозитория https://github.com/bdemeshev/probability_hse_exams.
Красные ссылки внутри pdf-файла кликабельны, и ведут на ответы и обратно.
Уникальное предложение для студентов факультета экономики НИУ-ВШЭ:
Найдите ошибки в этом документе или пришлите отсутствующие решения в техе и получите дополнительные бонусы! Найденные смысловые ошибки поощряются сильнее, чем просто опечатки. Замеченные ошибки и новые решения оформляйте в виде запросов на https://github.com/bdemeshev/probability_hse_exams/issues/. Перед публикацией запроса, пожалуйста, свертесь со свежей версией подборки.
В создании подборки храбро участвовали Андрей Зубанов, Кирилл Пономарёв, Александр Левкун, Оля Гнилова, Настя Жаркова, Гарик Варданян и другие :)

Доброе напутствие пишущим эту подборку :)

Здесь перечислены стилевые особенности коллекции и самые популярные ошибки. Узнать технические подробности по теху можно, например, в учебнике К.В. Воронцова.

1. Дробную часть числа отделяй от целой точкой: 3.14 — хорошо, $3,14$ — плохо. Это нарушает русскую традицию, но облегчает копирование-вставку в любой программный пакет.
2. Существует длинное тире, —, которое отличается от просто дефиса - и нужно, чтобы разделять части предложения, Инструкция в картинках по набору тире :)
3. Выключные формулы следует окружать \[...\]. Никаких $$...$$!
4. Про остальные окружения: для системы уравнений подойдёт cases, для формул на несколько строк – multline*, для нумерации – enumerate.
5. Русский текст внутри формулы нужно писать в \text{...}.
6. Для многоточий существует команда \ldots.
7. В преамбуле определены сокращения! Самые популярные: \P, \E, \Var, \Cov, \Corr, \cN.
8. Названия функций тоже идут со слэшем: \ln, \exp, \cos...
9. Таблицы нужно оформлять по стандарту booktabs. Самый удобный способ сделать это – зайти на tablesgenerator и выбрать там опцию booktabs table style вместо default table style.
10. Уважай букву ё – ставь над ней точки! :)
11. Начинай каждой предложение внутри теховского файла с новой строки. В готовом pdf предложения будут идти без разрыва, а читабельность теха повысится.
12. В перечислениях после «Найдите» используй в качестве знаков препинания точки с запятой и точку в конце.

1. Минимумы

1.1. Контрольная работа 1

Теоретический минимум

1. Классическое определение вероятности
2. Определение условной вероятности
3. Определение независимости случайных событий
4. Формула полной вероятности
5. Формула Байеса
6. Функция распределения случайной величины. Определение и свойства.
7. Функция плотности. Определение и свойства.
8. Математическое ожидание. Определения для дискретного и абсолютно непрерывного случаев. Свойства.
9. Дисперсия. Определение и свойства.
10. Законы распределений. Определение, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$:
    а) Биномиальное распределение
    б) Распределение Пуассона
    в) Геометрическое распределение
    г) Равномерное распределение
    д) Экспоненциальное распределение

Задачный минимум

1. Пусть $\mathbb{P}(A) = 0.3, \mathbb{P}(B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$. Найдите
   а) $\mathbb{P}(A|B)$
   б) $\mathbb{P}(A \cup B)$
   в) Являются ли события A и B независимыми?
2. Пусть $\mathbb{P}(A) = 0.5, \mathbb{P}(B) = 0.5, \mathbb{P}(A \cap B) = 0.25$. Найдите
   а) $\mathbb{P}(A|B)$
   б) $\mathbb{P}(A \cup B)$
   в) Являются ли события A и B независимыми?
3. Карлсон выложил кубиками слово КОМБИНАТОРИКА. Малыш выбирает наугад четыре кубика и выкладывает их в случайном порядке. Найдите вероятность того, что при этом получится слово КОРТ.
4. Карлсон выложил кубиками слово КОМБИНАТОРИКА. Малыш выбирает наугад четыре кубика и выкладывает их в случайном порядке. Найдите вероятность того, что при этом получится слово РОТА.
5. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров. Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым?
6. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров. Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что была выбрана первая урна, если шар, взятый наугад из выбранной урны, оказался белым?
7. В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна 0.01, а неопытным — 0.1. Найдите вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции в этом отделе.
8. В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна 0.01, а неопытным — 0.1. Известно, что при очередной банковской операции была допущена ошибка. Найдите вероятность того, что ошибку допустил неопытный сотрудник.
9. Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения:

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.25	c	0.25

   Найдите
   а) константу c
   б) $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$
   в) $\mathbb{P}(X < -3)$

г) $\mathbb{P}\left(X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$

д) Функцию распределения случайной величины X

е) Имеет ли случайная величина X плотность распределения?

10. Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения:

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.25	c	0.25

Найдите

а) константу c

б) $\mathbb{E}(X)$

в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathbb{E}(|X|)$

11. Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения:

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.25	c	0.5

Найдите

а) константу c

б) $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$

в) $\mathbb{P}(X < -3)$

г) $\mathbb{P}\left(X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$

д) Функцию распределения случайной величины X

е) Имеет ли случайная величина X плотность распределения?

12. Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения:

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.25	c	0.5

Найдите

а) константу c

б) $\mathbb{E}(X)$

в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathbb{E}(|X|)$

13. Пусть случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0.75$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$

б) $\mathbb{P}(X > 0)$

в) $\mathbb{P}(X < 0)$
г) $\mathbb{E}(X)$
д) $\mathrm{Var}(X)$
е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина X

14. Пусть случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 0.4$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$
б) $\mathbb{P}(X > 0)$
в) $\mathbb{P}(X < 0)$
г) $\mathbb{E}(X)$
д) $\mathrm{Var}(X)$
е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина X

15. Пусть случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 100$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$
б) $\mathbb{P}(X > 0)$
в) $\mathbb{P}(X < 0)$
г) $\mathbb{E}(X)$
д) $\mathrm{Var}(X)$
е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина X

16. Пусть случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 101$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$
б) $\mathbb{P}(X > 0)$
в) $\mathbb{P}(X < 0)$
г) $\mathbb{E}(X)$
д) $\mathrm{Var}(X)$
е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина X

17. В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже выйдет хотя бы один человек.

18. В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже не выйдет ни один человек.

19. При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 3. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой.

20. При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 3. Найти вероятность того, что за двое суток не произойдет ни одного сбоя.

21. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} c, \text{ при } x \in [-1;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [-1;1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу c
б) $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$
в) $\mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right)$
г) $\mathbb{P}(X \in [2;3])$
д) $F_X(x)$

22. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} c, \text{ при } x \in [-1;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [-1;1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу c
б) $\mathbb{E}(X)$
в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$
г) $\mathrm{Var}(X)$
д) $\mathbb{E}(|X|)$

23. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, \text{ при } x \in [0;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу c
б) $\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right)$
в) $\mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right)$
г) $\mathbb{P}(X \in [2;3])$
д) $F_X(x)$

24. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, \text{ при } x \in [0;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу c

б) $\mathbb{E}(X)$

в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathbb{E}(\sqrt{X})$

1.2. Контрольная работа 2

Теоретический минимум

1. Сформулируйте определение независимости событий, формулу полной вероятности.
2. Приведите определение условной вероятности случайного события, формулу Байеса.
3. Сформулируйте определение и свойства функции распределения случайной величины.
4. Сформулируйте определение и свойства функции плотности случайной величины.
5. Сформулируйте определение и свойства математического ожидания для абсолютно непрерывной случайной величины.
6. Сформулируйте определение и свойства математического ожидания для дискретной случайной величины.
7. Сформулируйте определение и свойства дисперсии случайной величины.
8. Сформулируйте определения следующих законов распределений: биномиального, Пуассона, шеометрического, равномерного, экспоненциального, нормального. Укажите математическое ожидание и дисперсию.
9. Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора.
10. Сформулируйте определение и свойства совместной функции плотности двух случайных величин, сформулируйте определение независимости случайных величин.
11. Сформулируйте определение и свойства ковариации случайных величин.
12. Сформулируйте определение и свойства корреляции случайных величин.
13. Сформулируйте определение и свойства условной функции плотности.
14. Сформулируйте определение условного математического ожидания $\mathbb{E}(Y|X = x)$ для совместного дискретного и совместного абсолютно непрерывного распределений.
15. Сформулируйте определение математического ожидания и ковариационной матрицы случайного вектора и их свойства.
16. Сформулируйте неравенство Чебышёва и неравенство Маркова.
17. Сформулируйте закон больших чисел в слабой форме.
18. Сформулируйте центральную предельную теорему.
19. Сформулируйте теорему Муавра—Лапласа.
20. Сформулируйте определение сходимости по вероятности для последовательности случайных величин.

Задачный минимум

1. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = -1)$

б) $\mathbb{P}(Y = -1)$

в) $\mathbb{P}(X = -1 \cap Y = -1)$

г) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

д) $F_{X,Y}(-1, 0)$

е) Таблицу распределения случайной величины X

ж) Функцию $F_X(x)$ распределения случайной величины X

з) Постройте график функции $F_X(x)$ распределения случайной величины X

2. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 1)$

б) $\mathbb{P}(Y = 1)$

в) $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1)$

г) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

д) $F_{X,Y}(1, 0)$

е) Таблицу распределения случайной величины Y

ж) Функцию $F_Y(y)$ распределения случайной величины Y

з) Постройте график функции $F_Y(y)$ распределения случайной величины Y

3. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$

б) $\mathbb{E}(X^2)$

в) $\mathrm{Var}(X)$

г) $\mathbb{E}(Y)$

д) $\mathbb{E}(Y^2)$

е) $\mathrm{Var}(Y)$

ж) $\mathbb{E}(XY)$

з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$

к) Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

4. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$

б) $\mathbb{E}(X^2)$

в) $\mathrm{Var}(X)$

г) $\mathbb{E}(Y)$

д) $\mathbb{E}(Y^2)$

е) $\mathrm{Var}(Y)$

ж) $\mathbb{E}(XY)$

з) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

и) $\mathrm{Corr}(X, Y)$

к) Являются ли случайные величины X и Y некоррелированными?

5. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	0.3	0.1

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = -1 | Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(Y = 0 | X = -1)$

в) Таблицу условного распределения случайной величины Y при условии $X = -1$

г) Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = -1$

д) Условную дисперсию случайной величины Y при условии $X = -1$

6. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.2	0.1	0.2

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 1|Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(Y = 0|X = 1)$

в) Таблицу условного распределения случайной величины Y при условии $X = 1$

г) Условное математическое ожидание случайной величины Y при $X = 1$

д) Условную дисперсию случайной величины Y при условии $X = 1$

7. Пусть $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\text{Var}(X) = 3$, $\text{Var}(Y) = 4$, $\text{Cov}(X, Y) = -1$. Найдите

а) $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$

б) $\text{Var}(3Y + 3)$

в) $\text{Var}(X - Y)$

г) $\text{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\text{Cov}(X + 2Y + 1, 3X - Y - 1)$

е) $\text{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

8. Пусть $\mathbb{E}(X) = -1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\text{Var}(X) = 1$, $\text{Var}(Y) = 2$, $\text{Cov}(X, Y) = 1$. Найдите

а) $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$

б) $\text{Var}(2Y + 3)$

в) $\text{Var}(X - Y)$

г) $\text{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\text{Cov}(3X + Y + 1, X - 2Y - 1)$

е) $\text{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

9. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найдите

а) $\mathbb{P}(0 < X < 1)$

б) $\mathbb{P}(X > 2)$

в) $\mathbb{P}(0 < 1 - 2X \leqslant 1)$

10. Пусть случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Найдите

а) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

б) $\mathbb{P}(X < -2)$

в) $\mathbb{P}(-2 < -X + 1 \leqslant 0)$

11. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X < 4)$.

12. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(-2 < X < 4)$.

13. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\text{Var}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\text{Var}(Y) = 6$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X + 2Y < 7)$.

14. Случайные величины X и Y независимы и имеют нормальное распределение, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\text{Var}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 3$, $\text{Var}(Y) = 7$. Найдите $\mathbb{P}(1 < 3X + Y < 7)$.

15. Игральная кость подбрасывается 420 раз. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от 1400 до 1505?

16. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.5, в девятку – 0.3, в восьмерку – 0.1, в семерку – 0.05, в шестерку – 0.05. Стрелок сделал 100 выстрелов. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что он набрал не менее 900 очков?

17. Предположим, что на станцию скорой помощи поступают вызовы, число которых распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 73$, и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 26500 до 26800.

18. Число посетителей магазина (в день) имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 289. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что за 100 рабочих дней суммарное число посетителей составит от 28550 до 29250 человек.

19. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \cap Y \leqslant \frac{1}{2})$,

б) $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$,

в) $f_X(x)$,

г) $f_Y(y)$,

д) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

20. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \cap Y \leqslant \frac{1}{2})$,
б) $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$,
в) $f_X(x)$,
г) $f_Y(y)$,
д) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

21. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$,
б) $\mathbb{E}(Y)$,
в) $\mathbb{E}(XY)$,
г) $\text{Cov}(X, Y)$,
д) $\text{Corr}(X, Y)$.

22. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$,
б) $\mathbb{E}(Y)$,
в) $\mathbb{E}(XY)$,
г) $\text{Cov}(X, Y)$,
д) $\text{Corr}(X, Y)$.

23. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,
б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$
в) $\mathbb{E}\left(X|Y = \frac{1}{2}\right)$
г) $\text{Var}\left(X|Y = \frac{1}{2}\right)$

24. Пусть плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathbb{E}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

г) $\operatorname{Var}\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$

1.3. Контрольная работа 3

Теоретический минимум

1. Дайте определение нормально распределённой случайной величины. Укажите диапазон возможных значений, функцию плотности, ожидание, дисперсию. Нарисуйте функцию плотности.

2. Дайте определение хи-квадрат распределения. Укажите диапазон возможных значений, выражение через нормальные распределения, математическое ожидание. Нарисуйте функцию плотности при разных степенях свободы.

3. Дайте определение распределения Стьюдента. Укажите диапазон возможных значений, выражение через нормальные распределения. Нарисуйте функцию плотности распределения Стьюдента при разных степенях свободы на фоне нормальной стандартной функции плотности.

4. Дайте определение распределения Фишера. Укажите диапазон возможных значений, выражение через нормальные распределенеия. Нарисуйте возможную функцию плотности.

Для следующего блока вопросов предполагается, что имеется случайная выборка X_1, X_2, ..., X_n из распределения с функцией плотности $f(x, \theta)$, зависящей от от параметра θ. Дайте определение каждого понятия из списка или сформулируйте соответствующую теорему:

5. Выборочное среднее и выборочная дисперсия;

6. Формула несмещённой оценки дисперсии;

7. Выборочный начальный момент порядка k;

8. Выборочный центральный момент порядка k;

9. Выборочная функция распределения;

10. Несмещённая оценка $\hat{\theta}$ параметра θ;

11. Состоятельная последовательность оценок $\hat{\theta}_n$;

12. Эффективность оценки $\hat{\theta}$ среди множества оценок $\hat{\Theta}$;

13. Неравенство Крамера–Рао для несмещённых оценок;

14. Функция правдоподобия и логарифмическая функция правдоподобия;

15. Информация Фишера о параметре θ, содержащаяся в одном наблюдении;

16. Оценка метода моментов параметра θ при использовании первого момента, если $\mathbb{E}(X_i) = g(\theta)$ и существует обратная функция g^{-1};

17. Оценка метода максимального правдоподобия параметра θ;

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

18. Укажите закон распределения выборочного среднего, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2}$;
19. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для μ при известной дисперсии, для μ при неизвестной дисперсии, для σ^2;

Задачный миннимум

1. Рост в сантиметрах (случайная величина X) и вес в килограммах (случайная величина Y) взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}(Z) = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\operatorname{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

Лишний вес характеризуется случайной величиной $U = X - Y$. Считается, что человек страдает избыточным весом, если $U < 90$.

   а) Определите вероятность того, что рост мужчины отклоняется от среднего более, чем на 10 см.
   б) Укажите распределение случайной величины U. Выпишите её плотность распределения.
   в) Найдите вероятность того, что случайно выбранный мужчина страдает избыточным весом.

2. Рост в сантиметрах, случайная величина X, и вес в килограммах, случайная величина Y, взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}(Z) = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\operatorname{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

   а) Найдите средний вес мужчины при условии, что его рост составляет 170 см.
   б) Выпишите условную плотность распределения веса мужчины при условии, что его рост составляет 170 см.
   в) Найдите условную вероятность того, что человек будет иметь вес, больший 90 кг, при условии, что его рост составляет 170 см.

3. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) выборочное среднее,
   б) неисправленную выборочную дисперсию,
   в) исправленную выборочную дисперсию,
   г) выборочный второй начальный момент,
   д) выборочный третий центральный момент.

4. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) вариационный ряд,
   б) первый член вариационного ряда,
   в) последний член вариационного ряда,
   г) график выборочной функции распределения.

5. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из дискретного распределения, заданного с помощью таблицы

x	-3	0	2
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

Рассмотрите оценку $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{X} + 2}{5}$.

а) Найдите $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right)$.

б) Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

6. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения и $\hat{\theta} = \bar{X}$.

а) Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра θ?

б) Подберите константу c так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = c\bar{X}$ оказалась несмещенной оценкой неизвестного параметра θ.

7. Пусть $X = (X_1, X_2, X_3)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0, 1)$. Какие из следующих ниже оценкой являются несмещенными? Среди перечисленных ниже оценок найдите наиболее эффективную оценку:

- $\hat{p}_1 = \dfrac{X_1 + X_3}{2}$,
- $\hat{p}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$,
- $\hat{p}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$.

8. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n+1}$ состоятельной?

9. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{2n+1}{n}\bar{X}_n$ состоятельной оценкой неизвестного параметра θ?

10. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0; \theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0; \theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Используя центральный момент второго порядка, при помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ.

11. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайная выборка. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

x	-3	0	2
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

Используя второй начальный момент, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра θ. Для реализации случайной выборки $x = (0, 0, -3, 0, 2)$ найдите числовое значение найденной оценки параметра θ.

12. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta}\, e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ.

13. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра p.

14. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ эффективной?

15. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трех страт, определяется по формуле $TC = c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3$, где c_i — цена одного наблюдения в i-ой страте, а n_i — число наблюдений, которые приходятся на i-ую страту. Найдите n_1, n_2 и n_3, при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования 8000 и имеется следующая информация:

Страта	1	2	3
Среднее значение	30	40	50
Стандартная ошибка	5	10	20
Вес	25%	25%	50%
Цена наблюдения	1	5	10

1.4. Контрольная работа 4

Теоретический минимум

1. Дайте определение ошибки первого и второго рода, критической области.

2. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для вероятности успеха, построенного по случайной выборке большого размера из распределения Бернулли $Bin(1,p)$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Укажите формулу для статистики:

3. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при известной дисперсии σ^2, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu=\mu_0$.

4. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при неизвестной дисперсии σ^2, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu=\mu_0$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что есть две независимые случайные выборки: выборка X_1, X_2, ... размера n_x из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_x;\sigma_x^2)$ и выборка Y_1, Y_2, ... размера n_y из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_y;\sigma_y^2)$.
Укажите формулу для статистики или границ доверительного интервала:

5. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии известны;

6. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии не известны, но равны;

7. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при известных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu_x-\mu_y=\Delta_0$;

8. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\mu_x-\mu_y=\Delta_0$;

9. Статистика, проверяющая гипотезу о равенстве дисперсий, и её распределение при справедливости основной гипотезы H_0: $\sigma_x^2=\sigma_y^2$.

Задачный минимум

1. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и $\sigma^2 = 4$. Используя реализацию случайной выборки,
$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$
постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.

2. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами μ и σ^2. Используя реализацию случайной выборки,
$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$
постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра μ.

3. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами μ и σ^2. Используя реализацию случайной выборки,
$$x_1 = 1.07, \quad x_2 = 3.66, \quad x_3 = -4.51,$$
постройте 80%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2.

4. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Используя реализации случайных выборок
$$\begin{aligned} &x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42, \\ &y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91, \end{aligned}$$
постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

5. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Используя реализации случайных выборок
$$\begin{aligned} &x_1 = 1.53, \quad x_2 = 2.83, \quad x_3 = -1.25 \\ &y_1 = -0.8, \quad y_2 = 0.06 \end{aligned}$$
постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

6. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром p. Используя реализацию случайной выборки $x = (x_1, \dots, x_n)$, в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра p.

7. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ — независимые случайные выборки из распределения Бернулли с параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$ соответственно. Известно, что $n = 100$, $\bar{x}_n = 0.6$, $m = 200$, $\bar{y}_m = 0.4$. Постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для отношения разности вероятностей успеха $p_X - p_Y$.

8. Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу. Число заработанных за i-ый день чатлов имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром λ. Заработки в различные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

   С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра λ.

9. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

   где $\lambda > 0$ — неизвестный параметр распределения. Известно, что $n = 100$ и $\bar{x}_n = 0.52$.

   С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для параметра λ.

10. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией $\sigma^2 = 4$. Объем выборки $n = 16$. Для тестирования основной гипотезы $H_0 : \mu = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \mu = 2$ вы используете критерий: если $\bar{X} \leqslant 1$, то вы не отвергаете гипотезу H_0, в противном случае вы отвергаете гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1. Найдите

    а) вероятность ошибки 1-го рода;

    б) вероятность ошибки 2-го рода;

    в) мощность критерия.

11. На основе случайной выборки, содержащей одно наблюдение X_1, тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim U[-0.7; 0.3]$ против альтернативной гипотезы $H_1 : X_1 \sim U[-0.3; 0.7]$. Рассматривается критерий вида: если $X_1 > c$, то гипотеза H_0 отвергается в пользу гипотезы H_1. Выберите константу c так, чтобы уровень значимости этого критерия составлял 0.1.

12. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и $\sigma^2 = 4$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$

13. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и σ^2. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$

14. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$\begin{aligned} &x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42, \\ &y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91, \end{aligned}$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$

15. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$\begin{aligned} &x_1 = 1.53, \quad x_2 = 2.83, \quad x_3 = -1.25 \\ &y_1 = -0.8, \quad y_2 = 0.06 \end{aligned}$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$

16. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$\begin{aligned} &x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42, \\ &y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91, \end{aligned}$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$$

17. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0; 1)$.Имеется следующая информация о реализации случайной выборки, содержащей $n = 100$ наблюдений: $\sum_{i=0}^{n} x_i = 60$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5, \\ H_1 : p > 0.5 \end{cases}$$

18. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — две независимые случайные выборки из распределения Бернулли с неизвестными параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$. Имеется следующая информация о реализациях этих случайных выборок: $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 60$, $m = 150$,$\sum_{j=1}^{m} y_j = 50$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : p_X = p_Y, \\ H_1 : p_X \neq p_Y \end{cases}$$

19. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз – в спортзале и 39 раз в кино. На уровне значимости 5% проверьте утверждение Васи.

20. Вася очень любит тестировать статистические гипотезы. В этот раз Вася собирается проверить утверждение о том, что его друг Пётр звонит Васе исключительно в то время, когда Вася ест. Для этого Вася трудился целый год и провел серию из 365 испытаний. Результаты приведены в таблице ниже.

	Пётр звонит	Пётр не звонит
Вася ест	200	40
Вася не ест	25	100

На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что Пётр звонит Васе независимо от момента приема пищи Васей.

21. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu \in \mathbb{R}$ и дисперсией $v > 0$, где μ и v — неизвестные параметры. Известно, что выборка состоит из $n = 100$ наблюдений, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 30$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 146$. При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу $H_0 : v = 1$ на уровне значимости 5%.

2. Контрольная работа 1

2.1. 2017-2018

Минимум

1. Функция распределения случайной величины: определения и свойства.

2. Экспоненциальное распределение: определение, математическое ожидание и дисперсия.

3. В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна 0.01, а неопытным — 0.1. Известно, что при очередной банковской операции была допущена ошибка. Найдите вероятность того, что ошибку допустил неопытный сотрудник.

4. При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 3. Найдите вероятность того, что за двое суток не произойдет ни одного сбоя.

Задачи

1. Правильный кубик подбрасывают один раз. Событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число кратное трём, событие C — выпало число, большее трёх.

   а) Сформулируйте определение независимости двух событий;

   б) Определите, какие из пар событий A, B и C будут независимыми.

2. Теоретический минимум (ТМ) состоит из 10 вопросов, задачный (ЗМ) — из 24 задач. Каждый вариант контрольной содержит два вопроса из ТМ и две задачи из ЗМ. Чтобы получить за контрольную работу оценку 4 и выше, необходимо и достаточно правильно ответить на каждый вопрос ТМ и задачу ЗМ доставшегося варианта. Студент Вася принципиально выучил только k вопросов ТМ и две трети ЗМ.

   а) Сколько всего можно составить вариантов, отличающихся хотя бы одним заданием в ТМ или ЗМ части? Порядок заданий внутри варианта не важен.

   б) Найдите вероятность того, что Вася правильно решит задачи ЗМ;

   в) Дополнительно известно, что Васина вероятность правильно ответить на вопросы ТМ, составляет $1/15$. Сколько вопросов ТМ выучил Вася?

3. Производитель молочных продуктов выпустил новый низкокалорийный йогурт Fit и утверждает, что он вкуснее его более калорийного аналога Fat. Четырем независимым экспертам предлагают выбрать наиболее вкусный йогурт из трёх, предлагая им в одинаковых стаканчиках в случайном порядке два Fat и один Fit. Предположим, что йогурты одинаково привлекательны. Величина ξ — число экспертов, отдавших предпочтение Fit.

