# Подборка экзаменов по теории вероятностей. Факультет экономики, НИУ ВШЭ

Коллектив кафедры
математической экономики и эконометрики, талантливые студенты,
фольклор

11 декабря 2018 г.

## Содержание

# Описание

Свежую версию можно скачать с github-репозитория https://github.com/bdemeshev/probability_hse_exams.
Красные ссылки внутри pdf-файла кликабельны, и ведут на ответы и обратно.
Уникальное предложение для студентов факультета экономики НИУ-ВШЭ:
Найдите ошибки в этом документе или пришлите отсутствующие решения в техе и получите дополнительные бонусы! Найденные смысловые ошибки поощряются сильнее, чем просто опечатки. Замеченные ошибки и новые решения оформляйте в виде запросов на https://github.com/bdemeshev/probability_hse_exams/issues/. Перед публикацией запроса, пожалуйста, свертесь со свежей версией подборки.
В создании подборки храбро участвовали Андрей Зубанов, Кирилл Пономарёв, Александр Левкун, Оля Гнилова, Настя Жаркова, Гарик Варданян и другие :)

## Доброе напутствие пишущим эту подборку

Здесь перечислены стилевые особенности коллекции и самые популярные ошибки. Узнать технические подробности по теху можно, например, в учебнике К.В. Воронцова.

1. Дробную часть числа отделяй от целой точкой: 3.14 — хорошо, 3,14 — плохо. Это нарушает русскую традицию, но облегчает копирование-вставку в любой программный пакет.

2. Существует длинное тире, —, которое отличается от просто дефиса - и нужно, чтобы разделять части предложения, Инструкция в картинках по набору тире :)

3. Выключные формулы следует окружать \[...\]. Никаких $$...$$!

4. Про остальные окружения: для системы уравнений подойдёт cases, для формул на несколько строк – align*, для нумерации – enumerate.

5. Русский текст внутри формулы нужно писать в \text{...}.

6. Для многоточий существует команда \ldots.

7. В преамбуле определены сокращения! Самые популярные: \P, \E, \Var, \Cov, \Corr, \cN.

8. Названия функций тоже идут со слэшем: \ln, \exp, \cos...

9. Таблицы нужно оформлять по стандарту booktabs. Самый удобный способ сделать это – зайти на tablesgenerator и выбрать там опцию booktabs table style вместо default table style.

10. Уважай букву ё – ставь над ней точки! :)

11. Начинай каждой предложение внутри теховского файла с новой строки. В готовом pdf предложения будут идти без разрыва, а читабельность теха повысится.

12. В перечислениях после «Найдите» используй в качестве знаков препинания точки с запятой и точку в конце.

13. Знак умножения пишем \cdot и никаких * :)

# 1. Минимумы

## 1.1. Контрольная работа 1

### Теоретический минимум

1. Классическое определение вероятности.

2. Определение условной вероятности.

3. Определение независимости (попарной и в совокупности) $n$ случайных событий.

4. Формула полной вероятности.

5. Формула Байеса.

6. Функция распределения случайной величины. Определение и свойства.

7. Функция плотности. Определение и свойства.

8. Математическое ожидание. Определения для дискретного и абсолютно непрерывного случаев. Свойства.

9. Дисперсия. Определение и свойства.

10. Законы распределений. Определение, $\mathbb{E}(X)$, $\operatorname{Var}(X)$.

    а) Биномиальное распределение.
    б) Распределение Пуассона.
    в) Геометрическое распределение.
    г) Равномерное распределение.
    д) Экспоненциальное распределение.

## Задачный минимум

1. Пусть $\mathbb{P}(A) = 0.3, \mathbb{P}(B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(A|B)$;

   б) Найдите $\mathbb{P}(A \cup B)$;

   в) Являются ли события $A$ и $B$ независимыми?

2. Пусть $\mathbb{P}(A) = 0.5, \mathbb{P}(B) = 0.5, \mathbb{P}(A \cap B) = 0.25$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(A|B)$;

   б) Найдите $\mathbb{P}(A \cup B)$;

   в) Являются ли события $A$ и $B$ независимыми?

3. Карлсон выложил кубиками слово КОМБИНАТОРИКА. Малыш выбирает наугад четыре кубика и выкладывает их в случайном порядке. Найдите вероятность того, что при этом получится слово КОРТ.

4. Карлсон выложил кубиками слово КОМБИНАТОРИКА. Малыш выбирает наугад четыре кубика и выкладывает их в случайном порядке. Найдите вероятность того, что при этом получится слово РОТА.

5. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров.

   Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым?

6. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй урне 8 белых и 4 черных шара, в третьей урне 2 белых и 13 черных шаров.

   Из этих урн наугад выбирается одна урна. Какова вероятность того, что была выбрана первая урна, если шар, взятый наугад из выбранной урны, оказался белым?

7. В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна 0.01, а неопытным — 0.1.

   Найдите вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции в этом отделе.

8. В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна 0.01, а неопытным — 0.1. Известно, что при очередной банковской операции была допущена ошибка.

   Найдите вероятность того, что ошибку допустил неопытный сотрудник.

9. Пусть случайная величина $X$ имеет таблицу распределения:

   | $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
   |---|---|---|---|
   | $\mathbb{P}(X = x)$ | $0.25$ | $c$ | $0.25$ |

   Найдите

   а) константу $c$

   б) $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$

   в) $\mathbb{P}(X < -3)$

   г) $\mathbb{P}\left(X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$

   д) Функцию распределения случайной величины $X$

   е) Имеет ли случайная величина $X$ плотность распределения?

10. Пусть случайная величина $X$ имеет таблицу распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $0.25$ | $c$ | $0.25$ |

Найдите

а) константу $c$

б) $\mathbb{E}(X)$

в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathbb{E}(|X|)$

11. Пусть случайная величина $X$ имеет таблицу распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $0.25$ | $c$ | $0.5$ |

Найдите

а) константу $c$

б) $\mathbb{P}(X \geqslant 0)$

в) $\mathbb{P}(X < -3)$

г) $\mathbb{P}\left(X \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$

д) Функцию распределения случайной величины $X$

е) Имеет ли случайная величина $X$ плотность распределения?

12. Пусть случайная величина $X$ имеет таблицу распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $0.25$ | $c$ | $0.5$ |

Найдите

а) константу $c$

б) $\mathbb{E}(X)$

в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathbb{E}(|X|)$

13. Пусть случайная величина $X$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0.75$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$

б) $\mathbb{P}(X > 0)$

в) $\mathbb{P}(X < 0)$

г) $\mathbb{E}(X)$

д) $\mathrm{Var}(X)$

е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина $X$

14. Пусть случайная величина $X$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 0.4$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$

б) $\mathbb{P}(X > 0)$

в) $\mathbb{P}(X < 0)$
г) $\mathbb{E}(X)$
д) $\operatorname{Var}(X)$
е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина $X$

15. Пусть случайная величина $X$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 100$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$
б) $\mathbb{P}(X > 0)$
в) $\mathbb{P}(X < 0)$
г) $\mathbb{E}(X)$
д) $\operatorname{Var}(X)$
е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина $X$

16. Пусть случайная величина $X$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 101$. Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 0)$
б) $\mathbb{P}(X > 0)$
в) $\mathbb{P}(X < 0)$
г) $\mathbb{E}(X)$
д) $\operatorname{Var}(X)$
е) Наиболее вероятное значение, которое принимает случайная величина $X$

17. В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Они выходят на каждом этаже начиная со второго равновероятно и независимо друг от друга. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже выйдет хотя бы один человек.

18. В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Они выходят на каждом этаже начиная со второго равновероятно и независимо друг от друга. Вычислите вероятность того, что на 6-м этаже не выйдет ни один человек.

19. При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 3. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой.

20. При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 3.

    Найти вероятность того, что за двое суток не произойдет ни одного сбоя.

21. Пусть случайная величина $X$ имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} c, \text{ при } x \in [-1; 1] \\ 0, \text{ при } x \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу $c$
б) $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$
в) $\mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right)$
г) $\mathbb{P}(X \in [2; 3])$
д) $F_X(x)$

22. Пусть случайная величина $X$ имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} c, \text{ при } x \in [-1;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [-1;1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу $c$

б) $\mathbb{E}(X)$

в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathbb{E}(|X|)$

23. Пусть случайная величина $X$ имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, \text{ при } x \in [0;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу $c$

б) $\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right)$

в) $\mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right)$

г) $\mathbb{P}(X \in [2;3])$

д) $F_X(x)$

24. Пусть случайная величина $X$ имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} cx, \text{ при } x \in [0;1] \\ 0, \text{ при } x \notin [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) константу $c$

б) $\mathbb{E}(X)$

в) $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

г) $\mathrm{Var}(X)$

д) $\mathbb{E}(\sqrt{X})$

## 1.2. Контрольная работа 2

**Теоретический минимум**

1. Сформулируйте определение независимости событий, формулу полной вероятности.

2. Приведите определение условной вероятности случайного события, формулу Байеса.

3. Сформулируйте определение и свойства функции распределения случайной величины.

4. Сформулируйте определение и свойства функции плотности случайной величины.

5. Сформулируйте определение и свойства математического ожидания для абсолютно непрерывной случайной величины.

6. Сформулируйте определение и свойства математического ожидания для дискретной случайной величины.

7. Сформулируйте определение и свойства дисперсии случайной величины.

8. Сформулируйте определения следующих законов распределений: биномиального, Пуассона, шеометрического, равномерного, экспоненциального, нормального. Укажите математическое ожидание и дисперсию.

9. Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора.

10. Сформулируйте определение и свойства совместной функции плотности двух случайных величин, сформулируйте определение независимости случайных величин.

11. Сформулируйте определение и свойства ковариации случайных величин.

12. Сформулируйте определение и свойства корреляции случайных величин.

13. Сформулируйте определение и свойства условной функции плотности.

14. Сформулируйте определение условного математического ожидания $\mathbb{E}(Y|X = x)$ для совместного дискретного и совместного абсолютно непрерывного распределений.

15. Сформулируйте определение математического ожидания и ковариационной матрицы случайного вектора и их свойства.

16. Сформулируйте неравенство Чебышёва и неравенство Маркова.

17. Сформулируйте закон больших чисел в слабой форме.

18. Сформулируйте центральную предельную теорему.

19. Сформулируйте теорему Муавра—Лапласа.

20. Сформулируйте определение сходимости по вероятности для последовательности случайных величин.

## Задачный минимум

1. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X=-1)$

б) $\mathbb{P}(Y=-1)$

в) $\mathbb{P}(X=-1\cap Y=-1)$

г) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

д) $F_{X,Y}(-1,0)$

е) Таблицу распределения случайной величины $X$

ж) Функцию $F_X(x)$ распределения случайной величины $X$

з) Постройте график функции $F_X(x)$ распределения случайной величины $X$

2. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X=1)$

б) $\mathbb{P}(Y=1)$

в) $\mathbb{P}(X=1\cap Y=1)$

г) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

д) $F_{X,Y}(1,0)$

е) Таблицу распределения случайной величины $Y$

ж) Функцию $F_Y(y)$ распределения случайной величины $Y$

з) Постройте график функции $F_Y(y)$ распределения случайной величины $Y$

3. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$

б) $\mathbb{E}(X^2)$

в) $\mathrm{Var}(X)$

г) $\mathbb{E}(Y)$

д) $\mathbb{E}(Y^2)$
е) $\text{Var}(Y)$
ж) $\mathbb{E}(XY)$
з) $\text{Cov}(X, Y)$
и) $\text{Corr}(X, Y)$
к) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ некоррелированными?

4. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$
б) $\mathbb{E}(X^2)$
в) $\text{Var}(X)$
г) $\mathbb{E}(Y)$
д) $\mathbb{E}(Y^2)$
е) $\text{Var}(Y)$
ж) $\mathbb{E}(XY)$
з) $\text{Cov}(X, Y)$
и) $\text{Corr}(X, Y)$
к) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ некоррелированными?

5. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.3 | 0.1 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X=-1|Y=0)$
б) $\mathbb{P}(Y=0|X=-1)$
в) Таблицу условного распределения случайной величины $Y$ при условии $X=-1$
г) Условное математическое ожидание случайной величины $Y$ при $X=-1$
д) Условную дисперсию случайной величины $Y$ при условии $X=-1$

6. Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $X=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

Найдите

а) $\mathbb{P}(X = 1|Y = 0)$

б) $\mathbb{P}(Y = 0|X = 1)$

в) Таблицу условного распределения случайной величины $Y$ при условии $X = 1$

г) Условное математическое ожидание случайной величины $Y$ при $X = 1$

д) Условную дисперсию случайной величины $Y$ при условии $X = 1$

7. Пусть $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = -1$. Найдите

а) $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$

б) $\mathrm{Var}(3Y + 3)$

в) $\mathrm{Var}(X - Y)$

г) $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\mathrm{Cov}(X + 2Y + 1, 3X - Y - 1)$

е) $\mathrm{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

8. Пусть $\mathbb{E}(X) = -1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 2$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 1$. Найдите

а) $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$

б) $\mathrm{Var}(2Y + 3)$

в) $\mathrm{Var}(X - Y)$

г) $\mathrm{Var}(2X - 3Y + 1)$

д) $\mathrm{Cov}(3X + Y + 1, X - 2Y - 1)$

е) $\mathrm{Corr}(X + Y, X - Y)$

ж) Ковариационную матрицу случайного вектора $Z = (X \quad Y)$

9. Пусть случайная величина $X$ имеет стандартное нормальное распределение. Найдите

а) $\mathbb{P}(0 < X < 1)$

б) $\mathbb{P}(X > 2)$

в) $\mathbb{P}(0 < 1 - 2X \leqslant 1)$

10. Пусть случайная величина $X$ имеет стандартное нормальное распределение. Найдите

а) $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$

б) $\mathbb{P}(X < -2)$

в) $\mathbb{P}(-2 < -X + 1 \leqslant 0)$

11. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(1, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X < 4)$.

12. Пусть случайная величина $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$. Найдите $\mathbb{P}(-2 < X < 4)$.

13. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и имеют нормальное распределение, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(Y) = 6$. Найдите $\mathbb{P}(1 < X + 2Y < 7)$.

14. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и имеют нормальное распределение, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = 7$. Найдите $\mathbb{P}(1 < 3X + Y < 7)$.

15. Игральная кость подбрасывается 420 раз. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что суммарное число очков будет находиться в пределах от 1400 до 1505?

16. При выстреле по мишени стрелок попадает в десятку с вероятностью 0.5, в девятку – 0.3, в восьмерку – 0.1, в семерку – 0.05, в шестерку – 0.05. Стрелок сделал 100 выстрелов. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что он набрал не менее 900 очков?

17. Предположим, что на станцию скорой помощи поступают вызовы, число которых распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 73$, и в разные сутки их количество не зависит друг от друга. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 26500 до 26800.

18. Число посетителей магазина (в день) имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 289. При помощи центральной предельной теоремы приближенно найти вероятность того, что за 100 рабочих дней суммарное число посетителей составит от 28550 до 29250 человек.

19. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \cap Y \leqslant \frac{1}{2})$,
б) $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$,
в) $f_X(x)$,
г) $f_Y(y)$,
д) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

20. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{P}(X \leqslant \frac{1}{2} \cap Y \leqslant \frac{1}{2})$,
б) $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$,
в) $f_X(x)$,
г) $f_Y(y)$,
д) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

21. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$,
б) $\mathbb{E}(Y)$,
в) $\mathbb{E}(XY)$,
г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,
д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

22. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

Найдите

а) $\mathbb{E}(X)$,

б) $\mathbb{E}(Y)$,

в) $\mathbb{E}(XY)$,

г) $\mathrm{Cov}(X, Y)$,

д) $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

23. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathbb{E}\left(X|Y = \frac{1}{2}\right)$

г) $\mathrm{Var}\left(X|Y = \frac{1}{2}\right)$

24. Пусть плотность распределения случайного вектора $(X, Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xy, & \text{при } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1] \\ 0, & \text{при } (x, y) \notin [0; 1] \times [0; 1] \end{cases}$$

Найдите

а) $f_Y(y)$,

б) $f_{X|Y}\left(x|\frac{1}{2}\right)$

в) $\mathbb{E}\left(X|Y = \frac{1}{2}\right)$

г) $\mathrm{Var}\left(X|Y = \frac{1}{2}\right)$

## 1.3. Контрольная работа 3

**Теоретический минимум**

1. Дайте определение нормально распределённой случайной величины. Укажите диапазон возможных значений, функцию плотности, ожидание, дисперсию. Нарисуйте функцию плотности.

2. Дайте определение хи-квадрат распределения. Укажите диапазон возможных значений, выражение через нормальные распределения, математическое ожидание. Нарисуйте функцию плотности при разных степенях свободы.

3. Дайте определение распределения Стьюдента. Укажите диапазон возможных значений, выражение через нормальные распределения. Нарисуйте функцию плотности распределения Стьюдента при разных степенях свободы на фоне нормальной стандартной функции плотности.

4. Дайте определение распределения Фишера. Укажите диапазон возможных значений, выражение через нормальные распределенеия. Нарисуйте возможную функцию плотности.

Для следующего блока вопросов предполагается, что имеется случайная выборка $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ из распределения с функцией плотности $f(x, \theta)$, зависящей от от параметра $\theta$. Дайте определение каждого понятия из списка или сформулируйте соответствующую теорему:

5. Выборочное среднее и выборочная дисперсия;

6. Формула несмещённой оценки дисперсии;

7. Выборочный начальный момент порядка $k$;

8. Выборочный центральный момент порядка $k$;

9. Выборочная функция распределения;

10. Несмещённая оценка $\hat{\theta}$ параметра $\theta$;

11. Состоятельная последовательность оценок $\hat{\theta}_n$;

12. Эффективность оценки $\hat{\theta}$ среди множества оценок $\hat{\Theta}$;

13. Неравенство Крамера–Рао для несмещённых оценок;

14. Функция правдоподобия и логарифмическая функция правдоподобия;

15. Информация Фишера о параметре $\theta$, содержащаяся в одном наблюдении;

16. Оценка метода моментов параметра $\theta$ при использовании первого момента, если $\mathbb{E}(X_i) = g(\theta)$ и существует обратная функция $g^{-1}$;

17. Оценка метода максимального правдоподобия параметра $\theta$;

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

18. Укажите закон распределения выборочного среднего, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2}$;

19. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для $\mu$ при известной дисперсии, для $\mu$ при неизвестной дисперсии, для $\sigma^2$;

## Задачный минимум

1. Рост в сантиметрах (случайная величина $X$) и вес в килограммах (случайная величина $Y$) взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}(Z) = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\operatorname{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

Лишний вес характеризуется случайной величиной $U = X - Y$. Считается, что человек страдает избыточным весом, если $U < 90$.

   а) Определите вероятность того, что рост мужчины отклоняется от среднего более, чем на 10 см.
   б) Укажите распределение случайной величины $U$. Выпишите её плотность распределения.
   в) Найдите вероятность того, что случайно выбранный мужчина страдает избыточным весом.

2. Рост в сантиметрах, случайная величина $X$, и вес в килограммах, случайная величина $Y$, взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}(Z) = (175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$\operatorname{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

   а) Найдите средний вес мужчины при условии, что его рост составляет 170 см.
   б) Выпишите условную плотность распределения веса мужчины при условии, что его рост составляет 170 см.
   в) Найдите условную вероятность того, что человек будет иметь вес, больший 90 кг, при условии, что его рост составляет 170 см.

3. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) выборочное среднее,
   б) неисправленную выборочную дисперсию,
   в) исправленную выборочную дисперсию,
   г) выборочный второй начальный момент,
   д) выборочный третий центральный момент.

4. Для реализации случайной выборки $x = (1, 0, -1, 1)$ найдите:

   а) вариационный ряд,
   б) первый член вариационного ряда,
   в) последний член вариационного ряда,
   г) график выборочной функции распределения.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из дискретного распределения, заданного с помощью таблицы

| $x$ | $-3$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = x)$ | $2/3 - \theta$ | $1/3$ | $\theta$ |

Рассмотрите оценку $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{X} + 2}{5}$.

а) Найдите $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right)$.

б) Является ли оценка $\hat{\theta}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра $\theta$?

6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0;\theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения и $\hat{\theta} = \bar{X}$.

а) Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ несмещенной оценкой неизвестного параметра $\theta$?

б) Подберите константу $c$ так, чтобы оценка $\tilde{\theta} = c\bar{X}$ оказалась несмещенной оценкой неизвестного параметра $\theta$.

7. Пусть $X_1, X_2, X_3$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0,1)$. Какие из следующих ниже оценкой являются несмещенными? Среди перечисленных ниже оценок найдите наиболее эффективную оценку:

- $\hat{p}_1 = \dfrac{X_1 + X_3}{2}$,
- $\hat{p}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$,
- $\hat{p}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$.

8. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n+1}$ состоятельной?

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0;\theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Является ли оценка $\hat{\theta}_n = \frac{2n+1}{n}\bar{X}_n$ состоятельной оценкой неизвестного параметра $\theta$?

10. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{6x(\theta - x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0;\theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Используя центральный момент второго порядка, при помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра $\theta$.

11. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

| $x$ | $-3$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = x)$ | $2/3 - \theta$ | $1/3$ | $\theta$ |

Используя второй начальный момент, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра $\theta$. Для реализации случайной выборки $x = (0, 0, -3, 0, 2)$ найдите числовое значение найденной оценки параметра $\theta$.

12. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра $\theta$.

13. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра $p$.

14. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta} = \bar{X}$ эффективной?

15. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трех страт, определяется по формуле $TC = c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3$, где $c_i$ — цена одного наблюдения в $i$-ой страте, а $n_i$ — число наблюдений, которые приходятся на $i$-ую страту. Найдите $n_1$, $n_2$ и $n_3$, при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования 8000 и имеется следующая информация:

| Страта | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Среднее значение | 30 | 40 | 50 |
| Стандартная ошибка | 5 | 10 | 20 |
| Вес | 25% | 25% | 50% |
| Цена наблюдения | 1 | 5 | 10 |

### 1.4. Контрольная работа 4

**Теоретический минимум**

1. Дайте определение ошибки первого и второго рода, критической области.

2. Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для вероятности успеха, построенного по случайной выборке большого размера из распределения Бернулли $Bin(1,p)$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что величины $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Укажите формулу для статистики:

3. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при известной дисперсии $\sigma^2$, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu=\mu_0$.

4. Статистика, проверяющая гипотезу о математическом ожидании при неизвестной дисперсии $\sigma^2$, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu=\mu_0$.

Для следующего блока вопросов предполагается, что есть две независимые случайные выборки: выборка $X_1$, $X_2$, ... размера $n_x$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_x;\sigma_x^2)$ и выборка $Y_1$, $Y_2$, ... размера $n_y$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu_y;\sigma_y^2)$.
Укажите формулу для статистики или границ доверительного интервала:

5. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии известны;

6. Доверительный интервал для разницы математических ожиданий, когда дисперсии не известны, но равны;

7. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при известных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu_x-\mu_y=\Delta_0$;

8. Статистика, проверяющая гипотезу о разнице математических ожиданий при неизвестных, но равных дисперсиях, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\mu_x-\mu_y=\Delta_0$;

9. Статистика, проверяющая гипотезу о равенстве дисперсий, и её распределение при справедливости основной гипотезы $H_0$: $\sigma_x^2=\sigma_y^2$.

## Задачный минимум

1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu$ и $\sigma^2 = 4$. Используя реализацию случайной выборки,
$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$
постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\mu$.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Используя реализацию случайной выборки,
$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$
постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\mu$.

3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Используя реализацию случайной выборки,
$$x_1 = 1.07, \quad x_2 = 3.66, \quad x_3 = -4.51,$$
постройте 80%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\sigma^2$.

4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Используя реализации случайных выборок
$$\begin{aligned} &x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42, \\ &y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91, \end{aligned}$$
постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Используя реализации случайных выборок
$$\begin{aligned} &x_1 = 1.53, \quad x_2 = 2.83, \quad x_3 = -1.25 \\ &y_1 = -0.8, \quad y_2 = 0.06 \end{aligned}$$
постройте 95%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$.

6. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p$. Используя реализацию случайной выборки $X_1, \ldots, X_n$, в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $p$.

7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из распределения Бернулли с параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$ соответственно. Известно, что $n = 100$, $\bar{x}_n = 0.6$, $m = 200$, $\bar{y}_m = 0.4$. Постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для отношения разности вероятностей успеха $p_X - p_Y$.

8. Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу. Число заработанных за $i$-ый день чатлов имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром $\lambda$. Заработки в различные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

   С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\lambda$.

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — неизвестный параметр распределения. Известно, что $n = 100$ и $\bar{x}_n = 0.52$.

С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал для параметра $\lambda$.

10. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием $\mu$ и известной дисперсией $\sigma^2 = 4$. Объем выборки $n = 16$. Для тестирования основной гипотезы $H_0 : \mu = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \mu = 2$ вы используете критерий: если $\bar{X} \leqslant 1$, то вы не отвергаете гипотезу $H_0$, в противном случае вы отвергаете гипотезу $H_0$ в пользу гипотезы $H_1$. Найдите

   а) вероятность ошибки 1-го рода;

   б) вероятность ошибки 2-го рода;

   в) мощность критерия.

11. На основе случайной выборки, содержащей одно наблюдение $X_1$, тестируется гипотеза $H_0 : X_1 \sim U[-0.7; 0.3]$ против альтернативной гипотезы $H_1 : X_1 \sim U[-0.3; 0.7]$. Рассматривается критерий вида: если $X_1 > c$, то гипотеза $H_0$ отвергается в пользу гипотезы $H_1$. Выберите константу $c$ так, чтобы уровень значимости этого критерия составлял $0.1$.

12. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu$ и $\sigma^2 = 4$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$

13. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.1$. Используя реализацию случайной выборки $x_1 = -1.11, x_2 = -6.10, x_3 = 2.42$, проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0, \\ H_1 : \mu > 0 \end{cases}$$

14. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно, причем $\sigma_X^2 = 2$ и $\sigma_Y^2 = 1$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$\begin{aligned} &x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42, \\ &y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91, \end{aligned}$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$

15. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = 1.53, \quad x_2 = 2.83, \quad x_3 = -1.25$$
$$y_1 = -0.8, \quad y_2 = 0.06$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y, \\ H_1 : \mu_X < \mu_Y \end{cases}$$

16. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно. Уровень значимости $\alpha = 0.05$. Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42,$$
$$y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91,$$

проверьте следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \\ H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \end{cases}$$

17. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с неизвестным параметром $p \in (0; 1)$.Имеется следующая информация о реализации случайной выборки, содержащей $n = 100$ наблюдений: $\sum_{i=0}^{n} x_i = 60$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.5, \\ H_1 : p > 0.5 \end{cases}$$

18. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — две независимые случайные выборки из распределения Бернулли с неизвестными параметрами $p_X \in (0; 1)$ и $p_Y \in (0; 1)$. Имеется следующая информация о реализациях этих случайных выборок: $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 60$, $m = 150$,$\sum_{j=1}^{m} y_j = 50$. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ требуется протестировать следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : p_X = p_Y, \\ H_1 : p_X \neq p_Y \end{cases}$$

19. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в два раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 10 раз был в театре, 17 раз – в спортзале и 39 раз в кино. На уровне значимости 5% проверьте утверждение Васи.

20. Вася очень любит тестировать статистические гипотезы. В этот раз Вася собирается проверить утверждение о том, что его друг Пётр звонит Васе исключительно в то время, когда Вася ест. Для этого Вася трудился целый год и провел серию из 365 испытаний. Результаты приведены в таблице ниже.

| | Пётр звонит | Пётр не звонит |
|---|---|---|
| Вася ест | 200 | 40 |
| Вася не ест | 25 | 100 |

На уровне значимости 5% протестируйте гипотезу о том, что Пётр звонит Васе независимо от момента приема пищи Васей.

21. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu \in \mathbb{R}$ и дисперсией $v > 0$, где $\mu$ и $v$ — неизвестные параметры. Известно, что выборка состоит из $n = 100$ наблюдений, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 30$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 146$. При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу $H_0 : v = 1$ на уровне значимости 5%.

## 2. Вопросы к экзаменам

### Промежуточный экзамен

1. Аксиоматика Колмогорова. Случайные величины. Функция распределения случайной величины и ее основные свойства. Функция плотности
2. Виды сходимости последовательности случайных величин
3. Основные дискретные распределения: биномиальное, Пуассона, гипергеометрическое, отрицательное биномиальное. Примеры непрерывных распределений (равномерное, экспоненциальное)
4. Неравенство Маркова и неравенство Чебышёва. Закон больших чисел
5. Понятие о случайном векторе. Совместное распределение нескольких случайных величин. Независимость случайных величин. Маргинальные распределения
6. Центральная предельная теорема
7. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса
8. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины и их свойства. Распределение функции от случайной величины
9. Случайные события и операции над ними. Вероятностное пространство. Вероятности и правила действий с ними. Классическое определение вероятности. Независимость событий (попарная и в совокупности). Схема испытаний Бернулли
10. Математическое ожидание и ковариационная матрица случайного вектора. Коэффициент корреляции и его свойства
11. Условное распределение и условное математическое ожидание
12. Теорема Муавра – Лапласа
13. Неравенство Маркова и неравенство Чебышёва. Закон больших чисел

### Финальный экзамен

1. Многомерное нормальное распределение и его свойства.
2. Определение и свойства хи-квадрат распределения, распределения Стьюдента и Фишера. Их основные свойства. Работа с таблицами распределений.
3. Выборочное среднее, его математическое ожидание и дисперсия (с учетом поправки на конечный размер генеральной совокупности).
4. Выборочная дисперсия и ее математическое ожидание. Смещенная и несмещенная оценки для дисперсии по генеральной совокупности.
5. Стратифицированная случайная выборка. Выборочное среднее, его математическое ожидание. Дисперсия выборочного среднего при оптимальном и при пропорциональном размещении.
6. Статистические оценки. Свойства оценок; несмещенность, состоятельность, эффективность.
7. Методы получения оценок; метод моментов и метод максимального правдоподобия. Оценка параметров биномиального, нормального и равномерного распределений.
8. Информация Фишера. Неравенство Рао-Крамера-Фреше (без доказательства).
9. Доверительные интервалы. Доверительные интервалы для среднего при известной и неизвестной дисперсии. Доверительные интервалы для пропорции.

10. Доверительные интервалы для разности средних нормальных генеральных совокупностей.
11. Доверительный интервал для дисперсии нормальной генеральной совокупности.
12. Асимптотические доверительные интервалы параметров распределений, построенные с помощью оценок максимального правдоподобия. Дельта-метод.
13. Проверка гипотез. Простые и сложные гипотезы. Критерий выбора между основной и альтернативной гипотезами. Уровень значимости. Мощность критерия. Ошибки первого и второго рода.
14. Проверка гипотез о конкретном значении для среднего, пропорции и дисперсии.
15. Проверка гипотез для разности двух средних и для разности двух пропорций. Проверка гипотез о равенстве двух дисперсий.
16. Лемма Неймана-Пирсона. Критерий отношения правдоподобия.
17. Критерии согласия. Статистика Колмогорова.
18. Критерий $\chi^2$. Проверка гипотез о соответствии наблюдений предполагаемому распределению вероятностей.
19. Критерий $\chi^2$. Проверка гипотезы о независимости признаков. Таблицы сопряженности признаков.
20. Непараметрические тесты. Критерий знаков. Ранговые критерии: Вилкоксона и Манна-Уитни.
21. Байесовский подход. Связь априорного и апостериорного распределения. Отличия байесовского подхода к оцениванию параметров от метода максимального правдоподобия. Байесовский доверительный интервал.
22. Байесовский подход. Алгоритм Гиббса. Алгоритм Метрополиса-Гастингса.

## 3. Контрольная работа 1

### 3.1. 2018-2019

На минимум в 4 вопроса было выделено 30 минут, на основную часть — 80 минут.

1. Вася пришел на экзамен, зная всего 2 билета из 25. Каждый студент достает ровно один билет. Билеты, вытянутые студентами, обратно не возвращаются. Вася не знает, какие билеты попались другим студентам. Найдите вероятность того, что Вася достанет известный билет, если он будет тянуть билет:

   а) вторым по счету (2 балла)

   б) двадцатым по счету (2 балла)

   в) двадцать пятым по счету (2 балла)

   **Ответ обоснуйте математически!**

2. Игральный кубик с шестью гранями подбрасывается один раз. Рассмотрим две случайные величины:

$$\xi = \begin{cases} 1, \text{ если выпала единица} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 1, \text{ если выпала шестерка} \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

   а) Составьте таблицу совместного распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$ (3 балла)

   б) Являются ли случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимыми? Обоснуйте свой ответ! (1 балл)

   в) Найдите функцию распределения случайной величины $\xi + \eta$ и постройте её график (3 балла)

   г) Найдите распределение случайной величины $\xi$, при условии, что $\xi + \eta = 1$ (3 балла)

3. Плотность распределения случайной величины $\xi$ имеет вид:

$$f_\xi(X) = \begin{cases} cx^2, \text{ при } x \in [0, 1] \\ 0 \quad, \text{ при } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

   Найдите

   а) константу $c$ (2 балла)

   б) $\mathbb{P}(\xi = \frac{1}{2})$ и $P(\xi \in [0, \frac{1}{3}])$ (2 балла)

   в) функцию распределения случайной величины $\xi$ (2 балла)

   г) $\mathbb{P}(\xi \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}])$ (3 балла)

   д) $\mathbb{P}(\xi \leqslant \frac{1}{2} | \xi \geqslant \frac{1}{3})$ (2 балла)

   е) моду, медиану и математическое ожидание случайной величины $\xi$ (6 баллов)

4. Вероятность того, что подсудимый действительно виновен равна p. Своё решение о подсудимом (виновен или невиновен) независимо друг от друга выносят 12 присяжных. Каждый присяжный выносит верное решение (за обвинение, если подсудимый виновен, и за оправдание, если подсудимый невиновен) с вероятностью 2/3.

   Найдите

   а) наиболее вероятное число правильно проголосовавших присяжных (2 балла)

   б) вероятность того, что правильно проголосуют ровно 7 присяжных (1 балл) в) вероятность вынесения обвинительного приговора ровно семью присяжными как функцию от параметра $p$ (4 балла)

г) параметр $p$, если вероятность в пункте в) равна 0.17 (10 баллов)

5. В лифт 12-этажного дома на первом этаже вошли 11 человек. Каждый из них выходит независимо от других и с равной вероятностью на любом из этажей, начиная со второго. Найдите вероятность того, что

   а) поднимаясь вверх, на каждом этаже со второго по 12-й будет выходит ровно один человек (5 баллов)

   б) все пассажиры выйдут не выше 9-го этажа, если никто из них не вышел на первых пяти этажах (5 баллов)

### 3.2. 2017-2018

#### Минимум

1. Функция распределения случайной величины: определения и свойства.

2. Экспоненциальное распределение: определение, математическое ожидание и дисперсия.

3. В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных. Вероятность совершения ошибки при очередной банковской операции опытным сотрудником равна $0.01$, а неопытным — $0.1$. Известно, что при очередной банковской операции была допущена ошибка. Найдите вероятность того, что ошибку допустил неопытный сотрудник.

4. При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки имеет распределение Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 3. Найдите вероятность того, что за двое суток не произойдет ни одного сбоя.

#### Задачи

1. Правильный кубик подбрасывают один раз. Событие $A$ — выпало чётное число, событие $B$ — выпало число кратное трём, событие $C$ — выпало число, большее трёх.

   а) Сформулируйте определение независимости двух событий;

   б) Определите, какие из пар событий $A$, $B$ и $C$ будут независимыми.

2. Теоретический минимум (ТМ) состоит из 10 вопросов, задачный (ЗМ) — из 24 задач. Каждый вариант контрольной содержит два вопроса из ТМ и две задачи из ЗМ. Чтобы получить за контрольную работу оценку 4 и выше, необходимо и достаточно правильно ответить на каждый вопрос ТМ и задачу ЗМ доставшегося варианта. Студент Вася принципиально выучил только $k$ вопросов ТМ и две трети ЗМ.

   а) Сколько всего можно составить вариантов, отличающихся хотя бы одним заданием в ТМ или ЗМ части? Порядок заданий внутри варианта не важен.

   б) Найдите вероятность того, что Вася правильно решит задачи ЗМ;

   в) Дополнительно известно, что Васина вероятность правильно ответить на вопросы ТМ, составляет $1/15$. Сколько вопросов ТМ выучил Вася?

3. Производитель молочных продуктов выпустил новый низкокалорийный йогурт Fit и утверждает, что он вкуснее его более калорийного аналога Fat. Четырем независимым экспертам предлагают выбрать наиболее вкусный йогурт из трёх, предлагая им в одинаковых стаканчиках в случайном порядке два Fat и один Fit. Предположим, что йогурты одинаково привлекательны. Величина $\xi$ — число экспертов, отдавших предпочтение Fit.

   а) Какова вероятность, что большинство экспертов выберут Fit?

   б) Постройте функцию распределения величины $\xi$;

   в) Каково наиболее вероятное число экспертов, отдавших предпочтение йогурту Fit?

   г) Вычислите математическое ожидание и дисперсию $\xi$.

4. Дядя Фёдор каждую субботу закупает в магазине продукты по списку, составленному котом Матроскином. Список не изменяется, и в него всегда входит 1 кг сметаны, цена которого является равномерно распределённой величиной $\alpha$, принимающей значения от 250 до 1000 рублей. Стоимость остальных продуктов из списка в тысячах рублей является случайной величиной $\xi$ с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^2), \text{ если } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

а) Какую сумму должен выделить кот Матроскин дяде Фёдору, чтобы её достоверно хватало на покупку сметаны?

б) Какую сумму должен выделить кот Матроскин дяде Фёдору, чтобы Дядя Фёдор с вероятностью 0.9 мог оплатить продукты без сметаны?

в) Найдите математическое ожидание стоимости продуктов без сметаны;

г) Найдите математическое ожидание стоимости всего списка.

д) Какова вероятность того, что общие расходы будут в точности равны их математическому ожиданию?

Подсказка: $\int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx = \sqrt{\pi}/2$.

5. Эксперт с помощью детектора лжи пытается определить, говорит ли подозреваемый правду. Если подозреваемый говорит правду, то эксперт ошибочно выявляет ложь с вероятностью 0.1. Если подозреваемый обманывает, то эксперт выявляет ложь с вероятностью 0.95.

   В деле об одиночном нападении подозревают десять человек, один из которых виновен и будет лгать, остальные невиновны и говорят правду.

   а) Какова вероятность того, что детектор покажет, что конкретный подозреваемый лжёт?

   б) Какова вероятность того, что конкретный подозреваемый невиновен, если детектор показал, что он лжёт?

   в) Какова вероятность того, что эксперт верно выявит преступника, то есть про каждого невиновного решит, что тот говорит правду, а про преступника решит, что преступник лжёт?

   г) Какова вероятность того, что эксперт ошибочно выявит преступника, то есть покажет, что лжёт невиновный, а все остальные говорят правду?

### 3.3. 2016-2017

1. Из семей, имеющих двоих разновозрастных детей, случайным образом выбирается одна семья. Известно, что в семье есть девочка (событие $A$).

   а) Какова вероятность того, что в семье есть мальчик (событие $B$)?

   б) Сформулируйте определение независимости событий и проверьте, являются ли события $A$ и $B$ независимыми?

2. Система состоит из $N$ независимых узлов. При выходе из строя хотя бы одного узла, система дает сбой. Вероятность выхода из строя любого из узлов равна $0.000001$. Вычислите максимально возможное число узлов системы, при котором вероятность её сбоя не превышает $0.01$.

3. Исследование состояния здоровья населения в шахтерском регионе «Велико-кротовск» за пятилетний период показало, что из всех людей с диагностированным заболеванием легких, 22% работало на шахтах. Из тех, у кого не было диагностировано заболевание легких, только 14% работало на шахтах. Заболевание легких было диагностировано у 4% населения региона.

   а) Какой процент людей среди тех, кто работал в шахте, составляют люди с диагностированным заболеванием легких?

   б) Какой процент людей среди тех, кто НЕ работал в шахте, составляют люди с диагностированным заболеванием легких?

4. Студент Петя выполняет тест (множественного выбора) проставлением ответов наугад. В тесте 17 вопросов, в каждом из которых пять вариантов ответов и только один из них правильный. Оценка по десятибалльной шкале формируется следующим образом:

$$\text{Оценка} = \begin{cases} \text{ЧПО} - 7, & \text{если ЧПО} \in [8;\ 17], \\ 1, & \text{если ЧПО} \in [0;\ 7] \end{cases}$$

   где ЧПО означает число правильных ответов.

   а) Найдите наиболее вероятное число правильных ответов.

   б) Найдите математическое ожидание и дисперсию числа правильных ответов.

   в) Найдите вероятность того, что Петя получит «отлично» (по десятибалльной шкале получит 8, 9 или 10 баллов).

   Студент Вася также выполняет тест проставлением ответов наугад.

   г) Найдите вероятность того, что все ответы Пети и Васи совпадут.

5. Продавец высокотехнологичного оборудования контактирует с одним или двумя потенциальными покупателями в день с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. Каждый контакт заканчивается «ничем» с вероятностью $0.9$ и покупкой оборудования на сумму в 50 000 у. е. с вероятностью $0.1$. Пусть $\xi$ — случайная величина, означающая объем дневных продаж в у. е.

   а) Вычислите $\mathbb{P}(\xi = 0)$.

   б) Сформулируйте определение функции распределения и постройте функцию распределения случайной величины $\xi$.

   в) Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi$.

6. Интервал движения поездов метро фиксирован и равен $b$ минут, т.е. каждый следующий поезд появляется после предыдущего ровно через $b$ минут. Пассажир приходит на станцию в случайный момент времени. Пусть случайная величина $\xi$, означающая время ожидания поезда, имеет равномерное распределение на отрезке $[0; b]$.

а) Запишите плотность распределения случайной величины $\xi$.