   а) Какова вероятность, что большинство экспертов выберут Fit?

   б) Постройте функцию распределения величины ξ;

   в) Каково наиболее вероятное число экспертов, отдавших предпочтение йогурту Fit?

   г) Вычислите математическое ожидание и дисперсию ξ.

4. Дядя Фёдор каждую субботу закупает в магазине продукты по списку, составленному котом Матроскином. Список не изменяется, и в него всегда входит 1 кг сметаны, цена которого является равномерно распределённой величиной α, принимающей значения от 250 до 1000 рублей. Стоимость остальных продуктов из списка в тысячах рублей является случайной величиной ξ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^2), \text{ если } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

   а) Какую сумму должен выделить кот Матроскин дяде Фёдору, чтобы её достоверно хватало на покупку сметаны?
   б) Какую сумму должен выделить кот Матроскин дяде Фёдору, чтобы Дядя Фёдор с вероятностью 0.9 мог оплатить продукты без сметаны?
   в) Найдите математическое ожидание стоимости продуктов без сметаны;
   г) Найдите математическое ожидание стоимости всего списка.
   д) Какова вероятность того, что общие расходы будут в точности равны их математическому ожиданию?

   Подсказка: $\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

5. Эксперт с помощью детектора лжи пытается определить, говорит ли подозреваемый правду. Если подозреваемый говорит правду, то эксперт ошибочно выявляет ложь с вероятностью 0.1. Если подозреваемый обманывает, то эксперт выявляет ложь с вероятностью 0.95.

   В деле об одиночном нападении подозревают десять человек, один из которых виновен и будет лгать, остальные невиновны и говорят правду.

   а) Какова вероятность того, что детектор покажет, что конкретный подозреваемый лжёт?
   б) Какова вероятность того, что подозреваемый невиновен, если детектор показал, что он лжёт?
   в) Какова вероятность того, что эксперт точно выявит преступника?
   г) Какова вероятность того, что эксперт ошибочно выявит преступника, то есть покажет, что лжёт невиновный, а все остальные говорят правду?

2.2. 2016-2017

1. Из семей, имеющих двоих разновозрастных детей, случайным образом выбирается одна семья. Известно, что в семье есть девочка (событие A).

   а) Какова вероятность того, что в семье есть мальчик (событие B)?

   б) Сформулируйте определение независимости событий и проверьте, являются ли события A и B независимыми?

2. Система состоит из N независимых узлов. При выходе из строя хотя бы одного узла, система дает сбой. Вероятность выхода из строя любого из узлов равна 0.000001. Вычислите максимально возможное число узлов системы, при котором вероятность её сбоя не превышает 0.01.

3. Исследование состояния здоровья населения в шахтерском регионе «Велико-кротовск» за пятилетний период показало, что из всех людей с диагностированным заболеванием легких, 22% работало на шахтах. Из тех, у кого не было диагностировано заболевание легких, только 14% работало на шахтах. Заболевание легких было диагностировано у 4% населения региона.

   а) Какой процент людей среди тех, кто работал в шахте, составляют люди с диагностированным заболеванием легких?

   б) Какой процент людей среди тех, кто НЕ работал в шахте, составляют люди с диагностированным заболеванием легких?

4. Студент Петя выполняет тест (множественного выбора) проставлением ответов наугад. В тесте 17 вопросов, в каждом из которых пять вариантов ответов и только один из них правильный. Оценка по десятибалльной шкале формируется следующим образом:

$$\text{Оценка} = \begin{cases} \text{ЧПО} - 7, & \text{если ЧПО} \in [8;\ 17], \\ 1, & \text{если ЧПО} \in [0;\ 7] \end{cases}$$

   где ЧПО означает число правильных ответов.

   а) Найдите наиболее вероятное число правильных ответов.

   б) Найдите математическое ожидание и дисперсию числа правильных ответов.

   в) Найдите вероятность того, что Петя получит «отлично» (по десятибалльной шкале получит 8, 9 или 10 баллов).

   Студент Вася также выполняет тест проставлением ответов наугад.

   г) Найдите вероятность того, что все ответы Пети и Васи совпадут.

5. Продавец высокотехнологичного оборудования контактирует с одним или двумя потенциальными покупателями в день с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. Каждый контакт заканчивается «ничем» с вероятностью 0.9 и покупкой оборудования на сумму в 50 000 у. е. с вероятностью 0.1. Пусть ξ — случайная величина, означающая объем дневных продаж в у. е.

   а) Вычислите $\mathbb{P}(\xi = 0)$.

   б) Сформулируйте определение функции распределения и постройте функцию распределения случайной величины ξ.

в) Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

6. Интервал движения поездов метро фиксирован и равен b минут, т.е. каждый следующий поезд появляется после предыдущего ровно через b минут. Пассажир приходит на станцию в случайный момент времени. Пусть случайная величина ξ, означающая время ожидания поезда, имеет равномерное распределение на отрезке $[0; b]$.

   а) Запишите плотность распределения случайной величины ξ.

   б) Найдите константу b, если известно, что в среднем пассажиру приходится ждать поезда одну минуту, т. е. $\mathbb{E}(\xi) = 1$.

   в) Вычислите дисперсию случайной величины ξ.

   г) Найдите вероятность того, что пассажир будет ждать поезд менее одной минуты.

   д) Найдите квантиль порядка 0.25 распределения случайной величины ξ.

   е) Найдите центральный момент порядка 2017 случайной величины ξ.

   ж) Постройте функцию распределения случайной величины ξ.

   Марья Ивановна из суеверия всегда пропускает два поезда и садится в третий.

   з) Найдите математическое ожидание и дисперсию времени, затрачиваемого Марьей Ивановной на ожидание «своего» поезда.

   Глафира Петровна не садится в поезд, если видит в нем подозрительного человека. Подозрительные люди встречаются в каждом поезде с вероятностью $3/4$.

   и) Найдите вероятность того, что Глафире Петровне придется ждать не менее пяти минут, чтобы уехать со станции.

   к) Найдите математическое ожидание времени ожидания «своего» поезда для Глафиры Петровны.

7. (Бонусная задача) На первом этаже десятиэтажного дома в лифт заходят 9 человек. Найдите математическое ожидание числа остановок лифта, если люди выходят из лифта независимо друг от друга.

2.3. 2015-2016

1. Подбрасываются две симметричные монеты. Событие — на первой монете выпал герб, событие — на второй монете выпал герб, событие — монеты выпали разными сторонами.

   α) Будут ли эти события попарно независимы?

   β) Сформулируйте определение независимости в совокупности для трех событий. Являются ли события A, B, C независимыми в совокупности?

2. Имеются два игральных кубика:

   - красный со смещенным центром тяжести, так что вероятность выпадения «6» равняется $1/3$, а оставшиеся грани имеют равные шансы на появление
   - честный белый кубик

   α) Петя случайным образом выбирает кубик и подбрасывает его. Найдите вероятность того, что выпадет «6».

   β) Петя случайным образом выбирает кубик и подбрасывает его. Какова вероятность того, что Петя взял красный кубик, если известно, что выпала шестерка?

3. Все те же кубики. Петя играет с Васей в следующую игру: Петя выбирает кубик и подбрасывает его. Вася подбрасывает оставшийся кубик. Выигрывает тот, у кого выпало большее число. Если выпадает равное число очков, выигрывает тот, у кого белый кубик.

   Пусть случайная величина ξ — число очков, выпавших на красном кубике, случайная величина η — число очков, выпавших на белом кубике, а величина ζ — максимальное число очков.

   α) Задайте в виде таблицы совместное распределение величин ξ и η. Отметьте (* или кружочком) все те пары значений, когда выигрывает красный кубик.

   β) Какой кубик нужно выбрать Пете, чтобы его шансы выиграть были выше?

   γ) Сформулируйте определение функции распределения и постройте функцию распределения величины ζ.

   δ) Вычислите математическое ожидание величины ζ.

4. Проводится исследование с целью определения процента мужчин, которые любят петь в душе. Поскольку некоторые мужчины стесняются прямо отвечать на этот вопрос, предлагается перед ответом на вопрос: «поете ли Вы, когда принимаете душ?» подбросить правильный кубик, и выбрать ответ «ДА», если выпала шестерка, ответ «НЕТ», если выпала единица, и честный ответ («ДА» или «НЕТ»), если выпала любая другая цифра.

   Предположим, что по результатам исследования вероятность ответа «ДА» составляет $2/3$. Каков истинный процент «певцов»?

5. Ваш полный тезка страдает дисграфией. При подписывании контрольной работы по теории вероятностей в своих имени и фамилии в именительном падеже Ваш тезка с вероятностью 0.1 вместо нужной буквы пишет любую другую (независимо от предыдущих ошибок).

   α) Найдите вероятность того, что он напишет свою фамилию правильно.

   β) Найдите вероятность того, что он сделает ровно 2 ошибки в своем имени.

   γ) Вычислите наиболее вероятное число допущенных тезкой ошибок.

δ) Найдите вероятность того, что при подписывании работы Ваш тезка допустит хотя бы одну ошибку.

6. Время (в часах), за которое студенты выполняют экзаменационное задание является случайной величиной с функцией плотности

$$f(y) = \begin{cases} cy^2 + y, & \text{if } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

α) Найдите константу c.

β) Найдите функцию распределения и постройте её.

γ) Вычислите вероятность того, что случайно выбранный студент закончит работу менее чем за полчаса.

δ) Найдите медиану распределения.

ϵ) Определите вероятность того, что студент, которому требуется по меньшей мере 15 минут для выполнения задания, справится с ним более, чем за 30 минут.

7. Вам известно, что на большом листе бумаги 1.5 м $\times$ 1 м нарисован слон. Вам завязали глаза и выдали кисточку хвоста для слона. Вам нужно прилепить эту кисточку к листу (рисунок Вы не видели). Вы подходите к листу и произвольно приклеиваете кисточку

α) Какова вероятность того, что кисточка окажется на слоне, если площадь рисунка составляет 1 м^2?

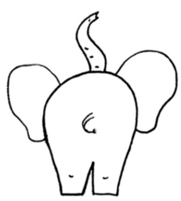
β) Запишите вид функции совместной плотности для координат кисточки.

γ) Запишите вид частных функций плотности для каждой из координат кисточки.

δ) Являются ли координаты кисточки независимыми случайными величинами?

ϵ) Запишите вид функции плотности суммы координат кисточки.

Подсказка: слон не должен заслонить равномерного распределения.



8. Укажите названия букв греческого алфавита и запишите соответствующие заглавные буквы:

$$\alpha, \zeta, \eta, \theta$$

.

2.4. 2014-2015

1. Вася забыл какую-то (какую?) формулу. Он помнит, что она начинается с «$\mathbb{P}(A|B) =$». Дальше была дробь, три буквы $\mathbb{P}$ со скобками после них и в сумме по две буквы A и B внутри этих скобок. Ещё там была вертикальная черта «|». Из этих элементов Вася случайным образом составляет формулу.

   а) С какой вероятностью Вася напишет правильную формулу?

   б) Напишите формулу, которую забыл Вася.

   Примечание: Вася всё-таки успел сходить на пару лекций по теории вероятностей и помнит, что $\mathbb{P}(A|B)$ и $\mathbb{P}(B|A)$ — это не одно и то же, «|» должна стоять именно между буквами (то ли $A|B$, то ли $B|A$), а в скобках, которые идут после $\mathbb{P}$, должно хоть что-то стоять. При этом формула должна иметь смысл, то есть $\mathbb{P}(A|B)$ не должна выражаться через себя же, и дробь не должна быть сократимой.

2. Точка с координатами (ξ, η) бросается наудачу в треугольник с вершинами $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$. Сформулируйте определение независимости двух событий и проверьте, будут ли события $A = \{\xi < 1/2\}$ и $B = \{\eta < 1/2\}$ независимыми?

3. На учениях три самолёта одновременно и независимо атакуют цель. Известно, что первый самолёт поражает цель с вероятностью 0.6, второй — 0.4, третий — 0.3. При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолётом. Какова вероятность того, что это был первый самолёт?

4. Книга в 500 страниц содержит 400 опечаток. Предположим, что каждая из них независимо от остальных опечаток может с одинаковой вероятностью оказаться на любой странице книги.

   а) Определите вероятность того, что на 13-й странице будет не менее двух опечаток, в явном виде и с помощью приближения Пуассона.

   б) Определите наиболее вероятное число, математическое ожидание и дисперсию числа опечаток на 13-ой странице.

   в) Является ли 13-ая страница более «несчастливой», чем все остальные (в том смысле, что на 13-ой странице ожидается большее количество очепяток, чем на любой другой)?

   Подсказка. Можно считать, что опечатки «выбирают» любую из страниц для своего появления независимо друг от друга. Успех заключается в выборе 13-ой страницы. Вероятность успеха?

5. Вероятность того, что медицинский тест выявит наличие заболевания, когда оно действительно есть, называется чувствительностью теста. Специфичностью теста называется вероятность того, что тест покажет отсутствие заболевания, когда пациент здоров. Вероятность того, что пациент болен, когда тест показал наличие заболевания, называется прогностической силой теста. Предположим, что только $1\,\%$ всего населения страдает данным заболеванием. Чувствительность используемого теста равна 0.9, а специфичность — 0.95.

   а) Какова вероятность того, что у случайно выбранного человека тест покажет наличие заболевания?

   б) Какова прогностическая сила теста? Что нужно сделать, чтобы её повысить?

6. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1.5(x-a)^2 & , x \in [0, a] \\ 1.5(x+a)^2 & , x \in [-a, 0] \\ 0 & , x \notin [-a, a] \end{cases}$$

   а) Найдите константу a, вероятность попадания в отрезок $[1/2, 2]$, математическое ожидание X и дисперсию случайной величины X.

   б) Нарисуйте функцию распределения случайной величины X.

7. Вася случайным образом посещает лекции по ОВП (Очень Важному Предмету). С вероятностью 0.9 произвольно выбранная лекция полезна, и с вероятностью 0.7 она интересна. Полезность и интересность — независимые друг от друга и от номера лекции свойства. Всего Вася прослушал 30 лекций.

   а) Определите математическое ожидание и дисперсию числа полезных лекций и числа интересных лекций, прослушанных Васей.

   б) Определите математическое ожидание числа бесполезных и неинтересных лекций, прослушанных Васей, и числа лекций, обладающих хотя бы одним из свойств (полезность, интересность).

8. Пусть $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 5$, $\mathbb{E}(XY) = -1$. Найдите:

   а) $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$

   б) $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$

   в) $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Corr}(X, Y)$

   г) $\mathrm{Var}(X - Y - 1)$, $\mathrm{Var}(X + Y + 1)$

   д) $\mathrm{Cov}(X - Y - 1, X + Y + 1)$, $\mathrm{Corr}(X - Y - 1, X + Y + 1)$

9. Совместное распределение случайных величин X и Y задано в виде таблицы:

	$X = 1$	$X = 2$
$Y = -1$	0.1	0.2
$Y = 0$	0.2	0.3
$Y = 1$	0	0.2

   а) Найти частные распределения Y и Y^2

   б) Найти ковариацию случайных величин X и Y

   в) Можно ли утверждать, что случайные величины зависимы?

10. Бонусная задача

    Какова вероятность того, что наугад выбранный ответ на этот вопрос окажется верным (искомую вероятность вычислить и записать!)?

    а) 0.25

    б) 0.5

    в) 0.6

    г) 0.25

2.5. 2013-2014

1. Вероятность застать Васю на лекции зависит от того, пришли ли на лекцию Маша и Алена. Данная вероятность равна 0.18, если девушек нет; 0.9 — если обе девушки пришли на лекцию; 0.54 — если пришла только Маша и 0.36 — если пришла только Алена. Маша и Алена посещают лекции независимо друг от друга с вероятностями 0.4 и 0.6 соответственно.

   а) Определите вероятность того, что на лекции присутствует Алена, если в аудитории есть Вася.

   б) Кого чаще можно застать на тех лекциях, на которых присутствует Вася: Машу или Алену?

2. Страховая компания страхует туристов, выезжающих за границу, от невыезда и наступления страхового медицинского случая за границей. Застраховано 100 туристов. Вероятность «невыезда» за границу случайно выбранного туриста — 0.002, а страховые выплаты в этом случае — 2000 у.е.; вероятность обращения за медицинской помощью за границей — 0.01, а страховые выплаты — 3000 у.е. Для каждого туриста рассмотрим две случайные величины: X_i, равную 1 при невыезде за границу и 0 иначе, и Y_i, равную 1 при обращении за медицинской помощью и нулю иначе. Обозначим $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ и $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$.

   а) Определите $\mathbb{P}(X = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\operatorname{Var}(X)$.

   б) Наиболее вероятное число не выехавших туристов.

   в) Вычислите математическое ожидание и дисперсию величины совокупных страховых выплат.

   Подсказка: Число обращений в страховую компанию для каждого туриста может быть записано в виде $X_i + X_iY_i$, так как медицинский страховой случай может наступить только, если турист выехал за границу. Случайные величины X_i и Y_i независимы.

3. Функция плотности случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, \ x \geqslant 0 \\ ce^{x}, \ x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

   а) Найдите c, $\mathbb{P}(X \in [\ln 0.5, \ln 4])$, $\mathbb{E}(X)$, $\operatorname{Var}(X)$

   б) Моменты всех порядков случайной величины x

   Подсказка: $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$

4. Известно, что $\mathbb{E}(X) = -1$, $\mathbb{E}(Y) = 1$, $\operatorname{Var}(X) = 9$, $\operatorname{Var}(Y) = 4$, $\operatorname{Corr}(X, Y) = 1$. Найдите

   а) $\mathbb{E}(Y - 2X - 3)$, $\operatorname{Var}(Y - 2X - 3)$

   б) $\operatorname{Corr}(Y - 2X - 3, X)$

   в) Можно ли выразить Y через X? Если да, то запишите уравнение связи.

5. Совместное распределение доходов акций двух компаний Y и X задано в виде таблицы

	$X = -1$	$X = 0$	$X = 1$
$Y = -1$	0.1	0.2	0.2
$Y = 1$	0.2	0.1	0.2

а) Найдите частные распределения случайных величин X и Y

б) Найдите $\operatorname{Cov}(X, Y)$

в) Можно ли утверждать, что случайные величины X и Y зависимы?

г) Найдите условное распределение случайной величины X при условии $Y = -1$

д) Найдите условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X \mid Y = -1)$

2.6. 2012-2013

1. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.

   а) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?

   б) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?

   в) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?

   г) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

2. Машин результат за контрольную, M, равномерно распределен на отрезке $[0;1]$. Вовочка ничего не знает, поэтому списывает у Маши, да ещё может наделать ошибок при списывании. Поэтому Вовочкин результат, V, распределен равномерно от нуля до Машиного результата.

   а) Найдите $\mathbb{P}(M > 2V)$, $\mathbb{P}(M > V + 0.1)$

   б) Зачёт получают те, чей результат больше 0.4. Какова вероятность того, что Вовочка получит зачёт? Какова вероятность того, что Вовочка получит зачёт, если Маша получила зачёт?

   Подсказка: попробуйте нарисовать нужные события в осях (V, M)

   Это была задачка-неберучка!

3. Функция плотности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & x \in [1;2] \\ 0, & x \notin [1,2] \end{cases}$$

   а) Не производя вычислений найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

   б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(X)$

   в) Найдите $\mathbb{P}(X > 1.5)$

   г) Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте её график

4. Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей

	$X=-2$	$X=0$	$X=2$
$Y=1$	0.2	0.3	0.1
$Y=2$	0.1	0.2	a

   а) Определите неизвестную вероятность a.

   б) Найдите вероятности $\mathbb{P}(X > -1)$, $\mathbb{P}(X > Y)$

   в) Найдите математические ожидания $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

   г) Найдите корреляцию $\mathrm{Corr}(X, Y)$

5. Винни Пух собрался полакомиться медом, но ему необходимо принять решение, к каким пчелам отправиться за медом. Неправильные пчелы кусают каждого, кто лезет к ним на дерево с вероятностью 0.9, но их всего 10 штук. Правильные пчелы кусаются с вероятностью 0.1, но их 100 штук.

   а) Определите математическое ожидание и дисперсию числа укусов Винни Пуха для каждого случая

   б) Определите наиболее вероятное число укусов и его вероятность для каждого случая

   в) К каким пчелам следует отправиться Винни Пуху, если он не может выдержать больше двух укусов?

3. Контрольная работа 1. ИП

3.1. 2017-2018

Ровно 272 года назад императрица Елизавета повелела завезти во дворцы котов для ловли мышей.

1. В отсутствии кота Леопольда мыши Белый и Серый подкидывают по очереди игральный додекаэдр . Сыр достаётся тому, кто первым выкинет число 6. Начинает подкидывать Белый.

   а) Какова вероятность того, что сыр достанется Белому?
   б) Сколько в среднем бросков продолжается игра?
   в) Какова дисперсия числа бросков?

2. Микки Маус, Белый и Серый решили устроить труэль из любви к мышки Мии. Сначала стреляет Микки, затем Белый, затем Серый, затем снова Микки и так до тех пор, пока в живых не останется только один.

   Прошлые данные говорят о том, что Микки попадает с вероятностью $1/3$, Белый — с вероятностью $2/3$, а Серый стреляет без промаха.

   Найдите оптимальную стратегию каждого мыша.

3. Микки Маус, Белый и Серый пойманый злобным котом Леопольдом до начала труэли. И теперь Леопольд будет играть с ними в странную игру.

   В комнате три закрытых внешне неотличимых коробки: с золотом, серебром и платиной. Общаться после начала игры мыши не могут, но могут заранее договориться о стратегии.

   Правила игры таковы. Кот Леопольд будет заводить мышей в комнату по очереди. Каждый из мышей может открыть две коробки по своему выбору. Перед следующим мышом коробки закрываются.

   Если Микки откроет коробку с золотом, Белый — с серебром, а Серый — с платиной, то они выигрывают. Если хотя бы один из мышей не найдёт свой металл, то Леопольд их съест.

   а) Какова оптимальная стратегия?
   б) Какова вероятность выигрыша при использовании оптимальной стратегии?

4. Накануне войны Жестокий Тиран Мышь очень большой страны издал указ. Отныне за каждого новорождённого мыша-мальчика семья получает денежную премию, но если в семье рождается вторая мышка-девочка, то всю семью убивают. Бедные жители страны запуганы и остро нуждаются в деньгах, поэтому в каждой семье мыши будут появляться до тех пор, пока не родится первая мышка-девочка.

   а) Каким будет среднее число детей в мышиной семье?
   б) Какой будет доля мышей-мальчиков в стране?
   в) Какой будет средняя доля мышей-мальчиков в случайной семье?
   г) Сколько в среднем мышей-мальчиков в случайно выбираемой семье?

5. Вальяжный кот Василий положил на счёт в банке на Гаити один гурд. Сумма на счету растёт непрерывно с постоянной ставкой в течение очень длительного промежутка времени. В случайный момент этого промежутка кот Василий закрывает свой вклад.

   Каков закон распределения первой цифры полученной Василием суммы?

4. Контрольная работа 2

4.1. 2017-2018

Минимум

1. Приведите определение условной вероятности случайного события, формулу Байеса.

2. Сформулируйте определение и свойства функции плотности случайной величины.

3. Сформулируйте определение условного математического ожидания $\mathbb{E}(Y|X = x)$ для совместного дискретного и совместного абсолютно непрерывного распределений.

4. Сформулируйте неравенство Чебышёва и неравенство Маркова.

5. Задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y.

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0.2	0.1	0.3
$X = 1$	0.2	0.1	0.1

   а) Найдите $F_{X,Y}(0, 0)$;
   б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$;
   в) Найдите $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$;
   г) Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Corr}(X, Y)$

6. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x+10y}{7}, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

   а) Найдите $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$;
   б) Найдите функцию плотности $f_X(x)$;
   в) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathrm{Cov}(X, Y)$;
   г) Являются ли случайные величины X и Y независимыми?

Задачи

7. Статистика авиакомпании «А» за много лет свидетельствует о том, что 10% людей, купивших билет на самолет, не являются на рейс. Авиакомпания продала 330 билетов на 300 мест.

   а) Какова вероятность, что всем явившимся на рейс пассажирам хватит места?
   б) Укажите наибольшее число билетов, которое можно продавать на 300 мест, чтобы случаи переполнения случались не чаще, чем на одном из десяти рейсов.

8. Сегодня акция компании «Ух» стоит 1 рубль. Каждый день акция может с вероятностью 0.7 вырасти на 1%, с вероятностью 0.2999 упасть на 1% и с вероятностью 0.0001 обесцениться (упасть на 100%).

а) Считая изменение цены акции независимыми, найдите математическое ожидание её стоимости через 20 торговых дней.

б) Найдите предел по вероятности среднего изменения цены акции в процентах на бесконечном промежутке времени (Ответ обоснуйте).

в) Найдите математическое ожидание цены акции на бесконечном промежутке времени.

г) Инвестор вложил все свои средства в акции компании «Ух». Найдите вероятность его разорения на бесконечном промежутке времени.

4.2. 2016-2017

Неравенства Берри–Эсссеена: Для любых $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка:

$$\left|F_{S_n^*}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant 0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|\xi_i - \mathbb{E}\,\xi_i|^3)}{\mathrm{Var}^{3/2}(\xi_i) \cdot \sqrt{n}},$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $\quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$, $\quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

Распределение Пуассона: Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Приличным студентам должно быть известно, что в этом случае $\mathbb{E}(\xi) = \mathrm{Var}(\xi) = \lambda$.