б) Найдите константу $b$, если известно, что в среднем пассажиру приходится ждать поезда одну минуту, т. е. $\mathbb{E}(\xi) = 1$.

в) Вычислите дисперсию случайной величины $\xi$.

г) Найдите вероятность того, что пассажир будет ждать поезд менее одной минуты.

д) Найдите квантиль порядка $0.25$ распределения случайной величины $\xi$.

е) Найдите центральный момент порядка 2017 случайной величины $\xi$.

ж) Постройте функцию распределения случайной величины $\xi$.

Марья Ивановна из суеверия всегда пропускает два поезда и садится в третий.

з) Найдите математическое ожидание и дисперсию времени, затрачиваемого Марьей Ивановной на ожидание «своего» поезда.

Глафира Петровна не садится в поезд, если видит в нем подозрительного человека. Подозрительные люди встречаются в каждом поезде с вероятностью $3/4$.

и) Найдите вероятность того, что Глафире Петровне придется ждать не менее пяти минут, чтобы уехать со станции.

к) Найдите математическое ожидание времени ожидания «своего» поезда для Глафиры Петровны.

7. (Бонусная задача) На первом этаже десятиэтажного дома в лифт заходят 9 человек. Найдите математическое ожидание числа остановок лифта, если люди выходят из лифта независимо друг от друга.

### 3.4. 2015-2016

1. Подбрасываются две симметричные монеты. Событие — на первой монете выпал герб, событие — на второй монете выпал герб, событие — монеты выпали разными сторонами.

   $\alpha$) Будут ли эти события попарно независимы?

   $\beta$) Сформулируйте определение независимости в совокупности для трех событий. Являются ли события $A$, $B$, $C$ независимыми в совокупности?

2. Имеются два игральных кубика:

   - красный со смещенным центром тяжести, так что вероятность выпадения «6» равняется $1/3$, а оставшиеся грани имеют равные шансы на появление
   - честный белый кубик

   $\alpha$) Петя случайным образом выбирает кубик и подбрасывает его. Найдите вероятность того, что выпадет «6».

   $\beta$) Петя случайным образом выбирает кубик и подбрасывает его. Какова вероятность того, что Петя взял красный кубик, если известно, что выпала шестерка?

3. Все те же кубики. Петя играет с Васей в следующую игру: Петя выбирает кубик и подбрасывает его. Вася подбрасывает оставшийся кубик. Выигрывает тот, у кого выпало большее число. Если выпадает равное число очков, выигрывает тот, у кого белый кубик.

   Пусть случайная величина $\xi$ — число очков, выпавших на красном кубике, случайная величина $\eta$ — число очков, выпавших на белом кубике, а величина $\zeta$ — максимальное число очков.

   $\alpha$) Задайте в виде таблицы совместное распределение величин $\xi$ и $\eta$. Отметьте (* или кружочком) все те пары значений, когда выигрывает красный кубик.

   $\beta$) Какой кубик нужно выбрать Пете, чтобы его шансы выиграть были выше?

   $\gamma$) Сформулируйте определение функции распределения и постройте функцию распределения величины $\zeta$.

   $\delta$) Вычислите математическое ожидание величины $\zeta$.

4. Проводится исследование с целью определения процента мужчин, которые любят петь в душе. Поскольку некоторые мужчины стесняются прямо отвечать на этот вопрос, предлагается перед ответом на вопрос: «поете ли Вы, когда принимаете душ?» подбросить правильный кубик, и выбрать ответ «ДА», если выпала шестерка, ответ «НЕТ», если выпала единица, и честный ответ («ДА» или «НЕТ»), если выпала любая другая цифра.

   Предположим, что по результатам исследования вероятность ответа «ДА» составляет $2/3$. Каков истинный процент «певцов»?

5. Ваш полный тезка страдает дисграфией. При подписывании контрольной работы по теории вероятностей в своих имени и фамилии в именительном падеже Ваш тезка с вероятностью $0.1$ вместо нужной буквы пишет любую другую (независимо от предыдущих ошибок).

   $\alpha$) Найдите вероятность того, что он напишет свою фамилию правильно.

   $\beta$) Найдите вероятность того, что он сделает ровно 2 ошибки в своем имени.

   $\gamma$) Вычислите наиболее вероятное число допущенных тезкой ошибок.

   $\delta$) Найдите вероятность того, что при подписывании работы Ваш тезка допустит хотя бы одну ошибку.

6. Время (в часах), за которое студенты выполняют экзаменационное задание является случайной величиной с функцией плотности

$$f(y) = \begin{cases} cy^2 + y, & \text{if } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

   $\alpha$) Найдите константу $c$.

   $\beta$) Найдите функцию распределения и постройте её.

   $\gamma$) Вычислите вероятность того, что случайно выбранный студент закончит работу менее чем за полчаса.

   $\delta$) Найдите медиану распределения.

   $\epsilon$) Определите вероятность того, что студент, которому требуется по меньшей мере 15 минут для выполнения задания, справится с ним более, чем за 30 минут.

7. Вам известно, что на большом листе бумаги $1.5$ м $\times$ $1$ м нарисован слон. Вам завязали глаза и выдали кисточку хвоста для слона. Вам нужно прилепить эту кисточку к листу (рисунок Вы не видели). Вы подходите к листу и произвольно приклеиваете кисточку

   $\alpha$) Какова вероятность того, что кисточка окажется на слоне, если площадь рисунка составляет $1$ м$^2$?

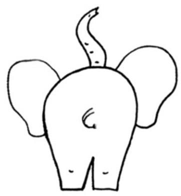
   $\beta$) Запишите вид функции совместной плотности для координат кисточки.

   $\gamma$) Запишите вид частных функций плотности для каждой из координат кисточки.

   $\delta$) Являются ли координаты кисточки независимыми случайными величинами?

   $\epsilon$) Запишите вид функции плотности суммы координат кисточки.

   *Подсказка: слон не должен заслонить равномерного распределения.*



8. Укажите названия букв греческого алфавита и запишите соответствующие заглавные буквы:

$$\alpha, \zeta, \eta, \theta$$

.

### 3.5. 2014-2015

1. Вася забыл какую-то (какую?) формулу. Он помнит, что она начинается с «$\mathbb{P}(A|B) =$». Дальше была дробь, три буквы $\mathbb{P}$ со скобками после них и в сумме по две буквы $A$ и $B$ внутри этих скобок. Ещё там была вертикальная черта «|». Из этих элементов Вася случайным образом составляет формулу.

   а) С какой вероятностью Вася напишет правильную формулу?

   б) Напишите формулу, которую забыл Вася.

   Примечание: Вася всё-таки успел сходить на пару лекций по теории вероятностей и помнит, что $\mathbb{P}(A|B)$ и $\mathbb{P}(B|A)$ — это не одно и то же, «|» должна стоять именно между буквами (то ли $A|B$, то ли $B|A$), а в скобках, которые идут после $\mathbb{P}$, должно хоть что-то стоять. При этом формула должна иметь смысл, то есть $\mathbb{P}(A|B)$ не должна выражаться через себя же, и дробь не должна быть сократимой.

2. Точка с координатами $(\xi, \eta)$ бросается наудачу в треугольник с вершинами $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$. Сформулируйте определение независимости двух событий и проверьте, будут ли события $A = \{\xi < 1/2\}$ и $B = \{\eta < 1/2\}$ независимыми?

3. На учениях три самолёта одновременно и независимо атакуют цель. Известно, что первый самолёт поражает цель с вероятностью $0.6$, второй — $0.4$, третий — $0.3$. При разборе учений выяснилось, что цель была поражена только одним самолётом. Какова вероятность того, что это был первый самолёт?

4. Книга в $500$ страниц содержит $400$ опечаток. Предположим, что каждая из них независимо от остальных опечаток может с одинаковой вероятностью оказаться на любой странице книги.

   а) Определите вероятность того, что на 13-й странице будет не менее двух опечаток, в явном виде и с помощью приближения Пуассона.

   б) Определите наиболее вероятное число, математическое ожидание и дисперсию числа опечаток на 13-ой странице.

   в) Является ли 13-ая страница более «несчастливой», чем все остальные (в том смысле, что на 13-ой странице ожидается большее количество очепяток, чем на любой другой)?

   Подсказка. Можно считать, что опечатки «выбирают» любую из страниц для своего появления независимо друг от друга. Успех заключается в выборе 13-ой страницы. Вероятность успеха?

5. Вероятность того, что медицинский тест выявит наличие заболевания, когда оно действительно есть, называется чувствительностью теста. Специфичностью теста называется вероятность того, что тест покажет отсутствие заболевания, когда пациент здоров. Вероятность того, что пациент болен, когда тест показал наличие заболевания, называется прогностической силой теста. Предположим, что только $1\,\%$ всего населения страдает данным заболеванием. Чувствительность используемого теста равна $0.9$, а специфичность — $0.95$.

   а) Какова вероятность того, что у случайно выбранного человека тест покажет наличие заболевания?

   б) Какова прогностическая сила теста? Что нужно сделать, чтобы её повысить?

6. Функция плотности случайной величины $X$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 1.5(x-a)^2 & , x \in [0, a] \\ 1.5(x+a)^2 & , x \in [-a, 0] \\ 0 & , x \notin [-a, a] \end{cases}$$

   а) Найдите константу $a$, вероятность попадания в отрезок $[1/2, 2]$, математическое ожидание $X$ и дисперсию случайной величины $X$.

   б) Нарисуйте функцию распределения случайной величины $X$.

7. Вася случайным образом посещает лекции по ОВП (Очень Важному Предмету). С вероятностью $0.9$ произвольно выбранная лекция полезна, и с вероятностью $0.7$ она интересна. Полезность и интересность — независимые друг от друга и от номера лекции свойства. Всего Вася прослушал 30 лекций.

   а) Определите математическое ожидание и дисперсию числа полезных лекций и числа интересных лекций, прослушанных Васей.

   б) Определите математическое ожидание числа бесполезных и неинтересных лекций, прослушанных Васей, и числа лекций, обладающих хотя бы одним из свойств (полезность, интересность).

8. Пусть $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 2$, $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 5$, $\mathbb{E}(XY) = -1$. Найдите:

   а) $\mathbb{E}(2X + Y - 4)$

   б) $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$

   в) $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\mathrm{Corr}(X, Y)$

   г) $\mathrm{Var}(X - Y - 1)$, $\mathrm{Var}(X + Y + 1)$

   д) $\mathrm{Cov}(X - Y - 1, X + Y + 1)$, $\mathrm{Corr}(X - Y - 1, X + Y + 1)$

9. Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано в виде таблицы:

| | $X = 1$ | $X = 2$ |
|---|---|---|
| $Y = -1$ | 0.1 | 0.2 |
| $Y = 0$ | 0.2 | 0.3 |
| $Y = 1$ | 0 | 0.2 |

   а) Найти частные распределения $Y$ и $Y^2$

   б) Найти ковариацию случайных величин $X$ и $Y$

   в) Можно ли утверждать, что случайные величины зависимы?

10. Бонусная задача

    Какова вероятность того, что наугад выбранный ответ на этот вопрос окажется верным (искомую вероятность вычислить и записать!)?

    а) 0.25

    б) 0.5

    в) 0.6

    г) 0.25

### 3.6. 2013-2014

1. Вероятность застать Васю на лекции зависит от того, пришли ли на лекцию Маша и Алена. Данная вероятность равна $0.18$, если девушек нет; $0.9$ — если обе девушки пришли на лекцию; $0.54$ — если пришла только Маша и $0.36$ — если пришла только Алена. Маша и Алена посещают лекции независимо друг от друга с вероятностями $0.4$ и $0.6$ соответственно.

   а) Определите вероятность того, что на лекции присутствует Алена, если в аудитории есть Вася.

   б) Кого чаще можно застать на тех лекциях, на которых присутствует Вася: Машу или Алену?

2. Страховая компания страхует туристов, выезжающих за границу, от невыезда и наступления страхового медицинского случая за границей. Застраховано 100 туристов. Вероятность «невыезда» за границу случайно выбранного туриста — $0.002$, а страховые выплаты в этом случае — 2000 у.е.; вероятность обращения за медицинской помощью за границей — $0.01$, а страховые выплаты — 3000 у.е. Для каждого туриста рассмотрим две случайные величины: $X_i$, равную 1 при невыезде за границу и 0 иначе, и $Y_i$, равную 1 при обращении за медицинской помощью и нулю иначе. Обозначим $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ и $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$.

   а) Определите $\mathbb{P}(X = 5)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

   б) Наиболее вероятное число не выехавших туристов.

   в) Вычислите математическое ожидание и дисперсию величины совокупных страховых выплат.

   Подсказка: Число обращений в страховую компанию для каждого туриста может быть записано в виде $X_i + X_i Y_i$, так как медицинский страховой случай может наступить только, если турист выехал за границу. Случайные величины $X_i$ и $Y_i$ независимы.

3. Функция плотности случайной величины $X$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, \ x \geqslant 0 \\ ce^{x}, \ x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

   а) Найдите $c$, $\mathbb{P}(X \in [\ln 0.5, \ln 4])$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$

   б) Моменты всех порядков случайной величины $x$

   Подсказка: $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$

4. Известно, что $\mathbb{E}(X) = -1$, $\mathbb{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 9$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$. Найдите

   а) $\mathbb{E}(Y - 2X - 3)$, $\mathrm{Var}(Y - 2X - 3)$

   б) $\mathrm{Corr}(Y - 2X - 3, X)$

   в) Можно ли выразить $Y$ через $X$? Если да, то запишите уравнение связи.

5. Совместное распределение доходов акций двух компаний $Y$ и $X$ задано в виде таблицы

| | $X = -1$ | $X = 0$ | $X = 1$ |
|---|---|---|---|
| $Y = -1$ | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| $Y = 1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

   а) Найдите частные распределения случайных величин $X$ и $Y$

   б) Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$

   в) Можно ли утверждать, что случайные величины $X$ и $Y$ зависимы?

   г) Найдите условное распределение случайной величины $X$ при условии $Y = -1$

   д) Найдите условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X \mid Y = -1)$

### 3.7. 2012-2013

1. Погода завтра может быть ясной с вероятностью 0.3 и пасмурной с вероятностью 0.7. Вне зависимости от того, какая будет погода, Маша даёт верный прогноз с вероятностью 0.8. Вовочка, не разбираясь в погоде, делает свой прогноз по принципу: с вероятностью 0.9 копирует Машин прогноз, и с вероятностью 0.1 меняет его на противоположный.

   а) Какова вероятность того, что Маша спрогнозирует ясный день?

   б) Какова вероятность того, что Машин и Вовочкин прогнозы совпадут?

   в) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Маша спрогнозировала ясный?

   г) Какова вероятность того, что день будет ясный, если Вовочка спрогнозировал ясный?

2. Машин результат за контрольную, $M$, равномерно распределен на отрезке $[0;1]$. Вовочка ничего не знает, поэтому списывает у Маши, да ещё может наделать ошибок при списывании. Поэтому Вовочкин результат, $V$, распределен равномерно от нуля до Машиного результата.

   а) Найдите $\mathbb{P}(M > 2V)$, $\mathbb{P}(M > V + 0.1)$

   б) Зачёт получают те, чей результат больше 0.4. Какова вероятность того, что Вовочка получит зачёт? Какова вероятность того, что Вовочка получит зачёт, если Маша получила зачёт?

   Подсказка: попробуйте нарисовать нужные события в осях $(V, M)$

   Это была задачка-неберучка!

3. Функция плотности случайной величины $X$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}x^2, & x \in [1;2] \\ 0, & x \notin [1,2] \end{cases}$$

   а) Не производя вычислений найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

   б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(X)$

   в) Найдите $\mathbb{P}(X > 1.5)$

   г) Найдите функцию распределения $F(x)$ и постройте её график

4. Совместное распределение случайных величин $X$ и $Y$ задано таблицей

| | $X=-2$ | $X=0$ | $X=2$ |
|---|---|---|---|
| $Y=1$ | 0.2 | 0.3 | 0.1 |
| $Y=2$ | 0.1 | 0.2 | $a$ |

   а) Определите неизвестную вероятность $a$.

   б) Найдите вероятности $\mathbb{P}(X > -1)$, $\mathbb{P}(X > Y)$

   в) Найдите математические ожидания $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$

   г) Найдите корреляцию $\mathrm{Corr}(X, Y)$

5. Винни Пух собрался полакомиться медом, но ему необходимо принять решение, к каким пчелам отправиться за медом. Неправильные пчелы кусают каждого, кто лезет к ним на дерево с вероятностью 0.9, но их всего 10 штук. Правильные пчелы кусаются с вероятностью 0.1, но их 100 штук.

   а) Определите математическое ожидание и дисперсию числа укусов Винни Пуха для каждого случая

   б) Определите наиболее вероятное число укусов и его вероятность для каждого случая

   в) К каким пчелам следует отправиться Винни Пуху, если он не может выдержать больше двух укусов?

### 3.8. 2011-2012

1. Из карточек составлено слово «СТАТИСТИКА». Из этих карточек случайно без возвращения выбирают 5 карточек. Найдите вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово «ТАКСИ».

2. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить туберкулёз у больного туберкулёзом равна $0.9$. Вероятность принять здорового за больного равна $0.01$. Доля больных туберкулёзом по отношению ко всему населению равна $0.001$. Найдите вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании.

3. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую (AB) группу крови, можно перелить кровь любой группы. Человеку со второй (A) или третьей (B) группой можно перелить кровь той же группы или первой. Человеку с первой (0) группой крови только кровь первой группы. Среди населения 33.7% имеют первую, 37.5% – вторую, 20.9% — третью и 7.9% – четвёртую группы крови.

   а) Найдите вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.
   б) Найдите вероятность того, что переливание можно осуществить, если есть два донора.

4. Вася сидит на контрольной работе между Дашей и Машей и отвечает на 10 тестовых вопросов. На каждый вопрос есть два варианта ответа, «да» или «нет». Первые три ответа Васе удалось списать у Маши, следующие три — у Даши, а оставшиеся четыре пришлось проставить наугад. Маша ошибается с вероятностью $0.1$, а Даша — с вероятностью $0.7$.

   а) Найдите вероятность того, что Вася ответил на все 10 вопросов правильно.
   б) Вычислите корреляцию между числом правильных ответов Васи и Даши, Васи и Маши.

   Подсказка: иногда задача упрощается, если представить случайную величину в виде суммы.

5. Случайная величина $X$ имеет функцию плотности

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-4}, x \geqslant 1 \\ 0, x < 1 \end{cases}$$

   Найдите:

   а) значение $c$;
   б) функцию распределения $F(x)$;
   в) вероятность $\mathbb{P}(0.5 < X < 1.5)$;
   г) математическое ожидание $\mathbb{E}(X)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(X)$ случайной величины $X$.

6. Случайная величина $X$ имеет функцию плотности

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-4}, x \geqslant 1 \\ 0, x < 1 \end{cases}$$

   Найдите

   а) функцию плотности случайной величины $Y = 1/X$;
   б) корреляцию случайных величин $Y$ и $X$.

7. Для случайной величины $X$, имеющей функцию плотности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   вычислите центральный момент порядка 2011.

8. Для случайных величин $X$ и $Y$ заданы следующие значения: $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 4$, $\mathbb{E}(XY) = 8$, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 9$. Для случайных величин $U = X + Y$ и $V = X - Y$ вычислите:

   а) $\mathbb{E}(U)$, $\mathrm{Var}(U)$, $\mathbb{E}(V)$, $\mathrm{Var}(V)$, $\mathrm{Cov}(U, V)$

   б) Можно ли утверждать, что случайные величины U и V независимы?

9. Белка нашла 80 орехов. Каждый орех оказывается пустым независимо от других с вероятностью $0.05$. Случайная величина $X$ — это количество пустых орехов у белки.

   а) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$;

   б) Найдите точную вероятность $\mathbb{P}(X = 5)$;

   в) Найдите вероятность $\mathbb{P}(X = 5)$, используя пуассоновскую аппроксимацию;

   г) Оцените максимальную ошибку при рассчете вероятности с использованием пуассоновской аппроксимации.

10. Охраняемая Сверхсекретная Зона — это прямоугольник 50 на 100 метров с вершинами в точках (0;0), (100;50), (100;0) и (0;50). Охранник обходит Зону по периметру по часовой стрелке. Пусть $X$ и $Y$ — координаты охранника в случайный момент времени.

    а) Найдите $\mathbb{P}(X > 20)$, $\mathbb{P}(X > 20 | X > Y)$, $\mathbb{P}(X > Y | X > 20)$

    б) Найдите $\mathbb{E}(X)$

    в) Постройте функцию распределения случайной величины $X$.

    г) Верно ли, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы?

### 3.9. 2010-2011

1. В жюри три человека, они должны одобрить или не одобрить конкурсанта. Два члена жюри независимо друг от друга одобряют конкурсанта с одинаковой вероятностью $p$. Третий член жюри для вынесения решения бросает правильную монету. Окончательное решение выносится большинством голосов. С какой вероятностью жюри одобрит конкурсанта? Что предпочтёт конкурсант: чтобы решение принимало данное жюри, или чтобы решение принимал один человек, одобряющий с вероятностью $p$?

2. Васю можно застать на лекции с вероятностью $0.9$, если на эту лекцию пришла Маша, и с вероятностью $0.5$, если Маши на лекции нет. Маша бывает в среднем на трёх лекциях из четырех. Найдите вероятность застать Васю на случайно выбранной лекции. Какова вероятность, что на лекции присутствует Маша, если на лекции есть Вася?

3. Число изюминок в булочке распределено по Пуассону. Сколько в среднем должны содержать изюма булочки, чтобы вероятность того, что в булочке найдется хотя бы одна изюминка, была не меньше $0.99$?

4. Правильный кубик подбрасывают до тех пор, пока накопленная сумма очков не достигнет 3 очков или больше. Пусть $X$ — число потребовавшихся подбрасываний кубика. Постройте функцию распределения величины $X$ и найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$.

5. Тест по теории вероятностей состоит из 10 вопросов, на каждый из которых предлагается 3 варианта ответа. Васе удается списать ответы на первые 5 вопросов у отличника Лёни, который никогда не ошибается, а на оставшиеся 5 он вынужден отвечать наугад. Оценка за тест, величина $X$ – число правильных ответов. Оценка «отлично» начинается с 8 баллов, «хорошо» — с 6, «зачёт» — с 4-х.

   а) Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $X$, вероятность того, что Вася получит «отлично»

   б) Новый преподаватель предлагает усовершенствовать систему оценивания и вычитать балл за каждый неправильный ответ. Найти вероятность того, что Вася получит зачет по новой системе и ковариацию Васиных оценок в двух системах.

6. Закон распределения пары случайных величин $X$ и $Y$ и задан таблицей

| | $X=-1$ | $X=0$ | $X=2$ |
|---|---|---|---|
| $Y=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $Y=2$ | 0.1 | 0.2 | 0.2 |

   Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Cov}(2X+3, 1-3Y)$

7. Пусть величины $X_1$ и $X_2$ независимы и равномерно распределены на интервалах $[0;2]$ и $[1;3]$ соответственно. Найдите

   а) $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathrm{Var}(X_1)$, медиану $X_1$

   б) Совместную функцию распределения $X_1$ и $X_2$

   в) Функцию распределения и функцию плотности величины $W = \max\{X_1, X_2\}$

## 3.10. 2008-2009 Демо-версия

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. На день рождения к Васе пришли две Маши, два Саши, Петя и Коля. Все вместе с Васей сели за круглый стол. Какова вероятность, что Вася окажется между двумя тёзками?

2. Поезда метро идут регулярно с интервалом 3 минуты. Пассажир приходит на платформу в случайный момент времени. Пусть $X$ — время ожидания поезда в минутах.

   Найдите $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{E}(X)$.

3. Жители уездного города N независимо друг от друга говорят правду с вероятностью $\frac{1}{3}$. Вчера мэр города заявил, что в 2014 году в городе будет проведён межпланетный шахматный турнир. Затем заместитель мэра подтвердил эту информацию. Какова вероятность того, что шахматный турнир действительно будет проведён?

4. Время устного ответа на экзамене распределено по экспоненциальному закону, то есть имеет функцию плотности $p(t) = c \cdot e^{-0.1t}$ при $t > 0$.

   а) Найдите значение параметра $c$.

   б) Какова вероятность того, что Иванов будет отвечать более получаса?

   в) Какова вероятность того, что Иванов будет отвечать еще более получаса, если он уже отвечает 15 минут?

   г) Сколько времени в среднем длится ответ одного студента?

5. Студент решает тест (множественного выбора) проставлением ответов наугад. В тесте 10 вопросов, на каждый из которых 4 варианта ответов. Зачет ставится в том случае, если правильных ответов будет не менее 5.

   а) Найдите вероятность того, что студент правильно ответит только на один вопрос.

   б) Найдите наиболее вероятное число правильных ответов.

   в) Найдите математическое ожидание и дисперсию числа правильных ответов.

   г) Найдите вероятность того, что студент получит зачет.

6. Совместный закон распределения случайных величин $X$ и $Y$ задан таблицей:

| | $Y = -1$ | $Y = 0$ | $Y = 2$ |
|---|---|---|---|
| $X = 0$ | 0.2 | $c$ | 0.2 |
| $X = 1$ | 0.1 | 0.2 | 0.1 |

   Найдите $c$, $\mathbb{P}(Y > -X)$, $\mathbb{E}(X \cdot Y)$, $\mathrm{Corr}(X, Y)$, $\mathbb{E}(Y|X > 0)$

7. Вася пригласил трех друзей навестить его. Каждый из них появится независимо от другого с вероятностью $0.9$, $0.7$ и $0.5$ соответственно. Пусть $N$ — количество пришедших гостей. Найдите $\mathbb{E}(N)$.

8. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна $0.6$, при каждом последующем — уменьшается на $0.1$. Найдите

   а) закон распределения числа патронов, израсходованных охотником,

   б) математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

**Часть II.**

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **одну** из двух задач (9-А или 9-Б) по выбору!

9-А. У Мистера X есть $n$ зонтиков. Зонтики мистер X хранит дома и на работе. Каждый день утром мистер X едет на работу, а каждый день вечером - возвращается домой. При этом каждый раз дождь идет с вероятностью $0.8$ независимо от прошлого, то есть утром дождь идет с вероятностью $0.8$ и вечером дождь идет с вероятностью $0.8$ вне зависимости от того, что было утром. Если идет дождь и есть доступный зонтик, то мистер X обязательно возьмет его в дорогу. Если дождя нет, то мистер X поедет без зонтика.

Какой процент поездок окажется для мистера X неудачными (то есть будет идти дождь, а зонта не будет) в долгосрочном периоде?

9-Б. Начинающая певица дает концерты каждый день. Каждый ее концерт приносит продюсеру 0.75 тысяч евро. После каждого концерта певица может впасть в депрессию с вероятностью 0.5. Самостоятельно выйти из депрессии певица не может. В депрессии она не в состоянии проводить концерты. Помочь ей могут только цветы от продюсера. Если подарить цветы на сумму $0 \leqslant x \leqslant 1$ тысяч евро, то она выйдет из депрессии с вероятностью $\sqrt{x}$.

Какова оптимальная стратегия продюсера?

### 3.11. 2008-2009

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Вася купил два арбуза у торговки тёти Маши и один арбуз у торговки тёти Оли. Арбузы у тёти Маши спелые с вероятностью 90% (независимо друг от друга), арбузы у тёти Оли спелые с вероятностью 80%.

   а) Какова вероятность того, что все три Васиных арбуза будут спелыми?

   б) Какова вероятность того, что хотя бы два арбуза из Васиных будут спелыми?

   в) Каково ожидаемое количество спелых арбузов у Васи?

2. Случайная величина $X$ может принимать только значения 5 и 9, с неизвестными вероятностями.

   а) Каково наибольшее возможное математическое ожидание величины $X$?

   б) Какова наибольшая возможная дисперсия величины $X$?

3. Предположим, что социологическим опросам доверяют 70% жителей. Те, кто доверяют, опросам всегда отвечают искренне; те, кто не доверяют, отвечают наугад. Социолог Петя в анкету очередного опроса включил вопрос «Доверяете ли Вы социологическим опросам?»

   а) Какова вероятность, что случайно выбранный респондент ответит «Да»?

   б) Какова вероятность того, что он действительно доверяет, если известно, что он ответил «Да»?

4. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и имеют функции плотности $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{32}(x-1)^2}$ и $g(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{18}y^2}$ соответственно. Найдите:

   а) $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$

   б) $\mathbb{E}(X-Y)$, $\mathrm{Var}(X-Y)$

5. Закон распределения пары случайных величин $X$ и $Y$ задан табличкой:

| | $X=-1$ | $X=0$ | $X=2$ |
|---|---|---|---|
| $Y=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |
| $Y=2$ | 0.1 | 0.2 | 0.2 |

   Найдите: $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Cov}(2X+3,-3Y+1)$.

6. Время устного ответа на экзамене распределено по экспоненциальному закону, то есть имеет функцию плотности $p(t) = c \cdot e^{-0.2t}$ при $t > 0$.

   а) Найдите значение параметра $c$.

   б) Какова вероятность того, что Иванов будет отвечать более двадцати минут?

   в) Какова вероятность того, что Иванов будет отвечать еще более двадцати минут, если он уже отвечает 10 минут?

   г) Сколько времени в среднем длится ответ одного студента?

7. Полугодовой договор страховой компании со спортсменом-теннисистом, предусматривает выплату страхового возмещения в случае травмы специального вида. Из предыдущей практики известно, что вероятность получения теннисистом такой травмы в любой фиксированный день равна $0.00037$. Для периода действия договора вычислите:

   а) математическое ожидание числа страховых случаев;

   б) вероятность того, что не произойдет ни одного страхового случая;

в) вероятность того, что произойдет ровно 2 страховых случая.

8. Большой Адронный Коллайдер запускают ровно в полночь. Оставшееся время до Конца Света — случайная величина $X$ распределенная равномерно от 0 до 16 часов. Когда произойдет Конец Света, механические часы остановятся и будут показывать время $Y$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(Y < 2)$.

   б) Постройте функцию плотности для величины $Y$.

   в) Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

   г) Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   Комментарий: по остановившимся механическим часам, к примеру, невозможно отличить, прошло ли от пуска Коллайдера 2.7 часа или 14.7 часа, так как $Y$ принимает значения только на отрезке от 0 до 12 часов.

**Часть II**.

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **<u>одну</u>** из двух задач (9-А или 9-Б) по выбору!

9-А. На даче у мистера А две входных двери. Сейчас у каждой двери стоит две пары ботинок. Перед каждой прогулкой он выбирает наугад одну из дверей для выхода из дома и надевает пару ботинок, стоящую у выбранной двери. Возвращаясь с прогулки мистер А случайным образом выбирает дверь, через которую он попадет в дом и снимает ботинки рядом с этой дверью. Сколько прогулок мистер А в среднем совершит, прежде чем обнаружит, что у выбранной им для выхода из дома двери не осталось ботинок?

Источник: American Mathematical Monthly, problem E3043, (1984, p.310; 1987, p.79)

9-Б. Если смотреть на корпус Ж здания Вышки с Дурасовского переулка, то видно 70 окон расположенных прямоугольником $7 \times 10$ (7 этажей, так как первый не видно, и 10 окон на каждом этаже). Допустим, что каждое из них освещено вечером независимо от других с вероятностью одна вторая. Назовем «уголком» комбинацию из 4-х окон, расположенных квадратом, в которой освещено ровно три окна (не важно, какие). Пусть $X$ - число «уголков», возможно пересекающихся, видимых с Дурасовского переулка. Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$

Примечание — для наглядности:

| | |
|---|---|
| X | X |
| | X |

,

| | |
|---|---|
| X | |
| X | X |

,

| | |
|---|---|
| | X |
| X | X |

,

| | |
|---|---|
| X | X |
| X | |

— это «уголки».

| | | |
|---|---|---|
| X | X | X |
| | X | |
| X | X | |

— в этой конфигурации три «уголка»;

| | | |
|---|---|---|
| X | | X |
| | X | |
| X | | X |

— а здесь — ни одного «уголка».

### 3.12. 2007-2008

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. На день рождения к Васе пришли две Маши, два Саши, Петя и Коля. Все вместе с Васей сели за круглый стол. Какова вероятность, что Вася окажется между двумя тёзками?

2. Поезда метро идут регулярно с интервалом 3 минуты. Пассажир приходит на платформу в случайный момент времени. Пусть $X$ — время ожидания поезда в минутах.

   Найдите $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{E}(X)$.

3. Вы играете две партии в шахматы против незнакомца. Равновероятно незнакомец может оказаться новичком, любителем или профессионалом. Вероятности вашего выигрыша в отдельной партии, соответственно, будут равны $0.9$, $0.5$, $0.3$.

   а) Какова вероятность выиграть первую партию?

   б) Какова вероятность выиграть вторую партию, если вы выиграли первую?

4. Время устного ответа на экзамене распределено по экспоненциальному закону, то есть имеет функцию плотности $p(t) = c \cdot e^{-0.1t}$ при $t > 0$.

   а) Найдите значение параметра $c$.

   б) Какова вероятность того, что Иванов будет отвечать более получаса?

   в) Какова вероятность того, что Иванов будет отвечать еще более получаса, если он уже отвечает 15 минут?

   г) Сколько времени в среднем длится ответ одного студента?

5. Годовой договор страховой компании со спортсменом-теннисистом, предусматривает выплату страхового возмещения в случае травмы специального вида. Из предыдущей практики известно, что вероятность получения теннисистом такой травмы в любой фиксированный день равна $0.00037$. Для периода действия договора вычислите:

   а) наиболее вероятное число страховых случаев;

   б) математическое ожидание числа страховых случаев;

   в) вероятность того, что не произойдет ни одного страхового случая;

   г) вероятность того, что произойдет ровно 2 страховых случая.

   P.S. Указанные вероятности вычислите двумя способам: используя биномиальное распределение и распределение Пуассона.

6. Допустим, что закон распределения $X$ имеет вид:

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $\theta$ | $2\theta$ | $1 - 3\theta$ |

   а) Найдите $\mathbb{E}(X)$

   б) При каких $\theta$ среднее будет наибольшим? При каких — наименьшим?

7. Вася пригласил трех друзей навестить его. Каждый из них появится независимо от другого с вероятностью $0.9$, $0.7$ и $0.5$ соответственно. Пусть $N$ — количество пришедших гостей. Найдите $\mathbb{E}(N)$.

8. У спелестолога в каменоломнях сели батарейки в налобном фонаре, и он оказался в абсолютной темноте. В рюкзаке у него 6 батареек, 4 новых и 2 старых. Для работы фонаря требуется две новых батарейки. Спелестолог вытаскивает из рюкзака две батарейки наугад и вставляет их в фонарь. Если фонарь не начинает работать, то спелестолог откладывает эти две батарейки и пробует следующие две и так далее.

а) Найдите закон распределения числа попыток.

б) Сколько попыток в среднем потребуется?

в) Какая попытка скорее всего будет первой удачной?

**Часть II.**

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **одну** из двух задач (9-А или 9-Б) по выбору!

9-А. По краю идеально круглой столешницы отмечается наугад $n$ точек. В этих точках к столешнице прикручиваются ножки. Какова вероятность того, что полученный столик с $n$ ножками будет устойчивым?

9-Б. На окружности с центром $O$ (не внутри окружности!) сидят три муравья, их координаты независимы и равномерно распределены по окружности. Два муравья $A$ и $B$ могут общаться друг с другом, если $\angle AOB < \pi/2$.

Какова вероятность того, что все три муравья смогут не перемещаясь общаться друг с другом (возможно через посредника)?

### 3.13. 2006-2007

1. Из семей, имеющих троих разновозрастных детей, случайным образом выбирается одна семья. Пусть событие А заключается в том, что в этой семье старший ребенок — мальчик, В — в семье есть хотя бы одна девочка.

   а) Считая вероятности рождения мальчиков и девочек одинаковыми, выяснить, являются ли события А и В независимыми.

   б) Изменится ли результат, если вероятности рождения мальчиков и девочек различны.

2. Студент решает тест (множественного выбора) проставлением ответов наугад. В тесте 10 вопросов, на каждый из которых 4 варианта ответов. Зачёт ставится в том случае, если правильных ответов будет не менее 5.

   а) Найти вероятность того, что студент правильно ответит только на один вопрос.

   б) Найти наиболее вероятное число правильных ответов.

   в) Найти математическое ожидание и дисперсию числа правильных ответов.

   г) Найти вероятность того, что студент получит зачёт.

3. Вероятность изготовления изделия с браком на некотором предприятии равна $0.04$. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью $0.96$, а в случае изделия с дефектом - с вероятностью $0.05$. Определить:

   а) какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия;

   б) какова вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенную проверку, бракованное.

4. Вероятность того, что пассажир, купивший билет, не придет к отправлению поезда, равна $0.01$. Найти вероятность того, что все 400 пассажиров явятся к отправлению поезда (использовать приближение Пуассона).

5. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна $0.6$, при каждом последующем - уменьшается на $0.1$. Найти

   а) закон распределения числа патронов, израсходованных охотником;

   б) математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

6. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 минуты. Пассажир приходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не более полминуты. Найти математическое ожидание и дисперсию времени ожидания поезда.

7. Время работы телевизора «Best» до первой поломки является случайной величиной, распределённой по показательному закону. Определить вероятность того, что телевизор проработает более 15 лет, если среднее время безотказной работы телевизора фирмы «Best» составляет 10 лет. Какова вероятность, что телевизор, проработавший 10 лет, проработает ещё не менее 15 лет?

8. Дополнительная задача.

   Пусть случайные величины $X_1$ и $X_2$ независимы и равномерно распределены на отрезках $[-1;1]$ и $[0;1]$, соответственно. Найти вероятность того, что $\max\{X_1, X_2\} > 0.5$, функцию распределения случайной величины $Y = \max\{X_1, X_2\}$.

### 3.14. 2005-2006

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Шесть студентов, три юноши и три девушки, стоят в очереди за пирожками в случайном порядке. Какова вероятность того, что юноши и девушки чередуются?

2. Имеется три монетки. Две «правильных» и одна — с «орлами» по обеим сторонам. Петя выбирает одну монетку наугад и подкидывает её два раза. Оба раза выпадает «орёл». Какова вероятность того, что монетка «неправильная»?

3. Вася гоняет на мотоцикле по единичной окружности с центром в начале координат. В случайный момент времени он останавливается. Пусть случайные величины $X$ и $Y$ — это Васины абсцисса и ордината в момент остановки. Найдите $\mathbb{P}(X > 1/2)$, $\mathbb{P}(X > 1/2 | Y < 1/2)$. Являются ли события $A = \{X > 1/2\}$ и $B = \{Y < 1/2\}$ независимыми?

   *Подсказка:* $\cos(\pi/3) = 1/2$ *, длина окружности* $l = 2\pi R$

4. В коробке находится четыре внешне одинаковых лампочки. Две из лампочек исправны, две — нет. Лампочки извлекают из коробки по одной до тех пор, пока не будут извлечены обе исправные.

   а) Какова вероятность того, что опыт закончится извлечением трех лампочек?

   б) Каково ожидаемое количество извлеченных лампочек?

5. Два охотника выстрелили в одну утку. Первый попадает с вероятностью 0.4, второй — с вероятностью 0.7. В утку попала ровно одна пуля. Какова вероятность того, что утка была убита первым охотником?

6. а) Известно, что $\mathbb{E}(Z) = -3$ и $\mathbb{E}(Z^2) = 15$. Найдите $\mathrm{Var}(Z)$, $\mathrm{Var}(4 - 3Z)$ и $\mathbb{E}(5 + 3Z - Z^2)$.

   б) Известно, что $\mathrm{Var}(X + Y) = 20$ и $\mathrm{Var}(X - Y) = 10$. Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и $\mathrm{Cov}(6 - X, 3Y)$.

7. Известно, что случайная величина $X$ принимает три значения. Также известно, что $\mathbb{P}(X = 1) = 0.3$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0.1$ и $\mathbb{E}(X) = -0.7$. Определите, чему равно третье значение случайной величины $X$ и найдите $\mathrm{Var}(X)$.

8. Известно, что функция плотности случайной величины $X$ имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} cx^2, & x \in [-2; 2] \\ 0, & x \notin [-2; 2] \end{cases}$$

   Найдите значение константы $c$, $\mathbb{P}(X > 1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X^3+10}\right)$ и постройте график функции распределения величины $X$.

9. Бросают два правильных игральных кубика. Пусть $X$ — наименьшая из выпавших граней, а $Y$ — наибольшая.

   а) Рассчитайте $\mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 5)$

   б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathbb{E}(3X - 2Y)$

10. Вася решает тест путем проставления каждого ответа наугад. В тесте 5 вопросов. В каждом вопросе 4 варианта ответа. Пусть $X$ - число правильных ответов, $Y$ - число неправильных ответов и $Z = X - Y$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(X > 3)$.

   б) Найдите $\mathrm{Var}(X)$ и $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   в) Найдите $\mathrm{Corr}(X, Z)$.

**Часть II.**

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **<u>одну</u>** из двух 11-х задач по выбору!

11-А. Петя сообщает Васе значение случайной величины, равномерно распределённой на отрезке $[0; 4]$. С вероятностью $1/4$ Вася возводит Петино число в квадрат, а с вероятностью $3/4$ прибавляет к Петиному числу 4. Обозначим результат буквой $Y$.

Найдите $\mathbb{P}(Y < 4)$ и функцию плотности случайной величины $Y$.

Вася выбирает свое действие независимо от Петиного числа.

11-Б. Вы хотите приобрести некую фирму. Стоимость фирмы для ее нынешних владельцев — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 1]$. Вы предлагаете владельцам продать ее за называемую Вами сумму. Владельцы либо соглашаются, либо нет. Если владельцы согласны, то Вы платите обещанную сумму и получаете фирму. Когда фирма переходит в Ваши руки, ее стоимость сразу возрастает на 20%.

а) Чему равен Ваш ожидаемый выигрыш, если Вы предлагаете цену $0.5$?