1. Пусть $\mathbb{E}(\xi) = 1$, $\mathbb{E}(\eta) = -2$, $\mathrm{Var}(\xi) = 1$, $\mathbb{E}(\eta^2) = 8$, $\mathbb{E}(\xi\eta) = -1$. Найдите

   а) $\mathbb{E}(2\xi - \eta + 1)$, $\mathrm{Cov}(\xi,\, \eta)$, $\mathrm{Corr}(\xi,\, \eta)$, $\mathrm{Var}(2\xi - \eta + 1)$;

   б) $\mathrm{Cov}(\xi + \eta,\, \xi + 1)$, $\mathrm{Corr}(\xi + \eta,\, \xi + 1)$, $\mathrm{Corr}(\xi + \eta - 24,\, 365 - \xi - \eta)$, $\mathrm{Cov}(2016 \cdot \xi,\, 2017)$.

2. Совместное распределение доходностей акций двух компаний задано с помощью таблицы:

	$\eta = -1$	$\eta = 1$
$\xi = -1$	0.1	0.2
$\xi = 0$	0.2	0.2
$\xi = 2$	0.2	0.1

   а) Найдите частные распределения случайных величин ξ и η.

   б) Найдите $\mathrm{Cov}(\xi,\, \eta)$.

   в) Сформулируйте определение независимости дискретных случайных величин.

   г) Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

   д) Найдите условное распределение случайной величины ξ, если $\eta = 1$.

   е) Найдите условное математическое ожидание случайной величины ξ, если $\eta = 1$.

   ж) Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $\pi = 0.5\,\xi + 0.5\,\eta$.

   з) Рассмотрим портфель, в котором α — доля акций с доходностью ξ и $(1-\alpha)$ — доля акций с доходностью η. Доходность этого портфеля есть случайная величина

   $$\pi(\alpha) = \alpha\xi + (1-\alpha)\eta.$$

   Найдите такую долю $\alpha \in [0;\, 1]$, при которой доходность портфеля $\pi(\alpha)$ имеет наименьшую дисперсию.

3. Число посетителей сайта pokrovka11.wordpress.com за один день имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 250.

   а) Сформулируйте неравенство Маркова. При помощи данного неравенства оцените вероятность того, что за один день сайт посетят более 500 человек.

   б) Сформулируйте неравенство Чебышева. Используя данное неравенство, определите наименьшее число дней, при котором с вероятностью не менее 99% среднее за день число посетителей будет отличаться от 250 не более чем на 10.

в) Решите предыдущий пункт с помощью центральной предельной теоремы.

г) Сформулируйте закон больших чисел. Обозначим через ξ_i число посетителей сайта за i-ый день. Найдите предел по вероятности последовательности $\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n}$ при $n \to \infty$.

4. Отведав медовухи, Винни–Пух совершает случайное блуждание на прямой. Он стартует из начала координат и в каждую следующую минуту равновероятно совершает шаг единичной длины налево или направо. Передвижения Винни-Пуха схематично изображены на следующем рисунке.

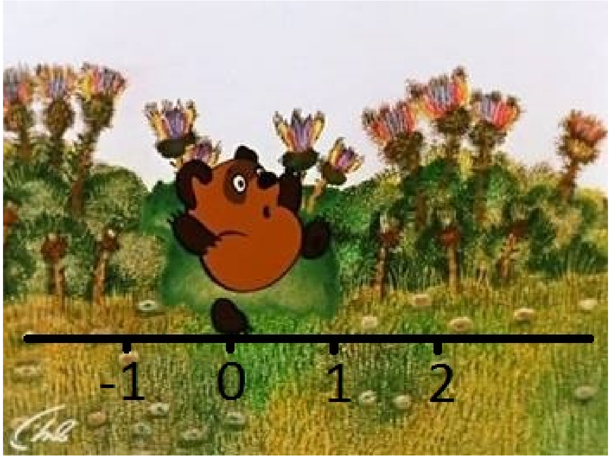


Рис. 1: Случайные бродилки.

а) Сформулируйте центральную предельную теорему.

б) При помощи центральной предельной теоремы оцените вероятность того, что ровно через час блужданий Винни-Пух окажется в области $(-\infty;\,-5]$.

в) Используя неравенство Берри–Эссеена оцените погрешность вычислений предыдущего пункта.

5. Случайные величины ξ и η означают время безотказной работы рулевого управления и двигателя автомобиля соответственно. Время измеряется в годах. Совместная плотность имеет вид:

$$f_{\xi,\eta}(x,\,y) = \begin{cases} 0.005\,e^{-0.05\,x-0.1\,y} & \text{при } x>0, y>0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

а) Найдите частные плотности распределения случайных величин ξ и η.

б) Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

в) Найдите вероятность того, что двигатель прослужит без сбоев более пяти лет.

г) Найдите вероятность того, что двигатель прослужит без сбоев более восьми лет, если он уже проработал без сбоев три года.

д) Найдите условное математическое ожидание безотказной работы рулевого управления, если двигатель проработал без сбоев пять лет, $\mathbb{E}(\xi|\eta=5)$.

е) Найдите вероятность того, что рулевое управление проработает без сбоев на два года больше двигателя, $\mathbb{P}(\{\xi-\eta>2\})$.

6. Бонусная задача

   Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}.$$

   а) Найдите $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{E}\left(\xi^2\right)$, $\mathrm{Var}(\xi)$.

   б) Покажите, что функция $f_\xi(x)$, действительно, является плотностью распределения.

4.3. 2015-2016

1. Функция плотности случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.5x + 1.5y, & \text{если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите:

а) Математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi_1 \cdot \xi_2)$

б) Условную плотность распределения $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)$

в) Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y)$

г) Константу k, такую, что функция $h(x,y) = kx \cdot f(x,y)$ будет являться совместной функцией плотности некоторой пары случайных величин

2. На курсе учится очень много студентов. Вероятность того, что случайно выбранный студент по результатам рубежного контроля имеет хотя бы один незачет равна 0.2. Пусть ξ и η — число студентов с незачетами и без незачетов в случайной группе из 10 студентов. Найдите $\mathrm{Cov}(\xi,\eta)$, $\mathrm{Corr}(\xi,\eta)$, $\mathrm{Cov}(\xi-\eta,\xi)$. Являются ли случайные величины $\xi-\eta$ и ξ независимыми?

3. Доходности акций компаний A и B – случайные величины ξ и η. Известно, что $\mathbb{E}(\xi) = 1$, $E(\eta) = 1$, $\mathrm{Var}(\xi) = 4$, $\mathrm{Var}(\eta) = 9$, $\mathrm{Corr}(\xi,\eta) = -0.5$. Петя принимает решение потратить свой рубль на акции компании A, Вася — 50 копеек на акции компании A и 50 копеек на акции компании B, а Маша принимает решение вложить свой рубль в портфель $R = \alpha\xi + (1-\alpha)\eta$, $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, обладающий минимальным риском. Найдите α, ожидаемые доходности и риски портфелей Пети, Васи и Маши.

4. Будем считать, что рождение мальчика и девочки равновероятны.

а) Оцените с помощью неравенства Маркова вероятность того, что среди тысячи новорожденных младенцев, мальчиков будет более 75%.

б) Оцените с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что доля мальчиков среди тысячи новорожденных младенцев будет отличаться от 0.5 более, чем на 0.25

в) С помощью теоремы Муавра-Лапласа вычислите вероятность из предыдущего пункта.

5. Сейчас валютный курс племени «Мумба» составляет 100 оболов за один рубль. Изменение курса за один день — случайная величина δ_i с законом распределения:

x	-1	0	2
$\mathbb{P}(\delta_i = x)$	0.25	0.5	0.25

Найдите вероятность того, что через полгода (171 день) рубль будет стоить более 250 оболов, если ежедневные изменения курса происходят независимо друг от друга.

6. **Бонусная задача**

Число посетителей, зашедших в магазин в течении дня — пуассоновская случайная величина с параметром λ. Каждый из посетителей совершает покупку с вероятностью p, не зависимо от других посетителей. Найдите математическое ожидание числа человек, совершивших покупку.

4.4. 2014-2015

1. Ежемесячные расходы студенческой семьи Маши и Васи хорошо описываются случайным вектором (X, Y), (X — расходы Маши, Y — расходы Васи), имеющим равномерное распределение в треугольнике, задаваемом ограничениями $\{0 \leqslant X,\ 0 \leqslant Y,\ X + Y \leqslant 1\}$.

   Найдите:

   а) Вероятность того, что совокупные расходы превысят половину бюджета, $\mathbb{P}(X + Y > 1/2)$

   б) Плотность распределения расходов Васи.

   в) Вероятность того, что Машины расходы составили менее трети бюджета, если известно, что Вася израсходовал более половины семейного бюджета.

   г) Условную плотность распределения и условное математическое ожидание расходов Маши, при условии, что Вася израсходовал половину бюджета.

   д) Математическое ожидание условного математического ожидания расходов Маши, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$

   е) Коэффициент корреляции расходов Маши и Васи

2. Задана последовательность независимых случайных величин X_1, X_2, ...

x_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
$\mathbb{P}(X_n = x_n)$	$1/2n$	$1 - 1/n$	$1/2n$

   а) Сформулируйте закон больших чисел. Выполняется ли для данной последовательности закон больших чисел?

   б) Запишите неравенство Чебышёва. Оцените вероятность того, что модуль среднего значения по n наблюдениям не превысит 1, $\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \leqslant 1\right)$

   в) Сколько членов последовательности необходимо взять, чтобы вероятность того, что модуль среднего значения не превысит 1, была не менее 0.9, $\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \leqslant 1\right) \geqslant 0.9$

3. Размер выплат каждому клиенту банка — случайная величина с математическим ожиданием, равным 5000 ед. и среднеквадратическим отклонением, равным 2000 ед. Выплаты отдельным клиентам независимы. Сколько должно быть наличных денег в банке, чтобы с вероятностью 0.95 денег хватило на обслуживание 60 клиентов?

4. Рекламная компания хочет оценить вероятность p, с которой адресная реклама приводит к заявке. С этой целью она рассылает n рекламных проспектов. Обозначим за $\hat{p}$ отношение числа поданных заявок к числу разосланных проспектов n. С помощью теоремы Муавра–Лапласа и неравенства Чебышёва определите:

   а) Сколько нужно разослать рекламных проспектов, для того чтобы $\hat{p}$ отличалось от истинной вероятности p не более, чем на 0.1 с вероятностью не меньшей 0.99

   б) С какой точностью ε удастся оценить p с вероятностью 0.99, если разослана 1000 проспектов, то есть $\mathbb{P}(|\hat{p} - p| \leqslant \varepsilon) \geqslant 0.99$?

4.5. 2013-2014

Самая важная формула:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sqrt{det(C)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)}$$

Неравенство Берри-Эссеена:

$$|\hat{F}_n(x) - \Phi(x)| \leqslant \frac{C_0\, \mathbb{E}\,|X_n - \mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}, \quad 0.4 < C_0 < 0.48$$

1. Совместная функция плотности случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{при } x \in (0,1),\ y \in (0,1) \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

Найдите:

а) $\mathbb{P}(Y < X^2)$

б) функцию плотности и математическое ожидание случайной величины X

в) условную функцию плотности и условное математическое ожидание случайной величины X при условии, что $Y = 2$

2. Случайный вектор $(X, Y)^T$ имеет двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $(0, 0)^T$ и ковариационной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

;

Найдите:

а) $\mathbb{P}(X > 1)$

б) $\mathbb{P}(2X + Y > 3)$

в) $\mathbb{P}(2X + Y > 3|X = 1)$

г) $\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} > 12\right)$

д) Запишите совместную функцию плотности $(X, Y)^T$

3. Вычислите:

а) $\mathbb{P}\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} > \frac{5}{4\sqrt{3}}\right)$

б) $\mathbb{P}\left(\frac{X_1+2X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}} < 4.5\right)$

в) $\mathbb{P}\left(\frac{X_1^2}{X_2^2+X_3^2} > 17\right)$

4. Оценка за зачет по теории вероятности i-го студента — неотрицательная случайная величина X_i с $\mathbb{E}(X_i) = 1/2$ и $\operatorname{Var}(X_i) = 1/12$. Для случайной выборки из 36 студентов оцените или вычислите следующие вероятности $\left(\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$:

а) $\mathbb{P}(|X_i - 0.5| \geqslant 0.3)$

б) $\mathbb{P}(X_i \geqslant 0.8)$

в) $\mathbb{P}(\bar{X} \geqslant 0.8)$

Пусть дополнительно известно, что $X_i \sim U(0,1)$:

г) Вычислите вероятность $\mathbb{P}(|X_i - 0.5| \geqslant 0.3)$

д) Оцените погрешность вычисленной вероятности $\mathbb{P}(\bar{X} \geqslant 0.8)$

е) Покажите, что средняя оценка за экзамен сходится по вероятности к 0.5

5. При проведении социологических опросов в среднем $20\,\%$ респондентов отказываются отвечать на вопрос о личном доходе. Сколько нужно опросить человек, чтобы с вероятностью 0.99 выборочная доля отказавшихся отвечать на вопрос о доходе не превышала 0.25? Насколько изменится ответ на предыдущий вопрос, если средний процент отказывающихся отвечать неизвестен?

6. Оценки за контрольную работу по теории вероятностей 6 случайно выбранных студентов оказались равны: 8, 4, 5, 7, 3, 9.

   а) Выпишите вариационный ряд;

   б) Постройте выборочную функцию распределения;

   в) Вычислите значение выборочного среднего и выборочной дисперсии.

4.6. 2012-2013

1. Купчиха Сосипатра Титовна очень любит чаёвничать. Её чаепитие продолжается случайное время S, имеющее равномерное распределение от 0 до 3 часов. Встретив Сосипатру Титовну в пассаже на Петровке, её подруга Олимпиада Карповна узнала, сколько длилось вчерашнее чаепитие Сосипатры Титовны. Решив, что такая продолжительность чаепития является максимально возможной, Олимпиада Карповна устраивает чаепитие, продолжающееся случайное время T, имеющее равномерное распределение от 0 до S часов.

   а) Найдите совместную функцию плотности величин S и T

   б) Найдите вероятность $\mathbb{P}(S > T)$

   в) Найдите $\mathbb{E}\left(T^2\right)$

2. Для случайно выбранного домохозяйства случайные величины X и Y принимают значения, равные доле расходов на продукты питания и алкоголь плюс табак соответственно. Случайный вектор $(X, Y)^T$ хорошо описывается двумерным нормальным законом распределения с математическим ожиданием $(0.45, 0.16)^T$ и ковариационной матрицей

$$C = 0.144 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

   Найдите:

   а) Вероятность того, что домохозяйство тратит более половины своих доходов на питание.

   б) Вероятность того, что домохозяйство тратит более половины своих доходов на алкогольную и табачную продукцию и продукты питания.

   в) Ожидаемую долю расходов на алкоголь и табак для домохозяйства, которое тратит на питание четверть своих доходов.

   г) Вероятность того, что домохозяйство из предыдущего пункта тратит более трети с воих доходов на алкогольную и табачную продукцию.

   д) Для доли расходов на питание вычислите центральный момент 2013-го порядка.

3. Вычислите (или оцените) вероятность того, что по результатам 4000 бросаний симметричной монеты, частота выпадения герба будет отличаться от 0.5 не более, чем на 0.01. Решите задачу с помощью неравенства Чебышёва и с помощью ЦПТ.

4. Компания кабельного телевидения НВТ, Новая Вершина Телевидения, анализирует возможность присоединения к своей сети пригородов N-ска. Опросы показали, что в среднем каждые 3 из 10 семей жителей пригородов хотели бы стать абонентами сети. Стоимость работ, необходимых для организации сети в любом пригороде оценивается величиной 2 080 000 у.е. При подключении каждого пригорода НВТ надеется получить 1 000 000 у.е. в год от рекламодателей. Планируемая чистая прибыль от оплаты за кабельное телевидение одной семьей в год равна 120 у.е.

   Каким должно быть минимальное количество семей в пригороде для того, чтобы с вероятностью 0.99 расходы на организацию сети в этом пригороде окупились за год?

5. Оценки за контрольную работу по теории вероятностей 6 случайно выбранных студентов оказались равны 8, 5, 6, 7, 3, 9.

   а) Выпишите вариационный ряд

б) Постройте график выборочной функции распределения

в) Вычислите значение выборочного среднего и выборочной дисперсии.

5. Контрольная работа 3

5.1. 2017-2018

Минимум

1. Дайте определение выборочной функции распределения.

2. Предположим, что величины X_1, X_2, ..., X_n независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Укажите закон распределения выборочного среднего, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2}$.

3. Рост в сантиметрах, случайная величина X, и вес в килограммах, случайная величина Y, взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}(Z) = (175, 75)$ и ковариационной матрицей

$$\operatorname{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

   а) Найдите средний вес мужчины при условии, что его рост составляет 172 см.

   б) Выпишите условную плотность распределения веса мужчины при условии, что его рост составляет 172 см.

   в) Найдите условную вероятность того, что человек будет иметь вес, больший 92 кг, при условии, что его рост составляет 172 см.

4. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трех страт, определяется по формуле $TC = c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3$, где c_i — цена одного наблюдения в i-ой страте, а n_i — число наблюдений, которые приходятся на i-ую страту. Найдите n_1, n_2 и n_3, при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования 8000 и имеется следующая информация:

Страта	1	2	3
Среднее значение	30	40	50
Стандартная ошибка	5	10	20
Вес	25%	25%	50%
Цена наблюдения	2	5	8

Задачи

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка из нормального распределения $N(\mu, 1)$.

   а) Выпишите функцию правдоподобия;

   б) Методом максимального правдоподобия найдите оценку $\hat{\mu}$ математического ожидания μ;

   в) Проверьте состоятельность и несмещённость оценки $\hat{\mu}$;

   г) Вычислите информацию Фишера о параметре μ, содержащуюся во всей выборке;

   д) Для произвольной несмещённой оценки μ выпишите неравенство Рао-Крамера-Фреше;

   е) Проверьте свойство эффективности оценки $\hat{\mu}$;

ж) Найдите оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ для второго начального момента;

з) Проверьте свойства несмещенности и асимптотической несмещенности оценки $\hat{\theta}$;

и) С помощью дельта-метода вычислите, примерно, дисперсию оценки $\hat{\theta}$;

к) Проверьте состоятельность оценки $\hat{\theta}$.

6. Пусть X_1, ..., X_n выборка из распределения с функцией плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & \text{при } x \in [0, \theta] \\ 0, & \text{при } x \notin [0, \theta] \end{cases}$$

а) Методом моментов найдите оценку параметра θ;

б) Приведите определение состоятельности оценки и проверьте, будет ли найденная оценка состоятельной.

7. В прихожей лежат четыре карты «тройка». На двух из них нет денег, на двух других 30 и 500 рублей. Вовочка не помнит, на какой из карт есть деньги, поэтому берет три карточки.

а) Найдите математическое ожидание и дисперсию средней по выбранным карточкам суммы денег;

б) Определите, какова вероятность того, что Вовочке удастся войти в метро, если стоимость проезда по тройке составляет 35 рублей.

8. По выборочному опросу студенческих семейных пар о расходах на ланч были получены следующие результаты:

Номер семьи	1	2	3	4
Расходы мужа	450	370	170	200
Расходы жены	210	350	250	180

Считая, что разница в расходах мужа и жены хорошо описываются нормальным распределением, постройте 95%-ый доверительный интервал для разницы математических ожиданий расходов супругов. Есть ли основания утверждать, что расходы одинаковы?

9. Наблюдатель Алексей Недопускальный решил проверить честность выборов. Ему удалось подглядеть, как проголосовали 60 избирателей. Из них 42 выбрали действующего президента.

а) Постройте 95%-ый доверительный интервал для истинной доли избирателей, проголосовавших «за» действующего президента.

б) По результатам ЦентрИзберКома «за» действующего президента проголосовало 76.67% населения. Согласуются ли эти данные с данными Алексея?

в) Сколько бюллетеней нужно подглядеть Алексею, чтобы с вероятностью 0.95 отклонение от выборочной доли проголосовавших «за» действующего президента от истинной не превышало 0.01?

6. Контрольная работа 3. ИП

6.1. 2017-2018

дата: 2018-03-24
24 марта 2018 года — Комоедица, день пробуждения медведя.

1. Медведь Михайло-Потапыч уснул в берлоге и ему снится сон про n-мерное пространство. Особенно ярко ему снится вектор $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и вектор $e = (1, 1, 1, \ldots, 1)$.

   а) Изобразите векторы X и e в n-мерном пространстве;

   б) Изобразите проекцию X на $\mathrm{Lin}\{e\}$, обозначим её $\hat{X}$;

   в) Изобразите проекцию X на $\mathrm{Lin}^{\perp}\{e\}$, обозначим её $\hat{X}^{\perp}$;

   г) Выпишите явно вектора $\hat{X}$ и $\hat{X}^{\perp}$, и найдите их длины;

   д) Сформулируйте теорему Пифагора для нарисованного прямоугольного треугольника;

   е) Изобразите на рисунке такой угол α, что обычная t-статистика, используемая при построении доверительного интервала для μ, имела бы вид $t = \sqrt{n-1} \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$.

2. Исследователь Михаил предполагает, что все виды медведепришельцев встречаются равновероятно. Отправившись на охоту в район Малой Медведицы Михаил поймал двух лиловых кальмаромедведей, одного двурога медведеспинного и одного медведезавра ящероголового.

   Помогите Михаилу оценитель общее количество видов медведепришельцев с помощью метода максимального правдоподобия.

3. Помотавшись по просторам Вселенной Михаил изменил своё мнение. Никто кроме кальмаромедведей, двурогов и медведезавров не попадается, однако попадаются они явно с разной вероятностью. Из 300 отловленных пришельцев оказалось 150 кальмаромедведей, 100 двурогов и 50 медведезавров. Михаил считает, что медведепришельцы встречаются независимо, p_1 — вероятность встретить кальмаромедведя, p_2 — двурога.

   а) Оцените вектор $p = (p_1, p_2)$ методом максимального правдоподобия;

   б) Оцените ковариационную матрицу $\mathrm{Var}(\hat{p})$;

   в) Оцените дисперсию $\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$;

   г) Постройте доверительный интервал для разницы долей $p_1 - p_2$.

4. Винни-Пух лично измерил количество мёда (в кг) на 100 деревьях и обнаружил, что $\bar{X} = 10$ и $\hat{\sigma}^2 = 4$. По мнению Кролика, состоятельная оценка для параметра α правильности мёда имеет вид $\hat{\alpha} = \bar{X} + \sqrt{\bar{X} + 6}$.

   а) «Халява, сэр!» Найдите точечную оценку параметра α;

   б) Найдите 95%-ый доверительный интервал для α, симметричный относительно $\hat{\alpha}$.

5. Фотографы Андрей и Белла независимо друг от друга пытаются фотографировать кадьяков. Андрею удаётся сфотографировать одного кадьяка в неделю с вероятностью 0.5, а Белле — с вероятностью p, независимо друг от друга и от прошлого. За 100 недель они вместе сфотографировали 130 кадьяков.

   а) Оцените p и постройте 95%-ый доверительный интервал для p;

б) Оцените p и постройте 95%-ый доверительный интервал для p, если дополнительно известно, что один фотограф опередил другого на 10 фото.

Просто красивая задачка. Эту задачу **не нужно** решать на кр :)
Медведю Мишутке никак не удаётся заснуть в берлоге, и потому он подбрасывает правильную монетку n раз. Обозначим вероятность того, что ни разу не идёт двух решек подряд буквой q_n.

а) Найдите $2^8 q_8$ и **назовите** это число;

б) Найдите $\lim 2q_{n+1}/q_n$ и **назовите** это число.

7. Контрольная работа 4

7.1. 2017-2018

Минимум

1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией $\sigma^2 = 9$. Объем выборки $n = 20$. Для тестирования основной гипотезы $H_0 : \mu = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \mu = 5$ вы используете критерий: если $\overline{X} \leqslant 2$, то вы не отвергаете гипотезу H_0, в противном случае вы отвергаете гипотезу H_0 в пользу гипотезы H_1. Найдите

   а) Вероятность ошибки 1-го рода

   б) Вероятносто ошибки 2-го рода

2. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами μ и σ^2. Используя реализацию случайной выборки: $x_1 = 2$, $x_3 = 8$, $x_3 = 5$, постройте 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2.

3. Вася очень любит тестировать статистические гипотезы. В этот раз Вася собирается проверить утверждение о том, что его друг Пётр звонит Васе исключительно в то время, когда Вася ест. Для этого Вася трудится целый год и проводит серию из 365 испытаний. Результаты приведены в таблице ниже.

	Пётр не звонит	Пётр звонит
Вася ест	100	50
Вася не ест	125	90

   На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что Пётр звонит Васе независимо от момента приема пищи.

4. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в четыре раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в четыре раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 105 раз был в театре, 63 раза — в спортазе и 42 раза в кино. На уровне значимости 10% проверьте утверждение Васи.

Квантили χ^2 распределения с 1, 2 и 3 степенями свободы

	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975
1	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024
2	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378
3	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348

Задачи

При решении задач пять–семь используйте данные обследования Росстата за первый квартал 2018 года:

	Число наблюдений	Среднее (тыс. руб.)	Выборочное отклонение (тыс. руб.)
Врачи	40	136	55
Преподаватели	60	139	60

Распределение заработной платы работников любой отрасли хорошо описывается нормальным законом.

5. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что средняя зарплата врача составляет 100 т.р., против альтернативы, что она больше 100 т.р. Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (P–значение).

6. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о том, что разброс в зарплатах врачей и преподавателей одинаков, против двухсторонней альтернативы.

7. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о том, что средняя зарплата врачей и преподавателей совпадают, против альтернативы, что у преподавателей зарплата выше:

   а) Считая объемы выборок достаточно большими

   б) Считая дисперсии одинаковыми

8. Время в часах безотказной работы микронаушника, величина X, подчиняется экспоненциальному (показательному) закону распределения с неизвестным параметром λ:
$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ при } x < 0 \end{cases}$$
   По выборке из 100 независимых наблюдений $\bar{x} = 0.52$. С помощью асимптотических свойств оценок максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал:

   а) Для параметра λ

   б) Для вероятности того, что наушник проработает без сбоев весь тест — 45 минут

9. Приглашенный на Петербургский международный экономический форум Германом Грефом индийский мистик Садхгуру подарил Грефу древнюю шестигранную кость для принятия решений в сложных макроэкономических ситуациях. Служба безопасности Сбербанка провела серию из 100 испытаний и составила таблицу:

Грань	1	2	3	4	5	6
Число выпадений	10	10	15	15	25	25

   С помощью теста отношения правдоподобия на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что все грани равновероятны.

$$\ln(1/6) = -1.79,\ \ln(0.15) = -1.90,\ \ln(0.25) = -1.39,\ \ln(0.1) = -2.30$$

8. Контрольная работа 4. ИП

8.1. 2017-2018

Напутствие в добрый путь:

1. Работа сдаётся только в виде запроса pull-request на гитхаб-репозиторий.

2. Имя файла должно быть вида ivanov_ivan_161_kr_4.Rmd.

3. Также фамилию и имя нужно указать в шапке документа в поле author :)

4. Если нужно, то установите пакеты tidyverse, maxLik, nycflights13.

1. Симулируем бурную деятельность! В качестве параметра k в задаче используй число букв в своей фамилии в именительном падеже :)

   Каждый день Василий съедает случайное количество булочек, которое распределено по Пуассону с параметром 10. Логарифм затрат в рублях на каждую булочку распределён нормально $N(2, 1)$. Андрей каждый день съедает биномиальное количество булочек $Bin(2k, 0.5)$. Затраты Андрей на каждую булочку распределены равномерно на отрезке $[2; 20]$.

   а) Сколько в среднем тратит Василий на булочки за день?

   б) Чему равна дисперсия дневных расходов Василия?

   в) Какова вероятность того, что за один день Василий потратит больше денег, чем Андрей?

   г) Какова условная вероятность того, что Василий за день съел больше булочек, чем Андрей, если известно, что Василий потратил больше денег?

2. Сражаемся с реальностью! В пакете nycflights13 встроен набор данных weather о погоде в разные дни в разных аэропортах.

   а) Постройте гистограмму переменной влажность, humid. У графика подпишите оси!

   б) Постройте диаграмму рассеяния переменных влажность и количество осадков, precip. У графика подпишите оси!

      Посчитайте выборочное среднее и выборочную дисперсию влажности и количества осадков.

   в) С помощью максимального правдоподобия оцените параметр μ, предположив, что наблюдения за влажностью имеют нормальное $N(\mu, 370)$-распределение и независимы. Постройте 95%-ый доверительный интервал для μ.

   г) С помощью максимального правдоподобия оцените параметр σ^2, предположив, что наблюдения за влажностью имеют нормальное $N(60, \sigma^2)$-распределение и независимы. Постройте 95%-ый доверительный интервал для σ^2.

      Если при численной оптимизации параметр σ^2 становится отрицательным, можно задать параметры по-другому, например, $\sigma^2 = \exp(\gamma)$.

9. Финальные экзамены

9.1. 2017-2018

Вопрос 1. Дана случайная выборка из двух наблюдений, X_1 и X_2. Несмещённой и наиболее эффективной оценкой математического ожидания из предложенных является

- [A] $\frac{20}{20}X_1 + \frac{20}{20}X_2$
- [B] $\frac{8}{20}X_1 + \frac{12}{20}X_2$
- [C] $\frac{10}{20}X_1 + \frac{10}{20}X_2$
- [D] $\frac{1}{20}X_1 + \frac{19}{20}X_2$
- [E] $\frac{5}{20}X_1 + \frac{15}{20}X_2$

Вопрос 2. Величины X_1 и X_2 независимы и одинаково распределены. Оценка $\hat{\mu} = 3aX_1 + 4a^2X_2$ математического ожидания $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ будет несмещённой при a равном

- [A] 1.2
- [B] 3
- [C] -1
- [D] 0
- [E] -3

Вопрос 3. Величины X_1, ..., X_5 представляют собой случайную выборку. Несмещённой оценкой дисперсии X_i является

- [A] $0.25\sum_{i=1}^{4}(X_i - \bar{X})^2$
- [B] $0.5\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2$
- [C] $0.2\sum_{i=1}^{4}(X_i - \bar{X})^2$
- [D] $0.25\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2$
- [E] $0.2\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2$

Вопрос 4. Последовательность оценок $\hat{a}_n$ параметра a является состоятельной, если

- [A] $\mathbb{E}((\mathbb{E}(\hat{a}_n) - a)^2) \xrightarrow{P} \hat{a}_n$
- [B] $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{P} \hat{a}_n$
- [C] $\hat{a}_n \xrightarrow{P} a$
- [D] $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{P} 0$
- [E] $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{P} a$

Вопрос 5. Оценка $\hat{a}$ называется эффективной оценкой параметра a в классе оценок K, если

- [A] $\mathbb{E}(\hat{a}^2) \geqslant \mathbb{E}(\tilde{a}^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [B] $\mathbb{E}((\hat{a} - a)^2) \leqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [C] $\mathbb{E}((\hat{a} - \tilde{a})^2) \leqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [D] $\mathbb{E}((\hat{a} - a)^2) \geqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [E] $\mathbb{E}((\hat{a} - \tilde{a})^2) \geqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$

Вопрос 6. Апостериорная функция плотности пропорциональна

- [A] Отношению функции правдоподобия к априорной плотности
- [B] Отношению априорной плотности к функции правдоподобия
- [C] Разности априорной плотности и правдоподобия
- [D] Произведению априорной плотности и правдоподобия
- [E] Сумме априорной плотности и правдоподобия

Вопрос 7. Алгоритм Метрополиса-Гастингса порождает

- [A] Независимую выборку из апостериорного закона распределения
- [B] Независимую выборку из смеси априорного и апостериорного законов
- [C] Независимую выборку из априорного закона распределения
- [D] Зависимую выборку из априорного закона распределения

$\boxed{E}$ Зависимую выборку из апостериорного закона распределения

Вопрос 8. В алгоритме Метрополиса-Гастингса был предложен переход из точки $\theta^{(0)} = 4$ в точку $\theta^{(1)}_{prop} = 5$. Априорное распределение θ равномерное. Известны значения функций правдоподобия, $f(data|\theta = 4) = 0.7$, $f(data|\theta = 5) = 0.8$. Вероятность одобрения перехода равна

$\boxed{A}$ 0.8/5

$\boxed{B}$ 1

$\boxed{C}$ 28/40

$\boxed{D}$ 4/5

$\boxed{E}$ 7/8

Вопрос 9. Есть выборка $X_1, X_2, ..., X_5$ и выборка Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Исследовательница Ирина проводит тест суммы рангов Вилкоксона. У выборки X_i сумма рангов равна 7. Сумма рангов для выборки Y_j равна

$\boxed{A}$ 2

$\boxed{B}$ 1

$\boxed{C}$ 38

$\boxed{D}$ 43

$\boxed{E}$ 45

Вопрос 10. Вероятность того, что в случайной выборке три наблюдения подряд попадут в верхний теоретический квартиль равна

$\boxed{A}$ 0.01

$\boxed{B}$ 0.05

$\boxed{C}$ 1/2

$\boxed{D}$ 1/4

$\boxed{E}$ 1/64

Вопрос 11. Величины $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка с распределением

x	-4	0	3
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$3/4 - \theta$	$1/4$	θ

Оценка неизвестного параметра θ, найденная с помощью первого начального момента, равна

$\boxed{A}$ $\frac{\bar{X}+7}{3}$

$\boxed{B}$ $\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 12}{7}$

$\boxed{C}$ $\frac{12 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}{7}$

$\boxed{D}$ $\frac{7 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}{12}$

$\boxed{E}$ $\frac{\bar{X}+3}{7}$

Вопрос 12. Случайная выборка состоит из одного наблюдения X_1, которое имеет плотность распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}x^{-1+\frac{1}{\theta}} & \text{при } x \in (0;\,1), \\ 0 & \text{при } x \notin (0;\,1). \end{cases}$$

Оценка параметра θ, найденная с помощью метода максимального правдоподобия, равна

$\boxed{A}$ X_1

$\boxed{B}$ $\ln X_1$

$\boxed{C}$ $-\ln X_1$

$\boxed{D}$ $-X_1$

$\boxed{E}$ $\frac{1}{\ln X_1}$

Вопрос 13. Величины $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;\,1)$. Оценка максимального правдоподобия параметра p равна $\bar{X}$. Оценка максимального правдоподобия для $\sqrt{p}$ равна

$\boxed{A}$ $\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i}}{n}$

$\boxed{B}$ $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i}$

$\boxed{C}$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

$\boxed{D}$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}$

$\boxed{E}$ $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}$

Вопрос 14. Величины $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;\, 1)$. Информация Фишера о параметре p, заключенная в одном наблюдении, равна

[A] $\frac{1}{p(1-p)}$ [C] $p(1-p)$ [E] p

[B] $\frac{1}{p}$ [D] $1-p$

Вопрос 15. Известно истинное значение параметра, $\theta = 1$, и информация Фишера о параметре θ, заключенная в одном наблюдении случайной выборки, $I_1(\theta) = 8$. Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра θ, найденная по ста наблюдениям случайной выборки, имеет распределение, похожее на

[A] $\mathcal{N}(1,\, 1/800)$ [C] $\mathcal{N}(1,\, 1/\sqrt{8})$ [E] $\mathcal{N}(1,\, 8)$

[B] $\mathcal{N}(1,\, 1/\sqrt{800})$ [D] $\mathcal{N}(1,\, 1/8)$

Вопрос 16. Дана реализация выборки: 1, 2, 0. Выборочный начальный момент второго порядка равен

[A] 2.5 [C] 1/3 [E] 3

[B] 5/3 [D] 1

Вопрос 17. Математическое ожидание выборочного среднего, построенного по выборке из равномерного распределения на отрезке $[0, 2]$, равно

[A] $1/\sqrt{n}$ [C] 0 [E] 1.5

[B] 1 [D] 2

Вопрос 18. Дана реализация выборки: 3, 2, 5, 4, 2. Выборочная функция распределения в точке $x = 2.5$ принимает значение

[A] 0.25 [C] 0.5 [E] 0.2

[B] 0.4 [D] 0.6

Вопрос 19. Экзамен принимают два преподавателя: Злой и Добрый. Злой поставил оценки 2, 3, 10, 8, 1. А Добрый — оценки 6, 4, 7, 9. Значение статистики критерия Вилкоксона о совпадении распределений оценок может быть равно

[A] 25 [C] 26 [E] 24

[B] 23 [D] 22

Вопрос 20. Датчик случайных чисел выдал два значения псевдослучайных чисел 0.1 и 0.8. Вычислите значение критерия Колмогорова и проверьте гипотезу о соответствии распределения равномерному на $(0, 1)$. Критическое значение статистики Колмогорова считайте равным 0.776.

[A] 0.1, H_0 отвергается [C] 0.8, H_0 отвергается [E] 0.4, H_0 не отвергается

[B] 0.3, H_0 не отвергается [D] 0.2, H_0 не отвергается

Вопрос 21. Случайные величины $X_1, \ldots, X_m$ — случайная выборка из нормального распределения. Величины Y_1, ..., Y_n — независимая случайная выборка из нормального распределения. Для построения доверительного интервала для отношения дисперсий можно использовать статистику с распределением

$\boxed{A}$ $F_{m,n-2}$

$\boxed{B}$ $F_{m-1,n-1}$

$\boxed{C}$ χ^2_{m+n-2}

$\boxed{D}$ $F_{m+1,n+1}$

$\boxed{E}$ t_{m+n-2}

Вопрос 22. При построения доверительного интервала для разности математических ожиданий в двух нормальных выборках размером m и n в случае равных неизвестных дисперсий используется распределение

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(0, m+n-2)$

$\boxed{B}$ $F_{m,n}$

$\boxed{C}$ t_{m+n}

$\boxed{D}$ $F_{m-1,n-1}$

$\boxed{E}$ t_{m+n-2}

Вопрос 23. Для построения доверительного интервала для математического ожидания используется выборка из 100 наблюдений. Выборочное среднее равно 5. Дисперсия генеральной совокупности известна и равна 25. Минимальная длина 95%-доверительного интервала примерно равна

$\boxed{A}$ 5

$\boxed{B}$ 2.5

$\boxed{C}$ 0.98

$\boxed{D}$ 1.96

$\boxed{E}$ 10

Вопрос 24. При построении 90%-доверительного интервала для вероятности используется выборка из 25 наблюдений. Выборочная доля составляет 0.6. В симметричный доверительный интервал попадают значения

$\boxed{A}$ 0.6, 0.7, 0.85

$\boxed{B}$ 0.5, 0.6, 0.65

$\boxed{C}$ 0.35, 0.5, 0.65

$\boxed{D}$ 0.8, 0.9, 1.0

$\boxed{E}$ 0.7, 0.8, 0.9

Вопрос 25. При построении 90%-доверительного интервала для дисперсии используется выборка из 26 наблюдений. Несмещенная оценка дисперсии равна 100. Левая граница симметричного по вероятности доверительного интервала равна

$\boxed{A}$ 43.25

$\boxed{B}$ 106.32

$\boxed{C}$ 8.16

$\boxed{D}$ 32.8

$\boxed{E}$ 66.4

Вопрос 26. При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий оценок по математической статистике в двух группах, было получено P-значение 0.03. Тогда нулевая гипотеза

$\boxed{A}$ отвергается на уровне значимости 0.05 и на уровне значимости 0.01

$\boxed{B}$ не отвергается на уровне значимости 0.05 и отвергается на уровне значимости 0.01

$\boxed{C}$ не отвергается ни на уровне значимости 0.05, ни на уровне значимости 0.01

$\boxed{D}$ отвергается на уровне значимости 0.05 и не отвергается на уровне значимости 0.01

$\boxed{E}$ ответ зависит от альтернативной гипотезы

Вопрос 27. Имеются две случайных выборки $X_1, \ldots, X_{31}$ и $Y_1, \ldots, Y_{41}$ из нормальных распределений. Известно, что $\sum_{i=1}^{31}(X_i - \bar{X})^2 = 120$ и $\sum_{i=1}^{41}(Y_i - \bar{Y})^2 = 400$. При проверке гипотезы о равенстве дисперсий этих распределений значение тестовой статистики может быть равно

$\boxed{A}$ 0.3 $\boxed{C}$ 2 $\boxed{E}$ 2.5

$\boxed{B}$ 2.52 $\boxed{D}$ 3.33

Вопрос 28. Имеется выборка из одного наблюдения X_1. На основе этой выборки тестируется гипотеза H_0: $X_1 \sim U[0; 2]$ против альтернативной гипотезы $X_1 \sim U[1, 3]$. Используется критерий следующего вида: если $X_1 > a$, то H_0 отвергается. Минимальная вероятность ошибки первого рода достигается при a равном

$\boxed{A}$ 0.5 $\boxed{C}$ 2 $\boxed{E}$ 1

$\boxed{B}$ 1.5 $\boxed{D}$ 1.9

Вопрос 29. Исследовательница Алевтина подбросила кубик 12 раз и 12 раз на нём выпала шестёрка. Алевтина хочет проверить, выпадают ли все грани равновероятно, при помощи критерия χ^2 Пирсона. Значение тестовой статистики будет равно

$\boxed{A}$ 60 $\boxed{C}$ 5 $\boxed{E}$ 6

$\boxed{B}$ 12 $\boxed{D}$ 50

Вопрос 30. Исследовательница Глафира считает, что любовь к энергетическим напиткам и успешность сдачи экзамена по математической статистике должны быть как-то связаны. Опросив 200 своих однокурсников, она получила следующие результаты:

	пьёт энергетик	не пьёт энергетик
Успешно сдал	20	120
Завалил	40	20

Статистика χ^2 Пирсона для проверки независимости признаков с округлением до целых равна

$\boxed{A}$ 70 $\boxed{C}$ 65 $\boxed{E}$ 45

$\boxed{B}$ 55 $\boxed{D}$ 35

10. Ответы к минимумам

10.1. Контрольная работа 1 — Задачный минимум

1. а) 0.25
   б) 0.6
   в) нет
2. а) 0.5
   б) 0.75
   в) нет
3. $\frac{4}{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}$
4. $\frac{4}{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}$
5. 0.5
6. 0.42
7. 0.028
8. $\frac{5}{7}$

9. а) 0.5
   б) 0.75
   в) 0
   г) 0.5
10. а) 0.5
   б) 0
   в) 0.5
   г) 0.5
   д) 0.5
11. а) 0.25
   б) 0.75
   в) 0
   г) 0.5
12. а) 0.25
   б) 0.25
   в) 0.75
   г) 0.5
   д) 0.75
13. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$
   б) $1-\left(\frac{1}{4}\right)^4$
   в) 0
   г) 3
   д) 0.75
   е) $2, 3$
14. а) $\left(\frac{3}{5}\right)^5$
   б) $1-\left(\frac{3}{5}\right)^5$
   в) 0
   г) 2
   д) 1.2
   е) 2
15. а) e^{-100}
   б) $1-e^{-100}$
   в) 0
   г) 100
   д) 100
16. а) e^{-101}
   б) $1-e^{-101}$
   в) 0
   г) 101
   д) 101
17. $1-\frac{8^5}{9^5}$
18. $\frac{8^5}{9^5}$
19. $1-e^{-3}$
20. e^{-3}
21. а) 0.5
   б) 0.25
   в) 0.125
   г) 1
22. а) 0.5
   б) 0.5
   в) $\frac{1}{3}$
   г) $\frac{1}{12}$
   д) 1
23. а) 2
   б) 0.25
   в) $\frac{3}{4}$
   г) 1
24. а) 2
   б) 0.5
   в) 0.5
   г) 0
   д) 0.8

10.2. Контрольная работа 2 — Задачный минимум

1. а) 0.5
   б) 0.3
   в) 0.2
   г) нет
   д) 0.3
   е)

X	-1	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.5	0.5

   ж) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ 0.5, & \text{при } x \in [-1; 1) \\ 1, & \text{при } x \geqslant 1 \end{cases}$

2. а) 0.5
   б) 0.4
   в) 0.2
   г) да
   д) 0.6
   е)

Y	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

   ж) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y < -1 \\ 0.4, & \text{при } y \in [-1; 0) \\ 0.6, & \text{при } y \in [0; 1) \\ 1, & \text{при } y \geqslant 1 \end{cases}$

3. а) 0
   б) 1
   в) 1
   г) 0
   д) 0.6
   е) 0.6
   ж) 0
   з) 0
   и) 0
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

4. а) 0
   б) 1
   в) 1
   г) 0
   д) 0.8
   е) 0.8
   ж) 0
   з) 0
   и) 0
   к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

5. а) 0.25
   б) 0.2
   в)

$Y \mid \{X = -1\}$	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

   г) 0
   д) 0.8

6. а) 0.5
   б) 0.2
   в)

$Y \mid \{X = 1\}$	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.4	0.2	0.4

   г) 0
   д) 0.8

7. а) 0
   б) 36
   в) 9
   г) 60
   д) -4
   е) $\frac{-1}{3\sqrt{5}}$
   ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

8. а) -4
   б) 8
   в) 1
   г) 10
   д) -6
   е) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$
   ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. а) 0.3413

б) 0.0228
в) 0.1915

10. а) 0.6826
б) 0.0228
в) 0.1574

11. 0.4332

12. 0.8185

13. 0.4514

14. 0.5328

15. ≈ 0.8185

16. ≈ 0.9115

17. ≈ 0.6422

18. ≈ 0.9606

19. а) 0.125
б) 0.5
в) $f_X(x) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
г) $f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
д) нет

20. а) $\frac{1}{16}$
б) $\frac{1}{2}$
в) $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
г) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
д) да

21. а) $\frac{7}{12}$
б) $\frac{7}{12}$
в) $\frac{1}{3}$
г) $-\frac{1}{144}$
д) $-\frac{1}{11}$

22. а) $\frac{2}{3}$
б) $\frac{2}{3}$
в) $\frac{4}{9}$
г) 0
д) 0

23. а) $f_Y(y) = \begin{cases} y+\frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
в) $\frac{7}{12}$
г) $\frac{11}{144}$

24. а) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$
б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$
в) $\frac{2}{3}$
г) $\frac{1}{18}$

10.3. Контрольная работа 3 — Задачный минимум

1. а) ≈ 0.15
б) $U \sim \mathcal{N}(101, 29)$, $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 29}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(u-101)^2}{29}}$
в) ≈ 0.02

2. а) 71.14
б) $f(y|x=170) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 20}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-71.14)^2}{20}}$
в) ≈ 0

3. а) 0.25
б) 0.6875
в) $0.91(6)$
г) 0.75
д) -0.28125

4. а) $-1, 0, 1, 1$
б) -1

в) 1

г) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.25, & -1 \leqslant x < 0 \\ 0.5, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

5. а) θ

   б) да

6. а) нет, оценка смещена

   б) $c = 2$

7. а) все оценки несмещенные

   б) $\hat{p}_3$ наиболее эффективная

8. да

9. да

10. $\hat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 \cdot 20}{n}}$

11. $\hat{\theta}_{MM} = \frac{1}{5}\left(6 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$, $\hat{\theta}_{MM} = 0.68$

12. $\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$

13. $\hat{p}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

14. да

15. $n_1 \approx 260$, $n_2 \approx 232$, $n_3 \approx 658$

10.4. Контрольная работа 4 — Задачный минимум

1. $\left[-1.6 - 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}; -1.6 + 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$

2. $\left[-1.6 - 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}; -1.6 + 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}\right]$

3. $\left[\frac{17.43 \cdot 2}{4.61}; \frac{17.43 \cdot 2}{0.21}\right]$

4. $\left[-1.6 - (-2.6) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}; -1.6 - (-2.6) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}\right]$

5. $\left[1.04 - (-0.37) - 3.18 \cdot \sqrt{3.02}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}; 1.04 - (-0.37) + 3.18 \cdot \sqrt{3.02}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}\right]$

6. $\left[0.45 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}; 0.45 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}\right]$

7. $\left[0.6 - 0.4 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}; 0.6 - 0.4 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}\right]$

8. $\left[2.5 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}; 2.5 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}\right]$

9. $\left[\frac{1}{0.52} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}; \frac{1}{0.52} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}\right]$

10. а) ≈ 0.02

    б) ≈ 0.02

    в) ≈ 0.98

11. 0.2

12. $z_{obs} \approx -1.39$, $z_{crit} = 1.28$, нет оснований отвергать H_0.

13. $t_{obs} \approx -0.65$, $t_{crit} = 1.89$, нет оснований отвергать H_0.

14. $z_{obs} \approx 0.93$, $z_{crit} = -1.65$, нет оснований отвергать H_0.

15. $t_{obs} \approx 0.89$, $t_{crit} = -2.35$, нет оснований отвергать H_0.

16. $F_{obs} \approx 95.37$, $F_{crit} = 199.5$, нет оснований отвергать H_0.

17. $z_{obs} \approx 2.04$, $z_{crit} = 1.65$, основная гипотеза отвергается.

18. $z_{obs} \approx 4.16$, $z_{crit} = 1.96$, основная гипотеза отвергается.

19. $\gamma_{obs} \approx 0.26$, $\gamma_{crit} = 5.99$, нет оснований отвергать H_0.

20. $\gamma_{obs} \approx 139.4$, $\gamma_{crit} = 3.84$, основная гипотеза отвергается.

21. $LR_{obs} \approx 5.5$, $LR_{crit} = 3.84$, основная гипотеза отвергается.

11. Решения контрольной номер 1

11.1. 2017-2018

1. а) События называются независимыми, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

   б) Запасёмся всеми нужными вероятностями:
   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$
   $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$
   $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$
   $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{3}$ — выпадет чётое число больше трёх
   $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$ — выпадет чётное число, кратное трём
   $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{6}$ — выпадет число, большее трёх и кратное трём
   Теперь можно проверять независимость:
   $\mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \Rightarrow$ не являются независимыми
   $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow$ являются независимыми
   $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \Rightarrow$ являются независимыми

2. а) Количество возможных вариантов ТМ: C_{10}^2, количество возможных вариантов ЗМ: C_{24}^2. Количество их возможных сочетаний: $C_{10}^2 \cdot C_{24}^2$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

   б) По классическому определению вероятностей, предполагая исходы равновероятными, искомая вероятность равна $\frac{C_{16}^2}{C_{24}^2}$

   в) По тому же принципу:

   $$\frac{C_k^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{10!}{2! \cdot 8!}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{(k-1)k}{2}\frac{2}{9 \cdot 10} = \frac{1}{15}$$

   Получаем квадратное уравнение вида $k^2 - k - 6 = 0$ с корнями -2 и 3. Так как k не может быть отрицательным, ответ 3.