б) Какова оптимальная предлагаемая цена?

# 4. Контрольная работа 1. ИП

## 4.1. 2018-2019

1. Пират Злопамятный Джо очень любит неразбавленный ром. Из-за того, что он много пьёт, у него проблемы с памятью, и он помнит не больше, чем три последних пинты. Хозяин таверны «Огненная зебра» с вероятностью $1/8$ разбавляет каждую подаваемую пинту рома. Если по ощущением Джо половина выпитых пинт или больше была разбавлена, то он разносит таверну к чертям собачьим. Только что Джо вошёл в таверну и закал первую пинту.

   Сколько в среднем пинт выпьет Джо, прежде чем разнесёт таверну?

2. В таверне «Крутой ковбой» разбавленный ром подают с вероятностью $1/2$. Джо немного сменил свой характер и теперь устраивает скандал, если две пинты рома подряд разбавлены.

   Какова вероятность того, что Джо сможет выпить 100 пинт подряд без скандалов?

3. Али-Баба хочет проникнуть в пещеру с сокровищами. Вход в пещеру закрыт и его охраняет Джин с квадратным подносом. В каждой вершине подноса — непрозрачный стаканчик. Под каждым стаканчиком — монетка. Если все четыре монетки окажутся в одинаковом положении, все — орлом вверх, или все — решкой вверх, то вход откроется. За одно действие Али-Баба может открыть любые два стаканчика и положить открывшиеся монетки любой стороной вверх. После действия Али-Бабы Джин накрывает монетки стаканчиками, быстро-быстро вращает поднос и снова предоставляет поднос Али-Бабе. Углядеть за Джином или сделать пометки на подносе невозможно.

   а) Как надо действовать Али-Бабе, чтобы гарантировать себе вход в пещеру за наименьшее количество действий?

   б) Сколько действий потребуется в худшем случае?

4. Злопамятный Джо очень любит играть в картишки. Перед Джо хорошо перемешанная стандартная колода в 52 карты. Джо извлекает карты по одной.

   На каком месте в среднем появляется первая Дама?

5. Вероятность того, что непросветлённый Ученик достигнет Просветления за малый интервал времени, прямо пропорциональна длине этого интервала, а именно,

   $$\mathbb{P}(\text{достигнуть Просветления за отрезок времени } [t; t+\Delta]) = 0.2018\Delta + o(\Delta)$$

   Какова точная вероятность того, что Ученик, начавший искать Просветление, так и не достигнет его к моменту времени $t$?

6. Исследователь Василий выбирает равномерно и независимо друг от друга 10 точек на отрезке $[0; 1]$. Затем Василий записывает их координаты в порядке возрастания, $Y_1 \leqslant Y_2 \leqslant \ldots \leqslant Y_{10}$.

   Не производя вычислений, *по определению*, выпишите функции плотности случайной величины $Y_4$.

### 4.2. 2017-2018

Ровно 272 года назад императрица Елизавета повелела завезти во дворцы котов для ловли мышей.

1. В отсутствии кота Леопольда мыши Белый и Серый подкидывают по очереди игральный додекаэдр. Сыр достаётся тому, кто первым выкинет число 6. Начинает подкидывать Белый.

    а) Какова вероятность того, что сыр достанется Белому?

    б) Сколько в среднем бросков продолжается игра?

    в) Какова дисперсия числа бросков?

2. Микки Маус, Белый и Серый решили устроить труэль из любви к мышки Мии. Сначала делает свой выстрел Микки, затем Белый, затем Серый, затем снова Микки и так до тех пор, пока в живых не останется только один.

    Прошлые данные говорят о том, что Микки попадает с вероятностью $1/3$, Белый — с вероятностью $2/3$, а Серый стреляет без промаха.

    Найдите оптимальную стратегию каждого мыша, куда кому следует целиться.

3. Микки Маус, Белый и Серый пойманый злобным котом Леопольдом до начала труэли. И теперь Леопольд будет играть с ними в странную игру.

    В комнате три закрытых внешне неотличимых коробки: с золотом, серебром и платиной. Общаться после начала игры мыши не могут, но могут заранее договориться о стратегии.

    Правила игры таковы. Кот Леопольд будет заводить мышей в комнату по очереди. Каждый из мышей может открыть две коробки по своему выбору. Перед следующим мышом коробки закрываются.

    Если Микки откроет коробку с золотом, Белый — с серебром, а Серый — с платиной, то они выигрывают. Если хотя бы один из мышей не найдёт свой металл, то Леопольд их съест.

    а) Какова оптимальная стратегия?

    б) Какова вероятность выигрыша при использовании оптимальной стратегии?

4. Накануне войны Жестокий Тиран Мышь очень большой страны издал указ. Отныне за каждого новорождённого мыша-мальчика семья получает денежную премию, но если в семье рождается вторая мышка-девочка, то всю семью убивают. Бедные жители страны запуганы и остро нуждаются в деньгах, поэтому в каждой семье мыши будут появляться до тех пор, пока не родится первая мышка-девочка.

    а) Каким будет среднее число детей в мышиной семье?

    б) Какой будет доля мышей-мальчиков в стране?

    в) Какой будет средняя доля мышей-мальчиков в случайной семье?

    г) Сколько в среднем мышей-мальчиков в случайно выбираемой семье?

5. Вальяжный кот Василий положил на счёт в банке на Гаити один гурд. Сумма на счету растёт непрерывно с постоянной ставкой в течение очень длительного промежутка времени. В случайный момент этого промежутка кот Василий закрывает свой вклад.

    Каков закон распределения первой цифры полученной Василием суммы?

### 4.3. 2016-2017

1. Задача о макаронинах

   В тарелке запутавшись лежат много-много макаронин. Я по очереди связываю попарно все торчащие концы макаронин.

   а) Какова примерно вероятность того, что я свяжу все макаронины в одно большое кольцо?
   б) Сколько в среднем колец образуется?
   в) Каково среднее число колец длиной в одну макаронину?

2. Планета Плюк

   На планету Плюк, окружность, в случайных точках садятся $n$ пепелацев. Радиосвязь между двумя точками на планете Плюк возможна, если центральный угол между этими двумя точками меньше $\pi/2$.

   а) Какова вероятность того, что из любой точки планеты можно связаться хотя бы с одним пепелацем?
   б) Какова вероятность того, что при $n = 3$ все три пепелаца смогут поддерживать связь друг с другом (необязательно напрямую, возможно через посредника)?
   в) Как изменятся ответы, если планета Плюк — это сфера?

3. Чайник Рассела

   Вокруг Солнца по эллиптической орбите вращается абсолютно плоский чайник Рассела с площадью 42 см$^2$. Летающий Макаронный Монстр проецирует чайник Рассела на случайную плоскость.

   Чему равна ожидаемая площадь проекции?

4. Чак Норрис против Брюса Ли

   Чак Норрис хватается за верёвку в форме окружности в произвольной точке. Брюс Ли берёт мачете и с завязанными глазами разрубает верёвку в двух случайных независимых местах. Чак Норрис забирает себе тот кусок, за который держится. Брюс Ли забирает оставшийся кусок. Вся верёвка имеет единичную длину.

   а) Чему равна ожидаемая длина куска верёвки, доставшегося Брюсу Ли?
   б) Вероятность того, что у Брюса Ли верёвка длиннее?

5. Истеричная певица

   Начинающая певица дает концерты каждый день. Каждый её концерт приносит продюсеру $0.75$ тысяч евро. После каждого концерта певица может впасть в депрессию с вероятностью $0.5$. Самостоятельно выйти из депрессии певица не может. В депрессии она не в состоянии проводить концерты. Помочь ей могут только хризантемы от продюсера. Если подарить цветы на сумму $0 \leqslant x \leqslant 1$ тысяч евро, то она выйдет из депрессии с вероятностью $\sqrt{x}$.

   Какова оптимальная стратегия продюсера, максимизирующего ожидаемую прибыль?

6. Гадалка

   Джульетта пишет на бумажках два любых различных натуральных числа по своему выбору. Одну бумажку она прячет в левую руку, а другую — в правую. Ромео выбирает любую руку Джульетты. Джульетта показывает число, написанное на выбранной бумажке. Ромео высказывает свою догадку о том, открыл ли он большее из двух чисел или меньшее. Ромео выигрывает, если он угадал.

   Приведите пример стратегии Ромео, дающей ему вероятность выигрыша строго больше $0.5$ против любой стратегии Джульетты.

7. Мудрецы

   В ряд друг за другом за бесконечным столом сидит счётное количество Мудрецов, постигающих Истину. Первым сидит Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина:

   Каждый Мудрец может постигнуть Истину самостоятельно с вероятностью $1/9$ или же от соседа[1].

[1] Студенты постигают Истину примерно также!

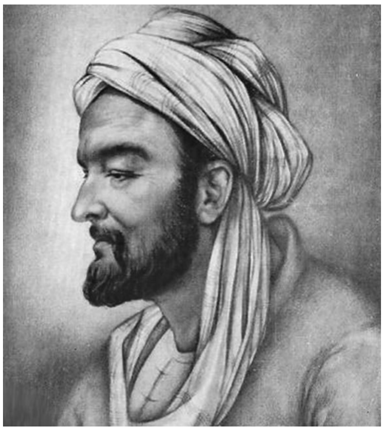


Рис. 1: *
«Коль смолоду избрал к заветной правде путь,
С невеждами не спорь, советы их забудь».

Независимо от способа постижения Истины, просветлённый Мудрец поделится Истиной с соседом слева с вероятностью $2/9$ и с соседом справа также с вероятностью $2/9$ (независимо от соседа слева).

а) Какова вероятность того, что Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина постигнет Истину?

б) Как изменится ответ, если ряд Мудрецов бесконечен в обе стороны?

### 4.4. 2015-2016

**Индивидуальный тур**

1. Для разминки вспомним греческий алфавит!

   а) По-гречески — $\Sigma\omega\kappa\rho\alpha\tau\eta\varsigma$, а по-русски — ___________

   б) Изобразите прописные и строчные буквы: эта ___________, дзета ___________, вега ___________, шо ___________. Если такой буквы в греческом нет, то поставьте прочерк.

   в) Назовите буквы: $\tau$ ___________, $\theta$ ___________, $\xi$ ___________.

2. Подбрасываются 2 симметричные монеты. Событие $A$ — на первой монете выпал герб, событие $B$ — на второй монете выпал герб, событие $C$ — монеты выпали разными сторонами.

   а) Будут ли эти события попарно независимы?

   б) Сформулируйте определение независимости в совокупности для трех событий

   в) Являются ли события $A$, $B$, $C$ независимыми в совокупности?

3. Имеются два игральных кубика: **красный** со смещенным центром тяжести, так что вероятность выпадения «6» равняется $1/3$, а оставшиеся грани имеют равные шансы на появление и правильный **белый** кубик. Петя случайным образом выбирает кубик и подбрасывает его.

   а) Вероятность того, что выпадет «6», равна ___________

   б) Вероятность того, что Петя взял красный кубик, если известно, что выпала шестерка, равна ___________

   в) Если бы в эксперименте Петя подбрасывал бы кубик не один раз, а 60 раз, то безусловное математическое ожидание количества выпавших шестёрок равнялось бы ___________

4. Винни-Пуху снится сон, будто он спустился в погреб, а там бесконечное количество горшков. Каждый из них независимо от других может оказаться либо пустым с вероятностью $0.8$, либо с мёдом с вероятностью $0.2$. Винни-Пух начинает перебирать горшки по очереди в поисках полного. Хотя у него в голове и опилки, Винни-Пух два раза в один и тот же горшок заглядывать не будет.

   а) Вероятность того, что все горшки окажутся пустыми равна ___________

   б) Вероятность того, что полный горшок будет найден ровно с шестой попытки, равна ___________

   в) Вероятность того, что полный горшок будет найден на шестой попытке или ранее, равна ___________

5. На самом деле у Винни-Пуха в погребе стоит 10 горшков. Каждый из них независимо от других может оказаться либо пустым с вероятностью $0.8$, либо с мёдом с вероятностью $0.2$.

   а) Все десять горшков окажутся пустыми с вероятностью ___________

   б) Ровно 7 горшков из десяти окажутся пустыми с вероятностью ___________

   в) Математическое ожидание числа горшков с мёдом равно ___________

6. В галактике Флатландии все объекты двумерные. На планету Тау-Слона (окружность) в случайных точках независимо друг от друга садятся три корабля. Любые два корабля могут поддерживать прямую связь между собой, если центральный угол между ними меньше прямого.

   а) Вероятность того, что первый и второй корабли могут поддерживать прямую связь равна ___________

   б) Вероятность того, что все корабли смогут поддерживать прямую связь друг с другом равна ___________

   в) Вероятность того, что все корабли смогут поддерживать прямую связь друг с другом, если первый и второй корабль могут поддерживать прямую связь, равна ___________

Подсказка: во Флатландии хватит рисунка на плоскости, ведь координату третьего корабля можно принять за...

7. Время (в часах), за которое студенты выполняют экзаменационное задание является случайной величиной $X$ с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{если } x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   а) Функция распределения случайной величины $X$ равна __________
   б) Вероятность того, что случайно выбранный студент закончит работу менее чем за полчаса равна __________.
   в) Медиана распределения равна __________
   г) Вероятность того, что студент, которому требуется по меньшей мере 15 минут для выполнения задания, справится с ним более, чем за 30 минут, равна __________
   д) Функция распределения случайной величины $Y = 1/X$ равна __________
   е) Функция плотности случайной величины $Y = 1/X$ равна __________

**Командный тур**

1. Восьминогий Кракен. У Кракена 8 ног-шупалец. Если отрубить одно щупальце, то в замен него с вероятностью $1/4$ вырастает новое; с вероятностью $1/4$ вырастает два новых; с вероятностью $1/2$, слава Океану, не вырастает ничего.

   Против Кракена бьётся сам Капитан! Он наносит точные удары и безупречно умело уворачивается от ударов Кракена.

   а) Какова вероятность того, что Капитан победит, отрубив ровно 10 щупалец?
   б) Какова вероятность того, что бой Кракена и Капитана продлится вечно?
   в) Сколько щупалец в среднем отрубит Капитан прежде чем победит?

2. Разбавленный ром. Пират Злопамятный Джо очень любит неразбавленный ром. Из-за того, что он много пьёт, у него проблемы с памятью, и он помнит не больше, чем три последних пинты. Хозяин таверны с вероятностью $1/4$ разбавляет каждую подаваемую пинту рома. Если по ощущением Джо половина выпитых пинт или больше была разбавлена, то он разносит таверну к чертям собачьим.

   а) Какова вероятность того, что хозяин таверны не успеет подать Джо третью пинту рома?
   б) Сколько в среднем пинт выпьет Джо, прежде чем разнесёт таверну?

3. $XY$ в степени $Z$. Чтобы поступить на службу Её Величества, пиратам предлагается следующая задача. Случайные величины $X$, $Y$ и $Z$ равномерны на отрезке $[0;1]$ и независимы.

   а) Найдите функцию распределения случайной величины $-\ln X$
   б) Найдите функцию распределения случайной величины $-(\ln X + \ln Y)$
   в) Найдите функцию распределения случайной величины $-Z(\ln X + \ln Y)$
   г) Какое распределение имеет случайная величина $(XY)^Z$?

4. Тортики. Пираты очень любят тортики и праздновать день рождения! Если хотя бы у одного пирата на корабле день рождения, то все, включая капитана, празднуют и кушают тортики. Корабль в праздничный день дрейфует под действием ветра и не факт, что в нужном направлении.

   а) Сколько пиратов нужно нанять капитану, чтобы ожидаемое количество праздничных дней было равно 100?
   б) Сколько пиратов нужно нанять капитану, чтобы максимизировать ожидаемое количество рабочих пирато-дней (произведение числа пиратов на число рабочих дней)?

5. Девятый вал. На побережье пиратского острова одна за одной набегают волны. Высота каждой волны — равномерная на $[0;1]$ случайная величина. Высоты волн независимы. Пираты называют волну «большой», если она больше предыдущей и больше следующей. Пираты называют волну «рекордной», если она больше всех предыдущих волн от начала наблюдения. Обозначим события $B_i = \{i\text{-ая волна была большой}\}$ и $R_i = \{i\text{-ая волна была рекордной}\}$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(R_{100})$, $\mathbb{P}(B_{100})$

   б) Капитан насчитал 100 волн. Сколько в среднем из них были «рекордными»?

   в) Найдите $\mathbb{P}(R_{99}|R_{100})$, $\mathbb{P}(R_{100}|B_{100})$

6. Три сундука. Три пирата, Генри Рубинов, Френсис Пиастров и Эдвард Золотов играют одной командой в игру. В комнате в ряд, слева направо, стоят в случайном порядке три закрытых внешне неотличимых сундука: с рубинами, пиастрами и золотом. Общаться после начала игры они не могут, но могут заранее договориться о стратегии. Они заходят в комнату по очереди. Каждый из них может открыть два сундука по своему выбору. После каждого пирата комната возвращается уборщицей идеально точно в исходное состояние. Если Рубинов откроет коробку с рубинами, Писатров — с пиастрами, а Золотов — с золотом, то их команда выигрывает. Если хотя бы один из пиратов не найдёт свою цель, то их команда проигрывает.

   а) Какова вероятность выигрыша, если все пираты пробуют открыть первый и второй сундуки?

   б) Какова оптимальная стратегия?

   в) Какова вероятность выигрыша при использовании оптимальной стратегии?

## 4.5. 2014-2015

**Часть 1**

1. Вася купил два арбуза у торговки тёти Маши и один арбуз у торговки тёти Оли. Арбузы у тёти Маши спелые с вероятностью 90% (независимо друг от друга), арбузы у тёти Оли спелые с вероятностью 70%.

   а) Какова вероятность того, что все Васины арбузы спелые?

   б) Придя домой Вася выбрал случайным образом один из трех арбузов и разрезал его. Какова вероятность того, что это арбуз от тёти Маши, если он оказался спелым?

   в) Какова вероятность того, что второй и третий съеденные Васей арбузы были от тёти Маши, если все три арбуза оказались спелыми?

2. В большой большой стране живет очень большое количество $n$ семей. Количества детей в разных семьях независимы. Количество детей в каждой семье — случайная величина с распределением заданным табличкой:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=x)$ | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.4 |

   а) Исследователь Афанасий выбирает одну семью из всех семей наугад, пусть $X$ — число детей в этой семье. Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$.

   б) Исследователь Бенедикт выбирает одного ребенка из всех детей наугад, пусть $Y$ — число детей в семье этого ребёнка. Как распределена величина $Y$? Что больше, $\mathbb{E}(Y)$ или $\mathbb{E}(X)$?

3. Функция плотности случайной величины $X$ имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & \text{если } x\in[0;2]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

   а) Не производя вычислений найдите $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

   б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(X)$

   в) Найдите $\mathbb{P}(X>1.5)$, $\mathbb{P}(X>1.5 \mid X>1)$

   г) При каком $c$ функция $g(x)=cxf(x)$ будет функцией плотности некоторой случайной величины?

4. Известно, что $\mathbb{E}(Z)=-3$, $\mathbb{E}\left(Z^2\right)=15$, $\mathrm{Var}(X+Y)=20$ и $\mathrm{Var}(X-Y)=10$.

   а) Найдите $\mathrm{Var}(Z)$, $\mathrm{Var}(4-3Z)$ и $\mathbb{E}\left(5+3Z-Z^2\right)$.

   б) Найдите $\mathrm{Cov}(X,Y)$ и $\mathrm{Cov}(6-X,3Y)$.

   в) Можно ли утверждать, что случайные величины $X$ и $Y$ независимы?

5. Листая сборник задач по теории вероятностей Вася наткнулся на задачу:

   Какова вероятность того, что наугад выбранный ответ на этот вопрос окажется верным?
   1) 0.25 2) 0.5 3) 0.6 4) 0.25

   Чему же равна вероятность выбора верного ответа?

6. Книга в 500 страниц содержит 400 опечаток. Предположим, что каждая из них независимо от остальных опечаток может с одинаковой вероятностью оказаться на любой странице книги.

   а) Определите вероятность того, что на 13-й странице будет не менее двух опечаток, в явном виде и с помощью приближения Пуассона.

   б) Определите наиболее вероятное число, математическое ожидание и дисперсию числа опечаток на 13-ой странице.

в) Является ли 13-ая страница более «несчастливой», чем все остальные (в том смысле, что на 13-ой странице ожидается большее количество очепяток, чем на любой другой)?

7. Вася случайным образом посещает лекции по ОВП (Очень Важному Предмету). С вероятностью 0.9 произвольно выбранная лекция полезна, и с вероятностью 0.7 она интересна. Полезность и интересность — независимые друг от друга и от номера лекции свойства. Всего Вася прослушал 30 лекций.

   а) Определите математическое ожидание и дисперсию числа полезных лекций, прослушанных Васей

   б) Определите математическое ожидание числа одновременно бесполезных и неинтересных лекций, прослушанных Васей, и математическое ожидание числа лекций, обладающих хотя бы одним из свойств (полезность, интересность).

8. Функция распределения случайной величины X задана следующей формулой:

$$F(x) = \frac{ae^x}{1+e^x} + b$$

Определите: константы $a$ и $b$, математическое ожидание и третий начальный момент случайной величины $X$, медиану и моду распределения.

**Часть 2**

1. Маша подкидывает кубик до тех пор, пока два последних броска в сумме не дадут[2] 12. Обозначим случайные величины: $N$ — количество бросков, а $S$ — сумма набранных за всю игру очков.

   а) Найдите $\mathbb{P}(N=2)$, $\mathbb{P}(N=3)$

   б) Найдите $\mathbb{E}(N)$, $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{E}(N^2)$

   в) Пусть $X_N$ — результат последнего броска. Как распределена случайная величина $X_N$?

2. В столовую пришли 30 студентов и встали в очередь в случайном порядке. Среди них есть Вовочка и Машенька. Пусть $V$ — это количество человек в очереди перед Вовочкой, а $M \geqslant 0$ — количество человек между Вовочкой и Машенькой.

   а) Найдите $\mathbb{P}(V=1)$, $\mathbb{P}(M=1)$, $\mathbb{P}(M=V)$

   б) Найдите $\mathbb{E}(V)$, $\mathbb{E}(M)$, $\mathrm{Var}(M)$

3. Польский математик Стефан Банах имел привычку носить в каждом из двух карманов пальто по коробку спичек. Всякий раз, когда ему хотелось закурить трубку, он выбирал наугад один из коробков и доставал из него спичку. Первоначально в каждом коробке было по $n$ спичек. Но когда-то наступает момент, когда выбранный наугад коробок оказывается пустым.

   а) Какова вероятность того, что в другом коробке в этот момент осталось ровно $k$ спичек?

   б) Каково среднее количество спичек в другом коробке?

4. Производитель чудо-юдо-йогуртов наклеивает на каждую упаковку одну из 50 случайно выбираемых наклеек. Покупатель собравший все виды наклеек получает приз от производителя. Пусть $X$ — это количество упаковок йогурта, которое нужно купить, чтобы собрать все наклейки.

   Найдите $\mathbb{P}(X=50)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$

   Hint: $\ln(50) \approx 3.91$, а $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ :)

5. В самолете $n$ мест и все билеты проданы. Первой в очереди на посадку стоит Сумасшедшая Старушка. Сумасшедшая Старушка несмотря на билет садиться на случайно выбираемое место. Каждый оставшийся пассажир садится на своё место, если оно свободно и на случайное выбираемое место, если его место уже кем-то занято.

[2] Изначально вместо 12 задумывалось число 10, но опечатка была замечена поздно, поэтому решение приводится для 12.

а) Какова вероятность того, что все пассажиры сядут на свои места?

б) Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на своё место?

в) Чему примерно равно среднее количество пассажиров севших на свои места?

## 4.6. 2013-2014

**Часть 1**

1. В жюри три человека, они должны одобрить или не одобрить конкурсанта. Два члена жюри независимо друг от друга одобряют конкурсанта с одинаковой вероятностью $p$. Третий член жюри для вынесения решения бросает правильную монету. Окончательное решение выносится большинством голосов.

   а) С какой вероятностью жюри одобрит конкурсанта?

   б) Что выгоднее для конкурсанта: чтобы решение принимало данное жюри, или чтобы решение принимал один человек, одобряющий с вероятностью $p$?

2. Вероятность застать Васю на лекции зависит от того, пришли ли на лекцию Маша и Алена. Данная вероятность равна $p$, если девушек нет; $5p$ — если обе девушки пришли на лекцию; $3p$ — если пришла только Маша и $2p$ — если пришла только Алена. Маша и Алена посещают лекции независимо друг от друга с вероятностями $0.6$ и $0.3$ соответственно.

   а) Определите вероятность того, что на лекции присутствует Алёна, если в аудитории есть Вася.

   б) Кого чаще можно застать на тех лекциях, на которых присутствует Вася: Машу или Алёну?

   в) При каком значении $p$ Вася посещает половину всех лекций?

3. Страховая компания страхует туристов, выезжающих за границу, от невыезда и наступления страхового медицинского случая за границей. Застраховано 100 туристов. Вероятность «невыезда» за границу случайно выбранного туриста — $0.002$, а страховые выплаты в этом случае — 2000 у.е.; вероятность обращения за медицинской помощью за границей — $0.01$, а страховые выплаты — 3000 у.е.

   а) Определите вероятность того, что ровно пятеро туристов не смогут выехать за границу.

   б) Найдите математическое ожидание, дисперсию и наиболее вероятное число не выехавших туристов.

   в) Вычислите математическое ожидание и дисперсию величины совокупных страховых выплат

   г) Вычислите ковариацию между выплатами по двум видам страхования.

4. Известно, что $\mathbb{E}(X) = -1$, $\mathbb{E}(Y) = 1$, $\mathrm{Var}(X) = 9$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Corr}(X, Y) = 1$. Найдите

   а) $\mathbb{E}(Y - 2X - 3)$, $\mathrm{Var}(Y - 2X - 3)$

   б) $\mathrm{Corr}(Y - 2X - 3, X)$

   в) Можно ли выразить $Y$ через $X$? Если да, то запишите уравнение связи.

5. Совместное распределение доходов акций двух компаний $Y$ и $X$ задано в виде таблицы

| | $X = -1$ | $X = 0$ | $X = 1$ |
|---|---|---|---|
| $Y = -1$ | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| $Y = 1$ | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

   Найдите:

   а) Частные распределения случайных величин $X$ и $Y$

   б) $\mathrm{Cov}(X, Y)$

   в) Можно ли утверждать, что случайные величины $X$ и $Y$ зависимы?

   г) У инвестора портфель, в котором доля акций $X$ составляет $\alpha$, а доля акций $Y$ — $(1 - \alpha)$. Каковы должны быть доли, чтобы риск портфеля (дисперсия дохода) был бы минимальным?

   д) Условное распределение случайной величины $X$ при условии $Y = -1$.

   е) Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(X \mid Y = -1)$

6. Докажите, что из сходимости в среднем порядка $s > 0$ следует сходимость по вероятности.

**Часть 2**

1. Муравей находится внутри спичечного коробка, в вершине $A$. В противоположной вершине $B$ есть маленькая дырочка, через которую муравей сможет выбраться на поверхность. В вершине $C$, соседней с вершиной $A$, лежит крупинка сахара. Муравей ползает только по рёбрам коробка, выбирая каждый раз равновероятно одно из доступных в вершине рёбер наугад. Например, он может поползти обратно.

   а) Какова вероятность того, что муравей найдет крупинку сахара до того, как выберется?

   б) Сколько в среднем перемещений понадобится муравью, чтобы выбраться?

   в) Какова дисперсия количества перемещений, которые понадобятся муравью, чтобы выбраться?

2. В очереди стояло 20 человек, когда касса внезапно закрылась. Поэтому 10 случайных людей из очереди решили покинуть очередь. В результате этого очередь оказалась разбита на случайное число кусков $X$. Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$.

3. Предположим, что три возможных генотипа aa, Aa и AA изначально встречаются с частотами $p_1$, $p_2$ и $p_3$, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Ген не сцеплен с полом, поэтому частоты $p_1$, $p_2$ и $p_3$ одинаковы для мужчин и для женщин.

   а) У семейных пар из этой популяции рождаются дети. Назовём этих детей первым поколением. Каковы частоты для трёх возможных генотипов в первом поколении?

   б) У семейных пар первого поколения тоже рождаются дети. Назовём этих детей вторым поколением. Каковы частоты для трёх возможных генотипов во втором поколении?

   в) Каковы частоты для трёх возможных генотипов в $n$-ном поколении?

   г) Заметив явную особенность предыдущего ответа сформулируйте теорему о равновесии Харди-Вайнберга. Прокомментируйте утверждение: «Любой рецессивный ген со временем исчезнет».

4. Световая волна может быть разложена на две поляризованные составляющие, вертикальную и горизонтальную. Поэтому состояние отдельного поляризованного фотона может быть описано[3] углом $\alpha$. Поляризационный фильтр описывается углом поворота $\theta$. Фотон в состоянии $\alpha$ задерживается поляризационным фильтром с параметром $\theta$ с вероятностью $p = \sin^2(\alpha - \theta)$ или проходит сквозь фильтр с вероятностью $1 - p$, переходя при этом в состояние $\theta$.

   а) Какова вероятность того, что поляризованный фотон в состоянии $\alpha$ пройдёт сквозь фильтр с параметром $\theta = 0$?

   б) Имеется два фильтра и поляризованный фотон в состоянии $\alpha$. Первый фильтр — с $\theta = 0$, второй — с $\theta = \pi/2$. Какова вероятность того, что фотон пройдет через оба фильтра?

   в) Имеется три фильтра и поляризованный фотон в состоянии $\alpha$. Первый фильтр — с $\theta = 0$, второй — с $\theta = \beta$, третий — с $\theta = \pi/2$. Какова вероятность того, что фотон пройдет через все три фильтра? При каких $\alpha$ и $\beta$ она будет максимальной и чему при этом она будет равна?

   г) Объясните следующий фокус. Фокусник берет два специальных стекла и видно, что свет сквозь них не проходит. Фокусник ставит между двумя стёклами третье, и свет начинает проходить через три стекла.

[3] На самом деле внутренний мир фотона гораздо разнообразнее.

# 5. Контрольная работа 2

## 5.1. 2018-2019

1. В шляпе лежат четыре игральные карты: тройка, семерка, туз и пиковая дама. Наудачу из шляпы извлекается одна карта. Рассмотрим две случайные величины

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если выпал туз,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{если выпала пиковая дама,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

   а) Составьте таблицу совместного распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$ (3 балла)
   Найдите

   б) $\mathbb{E}(\xi)$ и $\mathbb{E}(\eta)$ (1 балл)

   в) $\mathrm{Cov}(\xi,\, \eta)$ (2 балла)

   г) $\mathbb{P}\big(\xi = 1 | \eta = 0\big)$ и $\mathbb{P}\big(\xi = 0 | \eta = 0\big)$ (1 балл)

   д) $\mathbb{E}\big(\xi | \eta = 0\big)$ (1 балл)

   е) Постройте таблицу распределения случайной величины $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ (3 балла)

2. В финал по стрельбе из лука вышло два лучника. Лучник зарабатывает одно очко, если попадает в яблоко с 20 метров. Первый лучник попадает с вероятностью 0.5, а второй — с вероятностью 0.6. Каждый стрелок делает по 50 выстрелов. Победившим считается стрелок, который наберет большее число очков. Используя центральную предельную теорему найдите вероятность того, что

   а) Первый стрелок заработает не менее 15 очков (5 баллов)

   б) Победит первый стрелок (7 баллов)

3. Вася ходит обедать в студенческую столовую. В среднем на обед он тратит 300 рублей со стандартным отклонением 30 рублей. Оцените сверху вероятность того, что

   а) Вася потратит на обед более тысячи рублей (2 балла)

   б) Сумма, потраченная Васей на обед, будет отличаться от 300 рублей более, чем на 100 рублей (3 балла)

4. Чтобы добраться до Вышки Вася едет на трамвае. Время ожидания трамвая $T_1$ и время поездки на трамвае $T_2$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 20]$ и $[10, 20]$ минут. Найдите:

   а) Математическое ожидание и дисперсию общего времени поездки $T_1 + T_2$ (3 балла)

   б) Вероятность того, что Вася доберётся до Вышки не более, чем за 15 минут (4 балла)

   в) Плотность распределения общего времени поездки $T_1 + T_2$ (7 баллов)

5. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ — независимые стандартные нормальные случайные величины и $\eta = \xi_1\, \xi_2\, \xi_3$. Найдите

   а) $\mathbb{E}(\eta)$ (2 балла)

   б) $\mathrm{Var}(\eta)$ (3 балла)

   в) $\mathbb{P}(e^{\xi_1} < 1)$ (3 балла)

6. Сибирский крокодил Утундрий решил заняться риск-менеджментом. В этот раз он изучает теорию эффективных портфелей ценных бумаг. Пусть $R_1$, $R_2$ и $R_3$ — доходности трёх ценных бумаг. Утундрий обладает следующей информацией:

$$\mathbb{E}(R_1) = 5, \quad \mathbb{E}(R_2) = 10, \quad \mathbb{E}(R_3) = 15,$$

$$\text{Var}(R_1) = 50, \quad \text{Var}(R_2) = 100, \quad \text{Var}(R_3) = 150,$$
$$\text{Cov}(R_1, R_2) = 20, \quad \text{Cov}(R_1, R_3) = -10, \quad \text{Cov}(R_2, R_3) = -10.$$

Крокодил Утундрий знает, что $w_1$, $w_2$ и $w_3$, доли первой, второй и третьей ценных бумаг в портфеле, неотрицательны и в сумме дают единицу, а кроме того:

- *доходность* этого портфеля вычисляется по формуле $R := w_1 R_1 + w_2 R_2 + w_3 R_3$,
- *ожидаемая доходность* этого портфеля есть $\mathbb{E}(R)$,
- *риск* данного портфеля определяется как $\sqrt{\text{Var}(R)}$.

Утундрий составил два портфеля $A$ и $B$. Доли ценных бумаг, которые входят в портфель $A$ задаются вектором $w_A = (1/2, 1/2, 0)$, а в портфель $B$ — вектором $w_B = (0, 1/2, 1/2)$. Помогите Утундрию ответить на следующие вопросы.

а) Найдите ожидаемые доходности портфелей $A$ и $B$ (1 балл)

б) Найдите риски портфелей $A$ и $B$ (3 балла)

в) Какой из портфелей $A$ или $B$ имеет большую ожидаемую доходность, а какой — меньший риск (1 балл)

г) Найдите коэффициент корреляции между доходностями портфелей $A$ и $B$ (4 балла)

д) Предложите собственный портфель (доли $w_1$, $w_2$ и $w_3$), обладающий доходностью не меньшей, чем портфели $A$ и $B$, но меньшим риском (5 баллов)

Рис. 2: Утундрий!

7. Для произвольно выбранного студента вероятность того, что он «дойдёт» до устной части экзамена по Теории Вероятностей составляет 0.1. Время ответа (в часах) на устном части подчинено показательному распределению с параметром 2. Для курса из 300 человек найдите математическое ожидание совокупного времени ответов студентов на устном экзамене (6 баллов).

   **Подсказка**: Если случайная величина $V$ – число студентов, пришедших на устный экзамен, а $\tau_i$ — время ответа $i$-го студента, то требуется найти $\mathbb{E}(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_V)$.

## 5.2. 2017-2018

### Минимум

1. Приведите определение условной вероятности случайного события, формулу Байеса.
2. Сформулируйте определение и свойства функции плотности случайной величины.
3. Сформулируйте определение условного математического ожидания $\mathbb{E}(Y|X = x)$ для совместного дискретного и совместного абсолютно непрерывного распределений.
4. Сформулируйте неравенство Чебышёва и неравенство Маркова.
5. Задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$.

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=1$ |
|---|---|---|---|
| $X=0$ | 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| $X=1$ | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

   а) Найдите $F_{X,Y}(0,0)$;
   б) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y^2)$;
   в) Найдите $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$;
   г) Найдите $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Corr}(X,Y)$

6. Плотность распределения случайного вектора $(X,Y)$ имеет вид

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x+10y}{7}, & \text{при } (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0, & \text{при } (x,y) \notin [0;1] \times [0;1] \end{cases}$$

   а) Найдите $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$;
   б) Найдите функцию плотности $f_X(x)$;
   в) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ и $\mathrm{Cov}(X,Y)$;
   г) Являются ли случайные величины $X$ и $Y$ независимыми?

### Задачи

7. Статистика авиакомпании «А» за много лет свидетельствует о том, что 10% людей, купивших билет на самолет, не являются на рейс. Авиакомпания продала 330 билетов на 300 мест.
   а) Какова вероятность, что всем явившимся на рейс пассажирам хватит места?
   б) Укажите наибольшее число билетов, которое можно продавать на 300 мест, чтобы случаи переполнения случались не чаще, чем на одном из десяти рейсов.
8. Сегодня акция компании «Ух» стоит 1 рубль. Каждый день акция может с вероятностью 0.7 вырасти на 1%, с вероятностью 0.2999 упасть на 1% и с вероятностью 0.0001 обесцениться (упасть на 100%).
   а) Считая изменение цены акции независимыми, найдите математическое ожидание её стоимости через 20 торговых дней.
   б) Найдите предел по вероятности среднего изменения цены акции в процентах на бесконечном промежутке времени (Ответ обоснуйте).
   в) Найдите математическое ожидание цены акции на бесконечном промежутке времени.
   г) Инвестор вложил все свои средства в акции компании «Ух». Найдите вероятность его разорения на бесконечном промежутке времени.

### 5.3. 2016-2017

**Неравенства Берри–Эссеена**: Для любых $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка:

$$\left|F_{S_n^*}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant 0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|\xi_i - \mathbb{E}\,\xi_i|^3)}{\mathrm{Var}^{3/2}(\xi_i) \cdot \sqrt{n}},$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $\quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$, $\quad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

**Распределение Пуассона**: Случайная величина $\xi$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает целые неотрицательные значения с вероятностями $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Приличным студентам должно быть известно, что в этом случае $\mathbb{E}(\xi) = \mathrm{Var}(\xi) = \lambda$.

1. Пусть $\mathbb{E}(\xi) = 1$, $\mathbb{E}(\eta) = -2$, $\mathrm{Var}(\xi) = 1$, $\mathbb{E}(\eta^2) = 8$, $\mathbb{E}(\xi\eta) = -1$. Найдите

   а) $\mathbb{E}(2\xi - \eta + 1)$, $\mathrm{Cov}(\xi,\, \eta)$, $\mathrm{Corr}(\xi,\, \eta)$, $\mathrm{Var}(2\xi - \eta + 1)$;

   б) $\mathrm{Cov}(\xi + \eta,\, \xi + 1)$, $\mathrm{Corr}(\xi + \eta,\, \xi + 1)$, $\mathrm{Corr}(\xi + \eta - 24,\, 365 - \xi - \eta)$, $\mathrm{Cov}(2016 \cdot \xi,\, 2017)$.

2. Совместное распределение доходностей акций двух компаний задано с помощью таблицы:

| | $\eta = -1$ | $\eta = 1$ |
|---|---|---|
| $\xi = -1$ | 0.1 | 0.2 |
| $\xi = 0$ | 0.2 | 0.2 |
| $\xi = 2$ | 0.2 | 0.1 |

   а) Найдите частные распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$.

   б) Найдите $\mathrm{Cov}(\xi,\, \eta)$.

   в) Сформулируйте определение независимости дискретных случайных величин.

   г) Являются ли случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимыми?

   д) Найдите условное распределение случайной величины $\xi$, если $\eta = 1$.

   е) Найдите условное математическое ожидание случайной величины $\xi$, если $\eta = 1$.

   ж) Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $\pi = 0.5\,\xi + 0.5\,\eta$.

   з) Рассмотрим портфель, в котором $\alpha$ — доля акций с доходностью $\xi$ и $(1 - \alpha)$ — доля акций с доходностью $\eta$. Доходность этого портфеля есть случайная величина

$$\pi(\alpha) = \alpha\xi + (1 - \alpha)\eta.$$

   Найдите такую долю $\alpha \in [0;\, 1]$, при которой доходность портфеля $\pi(\alpha)$ имеет наименьшую дисперсию.

3. Число посетителей сайта pokrovka11.wordpress.com за один день имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием 250.

   а) Сформулируйте неравенство Маркова. При помощи данного неравенства оцените вероятность того, что за один день сайт посетят более 500 человек.

   б) Сформулируйте неравенство Чебышева. Используя данное неравенство, определите наименьшее число дней, при котором с вероятностью не менее 99% среднее за день число посетителей будет отличаться от 250 не более чем на 10.

   в) Решите предыдущий пункт с помощью центральной предельной теоремы.

   г) Сформулируйте закон больших чисел. Обозначим через $\xi_i$ число посетителей сайта за $i$-ый день. Найдите предел по вероятности последовательности $\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}$ при $n \to \infty$.

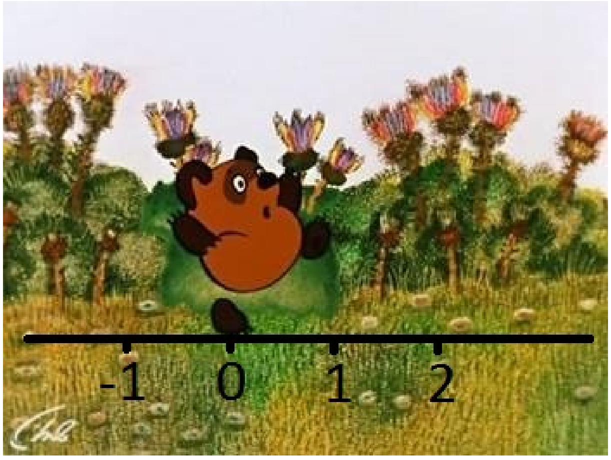



Рис. 3: Случайные бродилки.

4. Отведав медовухи, Винни–Пух совершает случайное блуждание на прямой. Он стартует из начала координат и в каждую следующую минуту равновероятно совершает шаг единичной длины налево или направо. Передвижения Винни-Пуха схематично изображены на следующем рисунке.

   а) Сформулируйте центральную предельную теорему.

   б) При помощи центральной предельной теоремы оцените вероятность того, что ровно через час блужданий Винни-Пух окажется в области $(-\infty;\, -5]$.

   в) Используя неравенство Берри–Эссеена оцените погрешность вычислений предыдущего пункта.

5. Случайные величины $\xi$ и $\eta$ означают время безотказной работы рулевого управления и двигателя автомобиля соответственно. Время измеряется в годах. Совместная плотность имеет вид:

$$f_{\xi,\eta}(x,\, y) = \begin{cases} 0.005\, e^{-0.05\, x - 0.1\, y} & \text{при } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

   а) Найдите частные плотности распределения случайных величин $\xi$ и $\eta$.

   б) Являются ли случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимыми?

   в) Найдите вероятность того, что двигатель прослужит без сбоев более пяти лет.

   г) Найдите вероятность того, что двигатель прослужит без сбоев более восьми лет, если он уже проработал без сбоев три года.

   д) Найдите условное математическое ожидание безотказной работы рулевого управления, если двигатель проработал без сбоев пять лет, $\mathbb{E}(\xi|\eta = 5)$.

   е) Найдите вероятность того, что рулевое управление проработает без сбоев на два года больше двигателя, $\mathbb{P}(\{\xi - \eta > 2\})$.

6. Бонусная задача

   Случайная величина $\xi$ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}.$$

   а) Найдите $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{E}\left(\xi^2\right)$, $\mathrm{Var}(\xi)$.

   б) Покажите, что функция $f_\xi(x)$, действительно, является плотностью распределения.

## 5.4. 2015-2016

1. Функция плотности случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.5x + 1.5y, \text{ если } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

   Найдите:

   а) Математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi_1 \cdot \xi_2)$

   б) Условную плотность распределения $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y)$

   в) Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y)$

   г) Константу $k$, такую, что функция $h(x,y) = kx \cdot f(x,y)$ будет являться совместной функцией плотности некоторой пары случайных величин

2. На курсе учится очень много студентов. Вероятность того, что случайно выбранный студент по результатам рубежного контроля имеет хотя бы один незачет равна 0.2. Пусть $\xi$ и $\eta$ — число студентов с незачетами и без незачетов в случайной группе из 10 студентов. Найдите $\text{Cov}(\xi, \eta)$, $\text{Corr}(\xi, \eta)$, $\text{Cov}(\xi - \eta, \xi)$. Являются ли случайные величины $\xi - \eta$ и $\xi$ независимыми?

3. Доходности акций компаний A и B – случайные величины $\xi$ и $\eta$. Известно, что $\mathbb{E}(\xi) = 1$, $E(\eta) = 1$, $\text{Var}(\xi) = 4$, $\text{Var}(\eta) = 9$, $\text{Corr}(\xi, \eta) = -0.5$. Петя принимает решение потратить свой рубль на акции компании A, Вася — 50 копеек на акции компании A и 50 копеек на акции компании B, а Маша принимает решение вложить свой рубль в портфель $R = \alpha\xi + (1 - \alpha)\eta$, $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, обладающий минимальным риском. Найдите $\alpha$, ожидаемые доходности и риски портфелей Пети, Васи и Маши.

4. Будем считать, что рождение мальчика и девочки равновероятны.

   а) Оцените с помощью неравенства Маркова вероятность того, что среди тысячи новорожденных младенцев, мальчиков будет более 75%.

   б) Оцените с помощью неравенства Чебышёва вероятность того, что доля мальчиков среди тысячи новорожденных младенцев будет отличаться от 0.5 более, чем на 0.25

   в) С помощью теоремы Муавра-Лапласа вычислите вероятность из предыдущего пункта.

5. Сейчас валютный курс племени «Мумба» составляет 100 оболов за один рубль. Изменение курса за один день — случайная величина $\delta_i$ с законом распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\delta_i = x)$ | 0.25 | 0.5 | 0.25 |

   Найдите вероятность того, что через полгода (171 день) рубль будет стоить более 250 оболов, если ежедневные изменения курса происходят независимо друг от друга.

6. **Бонусная задача**

   Число посетителей, зашедших в магазин в течении дня — пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda$. Каждый из посетителей совершает покупку с вероятностью $p$, не зависимо от других посетителей. Найдите математическое ожидание числа человек, совершивших покупку.

## 5.5. 2014-2015

1. Ежемесячные расходы студенческой семьи Маши и Васи хорошо описываются случайным вектором $(X, Y)$, ($X$ — расходы Маши, $Y$ — расходы Васи), имеющим равномерное распределение в треугольнике, задаваемом ограничениями $\{0 \leqslant X,\ 0 \leqslant Y,\ X + Y \leqslant 1\}$.

   Найдите:

   а) Вероятность того, что совокупные расходы превысят половину бюджета, $\mathbb{P}(X + Y > 1/2)$

   б) Плотность распределения расходов Васи.

   в) Вероятность того, что Машины расходы составили менее трети бюджета, если известно, что Вася израсходовал более половины семейного бюджета.

   г) Условную плотность распределения и условное математическое ожидание расходов Маши, при условии, что Вася израсходовал половину бюджета.

   д) Математическое ожидание условного математического ожидания расходов Маши, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$

   е) Коэффициент корреляции расходов Маши и Васи

2. Задана последовательность независимых случайных величин $X_1$, $X_2$, ...

| $x_n$ | $-\sqrt{n}$ | $0$ | $\sqrt{n}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_n = x_n)$ | $1/2n$ | $1 - 1/n$ | $1/2n$ |

   а) Сформулируйте закон больших чисел. Выполняется ли для данной последовательности закон больших чисел?

   б) Запишите неравенство Чебышёва. Оцените вероятность того, что модуль среднего значения по $n$ наблюдениям не превысит 1, $\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \leqslant 1\right)$

   в) Сколько членов последовательности необходимо взять, чтобы вероятность того, что модуль среднего значения не превысит 1, была не менее 0.9, $\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \leqslant 1\right) \geqslant 0.9$

3. Размер выплат каждому клиенту банка — случайная величина с математическим ожиданием, равным 5000 ед. и среднеквадратическим отклонением, равным 2000 ед. Выплаты отдельным клиентам независимы. Сколько должно быть наличных денег в банке, чтобы с вероятностью 0.95 денег хватило на обслуживание 60 клиентов?

4. Рекламная компания хочет оценить вероятность $p$, с которой адресная реклама приводит к заявке. С этой целью она рассылает $n$ рекламных проспектов. Обозначим за $\hat{p}$ отношение числа поданных заявок к числу разосланных проспектов $n$. С помощью теоремы Муавра–Лапласа и неравенства Чебышёва определите:

   а) Сколько нужно разослать рекламных проспектов, для того чтобы $\hat{p}$ отличалось от истинной вероятности $p$ не более, чем на 0.1 с вероятностью не меньшей 0.99

   б) С какой точностью $\varepsilon$ удастся оценить $p$ с вероятностью 0.99, если разослана 1000 проспектов, то есть $\mathbb{P}(|\hat{p} - p| \leqslant \varepsilon) \geqslant 0.99$?

### 5.6. 2013-2014

Самая важная формула:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sqrt{\det(C)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T C^{-1}(x-\mu)}$$

Неравенство Берри-Эссеена:

$$|\hat{F}_n(x)-\Phi(x)|\leqslant\frac{C_0\,\mathbb{E}\,|X_n-\mu|^3}{\sigma^3\sqrt{n}},\quad 0.4<C_0<0.48$$

1. Совместная функция плотности случайной величины $(X,Y)$ имеет вид:

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & \text{при } x\in(0,1),\ y\in(0,1)\\ 0 & \text{иначе;}\end{cases}$$

   Найдите:

   а) $\mathbb{P}(Y<X^2)$
   б) функцию плотности и математическое ожидание случайной величины $X$
   в) условную функцию плотности и условное математическое ожидание случайной величины $X$ при условии, что $Y=2$

2. Случайный вектор $(X,Y)^T$ имеет двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $(0,0)^T$ и ковариационной матрицей

$$C=\begin{pmatrix}9 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

   ;

   Найдите:

   а) $\mathbb{P}(X>1)$
   б) $\mathbb{P}(2X+Y>3)$
   в) $\mathbb{P}(2X+Y>3|X=1)$
   г) $\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}>12\right)$
   д) Запишите совместную функцию плотности $(X,Y)^T$

3. Вычислите:

   а) $\mathbb{P}\left(\frac{X_1}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}>\frac{5}{4\sqrt{3}}\right)$
   б) $\mathbb{P}\left(\frac{X_1+2X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}<4.5\right)$
   в) $\mathbb{P}\left(\frac{X_1^2}{X_2^2+X_3^2}>17\right)$

4. Оценка за зачет по теории вероятности $i$-го студента — неотрицательная случайная величина $X_i$ с $\mathbb{E}(X_i)=1/2$ и $\mathrm{Var}(X_i)=1/12$. Для случайной выборки из 36 студентов оцените или вычислите следующие вероятности $\left(\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$:

   а) $\mathbb{P}(|X_i-0.5|\geqslant 0.3)$
   б) $\mathbb{P}(X_i\geqslant 0.8)$
   в) $\mathbb{P}(\bar{X}\geqslant 0.8)$
   Пусть дополнительно известно, что $X_i\sim U(0,1)$:

г) Вычислите вероятность $\mathbb{P}(|X_i - 0.5| \geqslant 0.3)$

д) Оцените погрешность вычисленной вероятности $\mathbb{P}(\bar{X} \geqslant 0.8)$

е) Покажите, что средняя оценка за экзамен сходится по вероятности к $0.5$

5. При проведении социологических опросов в среднем $20\,\%$ респондентов отказываются отвечать на вопрос о личном доходе. Сколько нужно опросить человек, чтобы с вероятностью $0.99$ выборочная доля отказавшихся отвечать на вопрос о доходе не превышала $0.25$? Насколько изменится ответ на предыдущий вопрос, если средний процент отказывающихся отвечать неизвестен?

6. Оценки за контрольную работу по теории вероятностей $6$ случайно выбранных студентов оказались равны: $8$, $4$, $5$, $7$, $3$, $9$.

   а) Выпишите вариационный ряд;

   б) Постройте выборочную функцию распределения;

   в) Вычислите значение выборочного среднего и выборочной дисперсии.

### 5.7. 2012-2013

1. Купчиха Сосипатра Титовна очень любит чаёвничать. Её чаепитие продолжается случайное время $S$, имеющее равномерное распределение от $0$ до $3$ часов. Встретив Сосипатру Титовну в пассаже на Петровке, её подруга Олимпиада Карповна узнала, сколько длилось вчерашнее чаепитие Сосипатры Титовны. Решив, что такая продолжительность чаепития является максимально возможной, Олимпиада Карповна устраивает чаепитие, продолжающееся случайное время $T$, имеющее равномерное распределение от $0$ до $S$ часов.

   а) Найдите совместную функцию плотности величин $S$ и $T$

   б) Найдите вероятность $\mathbb{P}(S > T)$

   в) Найдите $\mathbb{E}\left(T^2\right)$

2. Для случайно выбранного домохозяйства случайные величины $X$ и $Y$ принимают значения, равные доле расходов на продукты питания и алкоголь плюс табак соответственно. Случайный вектор $(X, Y)^T$ хорошо описывается двумерным нормальным законом распределения с математическим ожиданием $(0.45, 0.16)^T$ и ковариационной матрицей

$$C = 0.144 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{pmatrix}$$

   Найдите:

   а) Вероятность того, что домохозяйство тратит более половины своих доходов на питание.

   б) Вероятность того, что домохозяйство тратит более половины своих доходов на алкогольную и табачную продукцию и продукты питания.

   в) Ожидаемую долю расходов на алкоголь и табак для домохозяйства, которое тратит на питание четверть своих доходов.

   г) Вероятность того, что домохозяйство из предыдущего пункта тратит более трети с воих доходов на алкогольную и табачную продукцию.

   д) Для доли расходов на питание вычислите центральный момент 2013-го порядка.

3. Вычислите (или оцените) вероятность того, что по результатам $4000$ бросаний симметричной монеты, частота выпадения герба будет отличаться от $0.5$ не более, чем на $0.01$. Решите задачу с помощью неравенства Чебышёва и с помощью ЦПТ.

4. Компания кабельного телевидения НВТ, Новая Вершина Телевидения, анализирует возможность присоединения к своей сети пригородов N-ска. Опросы показали, что в среднем каждые 3 из 10 семей жителей пригородов хотели бы стать абонентами сети. Стоимость работ, необходимых для организации сети в любом пригороде оценивается величиной 2 080 000 у.е. При подключении каждого пригорода НВТ надеется получить 1 000 000 у.е. в год от рекламодателей. Планируемая чистая прибыль от оплаты за кабельное телевидение одной семьей в год равна 120 у.е.

   Каким должно быть минимальное количество семей в пригороде для того, чтобы с вероятностью $0.99$ расходы на организацию сети в этом пригороде окупились за год?

5. Оценки за контрольную работу по теории вероятностей 6 случайно выбранных студентов оказались равны 8, 5, 6, 7, 3, 9.

   а) Выпишите вариационный ряд

   б) Постройте график выборочной функции распределения

   в) Вычислите значение выборочного среднего и выборочной дисперсии.

## 5.8. 2011-2012

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Совместная функция плотности величин $X$ и $Y$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x^3+y^3), \text{ если } x \in [0;1], y \in [0;1] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

   а) Найдите $\mathbb{P}(X+Y>1)$
   б) Найдите $\text{Cov}(X,Y)$
   в) Являются ли величины $X$ и $Y$ независимыми?
   г) Являются ли величины $X$ и $Y$ одинаково распределенными?

2. Величины $X_1$ и $X_2$ независимы и равномерны на отрезке $[-b;b]$. Вася строит оценку для $b$ по формуле $\hat{b} = c \cdot (|X_1| + |X_2|)$.

   а) При каком $c$ оценка будет несмещенной?
   б) При каком $c$ оценка будет минимизировать средне-квадратичную ошибку, $MSE = \mathbb{E}\left((\hat{b}-b)^2\right)$?

3. Вася пишет 3 контрольные работы по микроэкономике, обозначим их результаты величинами $X_1$, $X_2$ и $X_3$. Кроме того, Вася пишет 3 контрольные работы по макроэкономике, обозначим их результаты величинами $Y_1$, $Y_2$ и $Y_3$. Предположим, что результаты всех контрольных независимы друг от друга. В среднем Вася пишет на один и тот же балл, $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(Y_i) = \mu$. Дисперсия результатов по микро — маленькая, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$, дисперсия результатов по макро — большая, $\text{Var}(Y_i) = 2\sigma^2$.

   а) Является ли оценка $\hat{\mu}_1 = (X_1+X_2+X_3+Y_1+Y_2+Y_3)/6$ несмещенной для $\mu$?
   б) Найдите самую эффективную несмещенную оценку вида $\hat{\mu}_2 = \alpha\bar{X} + \beta\bar{Y}$.

4. Каждую весну дед Мазай плавая на лодке спасает в среднем 9 зайцев, дисперсия количества спасённых зайцев за одну весну равна 9. Количество спасённых зайцев за разные года — независимые случайные величины. Точный закон распределения числа зайцев неизвестен.

   а) Оцените в каких пределах лежит вероятность того, что за три года дед Мазай спасёт от 20 до 34 зайцев.
   б) Оцените в каких пределах лежит вероятность того, что за одну весну дед Мазай спасёт более 11 зайцев.
   в) Используя нормальную аппроксимацию, посчитайте вероятность того, что за 50 лет дед Мазай спасёт от 430 до 470 зайцев.

5. Вектор $\vec{X} = (X_1; X_2)$ имеет совместное нормальное распределение

$$\vec{X} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}\right)$$

   а) Найдите $\mathbb{P}(X_1+X_2>1)$
   б) Какое совместное распределение имеет вектор $(X_1;Y)$, где $Y = X_1+X_2$?
   в) Какой вид имеет условное распределение случайной величины $X_1$, если известно, что $X_2 = 2$?

6. В большом-большом городе наугад выбирается $n$ человек. Каждый из них отвечает, любит ли он мороженое эскимо на палочке. Обозначим $\hat{p}$ долю людей в нашей выборке, любящих эскимо на палочке.

   а) Чему равно максимально возможное значение $\text{Var}(\hat{p})$?

б) Какое минимальное количество человек нужно опросить, чтобы вероятность того, что выборочная доля $\hat{p}$ отличалась от истинной доли более чем на $0.02$, была менее 10%?

7. Злобный препод приготовил для группы из 40 человек аж 10 вариантов, по 4 экземпляра каждого варианта. Случайная величина $X_1$ — номер варианта, доставшийся отличнице Машеньке, величина $X_2$ — номер варианта, доставшийся двоечнику Вовочке. Величина $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$ — среднее арифметическое этих номеров.

   а) Найдите $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathrm{Var}(X_1)$, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$

   б) Найдите $\mathbb{E}(\bar{X})$, $\mathrm{Var}(\bar{X})$

   в) Являются ли $X_1$ и $X_2$ одинаково распределенными?

   г) Являются ли $X_1$ и $X_2$ независимыми?

   Подсказка:
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Часть II**.

Стоимость задачи 20 баллов.

8. На заводе никто не работает, если хотя бы у одного работника день рождения. Сколько нужно нанять работников, чтобы максимизировать ожидаемое количество рабочих человеко-дней в году?

## 5.9. 2010-2011

1. Совместная плотность распределения случайных величин $X$ и $Y$ задана формулой:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)}$$

   Найти $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathbb{P}(X > Y-1)$.

2. Случайные величины $X$, $Y$, $Z$ независимы и стандартно нормально распределены. Вычислите $\mathbb{P}(X < \sqrt{2})$, $\mathbb{P}\left(\frac{|X|}{\sqrt{Y^2+Z^2}} > 1\right)$, $\mathbb{P}(X^2+Y^2 > 4)$.

3. Доходности акций двух компаний являются случайными величинами $X$ и $Y$, имеющими совместное нормальное распределение с математическим ожиданием $(2;2)^T$ и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

   Найти $\mathbb{P}\big(X > 0 \mid Y = 0\big)$.

   В каком соотношении нужно приобрести акции этих компаний, чтобы риск (дисперсия) получившегося портфеля был минимальным?

   *Подсказка:* если $R$ – доходность портфеля, то $R = \alpha X + (1-\alpha)Y$.

   Можно ли утверждать, что случайные величины $X+Y$ и $7X-2Y$ независимы?

4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределённые случайные величины с плотностью распределения $f(x) = \frac{3}{x^4}, x \geqslant 1$. Применим ли к данной последовательности закон больших чисел? С помощью неравенства Чебышева определить, сколько должно быть наблюдений в выборке, чтобы $\mathbb{P}\Big(|\bar{X} - \mathbb{E}(X)| > 0.1\Big) \leqslant 0.02$.

5. В большом-большом городе $N$ 80 % аудиокиосков торгуют контрафактной продукцией. Какова вероятность того, что в наугад выбранных 90 киосках более 60 будут торговать контрафактной продукцией? Каким должен быть объём выборки, чтобы выборочная доля отличалась от истинной менее чем на 0.02 с вероятностью 0.95?

6. У входа в музей в корзине лежат 20 пар тапочек 36-45 размера (по 2 пары каждого размера). Случайным образом из корзины вытаскивается 2 тапочка. Пусть $X_1$ – размер первого тапочка, $X_2$ – размер второго. Являются ли случайные величины $X_1$ и $X_2$ зависимыми? Какова их ковариация? Найти математическое ожидание и дисперсию среднего размера $\frac{X_1+X_2}{2}$.

7. В страховой компании «Ай» застрахованные автомобили можно условно поделить на 3 группы: недорогие (40 %), среднего класса (50 %) и дорогие (10 %). Из предыдущей практики известно, что средняя стоимость ремонта автомобиля зависит от его класса следующим образом:

| | Недорогие | Среднего класса | Дорогие |
|---|---|---|---|
| Математическое ожидание | 1 | 2.5 | 5 |
| Стандартная ошибка | 0.3 | 0.5 | 1 |

   В каком соотношении в выборке объёма $n$ должны быть представлены классы автомобилей, чтобы оценка средней стоимости ремонта (стратифицированное среднее) была наиболее точной?

8. Реализацией выборки $X = X_1; \ldots; X_6$ являются следующие данные: $-0.8; 2.9; 4.4; -5.6; 1.1; -3.2$. Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию, вариационный ряд и построить эмпирическую функцию распределения.

9. По выборке $X_1; \ldots; X_n$ из равномерного распределения $U \sim [0;\theta]$ с неизвестным параметром $\theta > 0$ требуется оценить $\theta$. Будут ли оценки $T_1 = 2\bar{X}$, $T_2 = (n+1)X_{(1)}$ несмещёнными? Какая из них является более точной (эффективной)? Являются ли эти оценки состоятельными?

10. Дополнительная задача (не является обязательной).

    Случайные величины $X$ и $Y$ независимы, причём $\mathbb{P}\big(X = k\big) = \mathbb{P}\big(Y = k\big) = pq^{k-1},\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p,\ k = 1; 2; \ldots$. Найти $\mathbb{P}\big(X = k \mid X + Y = n\big)$, $\mathbb{P}\big(Y = k \mid X = Y\big)$.

## 5.10. 2009-2010

1. В городе Туме проводят демографическое исследование семейных пар. Стандартное отклонение возраста мужа оказалось равным 5 годам, а стандартное отклонение возраста жены — 4 годам. Найдите корреляцию возраста жены и возраста мужа, если стандартное отклонение разности возрастов оказалось равным 2 годам.

2. Случайныйе величины X и Y независимы и стандартно нормально распределены. Вычислите $\mathbb{P}(X < \sqrt{3})$ и $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 6)$.

3. Про случайную величину $X$ известно, что $\mathbb{E}(X) = 16$ и $\text{Var}(X) = 12$.

   а) С помощью неравенства Чебышева оцените в каких пределах лежит вероятность $\mathbb{P}(|X - 16| > 4)$.

   б) Найдите вероятность $\mathbb{P}(|X - 16| > 4)$, если известно, что $X$ равномерна на $[10; 22]$.

   в) Найдите вероятность $\mathbb{P}(|X - 16| > 4)$, если известно, что $X$ нормально распределена.

4. Случайный вектор $(X; Y)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $(-1; 4)$ и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Найдите $\mathbb{P}(2X + Y > 1)$ и $\mathbb{P}(2X + Y > 1 \mid Y = 2)$.

5. Каждый день цена акции равновероятно поднимается или опускается на один рубль. Сейчас акция стоит 1000 рублей. Введем случайную величину $X_i$, обозначающую изменение курса акции за $i$-ый день. Найдите $\mathbb{E}(X_i)$ и $\text{Var}(X_i)$. С помощью центральной предельной теоремы найдите вероятность того, что через сто дней акция будет стоить больше 1010 рублей.

6. Дополнительная задача:

   Вася и Петя подбрасывают несимметричную монету. Вероятность выпадения «орла» $p = 0.25$. Если выпадает «орел», Вася отдает Пете 1 рубль, если «решка» — Петя отдаёт Васе 1 рубль. В начале игры у Васи — один рубль, у Пети — три рубля. Игра прекращается, как только у одного из игроков заканчиваются деньги.

   а) Описать множество возможных состояний (указать тип состояния) и найти матрицу ыпереходов из состояния в состояние.

   б) Определить среднее время продолжительности игры

   в) Определить вероятность того, что игра закончится победой Васи.

## 5.11. 2008-2009 Демо-версия

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Совместная функция плотности имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{если } x \in [0;1]\,,\ y \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите $\mathbb{P}(Y > 2X)$, $\mathbb{E}(X)$. Являются ли величины $X$ и $Y$ независимыми?

2. Случайный вектор $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & -4.5 \\ -4.5 & 25 \end{pmatrix}$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(X_1 + 3X_2 > 20)$.

   б) Какое условное распределение имеет $X_1$ при условии, что $X_2 = 0$?

3. Компания заключила 1000 однотипных договоров. Выплаты по каждому договору возникают независимо друг от друга с вероятностью 0.1. В случае наступления выплат их размер распределен экспоненциально со средним значением 1000 рублей.

   а) Найдите дисперсию и среднее значение размера выплат по одному контракту.

   б) Какова вероятность того, что компании потребуется более 110 тысяч рублей на выплаты по всем контрактам?

4. Определите, в каких границах может лежать $\mathbb{P}\left(\frac{(X-30)^2}{\mathrm{Var}(X)} < 3\right)$, если известно, что $\mathbb{E}(X) = 30$. Можно ли уточнить ответ, если дополнительно известно, что $X$ — экспоненциально распределена.

5. Предположим, что величины $X_1$, $X_2$, ..., $X_{13}$ - независимы и распределены нормально $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Найдите число $a$, если известно, что $\mathbb{P}(\sum (X_i - \bar{X})^2 > a\sigma^2) = 0.1$.

6. Предположим, что оценки студентов на экзамене распределены равномерно на отрезке $[0; a]$. Вася хочет оценить вероятность того, что отдельно взятый студент наберет больше 30 баллов. Васе известно, что экзамен сдавали 100 человек и 15 из них набрали более 60 баллов. Помогите Васе построить несмещенную оценку.

   Коля напрямую узнал у наугад выбранных 50 студентов, получили ли они больше 30 баллов. Какая оценка вероятности имеет меньшую дисперсию, Васина или Колина?

7. К продавцу мороженого подходят покупатели: мамы, папы и дети. Предположим, что это независимые Пуассоновские потоки с интесивностями 12, 10 и 16 чел/час.

   а) Какова вероятность того, что за час будет всего 30 покупателей?

   б) Какова вероятность того, что подошло одинаковое количество мам, пап детей, если за некий промежуток времени подошло ровно 30 покупателей?

8. Известно, что $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и $Y = \exp(X)$. В таком случае говорят, что $Y$ имеет лог-нормальное распределение. Найдите $\mathbb{E}(Y)$.

**Часть II.**

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить <u>**одну**</u> из двух 9-х задач по выбору!

9-A. There are two unfair coins. One coin has $0.7$ probability head-up; the other has $0.3$ probability head-up. To begin with, you have no information on which is which. Now, you will toss the coin 10 times. Each time, if the coin is head-up, you will receive \$1; otherwise you will receive \$0. You can select one of the two coins before each toss. What is your best strategy to earn more money?

9-Б. Дед Мороз развешивает новогодние гирлянды на аллее. Вдоль аллеи высажено 2008 елок. Каждой гирляндой Дед Мороз соединяет две елки (не обязательно соседние). В результате Дед Мороз повесил 1004 гирлянды и все елки оказались украшенными. Какова вероятность того, что существует хотя бы одна гирлянда, пересекающаяся с каждой из других?
Например, гирлянда 5-123 (гирлянда соединяющая 5-ую и 123-ю елки) пересекает гирлянду 37-78 и гирлянду 110-318. *Подсказка*: Думайте!

### 5.12. 2008-2009

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Совместная функция плотности имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, & \text{если } x \in [0;1], \ y \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   а) Найдите $\mathbb{P}(Y > X)$, $\mathbb{E}(Y)$

   б) Являются ли величины $X$ и $Y$ независимыми?

2. Пусть $X_i$ — независимы и одинаково распределены, причем $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ и $\mathrm{Var}(X_i^2) = 2$

   а) С помощью неравенства Чебышева оцените $\mathbb{P}(|X_1+X_2+\ldots+X_7| > 14)$ и $\mathbb{P}\left(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_7^2 > 14\right)$

   б) Найдите эти вероятности, если дополнительно известно, что $X_i$ - нормально распределены.

3. Случайный вектор $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 25 \end{pmatrix}$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(X_1 + 2X_2 > 20)$.

   б) Какое условное распределение имеет $X_1$ при условии, что $X_2 = 0$?

4. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы и равномерно распределены: $X$ — на отрезке $[0;a]$, а $Y$ — на отрезке $[0;3a]$. Вася знает значение $XY$ и хочет оценить неизвестный параметр $\beta = \mathbb{E}(X^2)$. Петя знает значение $Y^2$ и хочет оценить тот же параметр $\beta$

   а) Какую несмещенную оценку может построить Вася?

   б) Какую несмещенную оценку может построить Петя?

   в) У какой оценки дисперсия меньше?

5. Вася играет в компьютерную игру, где нужно убить 80 однотипных монстров, чтобы пройти уровень. Количество патронов, которое Вася тратит на одного монстра имеет Пуассоновское распределение со средним значение 2 патрона.

   а) Какова вероятность того, что на трех первых монстров придется потратить 6 патронов?

   б) Какова вероятность того, на всех монстров уровня придется потратить более 200 патронов?

6. Допустим, что срок службы пылесоса имеет экспоненциальное распределение. В среднем один пылесос бесперебойно работает 10 лет. Завод предоставляет гарантию 7 лет на свои изделия. Предположим для простоты, что все потребители соблюдают условия гарантии.

   а) Какой процент потребителей в среднем обращается за гарантийным ремонтом?

   б) Какова вероятность того, что из 1000 потребителей за гарантийным ремонтом обратится более 55% покупателей?

   Подсказка: $\ln(2) \approx 0.7$

7. Вася и Петя решают тест из 10 вопросов по теории вероятностей (на каждый вопрос есть два варианта ответа). Петя кое-что знает по первым пяти вопросам, поэтому вероятность правильного ответа на каждый равняется 0.9 независимо от других. Остальные пять вопросов Пете непонятны и он отвечает на них наугад. Вася списывает у Пети вопросы с 3-го по 7-ой, а остальные отвечает наугад. Пусть $X$ - число правильных ответов Пети, а $Y$ - число правильных ответов Васи. Найдите $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Var}(X-Y)$.

8. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из 3 страт, определяется по формуле: $TC = n_1 \cdot c_1 + n_2 \cdot c_2 + n_3 \cdot c_3$, Где $c_i$ — стоимость наблюдения из $i$-ой страты, $n_i$ — число наблюдений в выборке, относящихся к страте $i$. Предполагая, что стоимость исследования $TC$ фиксирована и равна 7000, определите значения $n_i$, при которых дисперсия соответствующего выборочного стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если:

| Страта | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Среднее значение | 40 | 80 | 150 |
| Стандартная ошибка | 10 | 20 | 60 |
| Вес | 20% | 20% | 60% |
| Цена наблюдения | 4 | 16 | 25 |

Примечание: Округлите полученные значения до ближайших целых.

**Часть II.**

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **одну** из двух 9-х задач по выбору!

9-А. Усама бен Ладен хочет сделать запас в 1000 тротиловых шашек в пещере А. Тротиловые шашки производят на секретном заводе бесплатно. При транспортировке от завода до пещеры каждая шашка взрывается с небольшой вероятностью $p$. Если взрывается одна шашка, то взрываются и все остальные, перевозимые вместе с ней. Сам Усама при взрыве всегда чудом остается жив. Какими партиями нужно переносить шашки, чтобы минимизировать среднее число переносок?

[В стартовой пещере бесконечный запас шашек].

9-Б. У Пети нет денег, но он может сыграть 100 игр следующего типа.

В каждой игре Петя может по своему желанию:

- либо без риска получить 1 рубль,
- либо назвать натуральное число $n > 1$ и выиграть $n$ рублей с вероятностью $\frac{2}{n+1}$ или проиграть 1 рубль с вероятностью $\frac{n-1}{n+1}$.

Чтобы выбирать вторую альтернативу Петя должен иметь как минимум рубль. Пете позарез нужно 200 рублей. Как выглядит Петина оптимальная стратегия? *Подсказка*: Думайте!

### 5.13. 2007-2008 Демо-версия

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Совместный закон распределения случайных величин $X$ и $Y$ задан таблицей:

| | $Y=-1$ | $Y=1$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|
| $X=-1$ | 0.1 | $c$ | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

Найдите $c$, $\mathbb{P}(Y>X)$, $\mathbb{E}(X\cdot Y)$, $\mathbb{E}(X|Y>0)$. Являются ли величины $X$ и $Y$ независимыми?

2. Случайный вектор $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 36 \end{pmatrix}$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(X_1+X_2>0)$.

   б) Какое условное распределение имеет $X_1$ при условии, что $X_2=-1$?

3. Совместная функция плотности имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c(x-y), & \text{если } x\in[0;1],\ y\in[0;1],\ x>y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите $c$, $\mathbb{P}(3Y>X)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X|Y>0.5)$.

4. Вероятность дождя в субботу 0.5, вероятность дождя в воскресенье 0.3. Корреляция между наличием дождя в субботу и наличием дождя в воскресенье равна $r$. Какова вероятность того, что в выходные вообще не будет дождя?

5. Автор книги получает 50 тыс. рублей сразу после заключения контракта и 5 рублей за каждую проданную книгу. Автор предполагает, что количество книг, которые будут проданы — это случайная величина с ожиданием в 10 тыс. книг и стандартным отклонением в 1 тыс. книг. Чему равен ожидаемый доход автора? Чему равна дисперсия дохода автора?

6. Сейчас акция стоит 1000 рублей. Каждый день цена может равновероятно либо возрасти на 3 рубля, либо упасть на 5 рублей.

   а) Чему равно ожидаемое значение цены через 60 дней? Дисперсия?

   б) Какова вероятность того, что через 60 дней цена будет больше 900 рублей?

7. В данном регионе кандидата в парламент Обещаева И.И. поддерживает 60% населения. Сколько нужно опросить человек, чтобы с вероятностью 0.99 доля опрошенных избирателей, поддерживающих Обещаева И.И., отличалась от 0.6 (истинной доли) менее, чем на 0.01?

8. С помощью неравенства Чебышева, укажите границы, в которых находятся величины; рассчитайте также их точное значение

   а) $\mathbb{P}(-2\sigma<X-\mu<2\sigma)$, $X\sim\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

   б) $\mathbb{P}(8<X<12)$, $X\sim U[0;20]$

   в) $\mathbb{P}(-2<X-\mathbb{E}(X)<2)$, $X$ имеет экспоненциальное распределение с $\lambda=1$

**Часть II**.

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **<u>одну</u>** из двух 9-х задач по выбору!

9-А. Вы приехали в уездный город Энск. В городе кроме Вас живут $m$ мирных граждан и $u$ убийц. Каждый день на улице случайным образом встречаются два человека. Если встречаются два мирных гражданина, то они пожимают друг другу руки. Если встречаются мирный гражданин и убийца, то убийца убивает мирного гражданина. Если встречаются двое убийц, то оба погибают.

Каковы Ваши шансы выжить в этом городе? Зависят ли они от Вашей стратегии?

9-Б. Дед Мороз развешивает новогодние гирлянды. Аллея состоит из 2008 елок. Каждой гирляндой Дед Мороз соединяет две елки (не обязательно соседние). В результате Дед Мороз повесил 1004 гирлянды и все елки оказались украшенными. Какова вероятность того, что существует хотя бы одна гирлянда, пересекающаяся с каждой из других?

Например, гирлянда 5-123 (гирлянда соединяющая 5-ую и 123-ю елки) пересекает гирлянду 37-78 и гирлянду 110-318.

*Подсказка*: Думайте!

## 5.14. 2007-2008

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Совместный закон распределения случайных величин $X$ и $Y$ задан таблицей:

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|
| $X=0$ | 0.2 | $c$ | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

Найдите $c$, $\mathbb{P}(Y>-X)$, $\mathbb{E}(X\cdot Y)$, $\mathrm{Corr}(X,Y)$, $\mathbb{E}(Y|X>0)$.

2. Случайный вектор $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & -4.5 \\ -4.5 & 25 \end{pmatrix}$.

   а) Найдите $\mathbb{P}(X_1+3X_2>20)$.

   б) Какое условное распределение имеет $X_1$ при условии, что $X_2=0$?

3. Совместная функция плотности имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{если } x\in[0;1]\,,\ y\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите $\mathbb{P}(Y>2X)$, $\mathbb{E}(X)$. Являются ли величины $X$ и $Y$ независимыми?

4. Вася может получить за экзамен равновероятно либо 8 баллов, либо 7 баллов. Петя может получить за экзамен либо 7 баллов — с вероятностью $1/3$; либо 6 баллов — с вероятностью $2/3$. Известно, что корреляция их результатов равна 0.7.

   Какова вероятность того, что Петя и Вася покажут одинаковый результат?

5. В городе Туме проводят демографическое исследование семейных пар. Стандартное отклонение возраста мужа оказалось равным 5 годам, а стандартное отклонение возраста жены — 4 годам. Найдите корреляцию возраста жены и возраста мужа, если стандартное отклонение разности возрастов оказалось равным 2 годам.

6. Сейчас акция стоит 100 рублей. Каждый день цена может равновероятно либо возрасти на 8%, либо упасть на 5%.

   а) Какова вероятность того, что через 64 дня цена будет больше 110 рублей?

   б) Чему равно ожидаемое значение логарифма цены через 100 дней?

   Подсказка: $\ln(1.08)=0.07696$, $\ln(0.95)=-0.05129$, $\ln(1.1)=0.09531$

7. Допустим, что срок службы пылесоса имеет экспоненциальное распределение. В среднем один пылесос бесперебойно работает 7 лет. Завод предоставляет гарантию 5 лет на свои изделия. Предположим также, что примерно 80% потребителей аккуратно хранят все бумаги, необходимые, чтобы воспользоваться гарантией.

   а) Какой процент потребителей в среднем обращается за гарантийным ремонтом?

   б) Какова вероятность того, что из 1000 потребителей за гарантийным ремонтом обратится более 35% покупателей?

   Подсказка: $\exp(5/7)=2.0427$

8. Известно, что у случайной величины $X$ есть математическое ожидание, $\mathbb{E}(X) = 0$, и дисперсия.

   а) Укажите верхнюю границу для $\mathbb{P}(X^2 > 2.56 \cdot \mathrm{Var}(X))$?

   б) Найдите указанную вероятность, если дополнительно известно, что $X$ нормально распределена.

**Часть II**.

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **<u>одну</u>** из двух 9-х задач по выбору!

9-А. Случайная величина $X$ распределена равномерно на отрезке $[0; 1]$. Вася изготавливает неправильную монетку, которая выпадает «орлом» с вероятностью $x$ и передает ее Пете. Петя, не зная $x$, и подкидывает монетку один раз. Она выпала «орлом».

   а) Какова вероятность того, что она снова выпадет «орлом»?

   б) Как выглядит ответ, если Пете известно, что монетка при $n$ подбрасываниях $k$ раз выпала орлом?

9-Б. В семье $n$ детей. Предположим, что вероятности рождения мальчика и девочки равны. Дед Мороз спросил каждого мальчика «Сколько у тебя сестер?» и сложив эти ответы получил $X$. Затем Дед Мороз спросил каждую девочку «Сколько у тебя сестёр?» и сложив эти ответы получил $Y$. Например, если в семье 2 мальчика и 2 девочки, то каждая девочка скажет, что у нее одна сестра, а каждый мальчик скажет, что у него 2 сестры, $X = 4$, $Y = 2$

   а) Найдите $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{E}(Y)$

   б) Найдите $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$

   *Подсказка*: Думайте!

## 5.15. 2006-2007

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Совместный закон распределения случайных величин $X$ и $Y$ задан таблицей:

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|
| $X=0$ | 0.2 | $c$ | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

Найдите $c$, $\mathbb{P}(Y>-X)$, $\mathbb{E}\left(X\cdot Y^2\right)$, $\mathbb{E}(Y|X>0)$.

2. Случайный вектор $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & -4.5 \\ -4.5 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{P}(X_1+3X_2>20)$.

3. Совместная функция плотности имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{если } x\in[0;1],\ y\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найдите $\mathbb{P}(Y>2X)$, $\mathbb{E}(X)$

4. В супермаркете «Покупан» продаются различные вина:

| Вина | Доля | Средняя цена за бутылку (у.е.) | Стандартное отклонение (у.е.) |
|---|---|---|---|
| Элитные | 0.1 | 150 | 24 |
| Дорогие | 0.3 | 40 | 12 |
| Дешёвые | 0.6 | 10 | 10 |

Чтобы оценить среднюю стоимость предлагаемого вина производится случайная выборка 10 бутылок.

а) Какое количество элитных, дорогих и дешёвых вин должно присутствовать в выборке, для того, чтобы выборочное среднее значение цены имело минимальную дисперсию?

б) Чему равна минимальная дисперсия?

5. Допустим, что закон распределения $X_n$ имеет вид:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=x)$ | $\theta$ | $2\theta-0.2$ | $1.2-3\theta$ |

Имеется выборка: $X_1=0$, $X_2=2$.

а) Найдите оценку $\hat{\theta}$ методом максимального правдоподобия.

б) Найдите оценку $\hat{\theta}$ методом моментов.

6. В среднем 30% покупателей супермаркета делают покупку на сумму свыше 700 рублей. Какова вероятность того, что из 200 [случайно выбранных] покупателей более 33% сделают покупку на сумму свыше 700 рублей?

7. Пусть $X_i$ нормально распределены и независимы. Имеется выборка из трех наблюдений: 2, 0, 1.

а) Найдите несмещенные оценки для математического ожидания и дисперсии, $\bar{X}$ и $\hat{\sigma}^2$.

б) Найдите вероятность того, что оценка дисперсии превосходит истинную дисперсию более чем в 3 раза.

8. Известно, что у случайной величины $X$ есть математическое ожидание, $\mathbb{E}(X) = 0$, и дисперсия.

   а) Укажите верхнюю границу для $\mathbb{P}\left(X^2 > 4\operatorname{Var}(X)\right)$?

   б) Найдите указанную вероятность, если дополнительно известно, что $X$ нормально распределена.

9. Пусть $X_i$ независимы и экспоненциально распределены, то есть имеют функцию плотности вида $p(t) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}t}$ при $t > 0$.

   а) Постройте оценку математического ожидания методом максимального правдоподобия.

   б) Является ли оценка несмещенной?

   в) Найдите дисперсию оценки.

   г) С помощью неравенства Крамера-Рао проверьте, является ли оценка эффективной среди несмещенных оценок?

   д) Является ли построенная оценка состоятельной?