3. а) Если эксперт отдаёт предпочтение Fit, то это можно интерпретировать как «успех» в схеме Бернулли. Так как ξ - количество успехов, $k \in [0; 4]$, $p = \frac{1}{3}$, то

   $$\mathbb{P}(\xi = k) = C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k}$$

Большинство означает, что либо три, либо четыре эксперта выбрали Fit.

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi > 2) = \frac{9}{81}$$

б) Аналогично:

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

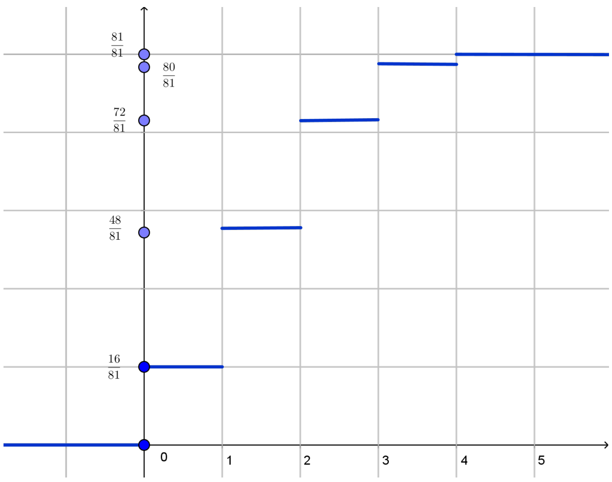


Рис. 2: Функция распределения

в) Все вероятности посчитаны, видим, что наибольшая достигается при $\xi = 1$.

г) $\mathbb{E}(X) = np = \frac{4}{3}$, $\mathrm{Var}(X) = npq = \frac{8}{9}$

4. а) Так как указано, что цена сметаны распределена равномерно на отерзке $[250, 1000]$, максимальное значение цены — 1000, это и есть необходимая сумма.

б) Вспомним, что функция распределения $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$, нужно найти такой x, что $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0.9$:

$$0.9 = 1 - \exp(-x^2) \Rightarrow \exp(-x^2) = 0.1 \Rightarrow -x^2 = \ln(0.1) \Rightarrow x = \sqrt{-\ln(0.1)}$$

в) Взяв производную от функции распределения списка без сметаны, получим функцию плотности:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x\exp(-x^2) & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание:

$$\int_0^{+\infty} 2x^2 \exp(-x^2)dx = -x\exp(-x^2)\big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

г) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий случайных влечин, если они существуют. Математическое ожидание от цены сметаны равно: $\frac{1000+250}{2} = 625$ Математическое ожидание списка без сметаны было найдено в предыдущем пункте, его осталось перевести в рубли. Получаем ответ: $625 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1000$.

д) Так как обе величины имеют абсолютно непрерывные распределения, вероятность попасть в конкретную точку равна нулю.

5. а) $\mathbb{P}(\text{детектор показал ложь и подозреваемый лжёт}) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.95 = 0.185$

   б) $\mathbb{P}(\text{невиновен}|\text{детектор показал ложь}) = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.185} = \frac{90}{185}$

   в) $\mathbb{P}(\text{эксперт точно выявит преступника}) = (0.9)^9 \cdot 0.95$

   г) $\mathbb{P}(\text{эксперт ошибочно выявит преступника}) = 9 \cdot 0.1 \cdot 0.9^8 \cdot 0.05$

11.2. 2016-2017

1. а) Возможны четыре равновероятные ситуации:

$$\mathbb{P}(\text{ММ}) = \mathbb{P}(\text{МД}) = \mathbb{P}(\text{ДМ}) = \mathbb{P}(\text{ДД}) = 1/4$$

Посчитаем условную вероятность:

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\text{МД, ДМ})}{\mathbb{P}(\text{ДМ, МД, ДД})} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}$$

   б) События A и B называются независимыми, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
   В нашем случае: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\text{МД, ДМ}) = 2/4$, $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 3/4 \cdot 3/4$.
   Следовательно, $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, значит, события A и B не являются независимыми.

2. Пусть событие A_i означает, что i-ый узел системы дал сбой, а событие B_N, что вся система дала сбой.

   В условии сказано, что $\mathbb{P}(A_i) = 10^{-6}$, а найти нужно такое максимальное $N \in \mathbb{N}$, при котором

$$\mathbb{P}(B_N) \leqslant \frac{1}{10^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_N) &= \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \mathbb{P}((\cup_{i=1}^n A_i)^c) \\
&\overset{\text{ф-ла де Моргана}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^N A_i^c\right) \overset{A_1,\ldots,A_N - \text{независ.}}{=} 1 - \mathbb{P}(A_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_N^c) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)^N
\end{aligned}$$

Чтобы найти такое максимальное $N \in \mathbb{N}$, надо решить следующее неравенство

$$
\begin{aligned}
&1-\left(1-10^{-6}\right)^N \leqslant 10^{-2}\\
&1-10^{-2} \leqslant \left(1-10^{-6}\right)^N\\
&\ln\left(1-10^{-2}\right) \leqslant N \ln\left(1-10^{-6}\right)\\
&N \leqslant \frac{\ln\left(1-10^{-2}\right)}{\ln\left(1-10^{-6}\right)} \approx 10050.33
\end{aligned}
$$

Значит, максимальное N равно 10050.

3. Введём обозначения для событий. Пусть A означает, что человек имеет заболевание лёгких, а B, что человек работал в шахте.

   В условии сказано, что $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.22$, $\mathbb{P}(B \mid A^c) = 0.14$, $\mathbb{P}(A) = 0.04$.

   а) Нужно найти
   $$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$
   Для этого с помощью формулы полной вероятности посчитаем
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid A^c)\,\mathbb{P}(A^c) = 0.22 \cdot 0.04 + 0.14 \cdot 0.96 = 0.1432$$
   Осталось подставить значения:
   $$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{0.22 \cdot 0.04}{0.1432} \approx 0.0615$$

   б) Все необходимые значения для второго пункта у нас есть, осталось применить формулу условной вероятности:
   $$
   \begin{aligned}
   \mathbb{P}(A \mid B^c) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(B^c \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^c)} = \mathbb{P}(B^c \mid A) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^c)}\\
   &= (1-\mathbb{P}(B \mid A)) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{1-\mathbb{P}(B)} = (1-0.22) \cdot \frac{0.04}{1-0.1432} \approx 0.0364
   \end{aligned}
   $$

4. Введём индикатор события «Петя дал верный ответ на i-ый вопрос»:
   $$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-ый вопрос теста Петя дал верный ответ} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
   Заметим, что $X_i \sim Be\,(p = 1/5)$, $X_1, \ldots, X_{17}$ – независимы, $X = X_1 + \ldots + X_{17}$ – общее число верных ответов, $X \sim Bin\,(n = 17, p = 1/5)$.

   а) Наибольшее вероятное число правильных ответов m_0 может быть нвйдено по формуле:

      1) если число $(n \cdot p - q)$ – не целое, где $q := 1 - p$, то
      $$m_0 = [np - q] + 1,$$
      2) если число $(n \cdot p - q)$ – целое, то наиболее вероятных значений m_0 два:
      $$m_0' = np - q \text{ и } m_0'' = np - q + 1$$

Итак, поскольку $np - q = 17 \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = 2.6$ – не целое, наиболее вероятное число верных ответов m_0 может быть найдено по формуле из пункта (1):

$$m_0 = [np - q] + 1 = [2.6] + 1 = 3$$

б)

$$\mathbb{E}(X) = np = 17 \cdot \frac{1}{5} = 3.4$$

$$\text{Var}(X) = npq = 17 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 2.72$$

в)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{у Пети «отлично»}) &= \mathbb{P}(X \geqslant 15) = \mathbb{P}(X = 15) + \mathbb{P}(X = 16) + \mathbb{P}(X = 17) \\ &= C_{17}^{15} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{15} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2} + C_{17}^{16} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{16} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1} + C_{17}^{17} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{17} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{0} \\ &= 136 \cdot \frac{16}{5^{17}} + 17 \cdot \frac{4}{5^{17}} + \frac{1}{5^{17}} \approx 2.94 \cdot 10^{-9}\end{aligned}$$

г) Рассмотрим первый вопрос теста. Петя может выбрать первый ответ с вероятностью $1/5$, и Вася может выбрать первый ответ с вероятностью $1/5$. Тогда они оба выберут одинаковый ответ с вероятностью $1/25$. Вариантов ответа в каждом вопросе 5, значит, вероятность совпадения ответа в одном вопросе равна $1/5$. Всего вопросов 17, тогда получаем

$$\mathbb{P}(\text{все ответы Пети и Васи совпадают}) = \left(\frac{1}{5}\right)^{17}$$

5. Введём случайную велчину η, которая означает число потенциальных покупателей, с которыми контактировал продавец оборудования. По условию задачи, η имеет таблицу распеределения:

η	1	2
$\mathbb{P}_\eta$	$1/3$	$2/3$

Случайная величина ξ может принимать значения $0, 50000$ и 100000

а) Найдём $\mathbb{P}(\xi = 0)$. По формуле полной вероятности, имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi = 0) &= \mathbb{P}(\xi = 0 \mid \eta = 1) \cdot \mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\xi = 0 \mid \eta = 2) \cdot \mathbb{P}(\eta = 2) \\ &= 0.9 \cdot \frac{1}{3} + 0.9 \cdot 0.9 \cdot \frac{2}{3} = 0.84\end{aligned}$$

б) Найдём $\mathbb{P}(\xi = 50000)$ и $\mathbb{P}(\xi = 100000)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi = 50000) &= \mathbb{P}(\xi = 50000 \mid \eta = 1) \cdot \mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\xi = 50000 \mid \eta = 2) \cdot \mathbb{P}(\eta = 2) \\ &= 0.1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot \frac{2}{3} = 0.15(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi = 100000) &= \mathbb{P}(\xi = 100000 \mid \eta = 1) \cdot \mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\xi = 100000 \mid \eta = 2) \cdot \mathbb{P}(\eta = 2) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 0.1 \cdot 0.1 \cdot \frac{2}{3} = 0.00(6)\end{aligned}$$

Таблица распределения случайной величина ξ имеет вид:

ξ	0	5000	100000
$\mathbb{P}_\xi$	0.84	0.15(3)	0.00(6)

Тогда функция распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$F_\xi(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 0.84 & \text{при } 0 \leqslant x < 50000 \\ 0.84 + 0.15(3) & \text{при } 50000 \leqslant x < 100000 \\ 1 & \text{при } x > 100000 \end{cases}$$

Опр.: $F_\xi = \mathbb{P}(\xi \leqslant x), x \in \mathbb{R}$

в)
$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.84 + 50000 \cdot 0.15(3) + 100000 \cdot 0.00(6) = 8333.(3)$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Var}(X) = (0 - 8333.(3))^2 \cdot 0.84 + (50000 - 8333.(3))^2 \cdot 0.15(3) \\ + (100000 - 8333.(3))^2 \cdot 0.00(6) = 380555555.(5)\end{gathered}$$

6. а) $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{при } x \in [0, b] \\ 0 & \text{при } x \notin [0, b] \end{cases}$

б) Известно, что если $\xi \sim U[a, b]$, то $\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}$. Стало быть, из уравнения $\mathbb{E}(\xi) = 1$ получаем $\frac{b}{2} = 1$, то есть $b = 2$.

в) Известно, что если $\xi \sim U[a, b]$, то $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Значит, $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$

г) Воспользуемся формулой $\mathbb{P}(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)dx$. Имеем:

$$\mathbb{P}(\xi > 1) = \mathbb{P}(\xi \in (1, +\infty)) = \int_1^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}$$

д) Требуется найти такое минимальное число $q_{0.25}$, что $\int_{-\infty}^{q_{0.25}} f_\xi(x)dx = 0.25$. Итак:

$$\int_{-\infty}^{q_{0.25}} f_\xi(x)dx = 0.25 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{q_{0.25}} \frac{1}{2}dx = 0.25 \Leftrightarrow \frac{1/2}{q_{0.25}} = 0.25 \Leftrightarrow$$
$$q_{0.25} = 2 \cdot 0.25 = 0.5$$

е)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}(\xi))^{2017}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(\xi))^{2017} \cdot f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^{2017} f_\xi(x)dx \\ &= \int_0^2 (x-1)^{2017} \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{(x-1)^{2018}}{2018} \cdot \frac{1}{2}\bigg|_{x=0}^{x=2} = 0\end{aligned}$$

ж) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$

з) Согласно условиям задачи, время до прихода 1-го поезда есть ξ; время до прихода 2-го поезда равно $\xi + b$; время до прихода 3-го (заветного) поезда есть $\xi + 2b$. Таким образом, Марья Ивановна в среднем ожидает «своего» поезда $\mathbb{E}(\xi + 2b) = 1 + 2b = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ минут. При этом $\mathrm{Var}(\xi + 2b) = \mathrm{Var}(\xi) = 1/3$

к) Пусть τ – наименьший номер поезда без «подозрительных лиц». По условию задачи, таблица распределения случайной величины τ имеет вид:

τ	1	2	3	4	...
$\mathbb{P}_\tau$	$1/4$	$3/4 \cdot 1/4$	$(3/4)^2 \cdot 1/4$	$(3/4)^3 \cdot 1/4$	...

То есть случайная величина τ имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1/4$ ($\tau \sim G(p = 1/4)$).

Несложно сообразить, что время ожидания Глафирой Петровной «своего» поезда составляет: $\eta := \xi + b(\tau - 1)$. Стало быть, $\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi) + b \cdot (\mathbb{E}(\tau) - 1) = 1 + 2 \cdot (4 - 1) = 7$ минут.

Здесь мы воспользовались тем фактом, что если $\eta \sim G(p)$, то $\mathbb{E}(\eta) = 1/p$

и) Найдём теперь вероятность $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5)$. Для нахождения искомой вероятности воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbb{P}(\eta \geqslant 5) = \mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau < 3) + \mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau = 3) + \mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau > 3)$$

Если Глафира уехала на первом или втором поезде, то ждать больше 5 минут она не могла, то есть $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau < 3) = 0$.

Если Глафира уехала на третьем поезде, то чтобы ждать больше пяти минут, ей нужно ждать первый поезд больше минуты, то есть $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau = 3) = 0.5\,\mathbb{P}(\tau = 3)$.

Если Глафира уехала на четвертом поезде или позже, то она точно ждала больше 5 минут, $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau > 3) = \mathbb{P}(\tau > 3)$.

$$\mathbb{P}(\eta \geqslant 5) = 0.5\,\mathbb{P}(\tau = 3) + \mathbb{P}(\tau > 3) = 0.5 \cdot (3/4)^2 \cdot (1/4) + (3/4)^3 = 63/128$$

7. Пусть ξ — случайная величина, обозначающая число остановок лифта. Предствим её в виде суммы $\xi = \xi_2 + \ldots + \xi_{10}$, где ξ_i — индикатор того, что лифт остановился на i-ом этаже, то есть

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{если лифт остановился} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad \forall i = 2, \ldots, 10$$

Найдём соответсвующие вероятности:

$$\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \left(\frac{8}{9}\right)^9$$

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^9$$

Тогда $\mathbb{E}(\xi_i) = \mathbb{P}(\xi_i = 0) \cdot 0 + \mathbb{P}(\xi_i = 1) \cdot 1 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^9$, и в итоге получаем:

$$\mathbb{E}(\xi) = 9 \cdot \mathbb{E}(\xi_i) = 9 \cdot \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^9\right)$$

11.3. 2015-2016

1. α) Найдём вероятности каждого события: $\mathbb{P}(A) = 1/2, \mathbb{P}(B) = 1/2, \mathbb{P}(C) = 1/2$.

   Проверим попарную независимость:

   - $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4, \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
   - $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/4, \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
   - $\mathbb{P}(B \cap C) = 1/4, \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

   Значит, события попарно независимы.

   β) События A_1, A_2, A_3 называются независимыми в совокупности, если $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$.

   В нашем случае: $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0, \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = (1/2)^3$, следовательно, события не являются независимыми в совокупности.

2. α) Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{выпала «6»}) &= \mathbb{P}(\text{выпала «6»} \mid \text{взят белый кубик}) \cdot \mathbb{P}(\text{взят белый кубик}) \\ &+ \mathbb{P}(\text{выпала «6»} \mid \text{взят красный кубик}) \cdot \mathbb{P}(\text{взят красный кубик}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

   β) Воспользуемся формулой условной вероятности и результатом предыдущего пункта:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{взят красный кубик} \mid \text{выпала «6»}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{взят красный кубик} \cap \text{выпала «6»})}{\mathbb{P}(\text{выпала «6»})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3. α) Совместное распределение имеет вид:

$\eta \setminus \xi$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$
2	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$
3	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$
4	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$
5	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$
6	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$

   β) $\mathbb{P}(\text{выиграет белый кубик}) = (6 + 5 + 4 + 3 + 2) \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

   Значит, Пете безразлично, какой кубик брать.

   γ) $F_\zeta(x) = \mathbb{P}(\zeta \leqslant x)$

   Выпишем таблицу распределения случайной величины ζ:

ζ	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(\cdot)$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 7$	$\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5$

Тогда функция распределения имеет вид:

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 1 \\ \frac{1}{45} & 1 < x \leqslant 2 \\ \frac{4}{45} & 2 < x \leqslant 3 \\ \frac{9}{45} & 3 < x \leqslant 4 \\ \frac{16}{45} & 4 < x \leqslant 5 \\ \frac{25}{45} & 5 < x \leqslant 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

δ) $\mathbb{E}(\zeta) = \frac{2}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 3+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 4+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{43}{9} \approx 4.8$

4. Пусть x — вероятность того, что мужчина честно любит петь в душе.

   Распишем по формуле полной вероятности вероятность получить ответ «да»:

$$P(\text{ответ «Да»}) = 1\cdot\mathbb{P}(\text{выпала «6»}) + x\cdot(\mathbb{P}(\text{выпала «2»}) + \mathbb{P}(\text{выпала «3»}) \\ + \mathbb{P}(\text{выпала «4»}) + \mathbb{P}(\text{выпала «5»})) = 1\cdot\frac{1}{6} + x\cdot\frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

   Тогда истинный процент «певцов» составляет 75%

5. Предположим, что ваше имя — Студент (7 букв), а фамилия — Идеальный (9 букв).

   α) $\mathbb{P}(\text{напишет фаимлию правильно}) = (0.9)^9$

   β) $\mathbb{P}(\text{ровно 2 ошибки в имени}) = C_7^2\cdot 0.1^2\cdot 0.9^5$

   γ) Наиболее вероятное число ошибок — 1

   δ) $\mathbb{P}(\text{допустит хотя бы одну ошибку}) = 1-\mathbb{P}(\text{не допустит ни одной ошибки}) = 1-(0.9)^{16}$

6. α) Из условия $\int_0^1 (cy^2+y)dy = 1$ получаем, что $c = 3/2$.

   β) $F_Y(y) = \begin{cases} 1 & y > 1 \\ \frac{y^3+y^2}{2} & 0 < y \leqslant 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

   γ) $\mathbb{P}(Y < 0.5) = \int_0^{0.5}\left(\frac{3}{2}y^2+y\right)dy = \frac{3}{16}$

   δ) $F_Y(y) = 0.5 \Rightarrow y \approx 0.75$

   ϵ) $\mathbb{P}(Y > 0.5 \mid Y \geqslant 0.25) = \frac{\mathbb{P}(Y>0.5)}{\mathbb{P}(Y\geqslant 0.25)} = \frac{1-\frac{3}{16}}{\int_{0.25}^1\left(\frac{3}{2}y^2+y\right)dy} = \frac{104}{123}$

7. α) $\mathbb{P}(\text{кисточка окажется на слоне}) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$

   β) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{1.5}$

   γ) $f_\xi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1.5}dy = 1.5$

   $f_\eta(y) = \int_0^{1.5}\frac{1}{1.5}dx = 1$

   δ) Да, поскольку $f_\xi(x)\cdot f_\eta(y) = f_{\xi,\eta}(x,y)$

   ϵ) $f_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u)f_\eta(t-u)du$

11.4. 2014-2015

1. Внимательно читайте примечание! Всего 6 возможных ситуаций, только 1 — благоприятная. Требуемая вероятность равна $1/6$.

2. Два события A и B независимы, если: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

   Проверим, независимы ли события $A = \{\xi < 1/2\}$ и $B = \{\eta < 1/2\}$:

   $\mathbb{P}(AB)$ ищется как отношение площади квадрата с вершинами в $(0,\ 0)$, $(0,\ 1/2)$, $(1/2,\ 1/2)$, $(1/2,\ 0)$ к площади данного треугольника, то есть:

$$\mathbb{P}(AB) = \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}$$

   $\mathbb{P}(A)$ ищется как отношение площади трапеции с вершинами в $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1/2,\ 1/2)$, $(1/2,\ 0)$ к площади данного треугольника, то есть:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(1/2)}{1/2} = \frac{3}{4}$$

   $\mathbb{P}(B)$ ищется как отношение площади трапеции с вершинами в $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1/2,\ 1/2)$, $(0,\ 1/2)$ к площади данного треугольника, то есть:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(1/2)}{1/2} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16} \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(AB)$$

   Получается, события A и B зависимы.

3. Пусть событие A = {Цель была поражена первым самолетом}, событие B = {Цель была поражена только одним самолетом}. Тогда событие AB = {Первый самолет поразил цель, второй и третий — промахнулись}. По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.6\cdot 0.6\cdot 0.7}{0.6\cdot 0.6\cdot 0.7 + 0.4\cdot 0.4\cdot 0.7 + 0.4\cdot 0.6\cdot 0.3} = \frac{0.252}{0.436} \approx 0.578$$

4. Удобно рассуждать следующим образом: предположим, что каждая опечатка наугад (с равными вероятностями и независимо от других опечаток) выбирает, на какую страницу ей попасть.

   а) Пусть X — число опечаток на 13 странице.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$$

   $\mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{499}{500}\right)^{400}$ — каждая из 400 опечаток не должна попасть на 13 страницу.
   $\mathbb{P}(X = 1) = 400\cdot\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{499}{500}\right)^{399}$ — ровно одна опечатка (а есть 400 вариантов) должна попасть на 13 страницу, а остальные — мимо. Соответственно:

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \left(\frac{499}{500}\right)^{400} - 400\cdot\frac{1}{500}\cdot\left(\frac{499}{500}\right)^{399} \approx 0.19$$

Это если считать в явном виде. А если пользоваться приближением Пуассона:

$$p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

неплохо бы вспомнить, что параметр λ это математическое ожидание X, поэтому расчеты здесь пока оставим до лучших времен.

б) Пусть X — число опечаток на 13 странице. Введем случайную величину

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая опечатка попала на 13 страницу} \\ 0, & \text{если нет} \end{cases}$$

Тогда $X = \sum\limits_{i=1}^{400} X_i$. Рассмотрим отдельно X_i:

x	1	0
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{500}$	$\frac{499}{500}$

Так как i-ая опечатка наугад выбирает одну страницу из 500 и это должна быть именно 13.

Тогда:

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{500} = \mathbb{E}(X_i^2)$$
$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = \frac{1}{500} - \left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{499}{500^2}$$

Значит

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \mathbb{E}(X_i) = \frac{400}{500} = 0.8$$
$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \mathrm{Var}(X_i) = 400 \cdot \frac{499}{500^2} = 0.8 \cdot \frac{499}{500}$$

Теперь мы знаем, что $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0.8$ поэтому можем вернуться к пункту (а):

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{0.8^0}{0!} e^{-0.8} - \frac{0.8^1}{1!} e^{-0.8} \approx 0.19$$

Осталось найти наиболее вероятное число опечаток на 13 странице:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{0.8^k}{k!} e^{-0.8} \to \max_k$$

Очевидно, что эта функция убывает по k, ведь с ростом k:
$k!$ растет, а 0.8^k убывает. Значит наиболее вероятное число ошибок — $X = 0$

в) Ох уж эти предрассудки! 13-я страница точно такая же как и все остальные, ведь везде в решении можно просто заменить номер 13 на любой другой и ничего не изменится.

5. Пусть событие A означает, что медицинский тест показал наличие заболевания. Событие B — заболевание на самом деле есть.

   Перепишем условие задачи:

   Чувствительность теста $= \mathbb{P}(A|B)$

   Специфичность теста $= \mathbb{P}(A^c|B^c)$

   Прогностическая сила теста $= \mathbb{P}(B|A)$

   $\mathbb{P}(B) = 0.01 \Rightarrow \mathbb{P}(B^c) = 0.99$

   По условию, чувствительность теста равна 0.9, тогда из формулы условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0.9 \cdot 0.01 = 0.009$$

   При этом очевидно, что:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.01 - 0.009 = 0.001$$

   По условию специфичность теста равна 0.95, тогда из формулы условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A^c|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} \Rightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 0.95 \cdot 0.99 = 0.9405$$

   При этом очевидно, что:

$$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0.99 - 0.9405 = 0.0495$$

   Теперь мы готовы отвечать на заданные вопросы:

   а)
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) = 0.009 + 0.0495 = 0.0585$$

   б) Прогностическая сила теста:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.009}{0.0585} \approx 0.154$$

   Для того, чтобы повысить прогностическую силу теста, необходимо понизить $\mathbb{P}(A \cap B^c)$, а для этого необходимо повысить специфичность теста.

6. а) Должно выполняться условие нормировки:

$$\int_{-a}^{0} 1.5(x+a)^2 dx + \int_{0}^{a} 1.5(x-a)^2 dx = 1$$
$$0.5(x+a)^3\Big|_{-a}^{0} + 0.5(x-a)^3\Big|_{0}^{a} = 1$$
$$0.5a^3 + 0.5a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

   Теперь легко понять, как выглядит функция распределения (смотри определение функции распределения):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.5(x+1)^3, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 + 0.5(x-1)^3, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

И с её помощью всё посчитать:

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 + 0.5^4 = 0.5^4$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int\limits_{-1}^{0} x \cdot 1.5(x+1)^2 dx + \int\limits_{0}^{1} x \cdot 1.5(x-1)^2 dx \\ &= 1.5 \int\limits_{-1}^{0} \left(x^3 + 2x^2 + x\right) dx + 1.5 \int\limits_{0}^{1} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx \\ &= \frac{3}{8} x^4 |_{-1}^{0} + x^3 |_{-1}^{0} + \frac{3}{4} x^2 |_{-1}^{0} + \frac{3}{8} x^4 |_{0}^{1} - x^3 |_{0}^{1} + \frac{3}{4} x^2 |_{0}^{1} = -\frac{3}{8} + 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - 1 + \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

А можно было заметить, что функция плотности — четная функция, поэтому сразу $\mathbb{E}(X) = 0$

Вычислим $\mathbb{E}\left(X^2\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int\limits_{-1}^{0} x^2 \cdot 1.5(x+1)^2 dx + \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot 1.5(x-1)^2 dx \\ &= 1.5 \int\limits_{-1}^{0} \left(x^4 + 2x^3 + x^2\right) dx + 1.5 \int\limits_{0}^{1} \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) dx \\ &= \frac{3}{10} x^5 |_{-1}^{0} + \frac{3}{4} x^4 |_{-1}^{0} + \frac{1}{2} x^3 |_{-1}^{0} + \frac{3}{10} x^5 |_{0}^{1} - \frac{3}{4} x^4 |_{0}^{1} + \frac{1}{2} x^3 |_{0}^{1} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0.1$$

б) Верим, что график $F(x)$, выписанной выше, вы построить можете :)

7. Пусть $A = \{$«Лекция полезна»$\}$, $B = \{$«Лекция интересна»$\}$. Заметим, что лекции вообще независимы друг от друга.

а) Пусть X_A — число полезных лекций, прослушанных Васей, X_B — число интересных лекций, прослушанных Васей. Введем случайную величину:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ая лекция была полезна} \\ 0 & \text{если нет} \end{cases}$$

Тогда $X_A = \sum\limits_{i=1}^{30} X_i$. Рассмотрим отдельно X_i:

x	1	0
$\mathbb{P}(X = x)$	0.9	0.1

Вероятность 0.9 дана. Тогда:

$$\mathbb{E}(X_i) = 0.9 = \mathbb{E}(X_i^2) \Rightarrow$$
$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = 0.9 - 0.9^2 = 0.09$$

Значит

$$\mathbb{E}(X_A) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \mathbb{E}(X_i) = 0.9 \cdot 30 = 27$$
$$\mathrm{Var}(X_A) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \mathrm{Var}(X_i) = 0.09 \cdot 30 = 2.7$$

Аналогично для числа интересных лекций можем получить:

$$\mathbb{E}(X_B) = 0.7 \cdot 30 = 21$$
$$\mathrm{Var}(X_A) = 0.21 \cdot 30 = 6.3$$

б) Так как интересность и полезность — независимые свойства лекций, то:

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03,$$

где A^c значит «не A». В свою очередь:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B \cap A^c) + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c) = 0.97,$$

где $(A \cup B)$ значит «A или B», а $(A \cap B)$ — «A и B». Аналогично, путем введения бинарной случайной величины можем получить:

$$\mathbb{E}(X_{A^c \cap B^c}) = 0.03 \cdot 30 = 0.9$$
$$\mathbb{E}(X_{A \cup B}) = 0.97 \cdot 30 = 29.1$$

8. Дано: $\mathbb{E}(X) = 1, \mathbb{E}(Y) = 2, \mathbb{E}(X^2) = 5, \mathbb{E}(Y^2) = 8, \mathbb{E}(XY) = -1$.

Будем использовать только свойства математического ожидания, ковариации и дисперсии, и ничего больше. Ни-че-го.

- $\mathbb{E}(2X + Y - 4) = 2\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(-4) = 2 + 2 - 4 = 0$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 5 - 1 = 4$
- $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 8 - 4 = 4$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = -1 - 2 = -3$
- $\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = -\frac{3}{2\cdot 2} = -0.75$
- $\mathrm{Var}(X - Y - 1) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 4 + 4 - 2(-3) = 14$
- $\mathrm{Var}(X + Y + 1) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 4 + 4 + 2(-3) = 2$

- $$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X-Y-1, X+Y+1) &= \mathbb{E}((X-Y)(X+Y)) - \mathbb{E}(X-Y)\,\mathbb{E}(X+Y) \\ &= \mathbb{E}\left(X^2-Y^2\right) - (\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \left((\mathbb{E}(X))^2 - (\mathbb{E}(Y))^2\right) \\ &= \operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y) = 0\end{aligned}$$

- $\operatorname{Cov}(X-Y-1, X+Y+1) = 0 \Rightarrow \operatorname{Corr}(X-Y-1, X+Y+1) = 0$

9. Найдём частные распределения Y и Y^2:

	$X=1$	$X=2$	$\sum$
$Y=-1$	0.1	0.2	0.3
$Y=0$	0.2	0.3	0.5
$Y=1$	0	0.2	0.2
$\sum$	0.3	0.7	

y	-1	0	1
$\mathbb{P}(Y=y)$	0.3	0.5	0.2

Так как Y^2 может принимать только значения 0 или 1:

y^2	0	1
$\mathbb{P}(Y^2=y^2)$	0.5	0.5

А ковариация:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) &= ((-1)\cdot 1\cdot 0.1 + (-1)\cdot 2\cdot 0.2 + 1\cdot 2\cdot 0.2) \\ &- (0.3\cdot 1 + 0.7\cdot 2)\cdot(0.3\cdot(-1) + 0.1\cdot 0.2) = 0.07\end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Cov}(X,Y) \neq 0$ — величины зависимы

10. Бонусная задача

Предположим, что правильный ответ 0.25. Но это невозможно, потому что вариантов ответа 0.25 — два (1 и 4), значит ответ 0.5 тоже был бы правильный. Предположим, что правильный 0.5. Тогда 0.25 тоже правильный — таких вариантов два из четырех, значит вероятность попасть в 0.25, выбрав ответ наугад, равна 0.5. Ответ 0.6, очевидно, неверен, потому что вероятность попасть в него равна 0.25.
Правильный ответ: 0

11.5. 2013-2014

1. Введём обозначения:

   - $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}^c) = 0.18$ — Вася пришёл, а девушки — нет
   - $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) = 0.9$ — пришли и Вася, и девушки
   - $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) = 0.54$ — Вася пришёл, если пришла только Маша
   - $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) = 0.36$ — Вася пришёл, если пришла только Алёна
   - $\mathbb{P}(\mathrm{M}) = 0.4$ — Маша пришла на лекцию
   - $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0.6$ — Алёна пришла на лекцию

   а) Используя формулы Байеса и полной вероятности, получим:

   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$$

   В числителе:

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) = \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}^c) \\ &= 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + 0.36 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.3456\end{aligned}$$

   А в знаменателе:

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{B}) = {}& \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}^c) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) \\ &+ \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) \\ &= 0.18 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + 0.54 \cdot 0.4 \cdot 0.4 + 0.36 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.4752\end{aligned}$$

   Ответ:

   $$\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{0.3456}{0.4752} = 0.(72)$$

   б) Необходимо найти

   $$\mathbb{P}(\mathrm{M}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$$

   Знаменатель этой дроби посчитан в предыдущем пункте, посчитаем числитель:

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{B}) &= \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) \\ &= P(\mathrm{B}|\mathrm{M} \cap \mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) \\ &= 0.9 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + 0.54 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.3024\end{aligned}$$

   Ответ:

   $$\mathbb{P}(\mathrm{M}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{0.3024}{0.4752} = 0.(63)$$

   Если Вася на лекции, вероятность застать на ней Алёну выше.

2. $\mathbb{P}(X = 5) = C_{100}^5 0.002^5 0.998^{95}$,

   $\mathbb{E}(X) = 0.2$,

   $\mathrm{Var}(X) = 0.2 \cdot 0.998$,

   наиболее вероятно событие $X = 0$.

3. $c = 1/2$, $\mathbb{P}(X \in [\ln 0.5, \ln 4]) = 5/8$, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0$, $\mathbb{E}(X^{2k}) = (2k)!$

4. а) $\mathbb{E}(Y - 2X - 3) = \mathbb{E}(Y) - 2\,\mathbb{E}(X) - 3 = 0$
   $\mathrm{Var}(Y - 2X - 3) = \mathrm{Var}(Y) + 4\,\mathrm{Var}(X) - 2\,\mathrm{Cov}(Y, 2X) = 16$
   $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Corr}(X, Y) \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)} = 6$

   б) $\mathrm{Corr}(Y - 2X - 3, X) = \frac{\mathrm{Cov}(Y,X) - 2\,\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y - 2X - 3) \cdot \mathrm{Var}(X)}} = -1.$

   в) Корреляция равна -1, значит, есть линейная взаимосвязь между переменными. Пусть $Y + aX = b$, тогда $\mathrm{Var}(Y + aX) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = -a + b = 1$. Решая уравнения, находим, что $a = -2/3, b = 1/3$.

5. а) Таблицы распределения имеют вид:

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0.3	0.3	0.4

y	-1	1
$\mathbb{P}(Y = y)$	0.5	0.5

   б)

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = (-1) \cdot (-1) \cdot 0.1 + (-1) \cdot 0 \cdot 0.2 + \\ + (-1) \cdot 1 \cdot 0.2 + 1 \cdot (-1) \cdot 0.2 + 1 \cdot 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 1 \cdot 0.1 - 0.1 \cdot 0 = -0.1$$

   в) Да, поскольку если случайные величины независимы, то их ковариция равна нулю.

   г) Условное распределение:

$X \vert Y = -1$	-1	0	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.2	0.4	0.4

   д) $\mathbb{E}(X|Y = -1) = -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4 = 0.2$

11.6. 2012-2013

1. а) $\mathbb{P}(A) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.2 = 0.38$

   б) $\mathbb{P}(B) = 0.9$

   в) $\mathbb{P}(C|A) = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.38} = 0.632$

   г) $\mathbb{P}(C|D) = \frac{0.3 \cdot (0.9 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2)}{0.9 \cdot 0.38 + 0.1 \cdot (1 - 0.38)} = 0.55$

2. Это была задачка-неберучка!

3. а) 1

   б) $\mathbb{E}(X) = 45/28 \approx 1.61$, $\mathbb{E}(X^2) = 93/35 \approx 2.66$, $\mathrm{Var}(X) = 291/3920 \approx 0.07$

   в) $37/56 \approx 0.66$

   г) $F(x) = \begin{cases} 0, \; x < 1 \\ \frac{x^3 - 1}{7}, \; x \in [1; 2] \\ 1, \; x > 1 \end{cases}$

4. а) $a = 0.1$

   б) $\mathbb{P}(X > -1) = 0.7$, $\mathbb{P}(X > Y) = 0.1$

в) $\mathbb{E}(X) = -0.2, \mathbb{E}(X^2) = 2$

г) $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0.117$

5. а) Правильные: $\mathbb{E}(X) = 10$, $\mathrm{Var}(X) = 9$, неправильные: $\mathbb{E}(Y) = 9$, $\mathrm{Var}(Y) = 0.9$

   б) Наиболее вероятное число укусов равно математическому ожиданию

   в) Лучше идти к неправильным пчёлам, так как $\mathbb{P}(X \leqslant 2) < \mathbb{P}(Y \leqslant 2)$.

12. Решения контрольной номер 1. ИП

12.1. 2017-2018

1. Обозначим вероятность того, что сыр достанется Белому за b, если игра начинается с его броска.

   а) Получаем уравнение
   $$b = \frac{1}{12} + \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} b$$
   Пояснение: Как Белый может победить в исходной игре? Либо сразу выкинуть 6 с вероятностью $1/12$. Либо передать ход Серому ($11/12$), получить ход снова ($11/12$) и выиграть в продолжении игры. Продолжение игры по сути совпадает с исходной игрой.

   б) Игра продолжается до тех пор, пока кто-то не выкинет «6». Для нахождения среднего количества бросков воспользуемся методом первого шага.

   Обозначим среднее количество бросков нашей игры за S. Когда Белый бросает кубик, с вероятностью $\frac{1}{12}$ игра закончится за один бросок, а с вероятностью $\frac{11}{12}$ игра продолжится и ход перейдёт к Серому. Но та игра, которая начнётся, когда бросать будет Серый, ничем не отличается от предыдущей, поэтому среднее количество бросков в ней будет равно S. Однако мы попадём в эту игру, «потратив» один бросок. Таким образом мы получаем:
   $$S = \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{11}{12}(S + 1)$$
   Получается, что $S = 12$, значит игра длится в среднем 12 бросков.

2.

3. Для того, чтобы выжить, мышам нужно ещё до начала игры договориться о стратегии, которая позволит им с наибольшей вероятностью открыть нужные сундуки. Если хотя бы две мыши выберут одинаковый сундук, то их в любом случае съедят. Поэтому одной из оптимальных стратегий будет ещё до начала игры мышам договориться и назвать левый сундук золотым, сундук посередине серебряным, а правый — платиновым. Каждый мышонок должен открыть тот сундук, в честь которого назван необходимый ему металл. Если внутри он обнаруживает свой металл, то он выбирает этот сундук, если внутри находится не тот металл, мышонок открывает тот сундук, на который указывает лежащий внутри предмет.

   Например, первым заходит Микки Маус. Он открывает золотой (левый) ящик. Если внутри лежит золото, то он выходит из комнаты. Если же внутри лежит, например, серебро, то

Микки Маус открывает сундук посередине. Путём перебора можно посчитать, что в 4 случаях из 6 мыши смогут найти нужный металл, поэтому вероятность выигрыша при данной стратегии равна $\frac{2}{3}$.

4.

5. Благосостояние кота Василия, положившего один гурд на вклад, равно $m_t = 1 \cdot e^{rt}$, где r — процентная ставка, а t — прошедшее время. Момент закрытия вклада T равномерно распределён на отрезке от 0 до a, поэтому сумма, которую получит Василий, представима в виде $Z = e^Y$, где $Y \sim U[0; ra]$. По условию, a очень велико, поэтому ra тоже очень велико.

   Вероятность того, что первая цифра будет равна 1, равна вероятности того, что доход Василия будет лежать в пределах от 1 до 2 гурдов, плюс вероятность того, что он лежит в пределах от 10 до 20 гурдов и т.д. Таким образом, можно представить эту вероятность, как:

$$\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(e^Y \in [1; 2)) + \mathbb{P}(e^Y \in [10; 20)) + \ldots$$

   Это выражение можно преобразовать таким образом:

$$\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(Y \in [\ln 1; \ln 2)) + \mathbb{P}(Y \in [\ln 10; \ln 20)) + \ldots$$

   Так как Y — равномерно распределённая величина, то $\mathbb{P}(Y \in [\ln 1; \ln 2)) = \frac{\ln 2 - \ln 1}{ra}$. Для последующих слагаемых вероятность рассчитывается таким же образом. Воспользовавшись свойством логарифма, можно заметить, что $\frac{\ln 20 - \ln 10}{ra} = \frac{\ln 2}{ra}$. Поэтому вероятность того, что на первом месте суммы вклада стоит единица, равна $n \cdot \frac{\ln 2}{ra}$, где n — количество слагаемых. Путём аналогичных рассуждений получаем, что вероятность того, что на первом месте стоит двойка, равна $n \cdot \frac{\ln 3 - \ln 2}{ra}$. Из-за того, что a велико, можно считать, что число слагаемых одинаково.

   На первом месте обязательно будет находиться какая-то цифра, поэтому сумма вероятностей будет равна 1. Получаем:

$$\frac{n}{ra}\left(\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{10}{9}\right) = 1$$

   Таким образом $\frac{n}{ra} = \frac{1}{\ln 10}$. Получается, что вероятность того, что на первом месте стоит единица, равна:

$$\mathbb{P}(N = 1) = \frac{\ln 2}{\ln 10}$$

   Закон распределения первой цифры выводится сложением соответствующих вероятностей.

13. Решения контрольной работы 2

13.1. 2017-2018

7. а) Всем хватит места, если число явившихся на рейс пассажиров (X) не превысит 300, то есть нужно найти $\mathbb{P}(X \leqslant 300)$. Найдём матожидание и дисперсию случайной величины X:

$$\mathbb{E}(X) = np = 330 \cdot 0.9 = 297$$
$$\mathrm{Var}(X) = np(1 - p) = 330 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 29.7$$

Теперь посчитаем нужную вероятность:

$$\mathbb{P}(X \leqslant 300) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 297}{\sqrt{29.7}} \leqslant \frac{300 - 297}{\sqrt{29.7}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leqslant 0.55) \approx 0.709$$

б) Вероятность переполнения не должна превышать 0.1:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X > 300) < 0.1\\
&\mathbb{P}\left(\frac{X - 0.9 \cdot n}{\sqrt{0.9 \cdot 0.1 \cdot n}} > \frac{300 - 0.9 \cdot n}{\sqrt{0.9 \cdot 0.1 \cdot n}}\right) < 0.1\\
&\frac{300 - 0.9 \cdot n}{\sqrt{0.9 \cdot 0.1 \cdot n}} > 1.28\\
&300 - 0.9n > 1.28 \cdot 0.3\sqrt{n}\\
&n < 325.6
\end{aligned}$$

8. а) Выпишем случайную величину X_i — цену акции после i-ого дня:

$$X_i = \begin{cases} 1.01, & p = 0.7\\ 0.99, & p = 0.2999\\ 0, & p = 0.0001 \end{cases}$$

Нужно посчитать ожидание цены акциии после 20 дней:

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot \ldots \cdot X_{20}) \overset{\text{незав-ть}}{=} \mathbb{E}(X_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(X_{20}) = 1.004^{20} \approx 1.083$$

б) По ЗБЧ:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_i) = 1.004$$

в) Аналогично пункту (а):

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = (\mathbb{E}(X_1))^n = 1.004^n$$

И понятно, что $1.004^n \to_{n\to\infty} +\infty$.

г)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{разорения}) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > 0, \ldots, X_n > 0) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > 0)\\
&= 1 - (1 - 0.0001)^n \to_{n\to\infty} 1
\end{aligned}$$

13.2. 2016-2017

1. а) $\mathbb{E}(2\xi - \eta + 1) = 2\,\mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\eta) + 1 = 2 \cdot 1 - (-2) + 1 = 5$

$\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\,\mathbb{E}(\eta) = -1 - \cdot 1 \cdot (-2) = 1$

$\operatorname{Corr}(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\cdot\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot(8-(-2)^2)}} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Var}(2\xi - \eta + 1) = 4\operatorname{Var}(\xi) + \operatorname{Var}(\eta) - 2\operatorname{Cov}(2\xi, \eta) = 4 \cdot 1 + 4 - 4 \cdot 1 = 4$

б) $\mathrm{Cov}(\xi+\eta,\xi+1) = \mathrm{Cov}(\xi) + \mathrm{Cov}(\xi,1) + \mathrm{Cov}(\eta,\xi) + \mathrm{Cov}(\eta,1) = 1 + 1 = 2$

$\mathrm{Corr}(\xi+\eta,\xi+1) = \frac{\mathrm{Cov}(\xi+\eta,\xi+1)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi+\eta)\cdot\mathrm{Var}(\xi+1)}} = \frac{2}{\sqrt{(1+4+2\cdot1)\cdot1}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\mathrm{Corr}(\xi+\eta-24, 365-\xi-\eta) = -1$

$\mathrm{Cov}(2016\cdot\xi, 2017) = 0$

2. а)

ξ	-1	0	2
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.3	0.4	0.3

η	-1	1
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.5	0.5

$\mathbb{E}(\xi) = -1\cdot0.3 + 0\cdot0.4 + 2\cdot0.3 = 0.3$

$\mathbb{E}(\xi^2) = (-1)^2\cdot0.3 + 0^2\cdot0.4 + 2^2\cdot0.3 = 1.5$

$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = 1.5 - 0.3^2 = 1.41$

$\mathbb{E}(\eta) = -1\cdot0.5 + 1\cdot0.5 = 0$

$\mathbb{E}(\eta^2) = (-1)^2\cdot0.5 + 1^2\cdot0.5 = 1$

$\mathrm{Var}(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = 1 - 0^2 = 1$

б)

$\xi\cdot\eta$	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(\cdot)$	0.2	0.2	0.4	0.1	0.1

$\mathbb{E}(\xi\cdot\eta) = (-2)\cdot0.2 + (-1)\cdot0.2 + 0\cdot0.4 + 1\cdot0.1 + 2\cdot0.1 = -0.3$

$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\cdot\eta) - \mathbb{E}(\xi)\cdot\mathbb{E}(\eta) = -0.3 - 0.3\cdot0 = -0.3$

в) Пусть случайная величина X принимает значения $a_1,\ldots,a_m$, случайная веилчина Y принимает значения $b_1,\ldots,b_n$. Тогда случйаня величина X и Y называются независимыми, если $\forall i = 1,\ldots,m \quad \forall j = 1,\ldots,n : \mathbb{P}(X = a_i \cap Y = b_j) = P(X = a_i)\cdot P(Y = b_j)$

г) Заметим, что $\mathbb{P}(\xi = -1 \cap \eta = -1) = 0.1$, $\mathbb{P}(\xi = -1) = 0.3$ и $\mathbb{P}(\eta = -1) = 0.5$.

Тогда поскольку $\mathbb{P}(\xi = -1 \cap \eta = -1) \neq \mathbb{P}(\xi = -1)\cdot\mathbb{P}(\eta = -1)$, случайные величины ξ и η не являются независимыми.

д) $\mathbb{P}(\xi = -1 \cap \eta = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi=-1\cap\eta=1)}{\mathbb{P}(\eta=1)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$

$\mathbb{P}(\xi = 0 \cap \eta = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi=0\cap\eta=1)}{\mathbb{P}(\eta=1)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$

$\mathbb{P}(\xi = 2 \cap \eta = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi=2\cap\eta=1)}{\mathbb{P}(\eta=1)} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$

Следовательно, условное распределение случайной величины ξ при условии $\{\eta = 1\}$ может быть описано следующей таблицей:

ξ	-1	0	2
$\mathbb{P}(\cdot)$	$2/5$	$2/5$	$1/5$

е) $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 1) = -1\cdot\frac{2}{5} + 0\cdot\frac{2}{5} + 2\cdot\frac{1}{5} = 0$

ж) $\mathbb{E}(\pi) = \mathbb{E}(0.5\xi + 0.5\eta) = 0.5\,\mathbb{E}(\xi) + 0.5\,\mathbb{E}(\eta) = 0.15$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\pi) &= \mathrm{Var}(0.5\xi + 0.5\eta) = \mathrm{Var}(0.5\xi) + \mathrm{Var}(0.5\eta) + 2\,\mathrm{Cov}(0.5\xi, 0.5\eta) \\
&= 0.25\,\mathrm{Var}(\xi) + 0.25\,\mathrm{Var}(\eta) + 2\cdot0.5\cdot0.5\,\mathrm{Cov}(\xi,\eta) \\
&= 0.25\cdot1.41 + 0.25\cdot1 + 2\cdot0.5\cdot0.5\cdot(-0.3) = 0.4525
\end{aligned}
$$

з)

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\pi(\alpha)) &= \operatorname{Var}(\alpha\xi + (1-\alpha)\eta) = \alpha^2 \operatorname{Var}(\xi) + (1-\alpha)^2 \operatorname{Var}(\eta) \\ &+ 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = 1.41\cdot\alpha^2 + 1\cdot(1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\cdot(-0.3) \\ &= 1.41\cdot\alpha^2 + (1-\alpha)^2 - 0.6\cdot(\alpha-\alpha^2) \to \min_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{Var}(\pi(\alpha)) &= 2\cdot 1.41\cdot\alpha - 2(1-\alpha) - 0.6\cdot(1-2\alpha) \\ &= 2.82\cdot\alpha - 2 + 2\alpha - 0.6 + 1.2\cdot\alpha = 6.02\cdot\alpha - 2.6 = 0 \\ \alpha &= \frac{2.6}{6.02} = 0.4319\end{aligned}$$

3. а) Для любой неотрицательной случайной величины X и любого числа $\lambda > 0$ справедлива оценка: $\mathbb{P}(X > \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$

Пусть случайная величина ξ_i означает число посетителей сайта за i-ый день. По условию, $\xi_i \sim Pois(\lambda = 250)$. Известно, что если $\xi \sim Pois(\lambda)$, то $\mathbb{E}(\xi) = \operatorname{Var}(\xi) = \lambda$.

Имеем:

$$\mathbb{P}(\xi_i > 500) \leqslant \mathbb{P}(\xi_i \geqslant 500) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi_i)}{500} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$$

б) Для любой случайной величины X с конечным $\mathbb{E}(X)$ и любого положительного числа $\epsilon > 0$ имеет место неравенство: $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{\epsilon^2}$

Обозначим $\bar{\xi}_n := \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ – среднее число посетителей сайта за n дней. Тогда

$$\mathbb{E}(\bar{\xi}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\lambda = \lambda = 250$$

$$\operatorname{Var}(\bar{\xi}_n) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(\xi_i) = \frac{n\cdot\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n} = \frac{250}{n}$$

Оценим вероятность

$$\mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - 250| > 10) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(\bar{\xi}_n)}{100} = \frac{250}{100\cdot n}$$

Следовательно, $1 - \frac{250}{100\cdot n} \leqslant \mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - 250| \leqslant 10)$.