10. Независимые случайные величины $X_i$ распределены равномерно на отрезке $[0; a]$, известно, что $a > 10$. Исследователь хочет оценить параметр $\theta = \frac{1}{\mathbb{P}(X_i < 5)}$.

    а) Используя $\bar{X}_n$, постройте несмещённую оценку $\hat{\theta}$ для $\theta$.

    б) Найдите дисперсию построенной оценки.

    в) Является ли построенная оценка состоятельной?

**Часть II.**

Стоимость задачи 20 баллов.
Требуется решить **<u>одну</u>** из двух 11-х задач по выбору!

11-A. Каждый день Кощей Бессмертный кладет в сундук случайное количество копеек (от одной до ста, равновероятно). Сколько в среднем дней нужно Кощею, чтобы набралось не меньше рубля?

11-B. Каждый день Петя знакомится с новыми девушками. С вероятностью $0.7$ ему удаётся познакомиться с одной девушкой; с вероятностью $0.2$ — с двумя; с вероятностью $0.1$ — не удаётся. Дни, когда Пете не удаётся познакомиться ни с одной девушкой, Петя считает неудачными.

Какова вероятность, что до первого неудачного дня Пете удастся познакомиться ровно с 30-ю девушками?

*Подсказка*: Думайте!

### 5.16. 2005-2006

**Часть I.**

Стоимость задач 10 баллов.

1. Вася, владелец крупного Интернет-портала, вывесил на главной странице рекламный баннер. Ежедневно его страницу посещают 1000 человек. Вероятность того, что посетитель портала кликнет по баннеру равна 0.003. С помощью пуассоновского приближения оцените вероятность того, что за один день не будет ни одного клика по баннеру.

2. Совместный закон распределения случайных величин $X$ и $Y$ задан таблицей:

| | $Y=-1$ | $Y=0$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|
| $X=0$ | 0.2 | $c$ | 0.2 |
| $X=1$ | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

   Найдите $c$, $\mathbb{P}(Y>-X)$, $\mathbb{E}\left(X\cdot Y^2\right)$, $\mathbb{E}(Y|X>0)$.

3. Случайный вектор $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & -4.5 \\ -4.5 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите $\mathbb{P}(X_1+3X_2>20)$.

4. Совместная функция плотности имеет вид

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{если } x\in[0;1],\ y\in[0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   Найдите $\mathbb{P}(Y>X)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X|Y>X)$.

5. В среднем 20% покупателей супермаркета делают покупку на сумму свыше 500 рублей. Какова вероятность того, что из 200 покупателей менее 21% сделают покупку на сумму менее 500 рублей?

6. Вася и Петя метают дротики по мишени. Каждый из них сделал по 100 попыток. Вася оказался метче Пети в 59 попытках. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что меткость Васи и Пети одинаковая, против альтернативной гипотезы о том, что Вася метче Пети.

7. Найдите $\mathbb{P}(X\in[16;23])$, если

   а) $X$ нормально распределена, $\mathbb{E}(X)=20$, $\operatorname{Var}(X)=25$

   б) $X$ равномерно распределена на отрезке $[0;30]$

   в) $X$ распределена экспоненциально и $\mathbb{E}(X)=20$

8. Каждый день цена акции равновероятно поднимается или опускается на один рубль. Сейчас акция стоит 1000 рублей. Введем случайную величину $X_i$, обозначающую изменение курса акции за $i$-ый день. Найдите $\mathbb{E}(X_i)$ и $\operatorname{Var}(X_i)$. С помощью центральной предельной теоремы найдите вероятность того, что через сто дней акция будет стоить больше 1030 рублей.

9. Определите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, если ее функция плотности имеет вид $p(t)=c\cdot\exp\left(-2\cdot(t+1)^2\right)$.

10. Пусть случайные величины $X$ и $Y$ независимы и распределены по Пуассону с параметрами $\lambda_X=5$ и $\lambda_Y=15$ соответственно. Найдите условное распределение случайной величины $X$, если известно, что $X+Y=50$.

**Часть II**.

Стоимость задачи 20 баллов. Требуется решить **<u>одну</u>** из двух 11-х задач по выбору!

11-А. Допустим, что оценка $X$ за экзамен распределена равномерно на отрезке $[0;100]$. Итоговая оценка $Y$ рассчитывается по формуле $Y = \begin{cases} 0, & if \quad X < 30 \\ X, & if \quad X \in [30;80] \\ 100, & if \quad X > 80 \end{cases}$.

Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X \cdot Y)$, $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$, $\mathbb{E}(Y|Y > 0)$.

11-Б. Вася играет в компьютерную игру — «стрелялку-бродилку». По сюжету ему нужно убить 60 монстров. На один выстрел уходит ровно 1 минута. Вероятность убить монстра с одного выстрела равна 0.25. Количество выстрелов не ограничено. Сколько времени в среднем Вася тратит на одного монстра? Найдите дисперсию этого времени? Какова вероятность того, что Вася закончит игру меньше, чем за 3 часа?

## 5.17. 2004-2005

1. Вычислите вероятность $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)})$, если известно, что случайная величина $X$ подчиняется нормальному закону распределения.

2. Определите значения математического ожидания и дисперсии случайной величины, функция плотности которой имеет вид
$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{18}}$$

3. Страховая компания «Ой» заключает договор страхования от «невыезда» (невыдачи визы) с туристами, покупающими туры в Европу. Из предыдущей практики известно, что в среднем отказывают в визе одному из 130 человек. Найдите вероятность того, что из 200 застраховавшихся в «Ой» туристов, четверым потребуется страховое возмещение.

4. Считая вероятность рождения мальчика равной $0.52$, вычислите вероятность того, что из 24 новорожденных будет 15 мальчиков.

5. Для случайной величины $X$ с нулевым математическим ожиданием дисперсией 16, оцените сверху вероятность $\mathbb{P}(|X| > 15)$.

6. Случайные величины $X$ и $Y$ независимы. Известно, что $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 4$, $\mathbb{E}(Y) = 5$. Определите значение дисперсии случайной величины $Y$, если известно, что случайная величина $Z = 2X - Y$, принимает неотрицательные значения с вероятностью $0.9$.

7. Вычислите вероятность $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2\,\mathrm{Var}(X))$, если известно, что случайная величина $X$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = 0.09$.

8. Портфель страховой компании состоит из 1000 договоров, заключенных 1 января и действующих в течение года. При наступлении страхового случая по каждому из договоров компания обязуется выплатить 1500 рублей. Вероятность наступления страхового события по каждому из договоров предполагается равной $0.05$ и не зависящей от наступления страховых событий по другим контрактам. Каков должен быть совокупный размер резерва страховой компании для того, чтобы с вероятностью $0.95$ она могла бы удовлетворить требования, возникающие по указанным договорам?

9. В коробке лежат три купюры, достоинством в 100, 10 и 50 рублей соответственно. Они извлекаются в случайном порядке. Пусть $X_1$, $X_2$ и $X_3$ — достоинства купюр в порядке их появления из коробки.

   а) Верно ли, что $X_1$ и $X_3$ одинаково распределены?

   б) Верно ли, что $X_1$ и $X_3$ независимы?

   в) Найдите дисперсию $X_2$.

10. Когда Винни-Пуха не кусают пчелы, он сочиняет в среднем одну кричалку в день. Верный друг и соратник Винни-Пуха Пятачок записал, сколько кричалок сочинялось в дни укусов. Эта выборка из 36 наблюдений перед вами:

    2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 2, 0, 2, 2, 0, 2, 0, 2, 2, 2, 0, 2.

    Верно ли, что укусы пчел положительно сказываются на творческом потенциале Винни-Пуха (используйте нормальную аппроксимацию биномиального распределения)?

11. Пусть $X_t$ — количество бактерий, живущих в момент времени $t$. Известно, что $X_1 = 1$ и $X_t = A_t \cdot X_{t-1}$, где случайные величины $A_t$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 2a]$. Величина $A_t$ может интерпретироваться как среднее количество потомков. Можно догадаться, что данная модель приводить к экспоненциальной динамике.

    а) Определите долгосрочный темп роста бактерий, то есть найдите предел $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln X_n}{n}$.

    б) При каком $a$ темп роста будет положительным?

## 6. Контрольная работа 3

### 6.1. 2017-2018

#### Минимум

1. Дайте определение выборочной функции распределения.

2. Предположим, что величины $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ независимы и нормальны $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Укажите закон распределения выборочного среднего, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2}$.

3. Рост в сантиметрах, случайная величина $X$, и вес в килограммах, случайная величина $Y$, взрослого мужчины является нормальным случайным вектором $Z = (X, Y)$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}(Z) = (175, 75)$ и ковариационной матрицей

$$\text{Var}(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

   а) Найдите средний вес мужчины при условии, что его рост составляет 172 см.

   б) Выпишите условную плотность распределения веса мужчины при условии, что его рост составляет 172 см.

   в) Найдите условную вероятность того, что человек будет иметь вес, больший 92 кг, при условии, что его рост составляет 172 см.

4. Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трёх страт, определяется по формуле $TC = c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3$, где $c_i$ — цена одного наблюдения в $i$-ой страте, а $n_i$ — число наблюдений, которые приходятся на $i$-ую страту. Найдите $n_1$, $n_2$ и $n_3$, при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования 8000 и имеется следующая информация:

| Страта | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Среднее значение | 30 | 40 | 50 |
| Стандартная ошибка | 5 | 10 | 20 |
| Вес | 25% | 25% | 50% |
| Цена наблюдения | 2 | 5 | 8 |

#### Задачи

5. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ выборка из нормального распределения $N(\mu, 1)$.

   а) Выпишите функцию правдоподобия;

   б) Методом максимального правдоподобия найдите оценку $\hat{\mu}$ математического ожидания $\mu$;

   в) Проверьте состоятельность и несмещённость оценки $\hat{\mu}$;

   г) Вычислите информацию Фишера о параметре $\mu$, содержащуюся во всей выборке;

   д) Для произвольной несмещённой оценки $\mu$ выпишите неравенство Рао-Крамера-Фреше;

   е) Проверьте свойство эффективности оценки $\hat{\mu}$;

   ж) Найдите оценку максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ для второго начального момента;

   з) Проверьте свойства несмещенности и асимптотической несмещенности оценки $\hat{\theta}$;

   и) С помощью дельта-метода вычислите, примерно, дисперсию оценки $\hat{\theta}$;

   к) Проверьте состоятельность оценки $\hat{\theta}$.

6. Пусть $X_1$, ..., $X_n$ выборка из распределения с функцией плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - x), & \text{при } x \in [0, \theta] \\ 0, & \text{при } x \notin [0, \theta] \end{cases}$$

   а) Методом моментов найдите оценку параметра $\theta$;

   б) Приведите определение состоятельности оценки и проверьте, будет ли найденная оценка состоятельной.

7. В прихожей лежат четыре карты «тройка». На двух из них нет денег, на двух других 30 и 500 рублей. Вовочка не помнит, на какой из карт есть деньги, поэтому берёт три карточки.

   а) Найдите математическое ожидание и дисперсию средней по выбранным карточкам суммы денег;

   б) Определите, какова вероятность того, что Вовочке удастся войти в метро, если стоимость проезда по тройке составляет 35 рублей.

8. По выборочному опросу студенческих семейных пар о расходах на ланч были получены следующие результаты:

| Номер семьи | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Расходы мужа | 450 | 370 | 170 | 200 |
| Расходы жены | 210 | 350 | 250 | 180 |

   Считая, что разница в расходах мужа и жены хорошо описываются нормальным распределением, постройте 95%-ый доверительный интервал для разницы математических ожиданий расходов супругов. Есть ли основания утверждать, что расходы одинаковы?

9. Наблюдатель Алексей Недопускальный решил проверить честность выборов. Ему удалось подглядеть, как проголосовали 60 избирателей. Из них 42 выбрали действующего президента.

   а) Постройте 95%-ый доверительный интервал для истинной доли избирателей, проголосовавших «за» действующего президента.

   б) По результатам ЦентрИзберКома «за» действующего президента проголосовало 76.67% населения. Согласуются ли эти данные с данными Алексея?

   в) Сколько бюллетеней нужно подглядеть Алексею, чтобы с вероятностью $0.95$ отклонение от выборочной доли проголосовавших «за» действующего президента от истинной не превышало $0.01$?

## 6.2. 2016-2017

1. Дана реализация случайной выборки: 1, 10, 7, 4, $-2$. Выпишите определения и найдите значения следующих характеристик:

   а) вариационного ряда,

   б) выборочного среднего,

   в) выборочной дисперсии,

   г) несмещенной оценки дисперсии,

   д) выборочного второго начального момента.

   е) Постройте выборочную функцию распределения.

2. Мама дяди Фёдора каждое лето приезжает в Простоквашино с тремя вечерними платьями. Средняя стоимость и дисперсия цены случайно выбранного платья (из трех) составляет 11 тысяч и 3 тысячи рублей соответственно. Рачительный кот Матроскин случайным образом выбирает одно из платьев и продаёт его как ненужное. Вычислите математическое ожидание и дисперсию стоимости двух оставшихся платьев.

3. Ресторанный критик ходит по трём типам ресторанов (дешевых, бюджетных и дорогих) города N для того, чтобы оценить среднюю стоимость бизнес-ланча. В городе 40% дешевых ресторанов, 50% — бюджетных и 10% — дорогих. Стандартное отклонение цены бизнес-ланча составляет 10, 30 и 60 рублей соответственно. В ресторане критик заказывает только кофе. Стоимость кофе в дешевых/бюджетных/дорогих ресторанах составляет 150, 300 и 600 рублей соответственно, а бюджет исследования — 30 000 рублей.

   а) Какое количество ресторанов каждого типа нужно посетить критику, чтобы как можно точнее оценить среднюю стоимость бизнес-ланча при заданном бюджетном ограничении (округлите полученные значения до ближайших целых)?

   б) Вычислите дисперсию соответствующего стратифицированного среднего.

4. В «акции протеста против коррупции» в Москве 26.03.2017 по данным МВД приняло участие 8 000 человек. Считая, что население Москвы составляет 12 300 000 человек, постройте 95% доверительный интервал для истинной доли желающих участвовать в подобных акциях жителей России. Можно ли утверждать, что эта доля статистически не отличается от нуля?

5. Для некоторой отрасли проведено исследование об оплате труда мужчин и женщин. Их зарплаты (тыс. руб. в месяц) приведены ниже:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| мужчины | 50 | 40 | 45 | 45 | 35 |
| женщины | 60 | 30 | 30 | 35 | 30 |

   а) Считая, что распределение заработных плат мужчин хорошо описывается нормальным распределением, постройте

      i. 99%-ый доверительный интервал для математического ожидания заработной платы мужчин,

      ii. 90%-ый доверительный интервал для стандартного отклонения заработной платы мужчин.

   б) i. Сформулируйте предпосылки, необходимые для построения доверительно интервала для разности математических ожиданий заработных плат мужчин и женщин.

      ii. Считая предпосылки выполненными, постройте 90%-ый доверительный интервал для разности математических ожиданий заработных плат мужчин и женщин.

      iii. Можно ли считать зарплаты мужчин и женщин одинаковыми?

6. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\theta$.

а) Используя второй начальный момент, найдите оценку параметра $\theta$ методом моментов.

б) Сформулируйте определение несмещённости оценки и проверьте выполнение данного свойства для оценки, найденной в пункте а).

в) Сформулируйте определение состоятельности оценки и проверьте выполнение данного свойства для оценки, найденной в пункте а).

г) Найдите оценку параметра $\theta$ методом максимального правдоподобия.

д) Вычислите информацию Фишера о параметре $\theta$, заключенную в $n$ наблюдениях случайной выборки.

е) Сформулируйте неравенство Рао-Крамера-Фреше.

ж) Сформулируйте определение эффективности оценки и проверьте выполнение данного свойства для оценки, найденной в пункте г).

7. Аэрофлот утверждает, что 10% пассажиров, купивших билет, не являются на рейс. В случайной выборке из шести рейсов аэробуса A320, имеющего 180 посадочных мест, число не явившихся оказалось: 5, 10, 25, 0, 17, 30. Пусть число пассажиров $X$, не явившихся на рейс, хорошо описывается распределением Пуассона $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите:

а) оценку $\mathbb{E}(X)$ и её числовое значение по выборке,

б) оценку дисперсии $X$ и её числовое значение по выборке,

в) оценку стандартного отклонения $X$ и её числовое значение по выборке,

г) оценку вероятности того, что на рейс явятся все пассажиры, а также найдите её числовое значение по выборке.

д) Используя асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия, постройте 95% доверительный интервал для $\mathbb{E}(X)$.

е) С помощью дельта-метода найдите 95% доверительный интервал для вероятности полной загруженности самолёта.

## 6.3. 2015-2016

Ищите и обрящете, толцыте и отверзется вам

Лука 11:9

1. В студенческом буфете осталось только три булочки одинаковой привлекательности и цены, но разной калорийности: 250, 400 и 550 ккал. Голодные Маша и Саша, не глядя на калорийность, покупают по булочке. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы поглощенных студентами калорий.

2. Дана реализация случайной выборки независимых одинаково распределенных случайных величин: 11, 4, 6.

   а) Выпишите вариационный ряд;
   б) Постройте выборочную функцию распределения;
   в) Найдите выборочную медиану распределения;
   г) Вычислите выборочное среднее и несмещенную оценку дисперсии.

3. Найдите математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции случайных величин $X$ и $Y$, совместное распределение которых имеет функцию плотности

$$f(x,y) = \frac{5}{4\pi\sqrt{6}} \exp\left(-\frac{25}{48}\left((x-1)^2 - 0.4(x-1)y + y^2\right)\right)$$

4. Рост и размер обуви $(X, Y)$ взрослого мужчины хорошо описывается двумерным нормальным распределением с математическим ожиданием $(178, 42)$ и ковариационной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 49 & 5.6 \\ 5.6 & 1 \end{pmatrix}$$

   а) Какой процент мужчин обладает ростом выше 185 см?
   б) Являются ли рост и размер обуви случайно выбранного мужчины независимыми? Обоснуйте ответ.
   в) Среди мужчин с ростом 185 см, каков процент тех, кто имеет размер обуви, меньший сорок второго $\mathbb{P}(Y < 42 \mid X = 185)$?

5. Дана случайная выборка $X_1$, ..., $X_n$ из равномерного распределения $U[0; 2\theta]$.

   а) С помощью первого момента найдите оценку параметра $\theta$ методом моментов;
   б) Сформулируйте определения несмещенности, состоятельности и эффективности оценок;
   в) Проверьте, будет ли найденная в пункте (а) оценка несмещенной и состоятельной.
   г) С помощью статистики $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ постройте несмещенную оценку параметра $\theta$ вида $cX_{(n)}$. Укажите значение $c$.
   д) Проверьте, будет ли данная оценка состоятельной;
   е) Какая из двух оценок является более эффективной? Обоснуйте ответ.

6. Вовочка хочет проверить утверждение организаторов юбилейной лотереи «Метро-80 лет в ритме столицы», что почти треть всех билетов выигрышные. Для этого он попросил $n$ своих друзей купить по 10 лотерейных билетов. Пусть $X_i$ — число выигрышных билетов друга $i$ и $p$ — вероятность выигрыша одного билета.

   а) Какое распределение имеет величина $X_i$?
   б) Запишите функцию правдоподобия $L(p)$ для выборки $X_1$, ..., $X_n$;
   в) Методом максимального правдоподобия найдите оценку $p$;

г) Найдите информацию Фишера для одного наблюдения $i(p)$;

д) Для произвольной несмещенной оценки $T(X_1, \ldots, X_n)$ запишите неравенство Рао-Крамера-Фреше;

е) Будет оценка $\hat{p}_{ML}$ эффективной?

ж) Найдите оценку максимального правдоподобия математического ожидания и дисперсии выигранных произвольным другом билетов;

з) Дана реализация случайной выборки 5 Вовочкиных друзей. Число выигрышных билетов оказалось равно (3, 4, 0, 2, 6). Найдите значение точечной оценки вероятности выигрыша $p$. Как Вы думаете, похоже ли утверждение организаторов на правду?

7. Дана выборка $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ независимых одинаково распределенных величин из распределения с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^{\theta}, \text{ если } 0 < y < 1, \theta + 1 > 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} .$$

Методом максимального правдоподобия найдите оценку параметра $\theta$.

8. Пробег (в 1000 км) автомобиля «Лада Калина» до капитального ремонта двигателя является нормальной случайной величиной с неизвестным математическим ожиданием $\mu$ и известной дисперсией 49. По выборке из 20 автомобилей найдите значение доверительного интервала для математического ожидания пробега с уровнем доверия 0.95.

### 6.4. 2014-2015

1. В студенческом буфете осталось только три булочки одинаковой привлекательности и цены, но разной калорийности: 250, 400 и 550 ккал. Голодные Маша и Саша, не глядя на калорийность, покупают по булочке. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы поглощённых студентами калорий.

2. Ресторанный критик ходит по трём типам ресторанов (дешёвых, бюджетных и дорогих) города N для того, чтобы оценить среднюю стоимость бизнес-ланча. В городе N 30% дешёвых ресторанов, 60% бюджетных и 10% дорогих. Стандартное отклонение цены бизнес-ланча составляет 10, 30 и 60 рублей соответственно. В ресторане критик заказывает только кофе. Стоимость кофе в дешёвых/бюджетных/дорогих ресторанах составляет 150, 300 и 600 рублей соответственно, а бюджет исследования — 15 000 рублей. Какое количество ресторанов каждого типа нужно посетить критику, чтобы как можно точнее оценить среднюю стоимость бизнес-ланча при заданном бюджетном ограничении (округлите полученные значения до ближайших целых)? Вычислите дисперсию соответствующего стратифицированного среднего.

3. Дана случайная выборка $X_1$, ..., $X_n$ из некоторого распределения с математическим ожиданием $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$. Даны три оценки $\mu$:
$$\hat{\mu}_1 = (X_1 + X_2)/2, \quad \hat{\mu}_2 = X_1/4 + (X_2 + \ldots + X_{n-1})/(2n-4) + X_n/4, \quad \hat{\mu}_3 = \bar{X}$$
   а) Какая из оценок является несмещённой?
   б) Какая из оценок является более эффективной, чем остальные?

4. Случайный вектор $(X, Y)^T$ имеет двумерное нормальное распределение с математическим ожиданием $(1, 2)^T$ и ковариационной матрицей
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
   а) $\mathbb{P}(X > 1)$
   б) $\mathbb{P}(2X + Y > 2)$
   в) $\mathbb{E}(2X + Y|X = 2)$, $\mathrm{Var}(2X + Y|X = 2)$, $\mathbb{P}(2X + Y > 2|X = 2)$
   г) Сравните вероятности двух предыдущих пунктов, объясните, почему они отличаются. Являются ли компоненты случайного вектора независимыми?

5. Величины $X_1$, $X_2$ и $X_3$ независимы и стандартно нормально распределены. Вычислите:
   а) $\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 > 6)$
   б) $\mathbb{P}(X_1^2/(X_2^2 + X_3^2) > 9.25)$

6. Дана случайная выборка $X_1$, ..., $X_n$ из равномерного распределения $U[0, \theta]$.
   а) С помощью статистики $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ постройте несмещённую оценку параметра $\theta$ вида $cX_{(n)}$ (укажите значение $c$).
   б) Будет ли данная оценка состоятельной?
   в) Найдите оценку параметра $\theta$ методом моментов.
   г) Какая из двух оценок является более эффективной?

7. Каждый из $n$ биатлонистов одинакового уровня подготовки стреляет по мишеням до первого промаха. Пусть $X_i$ — число выстрелов $i$-го биатлониста, $\mathbb{P}(X_i = x_i) = p^{x_i - 1}(1-p)$, где $p$ — вероятность попадания при одном выстреле.
   а) Методом максимального правдоподобия найдите оценку $p$.
   б) Методом максимального правдоподобия найдите оценку математического ожидания числа выстрелов.
   в) Сформулируйте определения несмещенности, состоятельности и эффективности оценок, и проверьте выполнение данных свойств для найденной в предыдущем пункте оценки математического ожидания.

### 6.5. 2013-2014

Вычислите константы $B_1 = \{$Цифра, соответствующая первой букве Вашей фамилии$\}$ и $B_2 = \{$Цифра, соответствующая первой букве Вашего имени$\}$.
Уровень значимости для всех проверяемых гипотез $0.0\alpha$, уровень доверия для всех доверительных интервалов $(1 - 0.0\alpha)$, где $\alpha = 1 + \{$остаток от деления $B_1$ на $5\}$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| А | Б | В | Г | Д | Е | Ж | З | И | К | Л | М | Н | О |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Э | Ю | Я |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |

1. Вес упаковки с лекарством является нормальной случайной величиной с неизвестными математическим ожиданием $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$. Контрольное взвешивание $(10 + B_1)$ упаковок показало, что выборочное среднее $\bar{X} = (50 + B_2)$, а несмещенная оценка дисперсии равна $B_1 \cdot B_2$. Постройте доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии веса упаковки (для дисперсии односторонний с нижней границей).

2. Экзамен принимают два преподавателя, случайным образом выбирая студентов. По выборкам из 85 и 100 наблюдений, выборочные доли не сдавших экзамен студентов составили соответственно $\frac{1}{B_1+1}$ и $\frac{1}{B_2+1}$ . Можно ли утверждать, что преподаватели предъявляют к студентам одинаковый уровень требований? Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза (уровень требований одинаков) отвергается (p-value).

3. Даны независимые выборки доходов выпускников двух ведущих экономических вузов A и B, по $(10 + B_1)$ и $(10 + B_2)$ выпускников соответственно: $\bar{X}_A = 45$, $\hat{\sigma}_A = 5$, $\bar{X}_B = 50$, $\hat{\sigma}_B = 6$. Предполагая, что распределение доходов подчиняется нормальному закону, проверьте гипотезу об отсутствии преимуществ выпускников вуза B.

4. По выборке независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с функцией плотности $f(x) = \frac{1}{\theta} x^{-1+\frac{1}{\theta}}$, $x \in (0, 1)$, найдите оценки максимального правдоподобия параметра $\theta$. Сформулируйте определения свойств несмещенности, состоятельности и эффективности и проверьте, выполняются ли эти свойства для найденной оценки.

Примечание. В помощь несчастным, забывшим формулу интегрирования по частям и таблицу неопределенных интегралов, или просто ленивым студентам:

$$\int_0^1 t^\alpha \ln(t) dt = -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

# 7. Контрольная работа 3. ИП

## 7.1. 2017-2018

дата: 2018-03-24
24 марта 2018 года — Комоедица, день пробуждения медведя.

1. Медведь Михайло-Потапыч уснул в берлоге и ему снится сон про $n$-мерное пространство. Особенно ярко ему снится вектор $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и вектор $e = (1, 1, 1, \ldots, 1)$.

   а) Изобразите векторы $X$ и $e$ в $n$-мерном пространстве;
   б) Изобразите проекцию $X$ на $\operatorname{Lin}\{e\}$, обозначим её $\hat{X}$;
   в) Изобразите проекцию $X$ на $\operatorname{Lin}^{\perp}\{e\}$, обозначим её $\hat{X}^{\perp}$;
   г) Выпишите явно вектора $\hat{X}$ и $\hat{X}^{\perp}$, и найдите их длины;
   д) Сформулируйте теорему Пифагора для нарисованного прямоугольного треугольника;
   е) Изобразите на рисунке такой угол $\alpha$, что обычная $t$-статистика, используемая при построении доверительного интервала для $\mu$, имела бы вид $t = \sqrt{n-1} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

2. Исследователь Михаил предполагает, что все виды медведепришельцев встречаются равновероятно. Отправившись на охоту в район Малой Медведицы Михаил поймал двух лиловых кальмаромедведей, одного двурога медведеспинного и одного медведезавра ящероголового.

   Помогите Михаилу оценитель общее количество видов медведепришельцев с помощью метода максимального правдоподобия.

3. Помотавшись по просторам Вселенной Михаил изменил своё мнение. Никто кроме кальмаромедведей, двурогов и медведезавров не попадается, однако попадаются они явно с разной вероятностью. Из 300 отловленных пришельцев оказалось 150 кальмаромедведей, 100 двурогов и 50 медведезавров. Михаил считает, что медведепришельцы встречаются независимо, $p_1$ — вероятность встретить кальмаромедведя, $p_2$ — двурога.

   а) Оцените вектор $p = (p_1, p_2)$ методом максимального правдоподобия;
   б) Оцените ковариационную матрицу $\operatorname{Var}(\hat{p})$;
   в) Оцените дисперсию $\operatorname{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)$;
   г) Постройте доверительный интервал для разницы долей $p_1 - p_2$.

4. Винни-Пух лично измерил количество мёда (в кг) на 100 деревьях и обнаружил, что $\bar{X} = 10$ и $\hat{\sigma}^2 = 4$. По мнению Кролика, состоятельная оценка для параметра $\alpha$ правильности мёда имеет вид $\hat{\alpha} = \bar{X} + \sqrt{\bar{X} + 6}$.

   а) «Халява, сэр!» Найдите точечную оценку параметра $\alpha$;
   б) Найдите 95%-ый доверительный интервал для $\alpha$, симметричный относительно $\hat{\alpha}$.

5. Фотографы Андрей и Белла независимо друг от друга пытаются фотографировать кадьяков. Андрею удаётся сфотографировать одного кадьяка в неделю с вероятностью $0.5$, а Белле — с вероятностью $p$, независимо друг от друга и от прошлого. За 100 недель они вместе сфотографировали 130 кадьяков.

   а) Оцените $p$ и постройте 95%-ый доверительный интервал для $p$;
   б) Оцените $p$ и постройте 95%-ый доверительный интервал для $p$, если дополнительно известно, что один фотограф опередил другого на 10 фото.

**Просто красивая задачка.** Эту задачу **не нужно** решать на кр :)
Медведю Мишутке никак не удаётся заснуть в берлоге, и потому он подбрасывает правильную монетку $n$ раз. Обозначим вероятность того, что ни разу не идёт двух решек подряд буквой $q_n$.

а) Найдите $2^8 q_8$ и **назовите** это число;

б) Найдите $\lim 2q_{n+1}/q_n$ и **назовите** это число.

### 7.2. 2016-2017

Главная мораль: байесовский подход — это всего лишь формула условной вероятности.

1. Задача о целебных лягушках :)

   У одного вида лягушек самки обладают целебными свойствами. Самцы и самки встречаются равновероятно. Неподалёку видны аж две лягушки данного вида, но издалека неясно кто.

   Определите вероятность того, что среди этих лягушек есть хотя бы одна целебная, в каждой из ситуаций:

   а) Самцы квакают, самки — нет, со стороны лягушек слышно кваканье, но не разобрать, одной лягушки или двух.

   б) Самцы и самки квакают по разному, но одинаково часто. Только что послышался отдельный квак одной из лягушек и это квак самца.

2. Яичный бой

   Саша и Маша играют в «яичный бой». Перед ними корзина яиц. В начале боя они берут по одному яйцу и бьют их острыми концами. Каждое яйцо в корзине обладает своей «силой», все силы — разные. Более сильное яйцо разбивает более слабое. Внешне яйца не отличимы. Сила яйца не убывает при ударах. Разбитое яйцо выбрасывают, побеждённый берёт новое, а победитель продолжает играть прежним.

   Какова вероятность того, что Маша победит в 11-ом раунде, если она уже победила 10 раундов подряд?

3. Классика жанра

   Перед нами определение бета-распределения $Beta(\alpha, \beta)$:

   $$f(x) \propto \begin{cases} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ если } x \in [0;1] \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

   Блондинка Анжелика хочет оценить неизвестную вероятность встретить динозавра, $p$. Она предполагает, что динозавры встречаются каждый день независимо от других с постоянной вероятностью. Априорно Анжелика считает, что неизвестное $p$ имеет бета-распределение $Beta(2,3)$. За 20 дней Анжелика 5 раз видела динозавра. Для краткости обозначим вектором $y$ все имеющиеся наблюдения. Величина $y_i$ — результат $i$-го дня: 1, если динозавр встретился, и 0 иначе.

   а) Чему, по-мнению Анжелики, равны априорные $\mathbb{E}(p)$, мода распределения $p$?

   б) Найдите апостериорное распределение $f(p|y)$.

   в) Найдите апостериорные ожидание $\mathbb{E}(p|y)$ и моду.

   г) Найдите условное распределение $y_{21}$ с учётом имеющихся данных.

4. Рассмотрим следующий код в stan.

```
data {
  int<lower=1> N_x;
  int<lower=1> N_y;
  real y[N_y];
  real x[N_x];
}
parameters {
  real mu_x;
  real mu_y;
  real<lower=0> sigma_x;
  real<lower=0> sigma_y;
}
model {
  for (n_x in 1:N_x) {
    x[n_x] ~ normal(mu_x, sigma_x);
  }
  for (n_y in 1:N_y) {
    y[n_y] ~ normal(mu_y, sigma_y);
  }
  mu_x ~ normal(0, 100);
  mu_y ~ normal(0, 100);
7   sigma_y ~ exponential(50);
}
generated quantities {
  delta = mu_x - mu_y;
  ratio = sigma_x / sigma_y;
}
```

а) Выпишите предполагаемую модель для данных.

б) Выпишите априорное распределение.

в) Байесовский интервал для каких величин позволяет построить данный код?

г) Какие предпосылки мешают применить в данном случае классический доверительный интервал для разности математических ожиданий, основанный на $F$-распределении?

5. Просто красивая задача про выборку :)

Есть неизвестное количество чисел. Среди этих чисел одно число встречается строго больше 50% раз. Ведущий показывает числа исследователю Акану в некотором порядке. Когда все числа закончатся, ведущий скажет «всё». Задача Акана — определить, какое число встречается чаще всех. Проблема в том, что Акан так готовился к контрольной по теории вероятностей, что устал. И больше 10 чисел запомнить не в состоянии.

Предложите алгоритм, которой позволит Акану определить искомое число.

### 7.3. 2015-2016

Правила: 3 часа, всем можно пользоваться, интернетом тоже.
Все семь задач решать вовсе не обязательно, выбирайте любые пять! При самостоятельной работе можно всем пользоваться! :)

1. Случайные величины $X_1$, ..., $X_n$ независимо и одинаково распределены с функцией плотности $f(x) = 2ax\exp(-ax^2)$ при $x > 0$.

   По 100 наблюдениям известно, что $\sum X_i = 170$, $\sum X_i^2 = 350$.

   а) Оцените параметр $a$ методом максимального правдоподобия.

   б) Оцените дисперсию оценки $\hat{a}_{ML}$

   в) Постройте 95%-ый доверительный интервал для $a$ с помощью оценки максимального правдоподобия

   г) Оцените параметр $a$ методом моментов

   д) Оцените дисперсию оценки $\hat{a}_{MM}$

   е) Постройте 95%-ый доверительный интервал для $a$ с помощью оценки метода моментов

2. Для того, чтобы люди давали правдивый ответ на деликатный вопрос (скажем, «Берёте ли Вы взятки?») при опросе используется рандомизация. Вопрос допускает всего два ответа «да» или «нет». Перед ответом респондент подбрасывает монетку, и только респондент видит результат подбрасывания. Если монетка выпадет «орлом», то респондент отвечает правду. Если «решкой», то респондент отвечает наоборот («да» вместо «нет» и «нет» вместо «да»).

   Монетка выпадает орлом с вероятностью $0.4$. Из 500 опрошенных 300 ответили «да».

   а) Какова вероятность того, что человек берёт взятки, если он ответил «да» в анкете?

   б) Постройте оценку для доли людей берущих взятки

   в) Постройте 95%-ый доверительный интервал для доли людей берущих взятки

3. Винни-Пух хочет измерить высоту Большого дуба, $d$. Для этого Винни-Пух три раза в случайное время дня измерил длину тени Большого Дуба: $8.9$, $13.2$, $25.2$.

   Предположим, что в дни измерений траектория движения Солнца проходила ровно через зенит :)

   а) Найдите функцию плотности длины тени

   б) Если возможно, постройте оценку метода моментов

   в) Если возможно, постройте оценку метода максимального правдоподобия

   г) Где живёт Винни-Пух и какого числа 2016 года он проводил измерения?

4. Встроенный в R набор данных morley содержит результаты 100 опытов Майкельсона и Морли. В 1887 году они проводили измерения скорости света, чтобы понять, зависит ли она от направления.

   а) Постройте 95%-ый доверительный интервал для скорости света

   б) Выпишите использованные формулы и алгоритм построения интервала

   в) Чётко сформулируйте все гипотезы при которых данный алгоритм даёт корректный результат

   г) Накрывает ли построенный доверительный интервал фактическую скорость света?

   Полезные команды: morley, help("morley"), mean, sd, qnorm, pnorm

5. Исследователь Вениамин дрожащей от волнения рукой рисует прямоугольники размера $a \times b$. Поскольку Вениамин очень волнуется прямоугольники де-факто выходят со случайными сторонами $a + u_i$ и $b + v_i$. Случайные ошибки $u_i$ и $v_i$ независимы и одинаково распределены $\mathcal{N}(0; 1)$.

   Вениамин нарисовал 400 прямоугольничков и посчитал очень аккуратно площадь каждого. Оказалась, что средняя площадь равна $1200$ см$^2$, а выборочное стандартное отклонение площади — $50$ см$^2$. Вениамин считает, что зная только площади прямоугольничков невозможно оценить оценить каждую из сторон.

   Если возможно, то оцените параметры $a$ и $b$ подходящим методом. Если невозможно, то докажите.

6. На поле $D4$ шахматной доски стоит конь. Ли Седоль переставляет коня наугад, выбирая каждый возможный ход равновероятно.

   Сколько в среднем пройдет ходов прежде чем Ли Седоль снова вернёт коня на $D4$?

7. В «Киллер» играли $n$ человек. После окончания игры, когда были убиты все, кто может быть убит, встретились два игрока (возможно убитых) и оказалось, что один убил 5 человек, а другой — 7 человек.

   Оцените $n$ подходящим методом.

### 7.4. 2013-2014

1. Дед Мазай подбирает зайцев. Предположим, что длина левого уха зайца имеет экспоненциальное распределение с плотностью $f(x) = a\exp(-ax)$ при $x \geqslant 0$. По 100 зайцам оказалось, что $\sum x_i = 2000$.

   а) Найдите оценку $\hat{a}$ методом моментов.

   б) Оцените стандартную ошибку $se(\hat{a})$.

   в) Постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного $a$.

   г) На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте гипотезу $H_0$: $a = 15$ против $a > 15$. Найдите точное Р-значение.

2. По совету Лисы Волк опустил в прорубь хвост и поймал 100 чудо-рыб. Веса рыбин независимы и имеют распределение Вейбулла, $f(x) = 2\exp(-x^2/a^2) \cdot x/a^2$ при $x \geqslant 0$. Известно, что $\sum x_i^2 = 120$.

   а) Найдите оценку $\hat{a}$ методом максимального правдоподобия.

   б) Оцените стандартную ошибку $se(\hat{a})$.

   в) Постройте 90%-ый доверительный интервал для неизвестного $a$.

   г) На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте гипотезу $H_0$: $a = 1$ против $a > 1$. Найдите точное Р-значение.

3. [R] Как известно, Фрекен-Бок пьет коньяк по утрам и иногда видит привидения. За 110 дней имеются следующие статистические данные

   | Рюмок | 1 | 2 | 3 |
   |---|---|---|---|
   | Дней с приведениями | 10 | 25 | 20 |
   | Дней без приведений | 20 | 25 | 10 |

   Вероятность увидеть привидение зависит от того, сколько рюмок коньяка было выпито утром, а именно, $p = \exp(a + bx)/(1 + \exp(a + bx))$, где $x$ — количество рюмок, а $a$ и $b$ — неизвестные параметры.

   а) Оцените неизвестные параметры с помощью максимального правдоподобия.

   б) На уровне значимости $\alpha = 0.05$ помощью теста отношения правдоподобия проверьте гипотезу о том, что одновременно $a = 0$ и $b = 0$. В чем содержательный смысл этой гипотезы? Найдите точное Р-значение.

4. Кот Васька поймал 5 воробьев, взвесил и отпустил. Предположим, что веса воробьев независимы и имеют нормальное распределение $N(\mu, \sigma^2)$. Известно, что $\sum x_i = 10$ и $\sum x_i^2 = 25$.

   а) Постройте 90% доверительный интервал для $\sigma^2$, симметричный по вероятности.

   б) [R] Постройте самый короткий 90% доверительный интервал для $\sigma^2$.

5. Задача о немецких танках. Всего выпущено неизвестное количество $n$ танков. Для упрощения предположим, что на каждом танке написан его порядковый номер[4]. В бою было подбиты 4 танка с номерами 2, 5, 7 и 12.

   а) Найдите оценку общего выпуска танков $n$ с помощью метода максимального правдоподобия.

   б) Является ли оценка максимального правдоподобия несмещенной?

   в) Является ли максимум из номеров подбитых танков достаточной статистикой?

   г) Является ли максимум из номеров подбитых танков полной статистикой?

   д) Постройте с помощью оценки максимального правдоподобия несмещенную эффективную о ценку неизвестного $n$.

[4] В реальности во время Второй мировой войны при оценке количества танков «Пантера» выпущенных в феврале 1944 использовались номера колес. Двух подбитых танков оказалось достаточно, чтобы оценить выпуск в 270 танков. По немецким архивам фактический объем выпуска оказался равен 276 танков.

6. Гражданин Фёдор решает проверить, не жульничает ли напёрсточник Афанасий, для чего предлагает Афанасию сыграть 5 партий в напёрстки. Фёдор решает, что в каждой партии будет выбирать один из трёх напёрстков наугад, не смотря на движения рук ведущего. Основная гипотеза: Афанасий честен, и вероятность правильно угадать напёрсток, под которым спрятан шарик, равна $1/3$. Альтернативная гипотеза: Афанасий каким-то образом жульничает (например, незаметно прячет шарик), так что вероятность угадать нужный напёрсток равна $1/5$. Статистический критерий: основная гипотеза отвергается, если Фёдор ни разу не угадает, где шарик.