Найдём наименьшее целое n, при котором левая часть неравенства ограничена снизу $0.99 \leqslant 1 - \frac{250}{100\cdot n}$.

Имеем:

$$0.99 \leqslant 1 - \frac{250}{100\cdot n} \Leftrightarrow \frac{250}{100\cdot n} \leqslant 0.01 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{250}{100\cdot 0.01} \Leftrightarrow n \geqslant 250$$

Значит, $n = 250$ – наименьшее число дней, при котором с вероятностью не менее 99% среднее число посетителей будет отличаться от 250 не более чем на 10.

в) Требуется найти наименьшее целое n, при котором $\mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - 250| \leqslant 10) = 0.99$

Имеем:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - 250| \leqslant 10) = 0.99 \Leftrightarrow \mathbb{P}(-10 \leqslant \bar{\xi}_n - 250 \leqslant 10) = 0.99 \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow \mathbb{P}(-10n \leqslant S_n - 250n \leqslant 10n) = 0.99\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) + \ldots + \mathbb{E}(\xi_n) = 250 \cdot n$$
$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathrm{Var}(\xi_1) + \ldots + \mathrm{Var}(\xi_n) = 250 \cdot n$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{-10n}{\sqrt{250n}} \leqslant \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leqslant \frac{10n}{\sqrt{250n}}\right) = 0.99 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{10n}{\sqrt{250n}}\right) - 1 = 0.99$$
$$\Phi\left(\frac{10n}{\sqrt{250n}}\right) = \frac{1+0.99}{2} \Leftrightarrow \frac{10n}{\sqrt{250n}} = 2.58 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 2.58 \cdot \frac{\sqrt{250}}{10} \Leftrightarrow n = 16.641$$

Следовательно, наименьшее целое n, есть $n = 17$.

г) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин с одинаковыми конечными математическими ожиданимяи и фиксированными конечными дисперсиями. Тогда $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_i)$ при $n \to \infty$.
В нашем случае случаные величины $\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_n^2, \ldots$ – независимы, $\mathbb{E}(\xi_1^2) = \ldots = \mathbb{E}(\xi_n^2) = \ldots < +\infty$ и $\mathrm{Var}(\xi_1^2) = \ldots = \mathrm{Var}(\xi_n^2) = \ldots < +\infty$. Поэтому в соответствии с ЗБЧ имеем:

$$\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\xi_i^2) = \mathrm{Var}(\xi_i) + \mathbb{E}(\xi_i)^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda+1) = 250 \cdot 251 = 62750$$

4. а) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с $0 < \mathrm{Var}(X_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда для любого (борелевского) множества $B \subseteq R$ имеет место $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \in B\right) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$, где $S_n := X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

б) Введём случайную величину

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если на i-ом шаге Винни-Пух пошёл направо} \\ -1, & \text{если пошёл налево} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n;$$

Тогда $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ означает местоположение Винни-Пуха в n-ую минуту его блужданий по прямой.
$\mathbb{E}(X_i) = -1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0$,
$\mathbb{E}(X_i^2) = (-1)^2 \cdot 1/2 + (1)^2 \cdot 1/2 = 1$,
$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = 1$,
$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = 0$,
$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n) = n$

$$\mathbb{P}(S_n \in (-\infty, -5]) = \mathbb{P}(S_n \leqslant -5) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leqslant \frac{-5-0}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\overset{n=60}{=} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leqslant -0.6454\right) \approx \int_{-\infty}^{-0.6454} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$
$$= \Phi(-0.6454) = 1 - \Phi(0.6454) \approx 0.2593$$

в) Для любых $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка:

$$\left|F_{S_n^*}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant 0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|\xi_i - \mathbb{E}\,\xi_i|^3)}{\mathrm{Var}^{3/2}(\xi_i) \cdot \sqrt{n}},$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $\quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$, $\quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

В нашем случае:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{60} - \mathbb{E}(S_{60})}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_{60})}} \leqslant -0.6454\right) = \mathbb{P}(S_{60}^* \leqslant -0.6454) = F_{S_{60}^*}(-0.6454)$$

Согласно неравенству Берри-Эссеена, погрешность $|F_{S_{60}^*}(-0.6454) - \Phi(-0.6454)|$ оценивается сверху величиной

$$0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_i - \mathbb{E}(X_i)|^3)}{\mathrm{Var}(X_i)^{3/2} \cdot \sqrt{n}} = 0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_i|^3)}{1 \cdot \sqrt{60}} = \frac{0.48}{\sqrt{60}} \approx 0.062$$

5. а) Сначала найдём плотность распределения случайной величины X. Пусть $x \leqslant 0$, тогда $f_X(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = 0$.

Пусть $x > 0$, тогда

$$f_X(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{+\infty} 0.005e^{-0.05x-0.1y}dy$$
$$= 0.005e^{-0.05x}\int_0^{+\infty} e^{-0.1y}dy = 0.005e^{-0.05x} \cdot \left(-10e^{-0.1y}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} = 0.05e^{-0.05x}$$

Таким образом, имеем:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.05e^{-0.05x} & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}$$

То есть $X \sim Exp(\lambda = 0.05)$ – случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0.05$.

Теперь найдём плотность распределения случайной величины Y.

Пусть $y \leqslant 0$, тогда $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = 0$.

Пусть $y > 0$, тогда

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^{+\infty} 0.005e^{-0.05x-0.1y}dx$$
$$= 0.005e^{-0.1y}\int_0^{+\infty} e^{-0.05x}dx = 0.005e^{-0.1y} \cdot \left(-20e^{-0.05x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} = 0.1e^{-0.1y}$$

Таким образом, имеем:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1y} & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0 \end{cases}$$

То есть $Y \sim Exp(\lambda = 0.1)$ – случайная величина Y имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0.1$.

б) Поскольку для любых точек $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, случайные величины X и Y являются независимыми.

в) Найдём вероятность $\mathbb{P}(Y > 5)$:

$$\mathbb{P}(Y > 5) = \int_5^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_5^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}dy = 0.1 \cdot (-10e^{-0.1x})\Big|_{y=5}^{y=+\infty} = e^{-0.5} \approx 0.6065$$

г) Требуется найти условную вероятность $\mathbb{P}(Y > 8 \mid Y \geqslant 3)$. Для этого предварительно найдём вероятности $\mathbb{P}(Y > 8)$ и $\mathbb{P}(y \geqslant 3)$:

$$\mathbb{P}(Y > 8) = \int_8^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_8^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}dy = 0.1 \cdot (-10e^{-0.1x})\Big|_{y=8}^{y=+\infty} = e^{-0.8}$$

$$\mathbb{P}(Y \geqslant 3) = \int_3^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_3^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}dy = 0.1 \cdot (-10e^{-0.1x})\Big|_{y=3}^{y=+\infty} = e^{-0.3}$$

Теперь находим требуемую условную веростность:

$$\mathbb{P}(Y > 8 \mid Y \geqslant 3) = \frac{\mathbb{P}(Y > 8 \cap Y \geqslant 3)}{\mathbb{P}(Y \geqslant 3)} = \frac{\mathbb{P}(Y > 8)}{\mathbb{P}(Y \geqslant 3)} = \frac{e^{-0.8}}{e^{-0.3}} = e^{-0.5} \approx 0.6065$$

д) Сначала найдём условную плотность распределения случайной величины X при условии $Y = y$:

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x \mid y) &= \begin{cases} \frac{f_{X|Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{при } f_Y(y) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{0.005e^{-0.05x-0.1y}}{0.1e^{-0.1y}} & \text{при } x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0.05e^{-0.05x} & \text{при } x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\
&= \begin{cases} f_X(x) & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Теперь находим условное математическое ожидание

$$\mathbb{E}(X \mid Y = 5) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid 5)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{0.05} = 20$$

Здесь мы воспользовались известным фактом, что если $X \sim Exp(\lambda)$, то $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

е) Требуется найти вероятность $\mathbb{P}(X - Y > 2)$. Для этого введём множества $B := \{(x,y) \in \mathbb{R} : y < x - 2\}$ и $C := \{(x,y) \in \mathbb{R} : y < x - 2, x > 0, y > 0\}$.
Заметим, что искомая вероятность $\mathbb{P}(X - Y > 2)$ может быть записана в виде

$$\mathbb{P}(X - Y > 2) = \mathbb{P}((X,Y) \in B) = \int\int_B f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\int_C f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

Стало быть, искомая вероятность

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X-Y>2) &= \int\int_C f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_2^{+\infty}\left[\int_0^{x-2} f_{X,Y}(x,y)dy\right]dx \\
&= \int_2^{+\infty}\left[\int_0^{x-2} 0.005e^{-0.05x-0.1y}dy\right]dx \\
&= \int_2^{+\infty}\left[0.005e^{-0.05x}\cdot\left(-10e^{-0.1y}\right)\Big|_{y=0}^{y=x-2}\right]dx \\
&= \int_2^{+\infty}\left[0.005e^{-0.05x}\cdot\left(1-e^{-0.1(x-2)}\right)\right]dx = \int_2^{+\infty} 0.005e^{-0.05x}dx \\
&- \int_2^{+\infty} 0.005e^{-0.05x-0.1x+0.2}dx = 0.05\cdot\left(-\frac{1}{0.05}e^{-0.05x}\right)\Bigg|_{x=2}^{x=+\infty} \\
&- e^{0.02}\cdot 0.05\cdot\left(\frac{1}{0.15}e^{-0.15x}\right)\Bigg|_{x=2}^{x=+\infty} = e^{-0.1}-\frac{1}{3}e^{-0.1} = \frac{2}{3}e^{-0.1} \approx 0.6032
\end{aligned}
$$

6. Для решения задачи воспользуемся хорошо известными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1 \\
&\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \mu \\
&\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \mu^2+\sigma^2
\end{aligned}
$$

а) Указанная в задании функция f_X является плотностью распределения, так как она удовлетворяет двум условиям: f_X является неотрицательной и интеграл от функции f_X в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx + \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}dx = 1
$$

б) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx + \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}dx = 1-1=0$

в)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}dx + \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{2}(1^2+1^2+(-1)^2+1^2) = 2
\end{aligned}
$$

г) $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2-0^2 = 2$

13.3. 2015-2016

1. а) $\mathbb{E}(\xi_1\cdot\xi_2) = \int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot x^2y + \frac{3}{2}\cdot xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{y}{6}+\frac{3y^2}{4}\,dy = \frac{1}{3}$

   б) $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \frac{f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)} = \frac{0.5x+1.5y}{0.25+1.5y}$, при $y\in(0,1)$

в)

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y) = \int_0^1 x f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) dx = \int\limits_0^1 x \frac{0.5x + 1,5y}{0.25 + 1.5y} dx$$
$$= \frac{1}{0.25 + 1,5y} \left(\frac{0.5x^3}{3} + \frac{1.5yx^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1/6 + 3/4y}{0.25 + 1.5y}$$

г) Для того, чтобы функция являлась совместной плотностью для пары случайных величин, должно выполнятся следующее:

$$\int_\Omega kxf(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Вычислим, чему равняется левая часть:

$$1 = \int_\Omega kxf(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 kx \left(\frac{x + 3y}{2} \right) dx\, dy = \int_0^1 \frac{k}{6} + \frac{3ky}{4}\, dy = \frac{k}{6} + \frac{3k}{8} \Rightarrow$$
$$k = \frac{24}{13}$$

2. Заметим, что $\xi + \eta = 10$, тогда $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = \operatorname{Cov}(\xi, 10 - \xi) = -\operatorname{Var}(\xi)$.

   Представим случайную величину ξ в виде суммы случайных величин $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_{10}$, где

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если у студента есть хотя бы один незачёт}, p = 0.2 \\ 0, & \text{иначе}, p = 0.8 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 10$$

   Поскольку результаты каждого из стуентов независимы, $\operatorname{Var}(\xi) = 10 \operatorname{Var}(\xi_1)$

$$\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = -10(1^2 \cdot 0.2 - \big(1 \cdot 0.2)^2\big) = -1.6$$

   Так как случайные величины ξ и η связаны соотношением $\xi = 10 - \eta$, $\operatorname{Corr}(\xi, \eta) = -1$.

   Подставив в $\operatorname{Cov}(\xi - \eta, \xi)$ выражение $\eta = 10 - \xi$, получим:

$$\operatorname{Cov}(\xi - \eta, \xi) = 2 \operatorname{Cov}(\xi, \xi) = 2 \cdot 0.16 = 0.32$$

   Случайные величины $\xi - \eta$ и ξ не являются независиыми.

3. Найдем ожидаемую доходность и риск портфеля $R = \alpha\xi + (1 - \alpha)\eta$ для любого α, тогда при $\alpha = 1$ получим результаты Пети, при $\alpha = 0.5$ — результаты Васи.

$$\mathbb{E}\, R = \alpha + (1 - \alpha) = 1\ \forall\ \alpha \in [0, 1]$$

   Находим дисперсию:

$$\operatorname{Var}(R) = \alpha^2 \cdot 4 + (1 - \alpha)^2 \cdot 9 - 6\alpha(1 - \alpha) = 19\alpha^2 - 24\alpha + 9 \to \min_\alpha$$

   Теперь, найдем оптимальное α:

$$\alpha = \frac{24}{38}$$

   Финальные цифры:

$$\begin{cases} \operatorname{Var}(R)^P = 4 \Rightarrow \sigma_P = 2 \\ \operatorname{Var}(R)^V = 1.75 \Rightarrow \sigma_V \approx 1.32 \\ \operatorname{Var}(R)^M = \frac{27}{19} \Rightarrow \sigma_M \approx 1.19 \end{cases}$$

4. а) Пусть S количество мальчиков, тогда используя неравенство Маркова получаем:

$$\mathbb{P}(S \geqslant 750) \leqslant \frac{\mathbb{E}(S)}{750} = \frac{2}{3}$$

б) Пусть, теперь, $\bar{X}$ доля мальчиков, то есть, $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, где

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый ребёнок — мальчик} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

тогда используя неравенство Чебышева получаем:

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 0.5| \geqslant 0.25) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(\bar{X})}{0.25^2} = \frac{1/4000}{0.25^2} = 0.004$$

в) Вероятность из предыдущего пункта можно записать в таком виде:

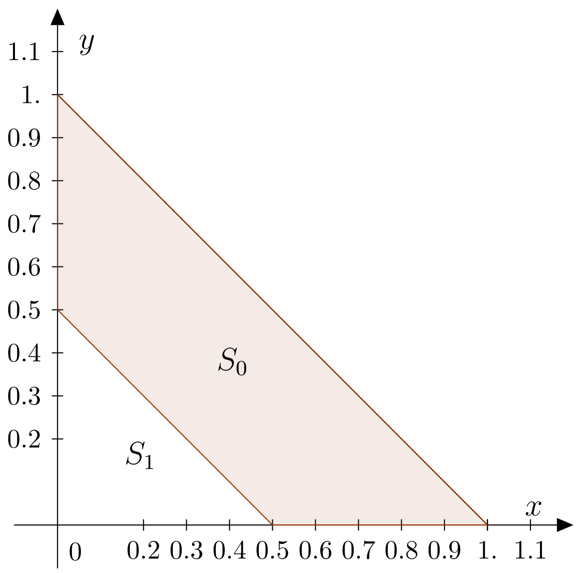
$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 0.5| \geqslant 0.25) = \mathbb{P}(\bar{X} \geqslant 0.75) + \mathbb{P}(\bar{X} \leqslant 0.25) = 2\,\mathbb{P}(\bar{X} \geqslant 0.75) =$$
$$= 2\,\mathbb{P}(\mathcal{N}(0;1) \geqslant 0.25\sqrt{4000}) = 2\,\mathbb{P}(\mathcal{N}(0;1) \geqslant 15.8) = 1.3 \cdot 10^{-56} \approx 0$$

5. Пусть случайная величина S — это валютный курс через полгода. Заметим, что $S = 100+\delta_1+\ldots+\delta_{171}$. Тогда по ЦПТ $S \sim \mathcal{N}(142.75, 203.0625)$. Теперь можно искать нужную вероятность:

$$\mathbb{P}(S > 250) = \mathbb{P}\left(\frac{S - 142.75}{\sqrt{203.0625}} > \frac{250 - 142.75}{\sqrt{203.0625}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 7.6) \approx 0$$

13.4. 2014-2015

1. а) Так как (X, Y) имеют совместное равномерное распределение, $\mathbb{P}\{X + Y > 1/2\}$ можно рассчитать как отношение соответствующих площадей:



Соответственно:

$$\mathbb{P}\left(X + Y > \frac{1}{2}\right) = \frac{S_0}{S_0 + S_1} = \frac{0.5 - S_1}{0.5} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

б)

$$f_Y(y) = \int\limits_0^{1-y} f_{XY}(x,y)dx$$

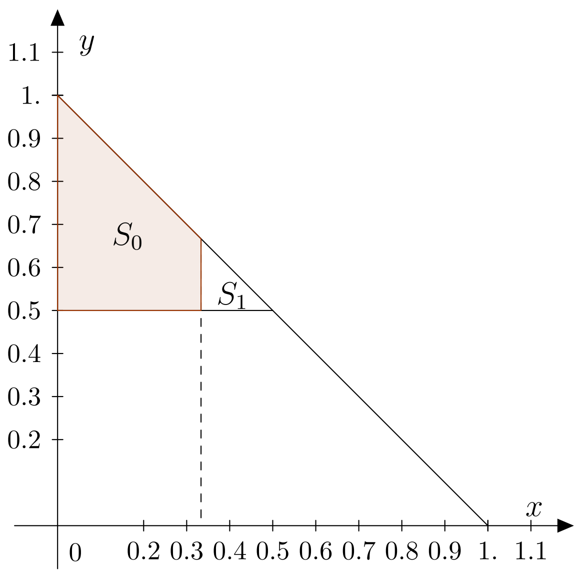
Поэтому, нам сначала нужно найти $f_{XY}(x,y)$, которая для равномерного распределения должна быть константой. Это можно сделать из условия:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} f_{XY}(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} Cdxdy = 1 \Rightarrow$$
$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} Cdxdy = \int\limits_0^1 C(1-x)dx = \left(Cx - C\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{C}{2} = 1$$

Откуда имеем $f_{XY}(x,y) = C = 2$. Теперь можем найти плотность распределения расходов Васи:

$$f_Y(y) = \int\limits_0^{1-y} 2dx = 2(1-y)$$

в) В данном случае площади немного другие, но смысл тот же:



$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{3} \middle| Y > \frac{1}{2}\right) = \frac{S_0}{S_0 + S_1} = \frac{\frac{1}{8} - S_1}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{72}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

г) При $Y = 1/2$, X распределен равномерно от 0 до $1/2$, поэтому его плотность равна

$$f_X(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} = 2$$

Соответственно, условное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\left(X|Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

д) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$, а маргинальную функцию плотности для X мы можем найти так же, как искали для Y, и получим $f_X(x) = 2(1-x)$. Отсюда:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x(1-x)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

е) Если вспомнить формулу для корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

то станет более-менее очевидно, что надо найти $\mathbb{E}(XY)$ и дисперсии X и Y.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1\int_0^{1-x} 2xydxdy = \int_0^1 2xdx\int_0^{1-x} ydy = \int_0^1 x(x^2-2x+1)dx =$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Соответственно:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$$

Найдем теперь дисперсии X и Y (они будут одинаковыми, как и математические ождания, в силу симметрии):

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_0^1 2x^2(1-x)dx = \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{x_4}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Поэтому:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

Теперь наконец-то можем найти корреляцию:

$$\rho_{XY} = -\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}} = -\frac{1}{2}$$

2. а) Закон больших чисел гласит, что $\bar{X} \to \mathbb{E}(X)$ при $n \to \infty$. Проверим его выполнение в данном случае:

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2n}(-\sqrt{n}) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot 0 + \frac{1}{2n}\sqrt{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\bar{X} = \lim_{n\to\infty}\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = 0$$

так как числитель ограничен, а знаменатель бесконечно возрастает. Видим, что ЗБЧ в данном случае, конечно, выполняется.

Как вариант, можно было сказать, что дисперсия ограничена, и из этого также следует выполнение ЗБЧ.

б) Неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Соответственно, искомую вероятность можем оценить следующим образом:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}| \leqslant 1) = 1-\mathbb{P}(|\bar{X}| \geqslant 1) \Rightarrow \mathbb{P}(|\bar{X}| \leqslant 1) \geqslant 1-\frac{\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)}{1}$$

$$\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var} X_i$$

В свою очередь:

$$\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = 2\cdot\frac{1}{2n}\cdot n + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 0 = 1 \Rightarrow \operatorname{Var}(X_i) = 1 \Rightarrow \operatorname{Var}\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n}$$

Поэтому:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}| \leqslant 1) \geqslant 1-\frac{1}{n}$$

в)

$$1-\frac{1}{n} = 0.9 \Rightarrow n = 10$$

3. Обозначим за R — необходимое количество наличных денег в банке. Пусть X — случайная величина, показывающее размер суммарной выплаты 60 (n — достаточное большое для применения ЦПТ) клиентам. Ясно, что т.к. выплаты отдельным клиентам независимы: $\mathbb{E}\, X = 60\cdot 5000 = 3\cdot 10^5$; $\operatorname{Var} X = 60\cdot 2000^2 = 2.4\cdot 10^8$; $\sigma_X = \sqrt{2.4}\cdot 10^4 \approx 1.55\cdot 10^4$

   Теперь по ЦПТ:

$$\mathbb{P}(R \geqslant X) = 0.95$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{X-\mathbb{E}\, X}{\sigma_X} \leqslant \frac{R-\mathbb{E}\, X}{\sigma_X}\right) = 0.95$$
$$\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{R-3\cdot 10^5}{1.55\cdot 10^4}\right) = 0.95$$

   Слева функция распределения; подставляя 95-% квантиль стандартного нормального распределения, получаем:

$$\frac{R-3\cdot 10^5}{1.55\cdot 10^4} = 1.64 \Rightarrow R = 325420$$

4. а) По предельной теореме Муавра-Лапласа:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{p}-p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leqslant \frac{0.1}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|Z| \leqslant \frac{0.1}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \geqslant 0.99$$

Из симметричности стандартного нормального распределения и зная его 99.5-% квантиль, равный приблизительно 2.58, получаем:

$$\frac{0.1}{\sqrt{p(1-p)/n}} \geqslant 2.58$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geqslant \frac{2.58}{0.1}$$

$$\sqrt{n} \geqslant \frac{2.58}{0.1}\sqrt{p(1-p)}$$

$$n \geqslant 665.64 \cdot p(1-p)$$

С помощью неравенства Чебышева:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p}-p| \leqslant 0.1\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p}-p| \geqslant 0.1\right) \leqslant 0.01$$

Теперь просто смотрим на неравенство Чебышева и на строчку выше, на неравенство Чебышева и на строчку выше...

$$\frac{p(1-p)/n}{0.1^2} = 0.01$$

$$n = 10^4 p(1-p)$$

Принимаются оба ответа!

б) По предельной теореме Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{p}-p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)/1000}}\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|Z| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)/1000}}\right) \geqslant 0.99$$

Аналогично пункту 1:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)/1000}} \geqslant 2.58$$

$$\varepsilon \geqslant 0.082\sqrt{p(1-p)}$$

С помощью неравенства Чебышева:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p}-p| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p}-p| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 0.01$$

Аналогично пункту 1:

$$\frac{p(1-p)/1000}{\varepsilon^2} = 0.01$$

$$\varepsilon^2 = \frac{p(1-p)}{10}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{p(1-p)}{10}} \approx 0.316\sqrt{p(1-p)}$$

Нужно было показать, как мастерство владения теоремой Муавра-Лапласа, так и неравенством Чебышева.

13.5. 2013-2014

1. а)

$$\mathbb{P}(Y < X^2) = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y)dydx = \int_0^1 \left(xy\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\Big|_0^1 = 0.35$$

б) $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + 0.5$

$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 f_X(x)\cdot xdx = \int_0^1 (x^2+0.5x)dx = 7/12$

в) $f_{X|Y=2}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,2)}{f_Y(2)} = \frac{x+2}{2.5}$

2. а) Из условия находим, что $X \sim \mathcal{N}(0,9)$, тогда

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-0}{3} > \frac{1-0}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > \frac{1}{3}\right) = 0.37$$

б) Подготовимся: $\mathbb{E}(2X+Y) = 0$, $\operatorname{Var}(2X+Y) = 4\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 4\operatorname{Cov}(X,Y) = 36$

$$\mathbb{P}(2X+Y > 3) = \mathbb{P}\left(\frac{2X+Y-0}{6} > \frac{3-0}{6}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 0.5) = 0.31$$

в) $\mathbb{P}(2X+Y > 3|X=1) = \mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-0}{2} > \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 0.5) = 0.31$

г) Заметим, что $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} \sim \chi^2_2$, и тогда по таблице находим, что $\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} > 12\right) = 0.0025$

д) Совместная функция плотности имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\sqrt{1-(-\frac{1}{6})^2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot 9}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^2\right)(9x^2+2xy+4y^2)\right)$$

3. а) Заметим, что $\frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3}}} \sim t_3$. По таблице находим искомую вероятность: 0.15.

б)

в) Заметим, что $\frac{X_1^2}{X_2^2+X_3^2} \sim F_{1,2}$. Нужное значение находим в таблице: 0.95.