   а) Найдите уровень значимости критерия.

   б) Найдите вероятность ошибки второго рода.

7. [R] В службе единого окна 5 клиентских окошек. В каждое окошко стоит очередь. Я встал в очередь к окошку номер 5 ровно в 15:00, передо мной 5 человек. Предположим, что время обслуживания каждого клиента — независимые экспоненциальные величины с параметром $\lambda$. Первый человек с момента моего прихода был обслужен в окошке 1 в 15:05. Второй человек с момента моего прихода был обслужен в окошке 2 в 15:10.

   а) Оцените с помощью максимального правдоподобия параметр $\lambda$

   б) Оцените, сколько мне еще стоять в очереди.

# 8. Контрольная работа 4

## 8.1. 2017-2018

### Минимум

1. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием $\mu$ и неизвестной дисперсией $\sigma^2 = 9$. Объем выборки $n = 20$. Для тестирования основной гипотезы $H_0 : \mu = 0$ против альтернативной гипотезы $H_1 : \mu = 5$ вы используете критерий: если $\overline{X} \leqslant 2$, то вы не отвергаете гипотезу $H_0$, в противном случае вы отвергаете гипотезу $H_0$ в пользу гипотезы $H_1$. Найдите

   а) Вероятность ошибки 1-го рода

   б) Вероятносто ошибки 2-го рода

2. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Используя реализацию случайной выборки: $x_1 = 2$, $x_3 = 8$, $x_3 = 5$, постройте 95%-ый доверительный интервал для неизвестного параметра $\sigma^2$.

3. Вася очень любит тестировать статистические гипотезы. В этот раз Вася собирается проверить утверждение о том, что его друг Пётр звонит Васе исключительно в то время, когда Вася ест. Для этого Вася трудится целый год и проводит серию из 365 испытаний. Результаты приведены в табилце ниже.

   | | Пётр не звонит | Пётр звонит |
   |---|---|---|
   | Вася ест | 100 | 50 |
   | Вася не ест | 125 | 90 |

   На уровне значимости 10% протестируйте гипотезу о том, что Пётр звонит Васе независимо от момента приема пищи.

4. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в четыре раза чаще, чем в спортзал, а в спортзал в четыре раза чаще, чем в театр. За последние полгода он 105 раз был в театре, 63 раза — в спортазе и 42 раза в кино. На уровне значимости 10% проверьте утверждение Васи.

Квантили $\chi^2$ распределения с 1, 2 и 3 степенями свободы

| | 0.025 | 0.05 | 0.1 | 0.9 | 0.95 | 0.975 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.001 | 0.004 | 0.016 | 2.706 | 3.841 | 5.024 |
| 2 | 0.051 | 0.103 | 0.211 | 4.605 | 5.991 | 7.378 |
| 3 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.251 | 7.815 | 9.348 |

**Задачи**

При решении задач пять–семь используйте данные обследования Росстата за первый квартал 2018 года:

| | Число наблюдений | Среднее (тыс. руб.) | Выборочное отклонение (тыс. руб.) |
|---|---|---|---|
| Врачи | 40 | 136 | 55 |
| Преподаватели | 60 | 139 | 60 |

Распределение заработной платы работников любой отрасли хорошо описывается нормальным законом.

5. На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что средняя зарплата врача составляет 100 т.р., против альтернативы, что она больше 100 т.р. Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (P–значение).

6. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о том, что разброс в зарплатах врачей и преподавателей одинаков, против двухсторонней альтернативы.

7. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о том, что средняя зарплата врачей и преподавателей совпадают, против альтернативы, что у преподавателей зарплата выше:

   а) Считая объемы выборок достаточно большими

   б) Считая дисперсии одинаковыми

8. Время в часах безотказной работы микронаушника, величина $X$, подчиняется экспоненциальному (показательному) закону распределения с неизвестным параметром $\lambda$:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

   По выборке из 100 независимых наблюдений $\bar{x} = 0.52$. С помощью асимптотических свойств оценок максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-ый доверительный интервал:

   а) Для параметра $\lambda$

   б) Для вероятности того, что наушник проработает без сбоев весь тест — 45 минут

9. Приглашенный на Петербургский международный экономический форум Германом Грефом индийский мистик Садхгуру подарил Грефу древнюю шестигранную кость для принятия решений в сложных макроэкономических ситуациях. Служба безопасности Сбербанка провела серию из 100 испытаний и составила таблицу:

| Грань | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Число выпадений | 10 | 10 | 15 | 15 | 25 | 25 |

   С помощью теста отношения правдоподобия на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что все грани равновероятны.

$$\ln(1/6) = -1.79,\ \ln(0.15) = -1.90,\ \ln(0.25) = -1.39,\ \ln(0.1) = -2.30$$

### 8.2. 2016-2017

**I. Теоретический минимум**

В пунктах 1, 3, 11 и 12 предполагается, что $X = (X_1, \ldots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ — две независимые случайные выборки из нормальных распределений $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ и $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ соответственно.

1. Приведите формулу статистики, при помощи которой можно проверить гипотезу $H_0\colon \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Укажите распределение этой статистики при верной гипотезе $H_0$.
2. Приведите формулу информации Фишера о параметре $\theta$, содержащейся в одном наблюдении случайной выборки.
3. Приведите формулу статистики, при помощи которой можно проверить гипотезу $H_0\colon \mu_X - \mu_Y = \Delta_0$ при условии, что дисперсии $\sigma_X^2$ и $\sigma_Y^2$ неизвестны, но равны между собой. Укажите распределение этой статистики при верной гипотезе $H_0$.
4. Дайте определение критической области.
5. Приведите формулу плотности нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
6. Приведите формулы границ доверительного интервала с уровнем доверия $(1 - \alpha)$, $\alpha \in (0; 1)$, для вероятности появления успеха в случайной выборке $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$.
7. Дайте определение несмещенной оценки $\hat{\theta}$ для неизвестного параметра $\theta \in \Theta$.
8. Дайте определение эффективной оценки $\hat{\theta}$ для неизвестного параметра $\theta \in \Theta$.
9. Приведите формулу выборочной дисперсии.
10. Приведите формулу выборочной функции распределения.
11. Приведите формулы границ доверительного интервала с уровнем доверия $(1 - \alpha)$, $\alpha \in (0; 1)$, для $\mu_X$ при условии, что дисперсия $\sigma_X^2$ известна.
12. Укажите распределение статистики $\frac{\overline{X} - \mu_X}{\sigma/\sqrt{n}}$.

**II. Задачи**

1. В ходе анкетирования ста сотрудников банка «Альфа» были получены ответы на вопрос о том, сколько времени они проводят на работе ежедневно. Среднее выборочное оказалось равным 9.5 часам, а выборочное стандартное отклонение 0.5 часа.

   а) На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о том, что сотрудники банка «Альфа» в среднем проводят на работе 10 часов, против альтернативной гипотезы о том, что сотрудники банка «Альфа» в среднем проводят на работе менее 10 часов.

   б) Найдите точное $P$-значение для наблюдаемой статистики из пункта (а).

   в) Сформулируйте предпосылки, которые были использованы вами для выполнения пункта (а).

   г) На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о $H_0\colon \sigma^2 = 0.3$.

2. Проверка сорока случайно выбранных лекций показала, что студент Халявин присутствовал только на 16 из них. На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о том, что Халявин посещает в среднем половину лекций.

3. В ходе анкетирования двадцати сотрудников банка «Альфа» были получены ответы на вопрос о том, сколько времени они проводят на работе ежедневно. Среднее выборочное оказалось равным 9.5 часам, а выборочное стандартное отклонение 0.5 часа. Аналогичные показатели для 25 сотрудников банка «Бета» составили 9.8 и 0.6 часа соответственно.

а) На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о равенстве математических ожиданий времени, проводимого на работе сотрудниками банков «Альфа» и «Бета».

б) Сформулируйте предпосылки, которые были использованы вами для выполнения пункта (а).

в) На уровне значимости 5 % проверьте гипотезу о равенстве дисперсий времени, проводимого на работе сотрудниками банков «Альфа» и «Бета».

4. Вася решил проверить известное утверждение о том, что бутерброд падает маслом вниз. Для этого он провел серию из 200 испытаний. Ниже приведена таблица с результатами:

| Бутерброд | Маслом вниз | Маслом вверх |
|---|---|---|
| Число наблюдений | 105 | 95 |

Можно ли утверждать, что бутерброд падает маслом вниз так же часто, как и маслом вверх? При ответе на вопрос используйте уровень значимости 5 %.

5. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_{100})$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu$ и дисперсией $\nu$. Оба параметра $\mu$ и $\nu$ неизвестны. Используя следующие данные $\sum_{i=1}^{100} x_i = 30$, $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 146$ и $\sum_{i=1}^{100} x_i^3 = 122$ с помощью теста отношения правдоподобия проверьте гипотезу $H_0\colon \nu = 1$ на уровне значимости 5 %.

## 8.3. 2015-2016

1. Сформулируйте определения несмещённости, состоятельности и эффективности оценок.

2. На курсе учится 250 человек. Предположим, что число студентов, не явившихся на экзамен, хорошо описывается законом Пуассона.

   а) Методом максимального правдоподобия найдите оценку параметра распределения Пуассона.

   б) Проверьте выполнение свойств несмещенности, эффективности и состоятельности для данной оценки.

   в) Найдите оценку максимального правдоподобия для вероятности стопроцентной явки студентов на экзамен.

   г) Используя дельта-метод, постройте для этой вероятности асимптотический доверительный интервал.

3. Фармацевтическая компания выпустила новое лекарство от бессонницы, утверждая, что оно помогает 80% людей, страдающих бессонницей. Чтобы проверить утверждение компании, случайным образом выбираются 20 человек, страдающих бессонницей. Обозначим за $Y$ количество человек из выборки, которым лекарство помогло. Основная гипотеза, $H_0$: $p = 0.8$, альтернативная гипотеза $H_a$: $p = 0.6$. Критическая область: $\{Y < 12\}$.

   а) В терминах этой задачи сформулируйте, что является ошибкой первого рода. Найдите уровень значимости, соответствующий заданной критической области.

   б) В терминах этой задачи сформулируйте, что является ошибкой второго рода. Найдите вероятность ошибки второго рода.

   в) Найдите такое значение $c$, что вероятность ошибки первого рода $\alpha \approx 0.1$ при критической области вида $\{Y < c\}$. Найдите соответствующее значение вероятности ошибки второго рода.

   г) Каким должен быть размер выборки, чтобы выборочная доля страдающих бессонницей отличалась от истинной вероятности не более, чем на $0.01$ с вероятностью не менее, чем $0.95$?

4. Вася Сидоров утверждает, что ходит в кино в два раза чаще, чем на лекции по статистике, на лекции по статистике в два раза чаще, чем в спортзал. За последние полгода он 10 раз был в спортзале, 1 раз — на лекциях по статистике и 39 раз в кино.

   При помощи критерия хи-квадрат Пирсона на уровне значимости $0.05$ проверьте, правдоподобно ли Васино утверждение.

5. У Евдокла есть случайная выборка из экспоненциального распределения с неизвестным параметром $\lambda$ в 50 наблюдений, $X_1$, $X_2$, ..., $X_{50}$. Оказалось, что $\bar{X} = 1.1$. Евдокл хочет проверить гипотезу о равенстве $\lambda = 1$ против альтернативной гипотезы о неравенстве $\lambda \neq 1$ на уровне значимости $0.1$.

   Помогите Евдоклу и проверьте гипотезу с помощью критерия отношения правдоподобия.

   Пачка логарифмов: $\ln 50 \approx 3.9$, $\ln 55 \approx 4.0$, $\ln 11 \approx 2.4$, $\ln 60 \approx 4.1$, $\ln 12 \approx 2.5$

6. Американский демографический журнал опубликовал исследование, в котором утверждается, что посетители крупных торговых центров за одно посещение тратят в выходные дни больше, чем в будние. Наибольшие расходы приходятся на воскресенье в период с 4 до 6 часов вечера. Для двух независимых выборок посетителей средние расходы и выборочные стандартные отклонения расходов составили

| | Выходные | Рабочие дни |
|---|---|---|
| Число наблюдений | 21 | 19 |
| Средние расходы ($) | 78 | 67 |
| Выборочное стандартное отклонение ($) | 22 | 20 |

   а) Проверьте гипотезу о равенстве дисперсий расходов б) Предполагая, что дисперсии расходов одинаковы, проверьте гипотезу об отсутствии разницы в расходах в выходные и будние дни.

в) Сформулируйте все необходимые для проверки гипотез предыдущих пунктов предпосылки.

7. Винни Пух знает, что пчёлы и мёд бывают правильные и неправильные. По результатам 100 попыток добыть мёд Винни Пух составил таблицу сопряженности признаков.

| | Мёд правильный | Мёд неправильный |
|---|---|---|
| Пчёлы правильные | 12 | 36 |
| Пчёлы неправильные | 32 | 20 |

На уровне значимости $0.05$ проверьте гипотезу о независимости характеристик пчёл и мёда.

## 8.4. 2014-2015

1. **Задача для первого потока.**

   Проверка 40 случайно выбранных лекций показала, что студент Халявин присутствовал только на 16 из них.

   а) Найдите 95% доверительный интервал для вероятности увидеть Халявина на лекции.

   б) На уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что Халявин посещает в среднем половину лекций.

   в) Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (Р-значение).

1. **Задача для второго потока.**

   Вес упаковки с лекарством является нормальной случайной величиной. Взвешивание 20 упаковок показало, что выборочное среднее равно 51 г., а несмещенная оценка дисперсии равна 4.

   а) На уровне значимости 10% проверьте гипотезу, что в среднем вес упаковки составляет 55 г.

   б) Контрольное взвешивание 30 упаковок такого же лекарства другого производителя показало, что несмещенная оценка дисперсии веса равна 6. На уровне значимости 10% проверьте гипотезу о равенстве дисперсий веса упаковки двух производителей.

2. **Задача для первого потока.**

   В ходе анкетирования 15 сотрудников банка «Альфа» ответили на вопрос о том, сколько времени они проводят на работе ежедневно. Среднее выборочное оказалось равно $9.5$ часам при выборочном стандартном отклонении $0.5$ часа. Аналогичные показатели для 12 сотрудников банка «Бета» составили $9.8$ и $0.6$ часа соответственно.

   Считая распределение времени нормальным, на уровне значимости 5% проверьте гипотезу о том, что сотрудники банка «Альфа» в среднем проводят на работе столько же времени, сколько и сотрудники банка «Бета».

2. **Задача для второго потока.**

   Экзамен принимают два преподавателя, случайным образом выбирая студентов. По выборке из 85 и 100 наблюдений, выборочные доли не сдавших экзамен студентов составили соответственно $0.2$ и $0.17$.

   а) Можно ли при уровне значимости в 1% утверждать, что преподаватели предъявляют к студентам одинаковый уровень требований?

   б) Вычислите минимальный уровень значимости, при котором основная гипотеза отвергается (Р-значение).

3. Методом максимального правдоподобия найдите оценку параметра $\theta$ для выборки $X_1$, ..., $X_n$ из распределения с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}, \ x > 0 \\ 0, \ x \leqslant 0 \end{cases}$$

4. Пусть $X_1$, ..., $X_{100}$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu$ и дисперсией $\nu$, где $\mu$ и $\nu$ — неизвестные параметры. По 100 наблюдениям $\sum x_i = 30$, $\sum x_i^2 = 146$, $\sum x_i^3 = 122$.

   При помощи теста отношения правдоподобия протестируйте гипотезу $H_0 : \nu = 1$ на уровне значимости 5%.

5. **Исследовательская задача.**

   Пусть $X_1$, ..., $X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu$ и дисперсией $\nu$, где $\mu$ и $\nu$ — неизвестные параметры. Рассмотрим три классических теста, отношения правдоподобия, $LR$, множителей Лагранжа, $LM$ и Вальда, $W$, для тестирования гипотезы $H_0 : \mu = 0$.

а) Сравните статистики $LR$, $LM$ и $W$ между собой. Какая — наибольшая, какая — наименьшая?

б) Изменится ли упорядоченность статистик, если проверять гипотезу $H_0:\ \mu = \mu_0$?

Подсказка: $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ при $x > -1$

6. **Исследовательская задача.**

Величины $X_1$, ..., $X_n$ независимы и одинаково распределены с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax},\ x > 0 \\ 0,\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

По выборке из 100 наблюдений оказалось, что $\sum x_i = 300$, $\sum x_i^2 = 1000$, $\sum x_i^3 = 3700$.

а) Найдите оценку неизвестного параметра $a$ методом моментов

б) Используя дельта-метод или иначе оцените дисперсию полученной оценки $a$

в) Постройте 95%-ый доверительный интервал используя оценку метода моментов

## 9. Контрольная работа 4. ИП

### 9.1. 2017-2018

Напутствие в добрый путь:

1. Работа сдаётся только в виде запроса pull-request на гитхаб-репозиторий.
2. Имя файла должно быть вида ivanov_ivan_161_kr_4.Rmd.
3. Также фамилию и имя нужно указать в шапке документа в поле author :)
4. Если нужно, то установите пакеты tidyverse, maxLik, nycflights13.

1. Симулируем бурную деятельность! В качестве параметра $k$ в задаче используй число букв в своей фамилии в именительном падеже :)

   Каждый день Василий съедает случайное количество булочек, которое распределено по Пуассону с параметром 10. Логарифм затрат в рублях на каждую булочку распределён нормально $N(2, 1)$. Андрей каждый день съедает биномиальное количество булочек $Bin(2k, 0.5)$. Затраты Андрей на каждую булочку распределены равномерно на отрезке $[2; 20]$.

   а) Сколько в среднем тратит Василий на булочки за день?
   б) Чему равна дисперсия дневных расходов Василия?
   в) Какова вероятность того, что за один день Василий потратит больше денег, чем Андрей?
   г) Какова условная вероятность того, что Василий за день съел больше булочек, чем Андрей, если известно, что Василий потратил больше денег?

2. Сражаемся с реальностью! В пакете nycflights13 встроен набор данных weather о погоде в разные дни в разных аэропортах.

   а) Постройте гистограмму переменной влажность, humid. У графика подпишите оси!
   б) Постройте диаграмму рассеяния переменных влажность и количество осадков, precip. У графика подпишите оси!

      Посчитайте выборочное среднее и выборочную дисперсию влажности и количества осадков.
   в) С помощью максимального правдоподобия оцените параметр $\mu$, предположив, что наблюдения за влажностью имеют нормальное $N(\mu, 370)$-распределение и независимы. Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\mu$.
   г) С помощью максимального правдоподобия оцените параметр $\sigma^2$, предположив, что наблюдения за влажностью имеют нормальное $N\left(60, \sigma^2\right)$-распределение и независимы. Постройте 95%-ый доверительный интервал для $\sigma^2$.

      Если при численной оптимизации параметр $\sigma^2$ становится отрицательным, можно задать параметры по-другому, например, $\sigma^2 = \exp(\gamma)$.

## 10. Финальные экзамены

### 10.1. 2017-2018

**Вопрос 1.** Дана случайная выборка из двух наблюдений, $X_1$ и $X_2$. Несмещённой и наиболее эффективной оценкой математического ожидания из предложенных является

$\boxed{A}$ $\frac{20}{20}X_1 + \frac{20}{20}X_2$

$\boxed{B}$ $\frac{8}{20}X_1 + \frac{12}{20}X_2$

$\boxed{C}$ $\frac{10}{20}X_1 + \frac{10}{20}X_2$

$\boxed{D}$ $\frac{1}{20}X_1 + \frac{19}{20}X_2$

$\boxed{E}$ $\frac{5}{20}X_1 + \frac{15}{20}X_2$

**Вопрос 2.** Величины $X_1$ и $X_2$ независимы и одинаково распределены. Оценка $\hat{\mu} = 3aX_1 + 4a^2X_2$ математического ожидания $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ будет несмещённой при $a$ равном

- [A] 1.2
- [B] 3
- [C] $-1$
- [D] 0
- [E] $-3$

**Вопрос 3.** Величины $X_1$, ..., $X_5$ представляют собой случайную выборку. Несмещённой оценкой дисперсии $X_i$ является

- [A] $0.25\sum_{i=1}^{4}(X_i - \bar{X})^2$
- [B] $0.5\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2$
- [C] $0.2\sum_{i=1}^{4}(X_i - \bar{X})^2$
- [D] $0.25\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2$
- [E] $0.2\sum_{i=1}^{5}(X_i - \bar{X})^2$

**Вопрос 4.** Последовательность оценок $\hat{a}_n$ параметра $a$ является состоятельной, если

- [A] $\mathbb{E}((\mathbb{E}(\hat{a}_n) - a)^2) \xrightarrow{P} \hat{a}_n$
- [B] $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{P} \hat{a}_n$
- [C] $\hat{a}_n \xrightarrow{P} a$
- [D] $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{P} 0$
- [E] $\mathbb{E}((\hat{a}_n - a)^2) \xrightarrow{P} a$

**Вопрос 5.** Оценка $\hat{a}$ называется эффективной оценкой параметра $a$ в классе оценок $K$, если

- [A] $\mathbb{E}(\hat{a}^2) \geqslant \mathbb{E}(\tilde{a}^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [B] $\mathbb{E}((\hat{a} - a)^2) \leqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [C] $\mathbb{E}((\hat{a} - \tilde{a})^2) \leqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [D] $\mathbb{E}((\hat{a} - a)^2) \geqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$
- [E] $\mathbb{E}((\hat{a} - \tilde{a})^2) \geqslant \mathbb{E}((\tilde{a} - a)^2)$ для всех $\tilde{a} \in K$

**Вопрос 6.** Апостериорная функция плотности пропорциональна

- [A] Отношению функции правдоподобия к априорной плотности
- [B] Отношению априорной плотности к функции правдоподобия
- [C] Разности априорной плотности и правдоподобия
- [D] Произведению априорной плотности и правдоподобия
- [E] Сумме априорной плотности и правдоподобия

**Вопрос 7.** Алгоритм Метрополиса-Гастингса порождает

- [A] Независимую выборку из апостериорного закона распределения
- [B] Независимую выборку из смеси априорного и апостериорного законов
- [C] Независимую выборку из априорного закона распределения
- [D] Зависимую выборку из априорного закона распределения
- [E] Зависимую выборку из апостериорного закона распределения

**Вопрос 8.** В алгоритме Метрополиса-Гастингса был предложен переход из точки $\theta^{(0)} = 4$ в точку $\theta^{(1)}_{prop} = 5$. Априорное распределение $\theta$ равномерное. Известны значения функций правдоподобия, $f(data|\theta = 4) = 0.7$, $f(data|\theta = 5) = 0.8$. Вероятность одобрения перехода равна

- [A] 0.8/5
- [B] 1
- [C] 28/40
- [D] 4/5
- [E] 7/8

**Вопрос 9.** Есть выборка $X_1, X_2, ..., X_5$ и выборка $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$. Исследовательница Ирина проводит тест суммы рангов Вилкоксона. У выборки $X_i$ сумма рангов равна 7. Сумма рангов для выборки $Y_j$ равна

$\boxed{A}$ 2 $\boxed{C}$ 38 $\boxed{E}$ 45

$\boxed{B}$ 1 $\boxed{D}$ 43

**Вопрос 10**. Вероятность того, что в случайной выборке три наблюдения подряд попадут в верхний теоретический квартиль равна

$\boxed{A}$ 0.01 $\boxed{C}$ 1/2 $\boxed{E}$ 1/64

$\boxed{B}$ 0.05 $\boxed{D}$ 1/4

**Вопрос 11**. Величины $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка с распределением

| $x$ | $-4$ | $0$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = x)$ | $3/4 - \theta$ | $1/4$ | $\theta$ |

Оценка неизвестного параметра $\theta$, найденная с помощью первого начального момента, равна

$\boxed{A}$ $\frac{\bar{X}+7}{3}$ $\boxed{C}$ $\frac{12-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{7}$ $\boxed{D}$ $\frac{7-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{12}$

$\boxed{B}$ $\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2-12}{7}$ $\boxed{E}$ $\frac{\bar{X}+3}{7}$

**Вопрос 12**. Случайная выборка состоит из одного наблюдения $X_1$, которое имеет плотность распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}x^{-1+\frac{1}{\theta}} & \text{при } x \in (0;\,1), \\ 0 & \text{при } x \notin (0;\,1). \end{cases}$$

Оценка параметра $\theta$, найденная с помощью метода максимального правдоподобия, равна

$\boxed{A}$ $X_1$ $\boxed{C}$ $-\ln X_1$ $\boxed{E}$ $\frac{1}{\ln X_1}$

$\boxed{B}$ $\ln X_1$ $\boxed{D}$ $-X_1$

**Вопрос 13**. Величины $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;\,1)$. Оценка максимального правдоподобия параметра $p$ равна $\bar{X}$. Оценка максимального правдоподобия для $\sqrt{p}$ равна

$\boxed{A}$ $\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i}}{n}$ $\boxed{C}$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\boxed{E}$ $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$

$\boxed{B}$ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ $\boxed{D}$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i}$

**Вопрос 14**. Величины $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;\,1)$. Информация Фишера о параметре $p$, заключенная в одном наблюдении, равна

$\boxed{A}$ $\frac{1}{p(1-p)}$ $\boxed{C}$ $p(1-p)$ $\boxed{E}$ $p$

$\boxed{B}$ $\frac{1}{p}$ $\boxed{D}$ $1-p$

**Вопрос 15**. Известно истинное значение параметра, $\theta = 1$, и информация Фишера о параметре $\theta$, заключенная в одном наблюдении случайной выборки, $I_1(\theta) = 8$. Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ параметра $\theta$, найденная по ста наблюдениям случайной выборки, имеет распределение, похожее на

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(1,\,1/800)$ $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(1,\,1/\sqrt{8})$ $\boxed{E}$ $\mathcal{N}(1,\,8)$

$\boxed{B}$ $\mathcal{N}(1,\,1/\sqrt{800})$ $\boxed{D}$ $\mathcal{N}(1,\,1/8)$

**Вопрос 16**. Дана реализация выборки: 1, 2, 0. Выборочный начальный момент второго порядка равен

$\boxed{A}$ 2.5 $\boxed{C}$ 1/3 $\boxed{E}$ 3

$\boxed{B}$ 5/3 $\boxed{D}$ 1

**Вопрос 17**. Математическое ожидание выборочного среднего, построенного по выборке из равномерного распределения на отрезке $[0, 2]$, равно

$\boxed{A}$ $1/\sqrt{n}$ $\boxed{C}$ 0 $\boxed{E}$ 1.5

$\boxed{B}$ 1 $\boxed{D}$ 2

**Вопрос 18**. Дана реализация выборки: 3, 2, 5, 4, 2. Выборочная функция распределения в точке $x = 2.5$ принимает значение

$\boxed{A}$ 0.25 $\boxed{C}$ 0.5 $\boxed{E}$ 0.2

$\boxed{B}$ 0.4 $\boxed{D}$ 0.6

**Вопрос 19**. Экзамен принимают два преподавателя: Злой и Добрый. Злой поставил оценки 2, 3, 10, 8, 1. А Добрый — оценки 6, 4, 7, 9. Значение статистики критерия Вилкоксона о совпадении распределений оценок может быть равно

$\boxed{A}$ 25 $\boxed{C}$ 26 $\boxed{E}$ 24

$\boxed{B}$ 23 $\boxed{D}$ 22

**Вопрос 20**. Датчик случайных чисел выдал два значения псевдослучайных чисел 0.1 и 0.8. Вычислите значение критерия Колмогорова и проверьте гипотезу о соответствии распределения равномерному на $(0, 1)$. Критическое значение статистики Колмогорова считайте равным $0.776$.

$\boxed{A}$ 0.1, $H_0$ отвергается $\boxed{C}$ 0.8, $H_0$ отвергается $\boxed{E}$ 0.4, $H_0$ не отвергается

$\boxed{B}$ 0.3, $H_0$ не отвергается $\boxed{D}$ 0.2, $H_0$ не отвергается

**Вопрос 21**. Случайные величины $X_1, ..., X_m$ — случайная выборка из нормального распределения. Величины $Y_1, ..., Y_n$ — независимая случайная выборка из нормального распределения. Для построения доверительного интервала для отношения дисперсий можно использовать статистику с распределением

$\boxed{A}$ $F_{m,n-2}$ $\boxed{C}$ $\chi^2_{m+n-2}$ $\boxed{E}$ $t_{m+n-2}$

$\boxed{B}$ $F_{m-1,n-1}$ $\boxed{D}$ $F_{m+1,n+1}$

**Вопрос 22**. При построения доверительного интервала для разности математических ожиданий в двух нормальных выборках размером $m$ и $n$ в случае равных неизвестных дисперсий используется распределение

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(0, m+n-2)$ $\boxed{C}$ $t_{m+n}$ $\boxed{E}$ $t_{m+n-2}$

$\boxed{B}$ $F_{m,n}$ $\boxed{D}$ $F_{m-1,n-1}$

**Вопрос 23**. Для построения доверительного интервала для математического ожидания используется выборка из 100 наблюдений. Выборочное среднее равно 5. Дисперсия генеральной совокупности известна и равна 25. Минимальная длина 95%-доверительного интервала примерно равна

$\boxed{A}$ 5 $\boxed{C}$ 0.98 $\boxed{E}$ 10

$\boxed{B}$ 2.5 $\boxed{D}$ 1.96

**Вопрос 24**. При построении 90%-доверительного интервала для вероятности используется выборка из 25 наблюдений. Выборочная доля составляет 0.6. В симметричный доверительный интервал попадают значения

A) 0.6, 0.7, 0.85
B) 0.5, 0.6, 0.65
C) 0.35, 0.5, 0.65
D) 0.8, 0.9, 1.0
E) 0.7, 0.8, 0.9

**Вопрос 25**. При построении 90%-доверительного интервала для дисперсии используется выборка из 26 наблюдений. Несмещенная оценка дисперсии равна 100. Левая граница симметричного по вероятности доверительного интервала равна

A) 43.25
B) 106.32
C) 8.16
D) 32.8
E) 66.4

**Вопрос 26**. При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий оценок по математической статистике в двух группах, было получено P-значение 0.03. Тогда нулевая гипотеза

A) отвергается на уровне значимости 0.05 и на уровне значимости 0.01
B) не отвергается на уровне значимости 0.05 и отвергается на уровне значимости 0.01
C) не отвергается ни на уровне значимости 0.05, ни на уровне значимости 0.01
D) отвергается на уровне значимости 0.05 и не отвергается на уровне значимости 0.01
E) ответ зависит от альтернативной гипотезы

**Вопрос 27**. Имеются две случайных выборки $X_1, ..., X_{31}$ и $Y_1, ..., Y_{41}$ из нормальных распределений. Известно, что $\sum_{i=1}^{31}(X_i - \bar{X})^2 = 120$ и $\sum_{i=1}^{41}(Y_i - \bar{Y})^2 = 400$. При проверке гипотезы о равенстве дисперсий этих распределений значение тестовой статистики может быть равно

A) 0.3
B) 2.52
C) 2
D) 3.33
E) 2.5

**Вопрос 28**. Имеется выборка из одного наблюдения $X_1$. На основе этой выборки тестируется гипотеза $H_0$: $X_1 \sim U[0;2]$ против альтернативной гипотезы $X_1 \sim U[1,3]$. Используется критерий следующего вида: если $X_1 > a$, то $H_0$ отвергается. Минимальная вероятность ошибки первого рода достигается при $a$ равном

A) 0.5
B) 1.5
C) 2
D) 1.9
E) 1

**Вопрос 29**. Исследовательница Алевтина подбросила кубик 12 раз и 12 раз на нём выпала шестёрка. Алевтина хочет проверить, выпадают ли все грани равновероятно, при помощи критерия $\chi^2$ Пирсона. Значение тестовой статистики будет равно

A) 60
B) 12
C) 5
D) 50
E) 6

**Вопрос 30**. Исследовательница Глафира считает, что любовь к энергетическим напиткам и успешность сдачи экзамена по математической статистике должны быть как-то связаны. Опросив 200 своих однокурсников, она получила следующие результаты:

| | пьёт энергетик | не пьёт энергетик |
|---|---|---|
| Успешно сдал | 20 | 120 |
| Завалил | 40 | 20 |

Статистика $\chi^2$ Пирсона для проверки независимости признаков с округлением до целых равна

$\boxed{A}$ 70

$\boxed{B}$ 55

$\boxed{C}$ 65

$\boxed{D}$ 35

$\boxed{E}$ 45

# 11. Ответы к минимумам

## 11.1. Контрольная работа 1 — Задачный минимум

1. а) 0.25
   б) 0.6
   в) зависимы
2. а) 0.5
   б) 0.75
   в) независимы
3. $\frac{4}{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}$
4. $\frac{4}{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}$
5. 0.5
6. $7/15$
7. 0.028
8. $\frac{5}{7}$
9. а) 0.5
   б) 0.75
   в) 0
   г) 0.5
   д)
   е) функция плотности не существует
10. а) 0.5
    б) 0
    в) 0.5
    г) 0.5
    д) 0.5
11. а) 0.25
    б) 0.75
    в) 0
    г) 0.25
    д)
    е) функция плотности не существует
12. а) 0.25
    б) 0.25
    в) 0.75
    г) $11/16$
    д) 0.75
13. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$
    б) $1-\left(\frac{1}{4}\right)^4$
    в) 0
    г) 3
    д) 0.75
    е) $2, 3$
14. а) $\left(\frac{3}{5}\right)^5$
    б) $1-\left(\frac{3}{5}\right)^5$
    в) 0
    г) 2
    д) 1.2
    е) 2
15. а) $e^{-100}$
    б) $1-e^{-100}$
    в) 0
    г) 100
    д) $99, 100$
16. а) $e^{-101}$
    б) $1-e^{-101}$
    в) 0
    г) 101
    д) $100, 101$
17. $1-\frac{8^5}{9^5}$
18. $\frac{8^5}{9^5}$
19. $1-e^{-3}$
20. $e^{-6}$
21. а) 0.5
    б) 0.5
    в) 0.25
    г) 0
22. а) 0.5

б) 0.5
в) $\frac{1}{3}$
г) $\frac{1}{12}$
д) 1

23. а) 2
б) 0.25
в) $\frac{3}{4}$
г) 1

24. а) 2
б) 0.5
в) 0.5
г) 0
д) 0.8

## 11.2. Контрольная работа 2 — Задачный минимум

1. а) 0.5
б) 0.3
в) 0.2
г) нет
д) 0.3
е)

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | 0.5 | 0.5 |

ж) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1 \\ 0.5, & \text{при } x \in [-1; 1) \\ 1, & \text{при } x \geqslant 1 \end{cases}$

2. а) 0.5
б) 0.4
в) 0.2
г) да
д) 0.6
е)

| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y)$ | 0.4 | 0.2 | 0.4 |

ж) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y < -1 \\ 0.4, & \text{при } y \in [-1; 0) \\ 0.6, & \text{при } y \in [0; 1) \\ 1, & \text{при } y \geqslant 1 \end{cases}$

3. а) 0
б) 1
в) 1
г) 0
д) 0.6
е) 0.6
ж) 0
з) 0
и) 0
к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

4. а) 0
б) 1
в) 1
г) 0
д) 0.8
е) 0.8
ж) 0
з) 0
и) 0
к) да, являются некоррелированными, но нельзя утверждать, что являются независимыми

5. а) 0.25
б) 0.2
в) Обозначим $A = \{X = -1\}$

| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y \vert A)$ | 0.4 | 0.2 | 0.4 |

г) 0
д) 0.8

6. а) 0.5
б) 0.2
в) Обозначим $A = \{X = 1\}$

| $y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y \vert A)$ | 0.4 | 0.2 | 0.4 |

г) 0
д) 0.8

7. а) 0
б) 36
в) 9
г) 60
д) $-4$

е) $\frac{-1}{3\sqrt{5}}$

ж) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

8. а) $-4$

б) $8$

в) $1$

г) $10$

д) $-6$

е) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

9. а) $0.3413$

б) $0.0228$

в) $0.1915$

10. а) $0.6826$

б) $0.0228$

в) $0.1574$

11. $0.4332$

12. $0.8185$

13. $0.4514$

14. $0.5328$

15. $\approx 0.8185$

16. $\approx 0.9115$

17. $\approx 0.6422$

18. $\approx 0.9606$

19. а) $0.125$

б) $0.5$

в) $f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

г) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

д) нет

20. а) $\frac{1}{16}$

б) $\frac{1}{2}$

в) $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

г) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

д) да

21. а) $\frac{7}{12}$

б) $\frac{7}{12}$

в) $\frac{1}{3}$

г) $-\frac{1}{144}$

д) $-\frac{1}{11}$

22. а) $\frac{2}{3}$

б) $\frac{2}{3}$

в) $\frac{4}{9}$

г) $0$

д) $0$

23. а) $f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

в) $\frac{7}{12}$

г) $\frac{11}{144}$

24. а) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & \text{при } y \in [0;1] \\ 0, & \text{при } y \notin [0;1] \end{cases}$

б) $f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \in [0;1] \\ 0, & \text{при } x \notin [0;1] \end{cases}$

в) $\frac{2}{3}$

г) $\frac{1}{18}$

## 11.3. Контрольная работа 3 — Задачный минимум

1. а) $\approx 0.15$

б) $U \sim \mathcal{N}(101, 29)$, $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 29}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(u-101)^2}{29}}$

в) $\approx 0.02$

2. а) $71.14$

б) $f(y|x = 170) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 20}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y-71.14)^2}{20}}$

в) $\approx 0$

3. а) $0.25$

б) $0.6875$

в) $0.91(6)$

г) 0.75

д) $-0.28125$

4. а) $-1, 0, 1, 1$

б) $-1$

в) 1

г) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.25, & -1 \leqslant x < 0 \\ 0.5, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

5. а) $\theta$

б) да

6. а) нет, оценка смещена

б) $c = 2$

7. а) все оценки несмещенные

б) $\hat{p}_3$ наиболее эффективная

8. да

9. да

10. $\hat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 \cdot 20}{n}}$

11. $\hat{\theta}_{MM} = \frac{1}{5}\left(6 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$, $\hat{\theta}_{MM} = 0.68$

12. $\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$

13. $\hat{p}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

14. да

15. $n_1 \approx 260$, $n_2 \approx 232$, $n_3 \approx 658$

## 11.4. Контрольная работа 4 — Задачный минимум

1. $\left[-1.6 - 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}; -1.6 + 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$

2. $\left[-1.6 - 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}; -1.6 + 2.92 \cdot \sqrt{\frac{18.33}{3}}\right]$

3. $\left[\frac{17.43 \cdot 2}{4.61}; \frac{17.43 \cdot 2}{0.21}\right]$

4. $\left[-1.6 - (-2.6) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}; -1.6 - (-2.6) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}\right]$

5. $\left[1.04 - (-0.37) - 3.18 \cdot \sqrt{3.02}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}; 1.04 - (-0.37) + 3.18 \cdot \sqrt{3.02}\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}\right]$

6. $\left[0.45 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}; 0.45 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}}\right]$

7. $\left[0.6 - 0.4 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}; 0.6 - 0.4 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{100} + \frac{0.4 \cdot 0.6}{200}}\right]$

8. $\left[2.5 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}; 2.5 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{40}}\right]$

9. $\left[\frac{1}{0.52} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}; \frac{1}{0.52} + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 0.52^2}}\right]$

10. а) $\approx 0.02$

б) $\approx 0.02$

в) $\approx 0.98$

11. 0.2

12. $z_{obs} \approx -1.39$, $z_{crit} = 1.28$, нет оснований отвергать $H_0$.

13. $t_{obs} \approx -0.65$, $t_{crit} = 1.89$, нет оснований отвергать $H_0$.

14. $z_{obs} \approx 0.93$, $z_{crit} = -1.65$, нет оснований отвергать $H_0$.

15. $t_{obs} \approx 0.89$, $t_{crit} = -2.35$, нет оснований отвергать $H_0$.

16. $F_{obs} \approx 95.37$, $F_{crit} = 199.5$, нет оснований отвергать $H_0$.

17. $z_{obs} \approx 2.04$, $z_{crit} = 1.65$, основная гипотеза отвергается.
18. $z_{obs} \approx 4.16$, $z_{crit} = 1.96$, основная гипотеза отвергается.
19. $\gamma_{obs} \approx 0.26$, $\gamma_{crit} = 5.99$, нет оснований отвергать $H_0$.
20. $\gamma_{obs} \approx 139.4$, $\gamma_{crit} = 3.84$, основная гипотеза отвергается.
21. $LR_{obs} \approx 5.5$, $LR_{crit} = 3.84$, основная гипотеза отвергается.

# 12. Решения контрольной номер 1

## 12.1. 2018-2019

1. Покажем, что все вероятности равны. Пусть $K$ — номер, под которым идёт Вася. Тогда вероятность того, что Вася вытащит правильный билет равна вероятности того, что до него не вытащили правильный билет, помноженная на вероятность того, что он вытащит верный (первое слагаемое) плюс вероятность того, что до него уже вытащили один правильный билет, помноженная на вероятность того, что он вытащит правильный билет. По сути, это формула полной вероятности, где вероятность вытащить у Васи одинаковая при разных условиях, так как он не знает, кто какой билет вытащил, а вероятности условий (вытащили до него правильный билет или нет) разные.

   Вероятность того, что Вася вытащит правильный билет равна

   $$\frac{\text{количество оставшихся хороших билетов}}{25-(K-1)},$$

   так как до Васи тянули ещё $-1$ студентов.

   Начало второго слагаемого домножается на два, так как неизвестно, какой из двух хороших билетов могли вытянуть до Васи. Следовательно, вероятность увеличивается в два раза.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P} &= \frac{C_{23}^{K-1}}{C_{25}^{K-1}} \cdot \frac{2}{25-K+1} + \frac{2 \cdot C_{23}^{K-2}}{C_{25}^{K-1}} \cdot \frac{1}{25-K+1} \\ &= \frac{23! \cdot (K-1)! \cdot (26-K)! \cdot 2}{(K-1)! \cdot (24-K)! \cdot 25! \cdot (26-K)} \\ &= \frac{2(25-K)}{25 \cdot 24} + \frac{2(K-1)}{25 \cdot 24} \\ &= \frac{48}{25 \cdot 24} = \frac{2}{25}\end{aligned}$$

2. а) Зададим совместное распределение. Оно определяет все пересечения событий, то есть когда события происходят одновременно. Тогда таблица имеет вид:

   | $\eta/\xi$ | 0 | 1 |
   |---|---|---|
   | 0 | $\frac{4}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
   | 1 | $\frac{1}{6}$ | 0 |

   б) $\mathbb{P}(\xi=1) \cdot \mathbb{P}(\eta=1) = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{36}$
   $\mathbb{P}(\xi=1 \cap \eta=1) = 0 \Rightarrow$ Величины не являются независимыми

   в) Зададим распределение $\xi+\eta$:

   | $\eta+\xi$ | 0 | 1 | 2 |
   |---|---|---|---|
   | $\mathbb{P}(\eta+\xi=x)$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | 0 |

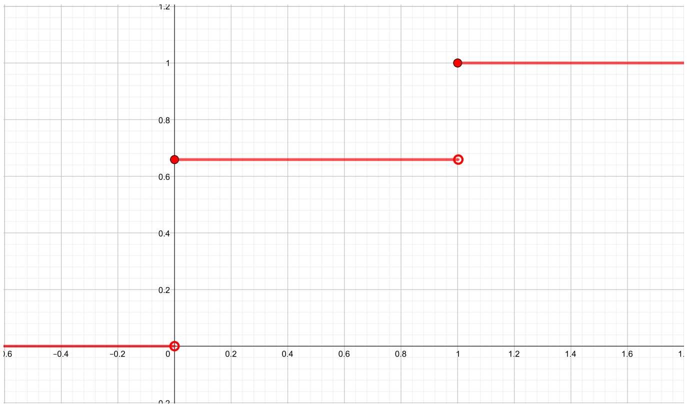


Рис. 4: Функция распределения $\eta + \xi$

г) Зададим совместное распределение величин $\xi$ и $\xi+\eta$. Легко убедиться, что случайные величины одновременно принимают соответствующие значения со следующими вероятностями:

| $(\xi+\eta)/\xi$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{4}{6}$ | 0 |
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | 0 | 0 |

Важно заметить, что когда, например, $\xi = 1$, то автоматически при $\xi+\eta = 1 \Rightarrow \eta = 0$ и вероятности легко находятся из частных распределений. Из этой таблицы по формуле условной вероятности легко найти распределение:

| | | |
|---|---|---|
| $\xi \vert \xi+\eta = 1$ | 0 | 1 |
| $\mathbb{P}(\xi = x \vert \xi+\eta = 1)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

3. а)

$$f_\xi(x) = \begin{cases} cx^2, x \in [0; 1] \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

$$\int_0^1 cx^2 dx = \frac{1}{3}cx^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 1 \to c = 3$$

б) $\mathbb{P}(\xi = \frac{1}{2}) = 0$ по определению.

$$\mathbb{P}\left(\xi \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27}$$

в)

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0x < 0 \\ x^3, x \in [0, 1] \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

г) $\mathbb{P}(\xi \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}]) = \int_{\frac{1}{3}}^1 3x^2 dx = x^3|_{\frac{1}{3}}^1 = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$

д) $\mathbb{P}(\xi \leqslant \frac{1}{2} | \xi \geqslant \frac{1}{3}) = \frac{\mathbb{P}(\xi \leqslant \frac{1}{2}, \xi \geqslant \frac{1}{3})}{\mathbb{P}(\xi \geqslant \frac{1}{3})}$

$\mathbb{P}(\xi \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3x^2 dx = x^3|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} \approx 0.087$

е) Так как функция плотности — парабола ветвями вверх $[0, 1]$, на котором она определена, максимум будет достигаться на возрастающей части ветки, то есть в правом конце отрезка. Следовательно, мода равна 1.

ж) $\mathbb{E}(\xi) = \int_0^1 x3x^2dx = \frac{3}{4}x^4|_0^1 = \frac{3}{4}$

з) $\int_0^{q_{0.5}} 3x^2dx = x^3|_0^{q_{0.5}} = \frac{1}{2} \to q_{0.5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

4. а) $n = 12, q = \frac{1}{3}, p = \frac{2}{3}$
$12 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \leqslant \mu_0 \leqslant 12 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$
$\frac{23}{3} \leqslant \mu_0 \leqslant \frac{26}{3}$
$7.6 \leqslant \mu_0 \leqslant 8.6 \to \mu_0 = 8$

б) $\mathbb{P}(7 \text{ верных}) = \binom{12}{7}(1-p)^{n-7}\frac{12!}{7!5!}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^7 \approx 0.19$

в) Введём дополнительные переменные:

- $X$ — количество судей, которые вынесли обвинительный приговор
- $A$ — принято верное решение
- $B$ — подсудимый обвинён
- $C$ — подсудимый виновен

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Верный}) &= \mathbb{P}(\text{Обвинительный}|\text{Виновен})\,\mathbb{P}(\text{Виновен})\\ &+ \mathbb{P}(\text{Не обвинительный} \mid \text{Невиновен})\,\mathbb{P}(\text{Невиновен})\\ &= \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{p} + \frac{\mathbb{P}(\bar{B} \cap \bar{C})}{1-p} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(B|C) = P(X = 7|C) = \binom{12}{7}(1-p)^5p^7$
$\mathbb{P}(B|\bar{C}) = P(X = 7|C) = \binom{12}{7}(1-p)^7p^5$
$\mathbb{P}(X = 7) = \binom{12}{7}(1-p)^5p^2p + \binom{12}{7}(1-p)^7p^5(1-p) = \binom{12}{7}(1-p)^5p^5(p^3 + (1-p)^3)$

г) $p = 0.17$
$\mathbb{P}(X = 7) = \binom{12}{7}(1-0.17)^5 0.17^5(0.17^3 + (1-0.17)^3) \approx 0.025$

а) 12 этажей, 11 человек. Если указано, что они равновероятно выходят на любом этаже, то подъезд можно представить, как отрезок, на который согласно равномерному распределению бросают точку (человека), и он попадает в один из равновероятных 11 блоков. Тогда очевидно, что вероятность того, что каждый попадёт в свой конкретный блок равна

$$\left(\frac{1}{11}\right)^{11} \approx 0$$

б) Исходя из той же логики, найдём условную вероятность того что все выйдут не выше 9-го, если известно, что они не вышли на первых пяти этажах. Будем подразумевать, что первые пять этажей означает со 2 по 6. Тогда вероятность того, что все 11 человек выйдут на 7, 8 или 9, что является вероятностью пересечения события и условия, будет равняться

$$\left(\frac{3}{11}\right)^{11}$$

Вероятность условия равна вероятности того что никто не выйдет на первых пяти этажах равняется

$$\left(\frac{5}{11}\right)^{11}$$

Тогда условная вероятность равна

$$\frac{\left(\frac{3}{11}\right)^{11}}{\left(\frac{5}{11}\right)^{11}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{11} \approx 0.003$$

## 12.2. 2017-2018

1. а) События называются независимыми, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

   б) Запасёмся всеми нужными вероятностями:
   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$
   $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$
   $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$
   $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{3}$ — выпадет чётое число больше трёх
   $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$ — выпадет чётное число, кратное трём
   $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{6}$ — выпадет число, большее трёх и кратное трём
   Теперь можно проверять независимость:
   $\mathbb{P}(A \cap C) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \Rightarrow$ не являются независимыми
   $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow$ являются независимыми
   $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \Rightarrow$ являются независимыми

2. а) Количество возможных вариантов ТМ: $C_{10}^2$, количество возможных вариантов ЗМ: $C_{24}^2$. Количество их возможных сочетаний: $C_{10}^2 \cdot C_{24}^2$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

   б) По классическому определению вероятностей, предполагая исходы равновероятными, искомая вероятность равна $\frac{C_{16}^2}{C_{24}^2}$.

   в) По тому же принципу:

$$\frac{C_k^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{10!}{2!\cdot 8!}} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{(k-1)k}{2}\frac{2}{9\cdot 10} = \frac{1}{15}$$

   Получаем квадратное уравнение вида $k^2 - k - 6 = 0$ с корнями $-2$ и 3. Так как $k$ не может быть отрицательным, ответ 3.

3. а) Если эксперт отдаёт предпочтение Fit, то это можно интерпретировать как «успех» в схеме Бернулли. Так как $\xi$ - количество успехов, $k \in [0; 4]$, $p = \frac{1}{3}$, то

$$\mathbb{P}(\xi = k) = C_n^k (p)^k (1-p)^{n-k}$$

   Большинство означает, что либо три, либо четыре эксперта выбрали Fit.

$$\mathbb{P}(\xi = 3) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi > 2) = \frac{9}{81}$$

   б) Аналогично:

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$\mathbb{P}(\xi = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

   в) Все вероятности посчитаны, видим, что наибольшая достигается при $\xi = 1$.

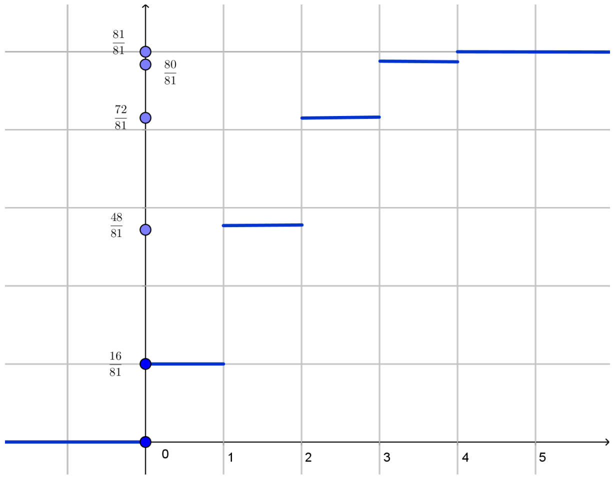



Рис. 5: Функция распределения

г) $\mathbb{E}(X) = np = \frac{4}{3}$, $\text{Var}(X) = npq = \frac{8}{9}$

4. а) Так как указано, что цена сметаны распределена равномерно на отерзке $[250, 1000]$, максимальное значение цены — 1000, это и есть необходимая сумма.

   б) Вспомним, что функция распределения $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$, нужно найти такой $x$, что $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0.9$:
$$0.9 = 1 - \exp(-x^2) \Rightarrow \exp(-x^2) = 0.1 \Rightarrow -x^2 = \ln(0.1) \Rightarrow x = \sqrt{-\ln(0.1)}$$

   в) Взяв производную от функции распределения списка без сметаны, получим функцию плотности:
$$f_X(x) = \begin{cases} 2x\exp(-x^2) & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$
   Найдём математическое ожидание:
$$\int_0^{+\infty} 2x^2 \exp(-x^2)dx = -x\exp(-x^2)|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

   г) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий случайных влечин, если они существуют. Математическое ожидание от цены сметаны равно: $\frac{1000+250}{2} = 625$. Математическое ожидание списка без сметаны было найдено в предыдущем пункте, его осталось перевести в рубли. Получаем ответ: $625 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot 1000$.

   д) Так как обе величины имеют абсолютно непрерывные распределения, вероятность попасть в конкретную точку равна нулю.

5. а) $\mathbb{P}(\text{детектор показал ложь и подозреваемый лжёт}) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.95 = 0.185$

   б) $\mathbb{P}(\text{невиновен}|\text{детектор показал ложь}) = \frac{0.9 \cdot 0.1}{0.185} = \frac{90}{185}$

   в) $\mathbb{P}(\text{эксперт точно выявит преступника}) = (0.9)^9 \cdot 0.95$

   г) $\mathbb{P}(\text{эксперт ошибочно выявит преступника}) = 9 \cdot 0.1 \cdot 0.9^8 \cdot 0.05$

## 12.3. 2016-2017

1. а) Возможны четыре равновероятные ситуации:
$$\mathbb{P}(\text{ММ}) = \mathbb{P}(\text{МД}) = \mathbb{P}(\text{ДМ}) = \mathbb{P}(\text{ДД}) = 1/4$$
   Посчитаем условную вероятность:
$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\text{МД, ДМ})}{\mathbb{P}(\text{ДМ, МД, ДД})} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}$$

б) События $A$ и $B$ называются независимыми, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
В нашем случае: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\text{МД, ДМ}) = 2/4$, $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 3/4 \cdot 3/4$.
Следовательно, $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, значит, события $A$ и $B$ не являются независимыми.

2. Пусть событие $A_i$ означает, что $i$-ый узел системы дал сбой, а событие $B_N$, что вся система дала сбой.

   В условии сказано, что $\mathbb{P}(A_i) = 10^{-6}$, а найти нужно такое максимальное $N \in \mathbb{N}$, при котором

$$\mathbb{P}(B_N) \leqslant \frac{1}{10^2}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_N) &= \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}((\cup_{i=1}^{n} A_i)^c) \\ &\overset{\text{ф-ла де Моргана}}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{N} A_i^c\right) \overset{A_1,\ldots,A_N-\text{ независ.}}{=} 1 - \mathbb{P}(A_1^c) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_N^c) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)^N\end{aligned}$$

   Чтобы найти такое максимальное $N \in \mathbb{N}$, надо решить следующее неравенство

$$\begin{aligned}&1 - \left(1 - 10^{-6}\right)^N \leqslant 10^{-2} \\ &1 - 10^{-2} \leqslant \left(1 - 10^{-6}\right)^N \\ &\ln\left(1 - 10^{-2}\right) \leqslant N \ln\left(1 - 10^{-6}\right) \\ &N \leqslant \frac{\ln\left(1 - 10^{-2}\right)}{\ln\left(1 - 10^{-6}\right)} \approx 10050.33\end{aligned}$$

   Значит, максимальное $N$ равно 10050.

3. Введём обозначения для событий. Пусть $A$ означает, что человек имеет заболевание лёгких, а $B$, что человек работал в шахте.

   В условии сказано, что $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.22$, $\mathbb{P}(B \mid A^c) = 0.14$, $\mathbb{P}(A) = 0.04$.

   а) Нужно найти

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

   Для этого с помощью формулы полной вероятности посчитаем

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \mid A^c)\,\mathbb{P}(A^c) = 0.22 \cdot 0.04 + 0.14 \cdot 0.96 = 0.1432$$

   Осталось подставить значения:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{0.22 \cdot 0.04}{0.1432} \approx 0.0615$$

   б) Все необходимые значения для второго пункта у нас есть, осталось применить формулу условной вероятности:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \mid B^c) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{\mathbb{P}(B^c \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^c)} = \mathbb{P}(B^c \mid A) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^c)} \\ &= (1 - \mathbb{P}(B \mid A)) \cdot \frac{\mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(B)} = (1 - 0.22) \cdot \frac{0.04}{1 - 0.1432} \approx 0.0364\end{aligned}$$

4. Введём индикатор события «Петя дал верный ответ на $i$-ый вопрос»:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если на } i\text{-ый вопрос теста Петя дал верный ответ} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   Заметим, что $X_i \sim Be\,(p = 1/5)$, $X_1, \ldots, X_{17}$ – независимы, $X = X_1 + \ldots + X_{17}$ – общее число верных ответов, $X \sim Bin\,(n = 17, p = 1/5)$.

а) Наибольшее вероятное число правильных ответов $m_0$ может быть нвйдено по формуле:

1) если число $(n \cdot p - q)$ – не целое, где $q := 1 - p$, то

$$m_0 = [np - q] + 1,$$

2) если число $(n \cdot p - q)$ – целое, то наиболее вероятных значений $m_0$ два:

$$m_0' = np - q \text{ и } m_0'' = np - q + 1$$

Итак, поскольку $np - q = 17 \cdot \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = 2.6$ – не целое, наиболее вероятное число верных ответов $m_0$ может быть найдено по формуле из пункта (1):

$$m_0 = [np - q] + 1 = [2.6] + 1 = 3$$

б)

$$\mathbb{E}(X) = np = 17 \cdot \frac{1}{5} = 3.4$$

$$\mathrm{Var}(X) = npq = 17 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 2.72$$

в)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{у Пети «отлично»}) &= \mathbb{P}(X \geqslant 15) = \mathbb{P}(X = 15) + \mathbb{P}(X = 16) + \mathbb{P}(X = 17) \\ &= C_{17}^{15} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{15} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2} + C_{17}^{16} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{16} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1} + C_{17}^{17} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{17} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{0} \\ &= 136 \cdot \frac{16}{5^{17}} + 17 \cdot \frac{4}{5^{17}} + \frac{1}{5^{17}} \approx 2.94 \cdot 10^{-9}\end{aligned}$$

г) Рассмотрим первый вопрос теста. Петя может выбрать первый ответ с вероятностью $1/5$, и Вася может выбрать первый ответ с вероятностью $1/5$. Тогда они оба выберут одинаковый ответ с вероятностью $1/25$. Вариантов ответа в каждом вопросе 5, значит, вероятность совпадения ответа в одном вопросе равна $1/5$. Всего вопросов 17, тогда получаем

$$\mathbb{P}(\text{все ответы Пети и Васи совпадают}) = \left(\frac{1}{5}\right)^{17}$$

5. Введём случайную велчину $\eta$, которая означает число потенциальных покупателей, с которыми контактировал продавец оборудования. По условию задачи, $\eta$ имеет таблицу распеределения:

| $y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\eta = y)$ | $1/3$ | $2/3$ |

Случайная величина $\xi$ может принимать значения $0, 50000$ и $100000$

а) Найдём $\mathbb{P}(\xi = 0)$. По формуле полной вероятности, имеем:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi = 0) &= \mathbb{P}(\xi = 0 \mid \eta = 1) \cdot \mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\xi = 0 \mid \eta = 2) \cdot \mathbb{P}(\eta = 2) \\ &= 0.9 \cdot \frac{1}{3} + 0.9 \cdot 0.9 \cdot \frac{2}{3} = 0.84\end{aligned}$$

б) Найдём $\mathbb{P}(\xi = 50000)$ и $\mathbb{P}(\xi = 100000)$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi = 50000) &= \mathbb{P}(\xi = 50000 \mid \eta = 1) \cdot \mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\xi = 50000 \mid \eta = 2) \cdot \mathbb{P}(\eta = 2) \\ &= 0.1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot \frac{2}{3} = 0.15(3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi = 100000) &= \mathbb{P}(\xi = 100000 \mid \eta = 1) \cdot \mathbb{P}(\eta = 1) + \mathbb{P}(\xi = 100000 \mid \eta = 2) \cdot \mathbb{P}(\eta = 2) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 0.1 \cdot 0.1 \cdot \frac{2}{3} = 0.00(6)\end{aligned}$$

Таблица распределения случайной величина $\xi$ имеет вид:

| $x$ | 0 | 50 000 | 100 000 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\xi = x)$ | 0.84 | 0.15(3) | 0.00(6) |

Тогда функция распределения случайной величины $\xi$ имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 0.84 & \text{при } 0 \leqslant x < 50\,000 \\ 0.84 + 0.15(3) & \text{при } 50\,000 \leqslant x < 100\,000 \\ 1 & \text{при } x > 100\,000 \end{cases}$$

Опр.: $F_\xi = \mathbb{P}(\xi \leqslant x), x \in \mathbb{R}$

в)

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot 0.84 + 50\,000 \cdot 0.15(3) + 100\,000 \cdot 0.00(6) = 8\,333.(3)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = (0 - 8\,333.(3))^2 \cdot 0.84 + (50\,000 - 8\,333.(3))^2 \cdot 0.15(3) \\ + (100\,000 - 8\,333.(3))^2 \cdot 0.00(6) = 380\,555\,555.(5)\end{aligned}$$

6. а) $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{при } x \in [0, b] \\ 0 & \text{при } x \notin [0, b] \end{cases}$

б) Известно, что если $\xi \sim U[a, b]$, то $\mathbb{E}(\xi) = \frac{a+b}{2}$. Стало быть, из уравнения $\mathbb{E}(\xi) = 1$ получаем $\frac{b}{2} = 1$, то есть $b = 2$.

в) Известно, что если $\xi \sim U[a, b]$, то $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Значит, $\mathrm{Var}(\xi) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$

г) Воспользуемся формулой $\mathbb{P}(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)dx$. Имеем:

$$\mathbb{P}(\xi > 1) = \mathbb{P}(\xi \in (1, +\infty)) = \int_1^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}$$

д) Требуется найти такое минимальное число $q_{0.25}$, что $\int_{-\infty}^{q_{0.25}} f_\xi(x)dx = 0.25$. Итак:

$$\int_{-\infty}^{q_{0.25}} f_\xi(x)dx = 0.25 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{q_{0.25}} \frac{1}{2}dx = 0.25 \Leftrightarrow \frac{1/2}{q_{0.25}} = 0.25 \Leftrightarrow$$

$$q_{0.25} = 2 \cdot 0.25 = 0.5$$

е)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^{2017}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(\xi))^{2017} \cdot f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^{2017} f_\xi(x)dx \\ &= \int_0^2 (x-1)^{2017} \cdot \frac{1}{2}dx = \frac{(x-1)^{2018}}{2018} \cdot \frac{1}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = 0\end{aligned}$$

ж) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$

з) Согласно условиям задачи, время до прихода 1-го поезда есть $\xi$; время до прихода 2-го поезда равно $\xi + b$; время до прихода 3-го (заветного) поезда есть $\xi + 2b$. Таким образом, Марья Ивановна в среднем ожидает «своего» поезда $\mathbb{E}(\xi + 2b) = 1 + 2b = 1 + 2 \cdot 2 = 5$ минут. При этом $\mathrm{Var}(\xi + 2b) = \mathrm{Var}(\xi) = 1/3$

к) Пусть $\tau$ – наименьший номер поезда без «подозрительных лиц». По условию задачи, таблица распределения случайной величины $\tau$ имеет вид:

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\tau = t)$ | $1/4$ | $3/4 \cdot 1/4$ | $(3/4)^2 \cdot 1/4$ | $(3/4)^3 \cdot 1/4$ | ... |

То есть случайная величина $\tau$ имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1/4$ ($\tau \sim G(p = 1/4)$).

Несложно сообразить, что время ожидания Глафирой Петровной «своего» поезда составляет: $\eta := \xi + b(\tau - 1)$. Стало быть, $\mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi) + b \cdot (\mathbb{E}(\tau) - 1) = 1 + 2 \cdot (4 - 1) = 7$ минут.

Здесь мы воспользовались тем фактом, что если $\eta \sim G(p)$, то $\mathbb{E}(\eta) = 1/p$

и) Найдём теперь вероятность $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5)$. Для нахождения искомой вероятности воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbb{P}(\eta \geqslant 5) = \mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau < 3) + \mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau = 3) + \mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau > 3)$$

Если Глафира уехала на первом или втором поезде, то ждать больше 5 минут она не могла, то есть $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau < 3) = 0$.

Если Глафира уехала на третьем поезде, то чтобы ждать больше пяти минут, ей нужно ждать первый поезд больше минуты, то есть $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau = 3) = 0.5\,\mathbb{P}(\tau = 3)$.

Если Глафира уехала на четвертом поезде или позже, то она точно ждала больше 5 минут, $\mathbb{P}(\eta \geqslant 5, \tau > 3) = \mathbb{P}(\tau > 3)$.

$$\mathbb{P}(\eta \geqslant 5) = 0.5\,\mathbb{P}(\tau = 3) + \mathbb{P}(\tau > 3) = 0.5 \cdot (3/4)^2 \cdot (1/4) + (3/4)^3 = 63/128$$

7. Пусть $\xi$ — случайная величина, обозначающая число остановок лифта. Представим её в виде суммы $\xi = \xi_2 + \ldots + \xi_{10}$, где $\xi_i$ — индикатор того, что лифт остановился на $i$-ом этаже, то есть

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{если лифт остановился} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad \forall i = 2, \ldots, 10$$

Найдём соответсвующие вероятности:

$$\mathbb{P}(\xi_i = 0) = \left(\frac{8}{9}\right)^9$$

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^9$$

Тогда $\mathbb{E}(\xi_i) = \mathbb{P}(\xi_i = 0) \cdot 0 + \mathbb{P}(\xi_i = 1) \cdot 1 = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^9$, и в итоге получаем:

$$\mathbb{E}(\xi) = 9 \cdot \mathbb{E}(\xi_i) = 9 \cdot \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^9\right)$$

## 12.4. 2015-2016

1. $\alpha$) Найдём вероятности каждого события: $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/2$, $\mathbb{P}(C) = 1/2$.

Проверим попарную независимость:

- $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = 1/4$, $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = 1/4$, $\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

Значит, события попарно независимы.

$\beta$) События $A_1, A_2, A_3$ называются независимыми в совокупности, если $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$.

В нашем случае: $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = (1/2)^3$, следовательно, события не являются независимыми в совокупности.

2. $\alpha$) Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{выпала «6»}) &= \mathbb{P}(\text{выпала «6»} \mid \text{взят белый кубик}) \cdot \mathbb{P}(\text{взят белый кубик}) \\ &+ \mathbb{P}(\text{выпала «6»} \mid \text{взят красный кубик}) \cdot \mathbb{P}(\text{взят красный кубик}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$\beta$) Воспользуемся формулой условной вероятности и результатом предыдущего пункта:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{взят красный кубик} \mid \text{выпала «6»}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{взят красный кубик} \cap \text{выпала «6»})}{\mathbb{P}(\text{выпала «6»})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3. $\alpha$) Совместное распределение имеет вид:

| | $\xi = 1$ | $\xi = 2$ | $\xi = 3$ | $\xi = 4$ | $\xi = 5$ | $\xi = 6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta = 1$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$ |
| $\eta = 2$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$ |
| $\eta = 3$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$ |
| $\eta = 4$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}*$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$ |
| $\eta = 5$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}*$ |
| $\eta = 6$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$ |

$\beta$) $\mathbb{P}(\text{выиграет белый кубик}) = (6 + 5 + 4 + 3 + 2) \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
Значит, Пете безразлично, какой кубик брать.

$\gamma$) $F_\zeta(x) = \mathbb{P}(\zeta \leqslant x)$
Выпишем таблицу распределения случайной величины $\zeta$:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\zeta = x)$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6}$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 7$ | $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9$ | $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5$ |

Тогда функция распределения имеет вид:

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 1 \\ \frac{1}{45} & 1 < x \leqslant 2 \\ \frac{4}{45} & 2 < x \leqslant 3 \\ \frac{9}{45} & 3 < x \leqslant 4 \\ \frac{16}{45} & 4 < x \leqslant 5 \\ \frac{25}{45} & 5 < x \leqslant 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

$\delta$) $\mathbb{E}(\zeta) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 3 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 4 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{43}{9} \approx 4.8$

4. Пусть $x$ — вероятность того, что мужчина честно любит петь в душе.

Распишем по формуле полной вероятности вероятность получить ответ «да»:

$$\begin{aligned}P(\text{ответ «Да»}) &= 1 \cdot \mathbb{P}(\text{выпала «6»}) + x \cdot (\mathbb{P}(\text{выпала «2»}) + \mathbb{P}(\text{выпала «3»}) \\ &+ \mathbb{P}(\text{выпала «4»}) + \mathbb{P}(\text{выпала «5»})) = 1 \cdot \frac{1}{6} + x \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Тогда истинный процент «певцов» составляет 75%

5. Предположим, что ваше имя — Студент (7 букв), а фамилия — Идеальный (9 букв).

$\alpha$) $\mathbb{P}$(напишет фаимлию правильно) $= (0.9)^9$

$\beta$) $\mathbb{P}$(ровно 2 ошибки в имени) $= C_7^2 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^5$

$\gamma$) Наиболее вероятное число ошибок — 1

$\delta$) $\mathbb{P}$(допустит хотя бы одну ошибку) $= 1 - \mathbb{P}$(не допустит ни одной ошибки) $= 1 - (0.9)^{16}$

6. $\alpha$) Из условия $\int_0^1 (cy^2+y)dy = 1$ получаем, что $c = 3/2$.

$\beta$) $F_Y(y) = \begin{cases} 1 & y > 1 \\ \frac{y^3+y^2}{2} & 0 < y \leqslant 1 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$

$\gamma$) $\mathbb{P}(Y < 0.5) = \int_0^{0.5} \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy = \frac{3}{16}$

$\delta$) $F_Y(y) = 0.5 \Rightarrow y \approx 0.75$

$\epsilon$) $\mathbb{P}(Y > 0.5 \mid Y \geqslant 0.25) = \frac{\mathbb{P}(Y>0.5)}{\mathbb{P}(Y\geqslant 0.25)} = \frac{1-\frac{3}{16}}{\int_{0.25}^1 \left(\frac{3}{2}y^2+y\right)dy} = \frac{104}{123}$

7. $\alpha$) $\mathbb{P}$(кисточка окажется на слоне) $= \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$

$\beta$) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{1.5}$

$\gamma$) $f_\xi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1.5} dy = 1.5$

$f_\eta(y) = \int_0^{1.5} \frac{1}{1.5} dx = 1$

$\delta$) Да, поскольку $f_\xi(x) \cdot f_\eta(y) = f_{\xi,\eta}(x,y)$

$\epsilon$) $f_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(u) f_\eta(t-u) du$

## 12.5. 2014-2015

1. Внимательно читайте примечание! Всего 6 возможных ситуаций, только 1 — благоприятная. Требуемая вероятность равна $1/6$.

2. Два события $A$ и $B$ независимы, если: $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Проверим, независимы ли события $A = \{\xi < 1/2\}$ и $B = \{\eta < 1/2\}$:

$\mathbb{P}(AB)$ ищется как отношение площади квадрата с вершинами в (0, 0), (0, 1/2), (1/2, 1/2), (1/2, 0) к площади данного треугольника, то есть:

$$\mathbb{P}(AB) = \frac{(1/2)^2}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$\mathbb{P}(A)$ ищется как отношение площади трапеции с вершинами в (0, 0), (0, 1), (1/2, 1/2), (1/2, 0) к площади данного треугольника, то есть:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(1/2)}{1/2} = \frac{3}{4}$$

$\mathbb{P}(B)$ ищется как отношение площади трапеции с вершинами в (0, 0), (1, 0), (1/2, 1/2), (0, 1/2) к площади данного треугольника, то есть:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(1/2)}{1/2} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16} \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(AB)$$

Получается, события $A$ и $B$ зависимы.

3. Пусть событие $A$ = {Цель была поражена первым самолетом}, событие $B$ = {Цель была поражена только одним самолетом}. Тогда событие $AB$ = {Первый самолет поразил цель, второй и третий — промахнулись}. По формуле условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.7}{0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.3} = \frac{0.252}{0.436} \approx 0.578$$

4. Удобно рассуждать следующим образом: предположим, что каждая опечатка наугад (с равными вероятностями и независимо от других опечаток) выбирает, на какую страницу ей попасть.

   а) Пусть $X$ — число опечаток на 13 странице.

   $$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$$

   $\mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{499}{500}\right)^{400}$ — каждая из 400 опечаток не должна попасть на 13 страницу.
   $\mathbb{P}(X = 1) = 400 \cdot \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{399}$ — ровно одна опечатка (а есть 400 вариантов) должна попасть на 13 страницу, а остальные — мимо. Соответственно:

   $$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \left(\frac{499}{500}\right)^{400} - 400 \cdot \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{399} \approx 0.19$$

   Это если считать в явном виде. А если пользоваться приближением Пуассона:

   $$p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

   неплохо бы вспомнить, что параметр $\lambda$ это математическое ожидание $X$, поэтому расчеты здесь пока оставим до лучших времен.

   б) Пусть $X$ — число опечаток на 13 странице. Введем случайную величину

   $$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая опечатка попала на 13 страницу} \\ 0, & \text{если нет} \end{cases}$$

   Тогда $X = \sum\limits_{i=1}^{400} X_i$. Рассмотрим отдельно $X_i$:

   | $x$ | 1 | 0 |
   |---|---|---|
   | $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{1}{500}$ | $\frac{499}{500}$ |

   Так как $i$-ая опечатка наугад выбирает одну страницу из 500 и это должна быть именно 13. Тогда:

   $$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{500} = \mathbb{E}(X_i^2)$$
   $$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = \frac{1}{500} - \left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{499}{500^2}$$

   Значит

   $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \mathbb{E}(X_i) = \frac{400}{500} = 0.8$$
   $$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \mathrm{Var}(X_i) = 400 \cdot \frac{499}{500^2} = 0.8 \cdot \frac{499}{500}$$

Теперь мы знаем, что $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0.8$ поэтому можем вернуться к пункту (а):

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{0.8^0}{0!}e^{-0.8} - \frac{0.8^1}{1!}e^{-0.8} \approx 0.19$$

Осталось найти наиболее вероятное число опечаток на 13 странице:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{0.8^k}{k!}e^{-0.8} \to \max_k$$

Очевидно, что эта функция убывает по $k$, ведь с ростом $k$:
$k!$ растет, а $0.8^k$ убывает. Значит наиболее вероятное число ошибок — $X = 0$

в) Ох уж эти предрассудки! 13-я страница точно такая же как и все остальные, ведь везде в решении можно просто заменить номер 13 на любой другой и ничего не изменится.

5. Пусть событие $A$ означает, что медицинский тест показал наличие заболевания. Событие $B$ — заболевание на самом деле есть.

   Перепишем условие задачи:

   Чувствительность теста $= \mathbb{P}(A|B)$

   Специфичность теста $= \mathbb{P}(A^c|B^c)$

   Прогностическая сила теста $= \mathbb{P}(B|A)$

   $\mathbb{P}(B) = 0.01 \Rightarrow \mathbb{P}(B^c) = 0.99$

   По условию, чувствительность теста равна $0.9$, тогда из формулы условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0.9 \cdot 0.01 = 0.009$$

   При этом очевидно, что:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.01 - 0.009 = 0.001$$

   По условию специфичность теста равна 0.95, тогда из формулы условной вероятности:

$$\mathbb{P}(A^c|B^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} \Rightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 0.95 \cdot 0.99 = 0.9405$$

   При этом очевидно, что:

$$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0.99 - 0.9405 = 0.0495$$

   Теперь мы готовы отвечать на заданные вопросы:

   а)
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) = 0.009 + 0.0495 = 0.0585$$

   б) Прогностическая сила теста:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.009}{0.0585} \approx 0.154$$

   Для того, чтобы повысить прогностическую силу теста, необходимо понизить $\mathbb{P}(A \cap B^c)$, а для этого необходимо повысить специфичность теста.

6. а) Должно выполняться условие нормировки:

$$\int_{-a}^{0} 1.5(x+a)^2 dx + \int_{0}^{a} 1.5(x-a)^2 dx = 1$$
$$0.5(x+a)^3\Big|_{-a}^{0} + 0.5(x-a)^3\Big|_{0}^{a} = 1$$
$$0.5a^3 + 0.5a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

Теперь легко понять, как выглядит функция распределения (смотри определение функции распределения):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.5(x+1)^3, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1 + 0.5(x-1)^3, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

И с её помощью всё посчитать:

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right) = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 + 0.5^4 = 0.5^4$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-1}^{0} x \cdot 1.5(x+1)^2 dx + \int_{0}^{1} x \cdot 1.5(x-1)^2 dx \\ &= 1.5 \int_{-1}^{0} \left(x^3 + 2x^2 + x\right) dx + 1.5 \int_{0}^{1} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx \\ &= \frac{3}{8}x^4\Big|_{-1}^{0} + x^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{3}{4}x^2\Big|_{-1}^{0} + \frac{3}{8}x^4\Big|_{0}^{1} - x^3\Big|_{0}^{1} + \frac{3}{4}x^2\Big|_{0}^{1} = -\frac{3}{8} + 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - 1 + \frac{3}{4} = 0 \end{aligned}$$

А можно было заметить, что функция плотности — четная функция, поэтому сразу $\mathbb{E}(X) = 0$. Вычислим $\mathbb{E}\left(X^2\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-1}^{0} x^2 \cdot 1.5(x+1)^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 1.5(x-1)^2 dx \\ &= 1.5 \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 2x^3 + x^2\right) dx + 1.5 \int_{0}^{1} \left(x^4 - 2x^3 + x^2\right) dx \\ &= \frac{3}{10}x^5\Big|_{-1}^{0} + \frac{3}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}x^3\Big|_{-1}^{0} + \frac{3}{10}x^5\Big|_{0}^{1} - \frac{3}{4}x^4\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{2}x^3\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0.1$$

б) Верим, что график $F(x)$, выписанной выше, вы построить можете :)

7. Пусть $A = \{$«Лекция полезна»$\}$, $B = \{$«Лекция интересна»$\}$. Заметим, что лекции вообще независимы друг от друга.

а) Пусть $X_A$ — число полезных лекций, прослушанных Васей, $X_B$ — число интересных лекций, прослушанных Васей. Введем случайную величину:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ая лекция была полезна} \\ 0 & \text{если нет} \end{cases}$$

Тогда $X_A = \sum_{i=1}^{30} X_i$. Рассмотрим отдельно $X_i$:

| $x$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | 0.9 | 0.1 |

Вероятность 0.9 дана. Тогда:

$$\mathbb{E}(X_i) = 0.9 = \mathbb{E}(X_i^2) \Rightarrow$$
$$\operatorname{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = 0.9 - 0.9^2 = 0.09$$

Значит

$$\mathbb{E}(X_A) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \mathbb{E}(X_i) = 0.9 \cdot 30 = 27$$
$$\operatorname{Var}(X_A) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \operatorname{Var}(X_i) = 0.09 \cdot 30 = 2.7$$

Аналогично для числа интересных лекций можем получить:

$$\mathbb{E}(X_B) = 0.7 \cdot 30 = 21$$
$$\operatorname{Var}(X_A) = 0.21 \cdot 30 = 6.3$$

б) Так как интересность и полезность — независимые свойства лекций, то:

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03,$$

где $A^c$ значит «не $A$». В свою очередь:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B \cap A^c) + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c) = 0.97,$$

где $(A \cup B)$ значит «$A$ или $B$», а $(A \cap B)$ — «$A$ и $B$». Аналогично, путем введения бинарной случайной величины можем получить:

$$\mathbb{E}(X_{A^c \cap B^c}) = 0.03 \cdot 30 = 0.9$$
$$\mathbb{E}(X_{A \cup B}) = 0.97 \cdot 30 = 29.1$$

8. Дано: $\mathbb{E}(X) = 1, \mathbb{E}(Y) = 2, \mathbb{E}(X^2) = 5, \mathbb{E}(Y^2) = 8, \mathbb{E}(XY) = -1$.

Будем использовать только свойства математического ожидания, ковариации и дисперсии, и ничего больше. Ни-че-го.

- $\mathbb{E}(2X + Y - 4) = 2\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(-4) = 2 + 2 - 4 = 0$
- $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 5 - 1 = 4$
- $\operatorname{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 8 - 4 = 4$
- $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = -1 - 2 = -3$
- $\operatorname{Corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -0.75$
- $\operatorname{Var}(X - Y - 1) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 2\operatorname{Cov}(X, Y) = 4 + 4 - 2(-3) = 14$

- $\text{Var}(X+Y+1) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y) = 4 + 4 + 2(-3) = 2$
-
$$\begin{aligned}\text{Cov}(X-Y-1, X+Y+1) &= \mathbb{E}((X-Y)(X+Y)) - \mathbb{E}(X-Y)\,\mathbb{E}(X+Y)\\ &= \mathbb{E}\left(X^2-Y^2\right) - (\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))\\ &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \left((\mathbb{E}(X))^2 - (\mathbb{E}(Y))^2\right)\\ &= \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = 0\end{aligned}$$
- $\text{Cov}(X-Y-1, X+Y+1) = 0 \Rightarrow \text{Corr}(X-Y-1, X+Y+1) = 0$

9. Найдём частные распределения $Y$ и $Y^2$:

| | $X=1$ | $X=2$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| $Y=-1$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
| $Y=0$ | 0.2 | 0.3 | 0.5 |
| $Y=1$ | 0 | 0.2 | 0.2 |
| $\sum$ | 0.3 | 0.7 | |

| $y$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y=y)$ | 0.3 | 0.5 | 0.2 |

Так как $Y^2$ может принимать только значения 0 или 1:

| $y^2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y^2=y^2)$ | 0.5 | 0.5 |

А ковариация:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) &= ((-1)\cdot 1\cdot 0.1 + (-1)\cdot 2\cdot 0.2 + 1\cdot 2\cdot 0.2)\\ &- (0.3\cdot 1 + 0.7\cdot 2)\cdot(0.3\cdot(-1) + 0.1\cdot 0.2) = 0.07\end{aligned}$$

Так как $\text{Cov}(X,Y) \neq 0$ — величины зависимы

10. Бонусная задача

Предположим, что правильный ответ 0.25. Но это невозможно, потому что вариантов ответа 0.25 — два (1 и 4), значит ответ 0.5 тоже был бы правильный. Предположим, что правильный 0.5. Тогда 0.25 тоже правильный — таких вариантов два из четырех, значит вероятность попасть в 0.25, выбрав ответ наугад, равна 0.5. Ответ 0.6, очевидно, неверен, потому что вероятность попасть в него равна 0.25.
**Правильный ответ**: 0

## 12.6. 2013-2014

1. Введём обозначения:

- $\mathbb{P}(\text{B}|\text{A}^c\cap\text{M}^c) = 0.18$ — Вася пришёл, а девушки — нет
- $\mathbb{P}(\text{B}|\text{A}\cap\text{M}) = 0.9$ — пришли и Вася, и девушки
- $\mathbb{P}(\text{B}|\text{A}^c\cap\text{M}) = 0.54$ — Вася пришёл, если пришла только Маша
- $\mathbb{P}(\text{B}|\text{A}\cap\text{M}^c) = 0.36$ — Вася пришёл, если пришла только Алёна
- $\mathbb{P}(\text{M}) = 0.4$ — Маша пришла на лекцию

- $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0.6$ — Алёна пришла на лекцию

а) Используя формулы Байеса и полной вероятности, получим:

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$$

В числителе:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{B}|\mathrm{A}\cap\mathrm{M})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}\cap\mathrm{M}^c)\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \cdot\,\mathbb{P}(\mathrm{M}^c)\\ &= 0.9\cdot 0.4\cdot 0.6 + 0.36\cdot 0.6\cdot 0.6 = 0.3456\end{aligned}$$

А в знаменателе:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{B}) = {} & \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c\cap\mathrm{M}^c)\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A}^c\cap\mathrm{M}^c) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}\cap\mathrm{M})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c\cap\mathrm{M})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A}^c\cap\mathrm{M})\\ & + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}\cap\mathrm{M}^c)\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{M}^c)\\ & = 0.18\cdot 0.6\cdot 0.4 + 0.9\cdot 0.4\cdot 0.6 + 0.54\cdot 0.4\cdot 0.4 + 0.36\cdot 0.6\cdot 0.6 = 0.4752\end{aligned}$$

Ответ:

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{0.3456}{0.4752} = 0.(72)$$

б) Необходимо найти

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{M}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$$

Знаменатель этой дроби посчитан в предыдущем пункте, посчитаем числитель:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{M}\cap\mathrm{B}) &= \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{M})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{M})\\ &= P(\mathrm{B}|\mathrm{M}\cap\mathrm{A})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c\cap\mathrm{M})\cdot\mathbb{P}(\mathrm{A}^c)\cdot\mathbb{P}(\mathrm{M})\\ &= 0.9\cdot 0.4\cdot 0.6 + 0.54\cdot 0.4\cdot 0.4 = 0.3024\end{aligned}$$

Ответ:

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{M}\cap\mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{0.3024}{0.4752} = 0.(63)$$

Если Вася на лекции, вероятность застать на ней Алёну выше.