4. а) По неравенству Чебышёва: $\mathbb{P}(|X_i - 0.5| \geqslant 0.3) \leqslant \frac{1/12}{9/100} = \frac{25}{27}$

б) По неравенству Маркова: $\mathbb{P}(X_i \geqslant 0.8) \leqslant \frac{5}{8}$

в) $\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{36\cdot 12}$, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\frac{1}{2}, \frac{1}{36\cdot 12})$

$\mathbb{P}(\bar{X} > 0.8) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{36\cdot 12}}} \geqslant \frac{0.8-0.5}{\frac{1}{36\cdot 12}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geqslant 6.235) \approx 0$

г) $\mathbb{P}(|X_i - 0.5| \geqslant 0.3) = 1 - \mathbb{P}(|X_i - 0.5| \geqslant 0.3) = 1 - \mathbb{P}(-0.3 \leqslant X_i - 0.5 \leqslant 0.3) = 0.4$

д) Нужно воспользоваться неравенством Берри-Ессеена.

$$\mathbb{E}(|X_1 - 0.5|^3) = \int_0^1 |x_1 - 0.5|^3 \cdot 1dx = 2\int_{0.5}^1 (x_1 - 0.5)^3 dx = \frac{1}{2^5}$$

е) $\mathbb{P}(\bar{X} - 0.5 > 0.3) = \frac{25}{27n} \to_{n\to\infty} 0$

5. $\mathbb{P}(\hat{p} \leqslant 0.25) = \mathbb{P}\left(\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{n}}} \leqslant \frac{0.25}{\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{n}}}\right) = 0.99$

   По таблице: $\frac{0.25}{\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{n}}} = 2.33 \Rightarrow n = 348$

6. а) $3, 4, 5, 7, 8, 9$

   б) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ 1/6 & 3 < x \leqslant 4 \\ 2/6 & 4 < x \leqslant 5 \\ 3/6 & 5 < x \leqslant 7 \\ 4/6 & 7 < x \leqslant 8 \\ 5/6 & 8 < x \leqslant 9 \\ 1 & x > 9 \end{cases}$

   в) $\bar{X} = 6, \widehat{\mathrm{Var}}(X) = 28$

13.6. 2012-2013

1. $f(s,t) = f(s) \cdot f(t|s) = \frac{1}{3s}$ при $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 3$. Бонус тем, кто прочитал условие, $\mathbb{P}(S > T) = 1$.

$$\mathbb{E}\left(T^2\right) = \int_0^3 \int_0^s \frac{t^2}{3s}\, dt\, ds = 1$$

2. а) $\mathbb{P}(X > 0.5) = \mathbb{P}(Z > 0.13) \approx 0.45$, $\sigma_X \approx 0.38$

   б) $\mathbb{P}(X + Y > 0.5) = \mathbb{P}(Z > -0.65) \approx 0.74$, $\sigma_{X+Y} \approx 0.17$, $\mathbb{E}(X + Y) = 0.61$

   в) $X = 0.25$ при нормировке даёт $\tilde{X} = -0.53$. Получаем:

$$\mathbb{E}\left(\tilde{Y} \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.47$$
$$\mathrm{Var}\left(\tilde{Y} \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.19$$

   Значит $\mathbb{E}\left(Y \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.34$, $\mathrm{Var}\left(Y \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.027$.

   г) $\mathbb{P}\left(Y > 1/3 \mid \tilde{X} = -0.53\right) = \mathbb{P}(Z > -0.04) = 0.52$

   д) Ноль

3. $\mathbb{E}(\hat{p}) = 0.5$, $\mathrm{Var}(\hat{p}) = 0.25/n = 1/16000$. По Чебышёву:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - 0.5| \leqslant 0.01) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{Var}(\hat{p})}{0.01^2} = \ldots = 0.375$$

   Используя нормальную аппроксимацию:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - 0.5| \leqslant 0.01) = \mathbb{P}(|Z| \leqslant 1.26) \approx 0.79$$

4. Обозначим N — количество подключенных абонентов, тогда $N \sim Bin(n, 0.3)$. При больших n биномиальное распределение можно заменить на нормальное, $N \sim \mathcal{N}(0.3n, 0.21n)$.

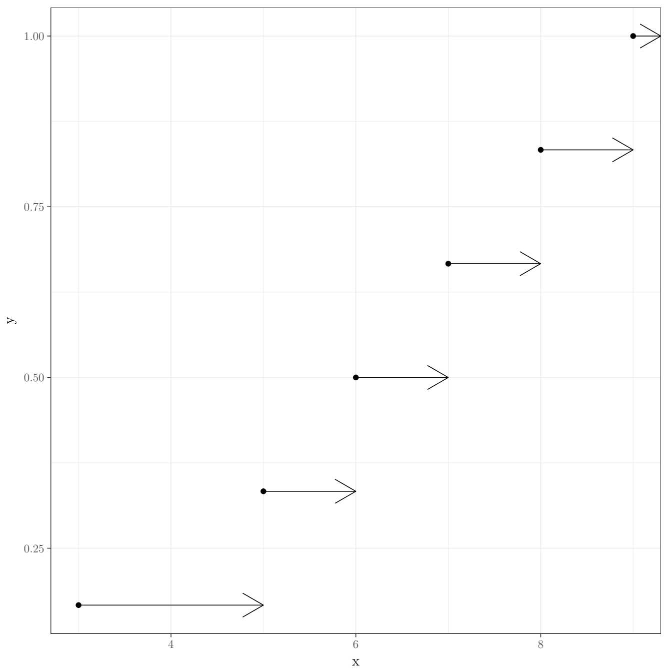
$$\mathbb{P}(120N > 1\,080\,000) = \mathbb{P}(N > 9000) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{9000 - 0.3n}{\sqrt{0.21n}}\right) = 0.99$$

Из таблицы находим, что

$$\frac{9000 - 0.3n}{\sqrt{0.21n}} = -2.33$$

Решаем квадратное уравнение, находим корни, один — отрицательный, другой, $n \approx 30622$.

5. Вариационный ряд: 3, 5, 6, 7, 8, 9. $\bar{X} \approx 6.3$, $\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \approx 4.7$, $\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n} \approx 3.9$



14. Решения контрольной номер 3

14.1. 2017-2018

5. а) $L(X_1, \ldots, X_n, \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}$

   б) $\hat{\mu}_{ML} = \bar{X}$

   в) $\mathbb{E}(\hat{\mu}_{ML}) = \mathbb{E}(\bar{X}) = \mu \Rightarrow$ оценка несмещённая
   $\operatorname{plim} \hat{\mu}_{ML} = \operatorname{plim} \bar{X} = \mu \Rightarrow$ оценка состоятельная

   г) $I(\mu) = n$

   д) $\operatorname{Var}(\theta) \geqslant \frac{1}{I(\theta)}$

   е) $\operatorname{Var}(\hat{\mu}_{ML}) = \frac{1}{n}$, так как неравенство Рао-Крамера выполнено как равенство, оценка является эффективной.

   ж) $\theta = \mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) + \mu^2 = 1 + \mu^2$. Тогда в силу инвариантности оценок максимального правдоподобия: $\hat{\theta}_{ML} = 1 + \hat{\mu}^2$.

з) $\mathbb{E}(\hat{\theta}_{ML}) = 1 + \mathbb{E}(\hat{\mu}^2) = 1 + \mathbb{E}((\bar{X})^2)$
Пользуясь соотношением $\mathbb{E}((\bar{X})^2) = \operatorname{Var}(\bar{X}) + (\mathbb{E}(\bar{X}))^2$, получим: $\mathbb{E}(\hat{\theta}_{ML}) = 1 + \frac{1}{n} + \mu^2$, то есть оценка смещена.
Однако, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n} + \mu^2\right) = 1 + \mu^2$, значит, оценка асимптотически несмещена.

и) $\hat{\theta}_{ML} \approx 1 + \mu^2 + 2\mu(\hat{\mu} - \mu)$
$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{ML}) \approx 4\mu^2 \operatorname{Var}(\hat{\mu}) = \frac{4\mu^2}{n}$

к) Так как $\hat{\theta}_{ML}$ асимптотически несмещена, то для проверки состоятельности достаточно показать, что $\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{4\mu^2}{n} \to_{n\to\infty} 0$.

6. а) $\mathbb{E}(X_1) = \int_0^\theta \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)x dx = \frac{\theta}{3}$
$\frac{\hat{\theta}_{MM}}{3} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = 3\bar{X}$

б) Оценка $\hat{\theta}$ состоятельна. если $\operatorname{plim}\hat{\theta}_n = \theta$.
$\operatorname{plim}\hat{\theta}_{MM} = \operatorname{plim} 3\bar{X} = 3\,\mathbb{E}(X_1) = \theta \Rightarrow$ оценка состоятельна.

7. а) $\mathbb{E}\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3\,\mathbb{E}(X_1) = 132.5$
$\operatorname{Var}\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = \frac{1}{9}\operatorname{Var}(X_1+X_2+X_3) = \frac{1}{9}(\operatorname{Var}(X_1)+\operatorname{Var}(X_2)+\operatorname{Var}(X_3)+2\operatorname{Cov}(X_1,X_2)+ 2\operatorname{Cov}(X_1,X_3) + 2\operatorname{Cov}(X_2,X_3)) = \frac{1}{9}(3\operatorname{Var}(X_1) + 6\operatorname{Cov}(X_1,X_2))$
$\operatorname{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{1}{4}\cdot 30^2 - \frac{1}{4}\cdot 500^2 - 132.5^2 = 45168.75$
$\operatorname{Cov}(X_1, X_1 + \ldots + X_4 = \operatorname{Var}(X_1) + 3\operatorname{Cov}(X_1,X_2) = 0 \Rightarrow \operatorname{Cov}(X_1,X_2) = -\frac{45168.75}{3} = -15056.25$
$\operatorname{Var}\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = 5018.75$

б) $3/4$

8. $\Delta_i = X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \sigma^2)$
$\bar{X} = 297.5$, $\bar{Y} = 247.5$, $\bar{\Delta} = \bar{X} - \bar{Y} = 50$
$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(\Delta_i - \bar{\Delta})^2 = 18266.(6)$.
Критическое значение — $t_{0.975,3} = 3.182$ и доверительный интервал имеет вид:

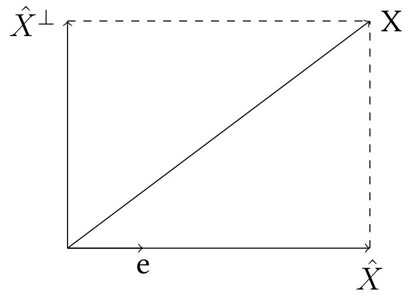
$$50 - 3.182\sqrt{\frac{18266.(6)}{3}} < \mu_x - \mu_y < 50 + 3.182\sqrt{\frac{18266.(6)}{3}}$$

Так как 0 входит в доверительный интервал, нельзя отвергнуть предположение о равенстве расхожов.

9. а) $0.7 - 1.96\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{60}} < p < 0.7 + 1.96\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{60}}$

б) Да, так как 0.7667 входит в доверительный интервал.

в) $\mathbb{P}(|p - \hat{p}| \leqslant 0.01) = 0.95$
$\mathbb{P}\left(\frac{|0.7-p|}{\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{n}}} < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{n}}}\right) = 0.95$
$\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{n}}} = 1.96 \Rightarrow n \approx 8068$



15. Решения контрольной номер 3. ИП

15.1. 2017-2018

1а) - в) См. картинку :)

г) $\hat{X} = e \cdot \bar{X}$

$\|\hat{X}\| = \sqrt{n} \cdot \bar{X}$

$\hat{X}^{\perp} = X - e \cdot \bar{X} = (X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$

$\|\hat{X}^{\perp}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$

д) $\|X\|^2 = \|\hat{X}^{\perp}\|^2 + \|\hat{X}\|^2$

$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n\bar{X}^2$

е) t-статистика для построения доверительного интервала для μ имеет вид:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\bar{\sigma}^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n \cdot (n-1))}}$$
$$= \sqrt{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}} = \sqrt{n-1} \cdot \frac{\|\hat{X}\| - \sqrt{n} \cdot \mu}{\|\hat{X}^{\perp}\|}$$

Заметим, что $\operatorname{ctg}\alpha$ есть отношение прилежащего катета к противолежащему, таким образом, нужный нам угол α образуется между векторами X и $\hat{X}$. Зметим однако, что в нашем случае

$$t = \sqrt{n-1} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\|\hat{X}\|}{\|\hat{X}^{\perp}\|},$$

то есть наша статистика подойдёт только для проверки гипотезе о равенстве матожидания нулю.

Замечание. $t = \sqrt{n-1} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ будет t-статистикой только в том случае, если X_i будут н.о.р.с.в. с нормальным распределением, о чём в условие сказано не было.

2. Выпишем функцию правдоподобия для выборки из трёх видов, два из которых совпадают. Первый медведепришелец будет нового вида с вероятностью 1. Вероятность, что вид второго пойманного медведепришельца совпадёт с первмым, составляет $1/n$. После этого нужно поймать медведепришельца нового вида – это произойдёт с вероятностью $(n-1)/n$, и ещё одного нового вида – вероятность этого $(n-2)/n$. Поскольку медведепришелец, вид которого встречается дважды, мог встретить на любой из трёх позиций, функцию правдоподобия необходимо домножить на C_3^1. Таким образом, функция правдоподобия имеет вид:

$$L(n) = C_3^1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n}, n \geqslant 3.$$

Максимизируя её, внутри области определения получаем $\hat{n} = 5$.

Так как количество медведей велико и все они встречаются равновероятно, то $p_1 = p_2 = p_3 = 1/n$. Так же из выборки известно, что число видов космомедведей не меньше трёх. Потому $\hat{n} \geqslant 3$.

Найдите хитрую ошибку в предложенном решении:

$L(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = n^{-4}$

$\frac{\partial L(n)}{\partial n} = -4 \cdot n^{-5} = 0$

Данное уравнение не имеет решений при конечных n, но заметим, что при всех $n \geqslant 3$ выполняется $\frac{\partial L(n)}{\partial n} = -4 \cdot n^{-5} < 0$, таким образом максимальное значение находится в граничных точках.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-4}} = 0 < \frac{1}{3^{-4}}$

Таким образом получаем, что $\hat{n} = 3$.

3. а) $L(p_1, p_2) = p_1^{150} \cdot p_2^{100} \cdot (1 - p_1 - p_2)^{50}$

$\ell(p_1, p_2) = 150 \ln p_1 + 100 \ln p_2 + 50 \ln(1 - p_1 - p_2)$

$\begin{cases} \frac{\partial \ell(p_1,p_2)}{\partial p_1} = \frac{150}{p_1} - \frac{50}{1-p_1-p_2} = 0 \\ \frac{\partial \ell(p_1,p_2)}{\partial p_2} = \frac{100}{p_2} - \frac{50}{1-p_1-p_2} = 0 \end{cases}$

Откуда получаем:

$\begin{cases} \hat{p}_1 = 1/2 \\ \hat{p}_2 = 1/3 \end{cases}$

б) Найдём, какие значения должны стоять в теоретической ковариационной матрице. Заметим, что случайная величина найти кальмаромедведя (X) или двурога (Y) есть бернулевская случайная величина с параметром $p_{1+2} = p_1 + p_2$ и дисперсией $p_{1+2} \cdot (1 - p_{1+2})$, но тогда:

$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Var}(X + Y) - \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)) = \frac{1}{2} \cdot ((p_1 + p_2) \cdot (1 - p_1 - p_2) - p_1 \cdot (1 - p_1) - p_2 \cdot (1 - p_2)) = -p_1 \cdot p_2$

Тогда подставляя в теоретическую ковариационную матрицу оценки параметров и домнажая всё на $1/300$, так как $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ являются средними, получим:

$$\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) & -\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 \\ -\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 & \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{300} \begin{pmatrix} 1/4 & -1/6 \\ -1/6 & 2/9 \end{pmatrix}$$

в) Для начала, найдём теоретическую дисперсию $\mathrm{Var}(X - Y)$.

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y) = p_1 \cdot (1 - p_1) + p_2 \cdot (1 - p_2) + 2 \cdot p_1 \cdot p_2$$

Тогда подставляя оценки для p_1 и p_2 и учитывая, что это оценки среднего, получим оценку:

$$\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 1/300 \cdot (1/4 + 2/9 + 2 \cdot 1/6) = 29/(36 \cdot 300)$$

г) Так как выборка достаточно велика, то статистика $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, являясь средним, будет иметь примерно нормальное распределение, и тогда:

$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} \leqslant p_1 - p_2 \leqslant \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}$

4. а) $\hat{\alpha} = \bar{X} + \sqrt{\bar{X}+6} = 10 + \sqrt{10+6} = 14$

б) Так как $\bar{X}$ сходится по распределению к нормальному распределению и $\hat{\alpha} = g(\bar{X})$, где $g(\bar{X})$ гладкая по $\bar{X}$ функция при $\bar{X} \geqslant 0$, а также $\bar{X}$ сходится по вероятности к матожиданию, то можно абсолютно спокойно применить дельта-метод. Тогда:

$$(\alpha - g(\bar{X})) \sim N(0; \sigma^2(g'(\mathbb{E}(X_1)))^2/n)$$

Но так как $\hat{\alpha}$ является состоятельной оценкой, то можно заменить $g'(\mathbb{E}(X_1))$ на $g'(\bar{X})$:

$$g'(\bar{X}) = 1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{X}+6}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{9}{8} = 1.125$$

и тогда можно построить ассимтотический доверительный интервал:

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha} - z_{97.5\%} \cdot \sqrt{\sigma^2 \cdot (g'(\bar{X}))^2/n} \leqslant &\alpha \leqslant \hat{\alpha} - z_{2.5\%} \cdot \sqrt{\sigma^2 \cdot (g'(\bar{X}))^2/n} \\
16 - 1.96 \cdot 2 \cdot 9/(8 \cdot 10) \leqslant &\alpha \leqslant 16 + 1.96 \cdot 2 \cdot 9/(8 \cdot 10) \\
13.559 \leqslant &\alpha \leqslant 14.441
\end{aligned}$$

5. а) Так как не известно точно, кто сколько фотографий сделал, и так как метод оценки не указан, то воспользуемся методом моментов для построения оценки.

$$\begin{aligned}
N &= \mathbb{E}(\text{«фото Андрея»}) + \mathbb{E}(\text{«фото Беллы»}) \\
130 &= 100 \cdot 0.5 + p \cdot 100 \\
\hat{p} &= 0.8
\end{aligned}$$

Так как выборка достаточно велика, то $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})/W}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
\hat{p} - z_{97.5\%}\sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})/W} \leqslant &p \leqslant \hat{p} - z_{2.5\%}\sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})/W} \\
0.8 - 1.96 \cdot \sqrt{0.8 \cdot 0.2/100} \leqslant &p \leqslant 0.8 + 1.96 \cdot \sqrt{0.8 \cdot 0.2/100} \\
0.72 \leqslant &p \leqslant 0.88
\end{aligned}$$

б) Так как неизвестно, кто больше снимков сделал, то рассмотрим два случая: Андрей сделал 60 фото и Белла — 70 фото, Андрей сделал 70 фото и Белла — 60 фото. В каждом случае при помощи метода максимального правдоподобия оценим вероятность p, после чего сравним значения функции правдоподобия с оценёнными параметрами для каждого случая.

$$\begin{aligned}
L(p) &= C_{100}^{60} \cdot 0.5^{60} \cdot 0.5^{40} \cdot C_{100}^{70} \cdot p^{70} \cdot (1-p)^{30} \\
\ell(p) &= const + 70 \ln p + 30 \ln(1-p) \\
\frac{\partial \ell(p)}{\partial p} &= \frac{70}{p} - \frac{30}{1-p} = 0 \\
\hat{p}_1 &= 0.7
\end{aligned}$$

Аналогично для второго случая получим оценку: $\hat{p}_2 = 0.6$.

Для простоты, будем сравнивать логарифмически функции правдоподобия $\ell_1(p_1)$ и $\ell_2(p_2)$ и тогда получим:

$$\ell_1(p_1) = const + 70\ln 0.7 + 30\ln 0.3 \approx const - 70\cdot 0.357 - 30\cdot 1.204 = const - 61.11$$
$$\ell_2(p_2) = const + 60\ln 0.6 + 40\ln 0.4 \approx const - 60\cdot 0.511 - 40\cdot 0.916 = const - 67.3$$

Так как $-67.3 < -61.11$, то более вероятно, что $\hat{p} = 0.7$

Тогда анологично предыдущему пункту получим доверительный интервал:

$$0.7 - 1.96\cdot\sqrt{0.7\cdot 0.3/100} \leqslant p \leqslant 0.7 + 1.96\cdot\sqrt{0.7\cdot 0.3/100}$$
$$0.61 \leqslant p \leqslant 0.79$$

16. Решения контрольной номер 4

16.1. 2017-2018

1. Проверяем следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 100 \\ H_a : \mu_D > 100 \end{cases}$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$t_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n_D}}} = \frac{136 - 100}{\frac{55}{\sqrt{40}}} \approx 4.14$$

При верной H_0 t-статистика имеет распределение t_{40-1}, значит, $t_{crit} \approx 1.68$. Поскольку $t_{crit} > t_{obs}$, основная гипотеза отвергается, $p - value \approx 0$.

2. Проверяем следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2_D = \sigma^2_T \\ H_a : \sigma^2_D \neq \sigma^2_T \end{cases}$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$F_{obs} = \frac{\hat{\sigma}^2_D}{\hat{\sigma}^2_T} = \frac{55^2}{60^2} \approx 0.84$$

При верной H_0 F-статистика имеет распределение $F_{40-1,60-1}$. Находим критические значения: $F_{left} \approx 0.6$, $F_{right} \approx 1.6$. Поскольку $F_{left} < F_{obs} < F_{right}$, нет оснований отвергать H_0.

3. Проверяем гипотезу

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = \mu_T \\ H_a : \mu_D < \mu_T \end{cases}$$

Когда n_D, n_T велики,

$$\frac{\bar{D} - \bar{T} - (\mu_D - \mu_T)}{\sqrt{\frac{\sigma^2_D}{n_D} + \frac{\sigma^2_T}{n_T}}} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$z_{obs} = \frac{136 - 139}{\sqrt{\frac{3025}{40} + \frac{3600}{60}}} \approx -0.25$$

По таблице находим $z_{crit} = -1.28$. Так как $z_{crit} < z_{obs}$, нет оснований отвергать H_0.

б) Когда считаем дисперсии одинаковыми, то:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\sigma}_D^2(n_D - 1) + \hat{\sigma}_T^2(n_T - 1)}{n_D + n_T - 2} = \frac{3025 \cdot 39 + 3600 \cdot 59}{30 + 60 - 2} \approx 3371$$

и

$$\frac{\bar{D} - \bar{T} - (\mu_D - \mu_T)}{\hat{\sigma}_0^2 \sqrt{\frac{1}{n_D} + \frac{1}{n_T}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n_D + n_T - 2}$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$t_{obs} = \frac{136 - 139}{\sqrt{3371}\sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}}} \approx -0.25$$

По таблице находим критическое значение: $t_{crit} \approx -1.29$. Поскольку $t_{crit} < t_{obs}$, нет оснований отвергать H_0.

4. а) Сначала найдём оценку максимального правдоподобия параметра λ:

$$L = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ell = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda}\bigg|_{\lambda = \hat{\lambda}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{0.52}$$

Так как

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{1}{I(\lambda)}}} \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(0, 1),$$

доверительный интервал имеет вид

$$\frac{1}{0.52} - 1.96\frac{1}{\frac{10}{0.52}} < \lambda < \frac{1}{0.52} + 1.96\frac{1}{\frac{10}{0.52}}$$

б) Найдём вероятность того, что наушник проработает без сбоев 45 минут:

$$g(\lambda) = \mathbb{P}(X > 0.75) = 1 - F(0.75) = e^{-0.75\lambda}$$

Тогда

$$g(\hat{\lambda}) = e^{-0.75/0.52}$$
$$g'(\hat{\lambda}) = -0.75e^{-0.75/0.52}$$

И доверительный интервал имеет вид:

$$e^{-0.75/0.52} - 1.96 \cdot \frac{0.75 \cdot 0.52}{10} \cdot e^{-0.75/0.52} < g(\lambda) < e^{-0.75/0.52} + 1.96 \cdot \frac{0.75 \cdot 0.52}{10} \cdot e^{-0.75/0.52}$$

5. Выпишем функцию правдоподобия:

$$L = p_1^{10} \cdot p_2^{10} \cdot p_3^{15} \cdot p_4^{15} \cdot p_5^{25} \cdot (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{25}$$
$$\ell = 10 \ln p_1 + 10 \ln p_2 + 15 \ln p_3 + 15 \ln p_4 + 25 \ln p_5 + 25 \ln(1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)$$

   Максимизируя логарифмическую функцию правдоподобия по всем параметрам, получим следующие оценки для неограниченной модели:

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = 0.1$$
$$\hat{p}_3 = \hat{p}_4 = 0.15$$
$$\hat{p}_5 = 0.25$$

   Подставив найденные значения в логарифмическую функцию правдоподобия, получим

$$\ell_{UR} \approx -172$$

   В ограниченной модели $p_1 = \ldots = p_6 = 1/6$, и значение функции правдоподобия будет

$$\ell_R \approx -179$$

   Теперь можно посчитать наблюдаемое значение:

$$LR = 2(\ell_{UR} - \ell_R) = 2(-172 - (-179)) = 14$$

   Критическое значение $\chi_{0.95,5} =\approx 11 < 14$, значит, основная гипотеза отвергается.

17. Решения финальных экзаменов

17.1. 2017-2018

Здесь табличка с ответами