2. $\mathbb{P}(X=5) = C_{100}^5 0.002^5 0.998^{95}$,
   $\mathbb{E}(X) = 0.2$,
   $\mathrm{Var}(X) = 0.2\cdot 0.998$,
   наиболее вероятно событие $X = 0$.

3. $c = 1/2$, $\mathbb{P}(X\in[\ln 0.5, \ln 4]) = 5/8$, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0$, $\mathbb{E}(X^{2k}) = (2k)!$

4. а) $\mathbb{E}(Y - 2X - 3) = \mathbb{E}(Y) - 2\,\mathbb{E}(X) - 3 = 0$
   $\mathrm{Var}(Y - 2X - 3) = \mathrm{Var}(Y) + 4\,\mathrm{Var}(X) - 2\,\mathrm{Cov}(Y, 2X) = 16$
   $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Corr}(X, Y)\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(X)\cdot\mathrm{Var}(Y)} = 6$

   б) $\mathrm{Corr}(Y - 2X - 3, X) = \frac{\mathrm{Cov}(Y,X) - 2\,\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y-2X-3)\cdot\mathrm{Var}(X)}} = -1.$

   в) Корреляция равна $-1$, значит, есть линейная взаимосвязь между переменными. Пусть $Y + aX = b$, тогда $\mathrm{Var}(Y + aX) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = -a + b = 1$. Решая уравнения, находим, что $a = -2/3$, $b = 1/3$.

5. а) Таблицы распределения имеют вид:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | 0.3 | 0.3 | 0.4 |

| $y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y)$ | 0.5 | 0.5 |

б)

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)=(-1)\cdot(-1)\cdot 0.1+(-1)\cdot 0\cdot 0.2+ \\ +(-1)\cdot 1\cdot 0.2+1\cdot(-1)\cdot 0.2+1\cdot 0\cdot 0.1+1\cdot 1\cdot 0.1-0.1\cdot 0=-0.1$$

в) Да, поскольку если случайные величины независимы, то их ковариция равна нулю.

г) Условное распределение:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=x\vert Y=-1)$ | 0.2 | 0.4 | 0.4 |

д) $\mathbb{E}(X|Y=-1)=-1\cdot 0.2+0\cdot 0.4+1\cdot 0.4=0.2$

## 12.7. 2012-2013

1. а) $\mathbb{P}(A)=0.8\cdot 0.3+0.7\cdot 0.2=0.38$
   б) $\mathbb{P}(B)=0.9$
   в) $\mathbb{P}(C|A)=\frac{0.3\cdot 0.8}{0.38}=0.632$
   г) $\mathbb{P}(C|D)=\frac{0.3\cdot(0.9\cdot 0.8+0.1\cdot 0.2)}{0.9\cdot 0.38+0.1\cdot(1-0.38)}=0.55$
2. Это была задачка-неберучка!
3. а) 1
   б) $\mathbb{E}(X)=45/28\approx 1.61$, $\mathbb{E}(X^2)=93/35\approx 2.66$, $\mathrm{Var}(X)=291/3920\approx 0.07$
   в) $37/56\approx 0.66$
   г) $F(x)=\begin{cases}0,\ x<1\\ \frac{x^3-1}{7},\ x\in[1;2]\\ 1,\ x>1\end{cases}$
4. а) $a=0.1$
   б) $\mathbb{P}(X>-1)=0.7$, $\mathbb{P}(X>Y)=0.1$
   в) $\mathbb{E}(X)=-0.2$, $\mathbb{E}(X^2)=2$
   г) $\mathrm{Corr}(X,Y)=0.117$
5. а) Правильные: $\mathbb{E}(X)=10$, $\mathrm{Var}(X)=9$, неправильные: $\mathbb{E}(Y)=9$, $\mathrm{Var}(Y)=0.9$
   б) Наиболее вероятное число укусов равно математическому ожиданию
   в) Лучше идти к неправильным пчёлам, так как $\mathbb{P}(X\leqslant 2)<\mathbb{P}(Y\leqslant 2)$.

## 12.8. 2011-2012

1. $\mathbb{P}(A)=\frac{3\cdot 2^3}{C_{10}^5}=\frac{2}{21}\approx 0.095$
2. $\mathbb{P}(A|B)=\frac{0.999\cdot 0.01}{0.999\cdot 0.01+0.001\cdot 0.9}\approx 0.917$
3. а) $\mathbb{P}(A_1)=0.079+0.209(0.209+0.337)+0.375(0.375+0.337)+0.337\cdot 0.337\approx 0.574$
   б) $\mathbb{P}(A_2)\approx 0.778$
4. а) $\mathbb{P}(X_v=10)=0.9^3\cdot 0.3^3\cdot 0.5^4$
   б) $\mathrm{Var}(X_m)=0.9$, $\mathrm{Var}(X_d)=2.1$, $\mathrm{Var}(X_v)=0.27+0.63+1=1.9$
   $\mathrm{Corr}(X_v,X_d)=\frac{0.27}{\sqrt{1.9\cdot 2.1}}$
   $\mathrm{Corr}(X_v,X_m)=\frac{0.63}{\sqrt{1.9\cdot 0.9}}$

5. а) $c = 3$

   б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-3}, & x \geqslant 1 \end{cases}$

   в) $\mathbb{P}(0.5 < X < 1.5) = 1 - 1.5^{-3} = \frac{19}{27} \approx 0.70$

   г) Заметим, что $\mathbb{E}(X^a) = 3/(3-a)$. Поэтому $\mathbb{E}(X) = 3/2$ и $\mathbb{E}(X^2) = 3$. Значит, $\mathrm{Var}(X) = 3/4$.

6. а) $F(y) = \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(1/X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \geqslant 1/y) = \begin{cases} 0, y < 0 \\ y^3, y \in [0;1) \\ 1, y \geqslant 1 \end{cases}$

   $p(y) = \begin{cases} 3y^2, y \in [0;1] \\ 0, y \notin [0;1] \end{cases}$

   б) $\mathbb{E}(X) = 3/2$, $\mathbb{E}(Y) = 3/4$, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(1) = 1$, значит $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1 - 9/8 = -1/8$
   $\mathbb{E}(Y^2) = 3/5$, $\mathrm{Var}(Y) = 3/80$, $\mathrm{Corr}(X,Y) = -\sqrt{5}/3 \approx 0.75$

7. Функция плотности симметрична около нуля, поэтому: $\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^{2011}\right) = \mathbb{E}\left(X^{2011}\right) = 0$

8. а) $\mathbb{E}(U) = 5$, $\mathbb{E}(V) = -3$, $\mathrm{Var}(U) = 26$, $\mathrm{Var}(V) = 10$, $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$

   б) Нет, даже нулевой ковариации недостаточно для того, чтобы говорить о независимости случайных величин.

9. а) $\mathbb{E}(X) = 80 \cdot 0.05 = 4$, $\mathrm{Var}(X) = 80 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 4 \cdot 0.95$

   б) $\mathbb{P}(X = 5) = C_{80}^5 0.05^5 0.95^{75}$

   в) $\mathbb{P}(X = 5) \approx \exp(-4)4^5/5!$

   г) $\triangle \leqslant \min\{p, np^2\} = \min\{0.05, 4 \cdot 0.05\} = 0.05$

10. а) $\mathbb{P}(X > 20) = \frac{80+80+50}{300} = 0.7$
    $\mathbb{P}(X > 20 | X > Y) = \frac{80+50+50}{100+50+50} = 0.9$
    $\mathbb{P}(X > Y | X > 20) = \frac{80+50+50}{80+80+50} = \frac{6}{7}$

    б) $\mathbb{E}(X) = 50$

    в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{6} + \frac{4}{600}x, & x \in [0;100) \\ 1, & x \geqslant 100 \end{cases}$ У функции два скачка высотой по $1/6$, в точках $x = 0$ и $x = 100$.
    На остальных участках функция линейна.

    г) Нет, например, если $Y = 50$ мы можем быть уверены в том, что $X \notin [10;90]$.

## 12.9. 2010-2011

1. $p$, всё равно

2. $\mathbb{P}(A) = 0.8$, $\mathbb{P}(B|A) = 0.84$

3. $a \geqslant 2\ln 10$

4. $\mathbb{E}(X) = 1.36$, $\mathrm{Var}(X) = 0.2$, $F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 1 \\ 2/3, \ x \in [1;2) \\ 35/36, \ x \in [2;3) \\ 1, \ x \geqslant 3 \end{cases}$

5. $\mathrm{Var}(X) = 1.05$, $\mathbb{E}(X) = 6.5$, $P(A) = 0.3^5$; $Y = 5 + V - (5 - V) = 2V$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(5 + V, 2V) = 2\,\mathrm{Var}(V) = 2.1$

6. $\mathbb{E}(X) = 0.5, \mathbb{E}(Y) = 1.5, \text{Var}(X) = 1.65, \text{Cov}(X, Y) = 0.05, \text{Cov}(2X + 3, -3Y + 1) = -0.3$

7. $\mathbb{E}(X_1) = 1, \text{Var}(X_1) = 1/3, Med(X_1) = 1, f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \, x_1 \in [0; 2], x_2 \in [1, 3] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

## 12.10. 2008-2009 Демо-версия

1. $\mathbb{P}(A) = 2/15$

2. $\mathbb{P}(X < 1) = 1/3, \mathbb{E}(X) = 1.5$

3.

4. $c = 0.1, \mathbb{P}(X > 30) = e^{-3}, \mathbb{P}(X > 45 \mid X > 15) = e^{-3}, \mathbb{E}(X) = 10$

5. $k^* = 2, \text{Var}(X) = 1.875, \mathbb{E}(X) = 2.5$

6. $c = 0.2, \mathbb{P}(Y > -X) = 0.5, \mathbb{E}(XY) = 0, \text{Corr}(X, Y) = -0.155, \mathbb{E}(Y|X > 0) = 1/4$

7. $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 0.9 + 0.7 + 0.5 = 2.1$

8. $\mathbb{E}(X) \approx 1.7, \text{Var}(X) \approx 1.08$

9-А.

9-Б. Рассмотрим совершенно конкурентный невольничий рынок начинающих певиц. Певицы в хорошем настроении продаются по $V_1$, в депрессии — по $V_2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} V_1 = 0.75 + (0.5V_1 + 0.5V_2) \\ V_2 = \max_x \sqrt{x}V_1 + (1 - \sqrt{x})V_2 - x \end{cases}$$

Оптимизируем и получаем, $x^* = (V_1 - V_2)^2/4$. Из первого уравнения находим $(V_1 - V_2)/2 = 0.75$.

## 12.11. 2008-2009

1. а) $0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.8$
   б) $2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.9 \cdot 1 = 0.9(0.16 + 0.9) = 0.9 \cdot 1.06 = 0.954$
   в) $0.9 + 0.9 + 0.8 = 2.6$

2. а) 9 (если взять 9 с вероятностью один)
   б) 4 (если взять 5 и 9 равновероятно)

3. а) $0.7 + 0.3 \cdot 0.5 = 0.85$
   б) $\frac{0.7}{0.85} = \frac{14}{17} \approx 0.82$

4. Нормальная случайная величина имеют функцию плотности $p(t) = c \cdot \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2)$
   Отсюда: $\mathbb{E}(X) = 1, \mathbb{E}(Y) = 0, \text{Var}(X) = 16, \text{Var}(Y) = 9$

5. $\mathbb{E}(X) = 0.5, \mathbb{E}(Y) = 1.5, \text{Var}(X) = 1.65, \text{Cov}(X, Y) = 0.05, \text{Cov}(2X + 3, -3Y + 1) = -0.3$

6. $0.2, \frac{1}{e^4}, \frac{1}{e^4}, 5$

7. Любое разумное понимание «полугодовой» принимается. То есть подходят 182, 183, и если посчитаны только рабочие дни, и если взят пример марсианского теннисиста с указанием количества дней в марсианском году и пр.

   И биномиальные и пуассоновские ответы принимаются.

   Для 182:

а) $182 \cdot 0.00037 = 0.06734$

б) $(1 - 0.00037)^182 \approx \exp(-0.06734)$

в) $C_{182}^2 p^2 (1-p)^{180} \approx 0.5 \exp(-0.06734) 0.06734^2$

8. а) $\mathbb{P}(Y < 2) = 1/4$

   б) два отрезка: на высоте 2/16 (от 0 до 4) и 1/16 (от 4 до 12)

   в) $\mathbb{E}(Y) = 5$, $\mathrm{Var}(Y) = 12.(3)$

   г) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 3.(3)$

9-А. Составляется граф по которому «блуждает» мистер А. Пишутся рекуррентные соотношения. Получается 12 или 13 в зависимости от того, считать ли прогулку «босиком» или нет. Оба ответа считать правильными.

9-Б. X раскладывается в сумму индикаторов.

Имеется $6 \cdot 9$ позиций для потенциального «уголка».

$\mathbb{E}(X) = 6 \cdot 9 \cdot 1/4 = 13.5$

Имеется $6 \cdot 5 + 5 \cdot 9$ «боковых» пересечений потенциальных позиций.

Имеется $5 \cdot 8$ «угловых» пересечений потенциальных позиций.

Только они и могут дать ковариацию.

$\mathrm{Var}(X) = 54 \cdot 1/4 \cdot 3/4 + 2 \cdot (6 \cdot 8 + 5 \cdot 9) \cdot 3/32 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5/64 = 541/16$

## 12.12. 2007-2008

1. Слева должен сесть тот, у кого есть тезка. $p_1 = 4/6$.

   Справа должен сесть его парный, $p_2 = 1/5$.

   Итого: $p = p_1 \cdot p_2 = 2/15$

2. $p = 1/3$, $\mathbb{E}(X) = 1.5$

3. $p_a = \frac{1}{3}(0.9 + 0.5 + 0.3) = \frac{17}{30}$

   $p_b = \frac{1}{3}(0.9^2 + 0.5^2 + 0.3^2)/p_a = \frac{115}{170}$

4. а) Либо взятие интеграла, либо готовый ответ: $c = 0.1$

   б) $\int_{30}^{+\infty} p(t)dt = e^{-3} \approx 0.05$

   в) Такой же результат, как в «б»

   г) $1/\lambda = 10$

5. б) $365 \cdot 0.00037 = 0.13505$

   Следовательно, «а», ближайшее целое равно 0.

   Для Пуассоновского распределения: $\lambda = 0.13505$

   в) $\mathbb{P}(N = 0) = 0.99963^{365} \approx e^{-\lambda}$

   г) $\mathbb{P}(N = 2) = C_{365}^2 0.99963^{363} 0.00037^2 \approx e^{-\lambda}\lambda^2/2$

6. $\mathbb{E}(X) = 3 - 4\theta$, $\theta \in [0; 1/3]$, $\theta_{max} = 0$, $\theta_{min} = 1/3$

7. $N = X_1 + X_2 + X_3$, где $X_i$ равно 1 или 0 в зависимости от того, пришёл ли друг. Значит, $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 0.9 + 0.7 + 0.5 = 2.1$

8. $\mathbb{P}(N=1)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=6/15$

   $\mathbb{P}(N=3)=\frac{4\cdot 2}{C_6^2}\frac{3\cdot 1}{C_5^2}=4/15$

   $\mathbb{P}(N=2)=5/15$

   $\mathbb{E}(N)=28/15$, первая.

9-А. Имеется $n$ способов выбрать левую точку. Оставшиеся $(n-1)$ точка должны попасть в правую полуокружность относительно выбранной левой точки.

   Получаем $p=n\cdot(0.5)^{n-1}$

9-Б. Будем считать координату одного за точку отсчета. На квадрате $[0;1]\times[0;1]$ нетрудно нарисовать нужное множество.

   $p=3/8$

## 12.13. 2006-2007

1. а) $\mathbb{P}(A)=0.5, \mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}(B^c)=1-0.5^3=\frac{7}{8}, \mathbb{P}(A\cap B)=0.5\cdot\left(1-0.5^2\right)=\frac{3}{8}, \mathbb{P}(A\cap B)\neq\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$, события зависимы.

   б) $\mathbb{P}(A)=p, \mathbb{P}(B)=1-p^3, \mathbb{P}(A\cap B)=p(1-p^2)$, независимость событий возможна только при $p=0$ или $p=1$.

2. Пусть $X$ — число правильных ответов.

   а) $\mathbb{P}(X=1)=C_{10}^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^9$

   б) $k_{\mathbb{P}(X=k)\to\max}=\lfloor p(n+1)\rfloor=\lfloor\frac{11}{4}\rfloor=2$ (можно, не зная формулы, просто выбрать наибольшую вероятность)

   в) $\mathbb{E}(X)=10\,\mathbb{E}(X_i)=\frac{10}{4}$
   $\operatorname{Var}(X)=10\operatorname{Var}(X_i)=10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}$

   г) $\sum_{i=5}^{10}C_{10}^i\left(\frac{1}{4}\right)^i\left(\frac{3}{4}\right)^{10-i}$

3. $A$ — изделие браковано, $B$ — изделие признано хорошим

   а) $\mathbb{P}(B)=0.96\cdot 0.96+0.04\cdot 0.05$

   б) $\mathbb{P}(A|B)=\frac{0.04\cdot 0.05}{\mathbb{P}(B)}$

4. $\lambda=np=4$

   $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

   $\mathbb{P}(X=0)=e^{-4}$

5. а) Распределение имеет вид:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=x)$ | 0.6 | $(1-0.6)\cdot 0.5$ | $(1-0.6)\cdot(1-0.5)\cdot 0.4$ | $1-p_1-p_2-p_3$ |

   Упростим:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=x)$ | 0.6 | 0.2 | 0.08 | 0.12 |

   б) $\mathbb{E}(X)=1.7, \operatorname{Var}(X)\approx 1.08$

6. $\mathbb{P}(X\leqslant 0.5)=\frac{0.5}{2}=0.25, \mathbb{E}(X)=\frac{0+2}{2}=1$ (здравый смысл)

   $\operatorname{Var}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-(\mathbb{E}(X))^2$

   $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\int_0^2 t^2\cdot p(t)dt=\int_0^2 t^2\cdot 0.5dt=\frac{4}{3}$

7. $\mathbb{E}(X) = 10 = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \frac{1}{10}$, $p(t) = \lambda e^{\lambda t}$ при $t > 0$

   $\mathbb{P}(X > 15) = \int_{15}^{\infty} p(t)dt = \ldots = e^{-\frac{3}{2}}$

   $\mathbb{P}(X > 25|X > 10) = \frac{\mathbb{P}(X>25)}{\mathbb{P}(X>10)} = \ldots = e^{-\frac{3}{2}}$

8. Функция распределения:

   $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leqslant t) = \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2\} \leqslant t) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant t \cap X_2 \leqslant t) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant t)\mathbb{P}(X_2 \leqslant t) = \frac{t+1}{2} \cdot t$ при $t \in [0; 1]$.

   При $t > 1$ получаем, что $F_Y(t) = 1$ и при $t < 0$ получаем, что $F_Y(t) = 0$.

   $\mathbb{P}(\max\{X_1, X_2\} > 0.5) = 1 - \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2\} \leqslant 0.5) = 1 - F(0.5) = \frac{5}{8}$

### 12.14. 2005-2006

1. $\mathbb{P}(A) = \frac{2\cdot 3!3!}{6!} = 1/10$

2. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1/3}{1/3+2/12} = 2/3$

3. $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1/3$, $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}|Y < \frac{1}{2}\right) = 1/4$

4. а)

| $x$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | 1/6 | 1/3 | 1/2 |

   б) $\mathbb{E}(X) = 3\frac{1}{3}$

5. $\mathbb{P}(A|B) = \frac{0.4\cdot 0.3}{0.4\cdot 0.3+0.6\cdot 0.7}$

6. а) $\mathrm{Var}(Z) = 6$, $\mathrm{Var}(4 - 3Z) = 54$, $\mathbb{E}(5 + 3Z - Z^2) = -19$

   б) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 2.5$, $\mathrm{Cov}(6 - X, 3Y) = -7.5$

7. $x = -2$, $\mathrm{Var}(X) = 3.1 - 0.49 = 2.61$

8. $c = 3/16$, $\mathbb{P}(X > 1) = 13/16$, $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(1/(X^3 + 10)) = \frac{3}{8}\ln(3)$, $F(x) = \begin{cases} 0, \; x < -2 \\ \frac{x^3+8}{16}, \; x \in [-2; 2] \\ 1, \; x > 2 \end{cases}$

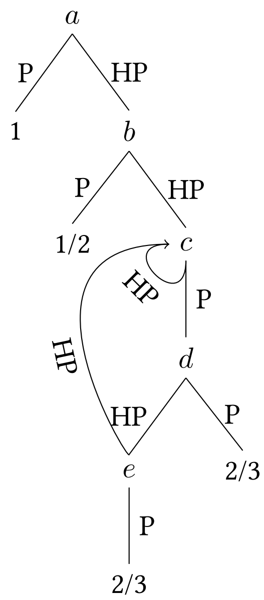
9. $\mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 5) = 2/36$, $\mathbb{E}(X) = 91/36$, $\mathrm{Var}(X) \approx 2.1$, заметим, что $X + Y = R_1 + R_2$, поэтому $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 7$, и $\mathbb{E}(3X - 2Y) = 3\,\mathbb{E}(X) - 2\,\mathbb{E}(Y) = 3\,\mathbb{E}(X) - 2(7 - \mathbb{E}(X)) = 5\,\mathbb{E}(X) - 14$

10. $\mathbb{P}(X > 3) = 61/1024$, $\mathrm{Var}(X) = 15/16$, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, 5 - X) = -\mathrm{Cov}(X, X) = -15/16$, $\mathrm{Corr}(X, Z) = \mathrm{Corr}(X, 2X - 5) = 1$

## 13. Решения контрольной номер 1. ИП

### 13.1. 2018-2019

1. Воспользуемся методом первого шага. Дерево игры выглядит так (в вершинах — длительность сответствующей подыгры, а на концах ветвей — доля разбавленных пинт среди тех, что Джо помнит):




Если первая пинта разбавлена, то игра заканчивается (разбавлены 100% рома). Если первая пинта не разбавлена, то, если разбавлена вторая, игра заканчивается (50%). Если вторая не разбавлена, и третья тоже, то это равносильно тому, что не разбавлены только две (Джо не помнит больше трех). Если вторая не разбавлена, а третья разбавлена, возможны три случая: если четвёртая разбавлена, то игра заканчивается; если четвёртая не разбавлена, и пятая не разбавлена, то это эквивалентно тому, что не разбавлены только две; если четвёртая не разбавлена, а пятая разбавлена, то игра заканчивается. Из этих соображений получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(b+1) \\ b = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(c+1) \\ c = \frac{1}{8}(d+1) + \frac{7}{8}(c+1) \\ d = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(e+1) \\ e = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}(c+3) \end{cases}$$

Отсюда $a = 7514/192, b = 1046/24, c = 146/3, d = 122/3, e = 136/3$.

2. Пусть

$$Z_i = \begin{cases} 1, i\text{-я пинта разбавлена} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть с вероятностью $x_n$ последовательность случайных величин $(Z_n)$ длиной $n$ не содержит двух единиц подряд и оканчивается нулём, а с вероятностью $y_n$ — не содержит двух единиц подряд и оканчивается единицей.

Пусть на последнем месте $(Z_n)$ стоит единица. Это может произойти с вероятностью $1/2$. При этом перед последней единицей может стоять любая последовательность длиной $n-1$, оканчивающаяся нулём. Значит, $y_n = 0.5x_{n-1}$.

Пусть на последнем месте $(Z_n)$ стоит нуль. Это может произойти с вероятностью $1/2$. При этом перед последним нулём может стоять любая последовательность длиной $n-1$. Значит, $x_n = 0.5(x_{n-1}+y_{n-1})$.

Таким образом, получена следующая разностная система:

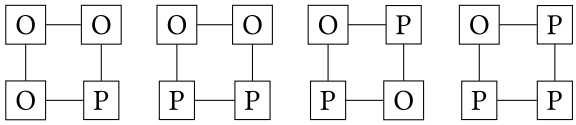
$$\begin{cases} x_n = 0.5(x_{n-1} + y_{n-1}) \\ y_n = 0.5x_{n-1} \end{cases}$$

Более того, можно поставить задачу Коши. Так как $(Z_2)$ может равновероятно иметь одну из 4 реализаций $(11, 10, 01, 00)$, из которых не содержат двух единиц подряд и оканчиваются на 0 две, то

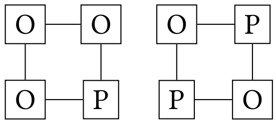
$x_2 = 1/2$. Аналогично, $y_2 = 1/4$. Решив задачу Коши, найдем формулы для $x_n$, $y_n$. Ответом будем число $x_{100} + y_{100}$.

3. а) Оптимальная стратегия для Али-Бабы состоит в чередовании открытия двух диагонально противоположных и двух соседних монет.

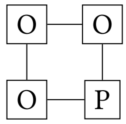
   Изначально имеется только четыре варианта расположения монет:



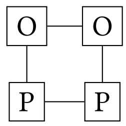

   На первом ходе Али делает двух орлов на одной диагонали. Всего возможно восемь случаев (по две диагонали в каждом из начальных вариантов). Из восьми равновозможных случаев два приводят к успеху. При этом, если успех не достигнут, можно получить в итоге только две комбинации орлов и решек (левую — в четырёх случаях, правую — в двух):



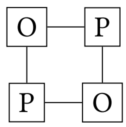

   На втором ходе Али переворачивает две соседние монеты орлами вверх. При этом либо наступает успех (8 случаев из 24), либо неуспех, приводящий к едингтсвенно возможной комбинации орлов и решек:




   На третьей попытке открывается или диагональ с орлами, или диагональ с орлом и решкой. В о втором случае, очевидно, надо заменить решку на орла, и успех обеспечен. Но в первом случае оптимально перевернуть орла и сделать 2 решки. Это даст неуспех, но Али точно будет знать, что на четвёртой попытке монеты могут быть расположены только так:




   На четвёртом ходе в любом из четырёх вариантов (Али не знает, на каком ребре решки) нужно перевернуть обе открытые соседние монеты, тогда в двух случаях будет успех, а в двух других -- неуспех, при котором монеты могут быть расположены только так:




   Очевидно, что если на пятом ходе, открыв любую диагональ, Али перевернёт находящиеся на ней монеты, то он гарантирует себе успех.

   б) Как видим, в худшем случае потребовалось 5 попыток.

   Источник: Кордемский, Математика изучает случайности.

4. Возьмём колоду, добавим в неё джокера. Разложим в открытую по окружности. Джокер означает место разрыва окружности для её выкладывания в обычную колоду. Замечаем, что джокер и четыре дамы разбивают окружность на пять случайных отрезко. В силу симметрии ожидаемые длины этих отрезков равны и равны по $48/5$. Значит первая дама попадается в среднем на $48/5 + 1$ месте.

5. Обозначим искомую вероятность быть в Неведении в момент $t$ значком $p_t$.

$$p_{t+\Delta} = p_t(1 - \lambda\Delta - o(\Delta))$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{p_{t+\Delta} - p_t}{\Delta} = -\lambda p_t + \frac{o(\Delta)}{\Delta}$$

Устремляем $\Delta$ к нулю и решаем получающееся дифференциальное уравнение с начальным условием $p_0 = 1$, так как изначально Ученик находится в Неведении.

Итого:

$$p_t = \exp(-\lambda t)$$

6.
$$\mathbb{P}(Y_4 \in [t; t+\Delta]) = C_{10}^1 \cdot \Delta \cdot C_9^3 t^3 (1-t)^6 + o(\Delta)$$

Читаем вслух:

а) Одна из десяти величин должна попасть в отрезок $[t; t+\Delta]$;

б) Три из девяти оставшихся должны оказаться меньше $t$;

в) Шесть из девяти оставших должны оказаться больше $t$;

Вероятностью попадания двух и более величин в отрезок длины $\Delta$ пренебрегаем!

## 13.2. 2017-2018

1. Обозначим вероятность того, что сыр достанется Белому за $b$, если игра начинается с его броска.

   а) Получаем уравнение

   $$b = \frac{1}{12} + \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} b$$

   Пояснение: Как Белый может победить в исходной игре? Либо сразу выкинуть 6 с вероятностью $1/12$. Либо передать ход Серому ($11/12$), получить ход снова ($11/12$) и выиграть в продолжении игры. Продолжение игры по сути совпадает с исходной игрой.

   б) Игра продолжается до тех пор, пока кто-то не выкинет «6». Для нахождения среднего количества бросков воспользуемся методом первого шага.

   Обозначим среднее количество бросков нашей игры за $S$. Когда Белый бросает кубик, с вероятностью $\frac{1}{12}$ игра закончится за один бросок, а с вероятностью $\frac{11}{12}$ игра продолжится и ход перейдёт к Серому. Но та игра, которая начнётся, когда бросать будет Серый, ничем не отличается от предыдущей, поэтому среднее количество бросков в ней будет равно $S$. Однако мы попадём в эту игру, «потратив» один бросок. Таким образом мы получаем:

   $$S = \frac{1}{12} \cdot 1 + \frac{11}{12}(S+1)$$

   Получается, что $S = 12$, значит игра длится в среднем 12 бросков.

2.

3. Для того, чтобы выжить, мышам нужно ещё до начала игры договориться о стратегии, которая позволит им с наибольшей вероятностью открыть нужные сундуки. Если хотя бы две мыши выберут одинаковый сундук, то их в любом случае съедят. Поэтому одной из оптимальных стратегий будет ещё до начала игры мышам договориться и назвать левый сундук золотым, сундук посередине серебряным, а правый — платиновым. Каждый мышонок должен открыть тот сундук, в честь которого назван необходимый ему металл. Если внутри он обнаруживает свой металл, то он выбирает этот сундук, если внутри находится не тот металл, мышонок открывает тот сундук, на который указывает лежащий внутри предмет.

   Например, первым заходит Микки Маус. Он открывает золотой (левый) ящик. Если внутри лежит золото, то он выходит из комнаты. Если же внутри лежит, например, серебро, то Микки Маус открывает сундук посередине. Путём перебора можно посчитать, что в 4 случаях из 6 мыши смогут найти нужный металл, поэтому вероятность выигрыша при данной стратегии равна $\frac{2}{3}$.

4.

5. Благосостояние кота Василия, положившего один гурд на вклад, равно $m_t = 1 \cdot e^{rt}$, где $r$ — процентная ставка, а $t$ — прошедшее время. Момент закрытия вклада $T$ равномерно распределён на отрезке от 0 до $a$, поэтому сумма, которую получит Василий, представима в виде $Z = e^Y$, где $Y \sim U[0; ra]$. По условию, $a$ очень велико, поэтому $ra$ тоже очень велико.

   Вероятность того, что первая цифра будет равна 1, равна вероятности того, что доход Василия будет лежать в пределах от 1 до 2 гурдов, плюс вероятность того, что он лежит в пределах от 10 до 20 гурдов и т.д. Таким образом, можно представить эту вероятность, как:

$$\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(e^Y \in [1; 2)) + \mathbb{P}(e^Y \in [10; 20)) + \ldots$$

   Это выражение можно преобразовать таким образом:

$$\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(Y \in [\ln 1; \ln 2)) + \mathbb{P}(Y \in [\ln 10; \ln 20)) + \ldots$$

   Так как Y — равномерно распределённая величина, то $\mathbb{P}(Y \in [\ln 1; \ln 2)) = \frac{\ln 2 - \ln 1}{ra}$. Для последующих слагаемых вероятность рассчитывается таким же образом. Воспользовавшись свойством логарифма, можно заметить, что $\frac{\ln 20 - \ln 10}{ra} = \frac{\ln 2}{ra}$. Поэтому вероятность того, что на первом месте суммы вклада стоит единица, равна $n \cdot \frac{\ln 2}{ra}$, где $n$ — количество слагаемых. Путём аналогичных рассуждений получаем, что вероятность того, что на первом месте стоит двойка, равна $n \cdot \frac{\ln 3 - \ln 2}{ra}$. Из-за того, что $a$ велико, можно считать, что число слагаемых одинаково.

   На первом месте обязательно будет находиться какая-то цифра, поэтому сумма вероятностей будет равна 1. Получаем:

$$\frac{n}{ra}\left(\ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ldots + \ln\frac{10}{9}\right) = 1$$

   Таким образом $\frac{n}{ra} = \frac{1}{\ln 10}$. Получается, что вероятность того, что на первом месте стоит единица, равна:

$$\mathbb{P}(N = 1) = \frac{\ln 2}{\ln 10}$$

   Закон распределения первой цифры выводится сложением соответствующих вероятностей.

### 13.3. 2016-2017

1. а) Для удобства занумеруем макаронины и выделим у каждой левый и правый конец. Взяли правый конец первой макаронины и подвязали случайной. Взяли свободный конец только что подвязанной макаронины и подвязали случайно. И так далее.

$$\frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

   б) Допустим, что при $n$ макаронинах в среднем образуется $e_n$ колец. После первого соединения задача сводится к меньшему числу макаронин, важно только учесть, образовалось ли кольцо при первом соединении:

$$e_n = \frac{1}{2n-1}(e_{n-1} + 1) + \frac{2n-2}{2n-1}e_{n-1} = e_{n-1} + \frac{1}{2n-1}$$

   в) Количество коротких колец можно разбить в сумму, $X = Z_1 + \ldots + Z_n$. Вероятность завязывания конкретной макаронины в кольцо равна $1/(2n-1)$: «левый конец» надо привазять именно к «правому». Значит, $\mathbb{E}(X) = n/(2n-1)$.

2. а) Рассмотрим обратную ситуацию: на планете есть точка, из которой связаться хотя бы с одним пепелацем нельзя. Такое возможно, если все, кроме одного, сели в одну полуокружность.

$$\mathbb{P}(\text{есть точка без связи}) = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \mathbb{P}(\text{из любой точки есть связь}) = 1 - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

б) Зафиксируем координату посадки первого пепелаца и возьмём её за точку отсчёта. Изобразим на плоскости возможные значения центральных углов между первым пепелацем и оставшимися и закрасим нужные участки. Получим $3/8$.

в) Зафиксируем координату посадки первого пепелаца. Обозначим центральный угол между первым и вторым пепелацами $\alpha$. Функция плотности имеет вид: $p(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{2}$
Итог: $\int_0^{\pi/2} p(\alpha)\frac{\alpha+\pi}{2\pi}d\alpha + \int_{\pi/2}^{\pi} p(\alpha)\frac{\pi-\alpha}{2\pi}d\alpha = \frac{\pi+2}{4\pi}$

3. Вспомним для начала, что площадь круга равна $\pi r^2$, а площадь сферы равна $4\pi r^2$. Составим из маленьких треугольничков многогранник очень похожий на сферу с единичным радиусом. Площадь этого многогранника будет примерно равна $4\pi$. Проекция многогранника представляет собой примерно круг единичного радиуса. Проекция имеет два слоя. С учётом обоих слоёв площадь проекции равна $2\pi$. Значит отношение площади проекции к площади многогранника равно $1/2$.

   От взаимного расположения треугольничков в пространстве ожидаемая площадь проекции не зависит в силу аддитивности математического ожидания.

   Ответ: 21 см$^2$.

4. а) Мысленно отметим на окружности три точки: места ударов Брюса Ли и точку, где схватился Чак Норрис. Можно считать, что эти три точки равномерно и независимо распределены по окружности. Следовательно, среднее расстояние между соседними точками равно $1/3$. Чак Норрис берёт два кусочка, слева и справа от своей точки. Значит ему в среднем достаётся $2/3$ окружности.

   б) Объявим точку, где схватился Чак Норрис нулём. Координаты двух ударов изобразим на плоскости. Закрашиваем подходящий участок. Вероятность того, что кусок Брюса Ли длиннее, равна $1/4$.

5. Рассмотрим совершенно конкурентный невольничий рынок начинающих певиц. Певицы в хорошем настроении продаются по $V_1$, в депрессии — по $V_2$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} V_1 = 0.75 + (0.5V_1 + 0.5V_2) \\ V_2 = \max_x \sqrt{x}V_1 + (1-\sqrt{x})V_2 - x \end{cases}$$

   Оптимизируем и получаем, $x^* = (V_1 - V_2)^2/4$. Из первого уравнения находим $(V_1 - V_2)/2 = 0.75$.

6. Да. Например, такая. До общения с Джульеттой подкидывать монетку до выпадения первого орла и запомнить число потребовавшихся подбрасываний. Пусть это будет число $X$. Открыть равновероятно левую или правую руку Джульетты. Если открытое число больше $X$, то сказать, что оно большее, иначе сказать, что меньшее.

7. Если $\gamma$ — вероятность самостоятельного познания Истины, а $\alpha$ — передачи Истины отдельно в каждую из сторон, то

$$p = \gamma + (1-\gamma)p\alpha.$$

   То есть $p = \gamma/(1-\alpha(1-\gamma))$.

   Для решения второго пункта наложим на Абу Али Хусейн ибн Абдуллах ибн аль-Хасан ибн Али ибн Сина обет молчания. Это не повлияет на вероятность постижения им Истины, однако превратит задачу в две уже решённых :) Получаем

$$q = \gamma + (1-\gamma)(2p\alpha - p^2\alpha^2)$$

### 13.4. 2015-2016

#### Индивидуальный тур

1. Сократ, эта — Η, η, дзета — Ζ, ζ, вега — нет, шо — ϸ, τ — тау, θ — тета, ξ — кси. Греческая буква шо, ϸ, была введена Александром Македонским и ныне вышла из употребления. По крайней мере, в греческом :) Заглавная примерно такая же, только её utf-код 03f7 не поддерживается шрифтом Linux Libertine.

2. Да. События независимы в совокупности, если для любого поднабора событий $A_1$, ..., $A_k$ выполняется равенство $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_k)$. Нет.
3. $1/4$, $2/3$, $15$
4. $0$, $0.8^5 \cdot 0.2$, $1 - 0.8^6$
5. $0.8^{10}$, $C_{10}^3 0.2^3 0.8^7$, $2$
6. $1/2$, $3/16$, $3/8$
7. а)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ x^3, \ x \in [0; 1] \\ 1, \ x > 1 \end{cases}$$

   б) $1/8$

   в) $2^{-1/3}$

   г) $56/63$

   д)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \ y < 0 \\ 1 - 1/y^3, \ y > 0 \end{cases}$$

   е)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, \ y < 0 \\ 3y^{-4}, \ y > 0 \end{cases}$$

**Командный тур**

1. Если отрублено 10 щупалец, значит либо был один удар породивший два новых щупальца, либо было два удара, породивших по одному новому, а все остальные удары не порождали новых щупалец.

   Искомая вероятность равна: $8 \cdot 0.5^9 \cdot 0.25^1 + C_8^2 0.5^8 0.25^2$.

   Вероятность вечного боя равна нулю. Достаточно доказать, что с вероятностью один за конечное время побеждается одноногий Кракен. А эта вероятность удовлетворяет уравнению: $p = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}1$. Единственный осмысленный корень у этого уравнения — 1.

   Замечаем, что на победу над $k$-шупальцевым Кракеном уходим в $k$ раз больше ударов в среднем чем на победу на 1-щупальцевым. Отсюда:

$$e_1 = 1 + 0.5 \cdot 0 + 0.25 \cdot e_1 + 0.25 \cdot 2e_1$$

   Решаем, получаем $e_1 = 4$ и $e_8 = 32$

2. Либо первая пинта разбавлена, либо первая неразбавлена, а вторая разбавлена, то есть

$$0.25 + 0.75 \cdot 0.25 = 0.4375$$

   Рисуем граф.

   Составляем систему (индекс — количество выпитых неразбавленных пинт):

$$\begin{cases} e_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16}2 + \frac{9}{16}(2 + e_2) \\ e_2 = 1 + \frac{3}{4}e_2 + \frac{1}{4}e_0 \end{cases}$$

   Находим $e_0 = 64/7 \approx 9$

3. Для $t > 0$:
$$\mathbb{P}(-\ln X \leqslant t) = \mathbb{P}(\ln X > -t) = \mathbb{P}(X > e^{-t}) = 1 - e^{-t}$$

Итого,
$$F_{-\ln X}(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ 1 - e^{-t},\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

Из геометрических соображений легко найти $\mathbb{P}(XY < a)$ для $a \in (0;1)$:
$$\mathbb{P}(XY < a) = a + \int_a^1 \frac{a}{x}\,dx = a - a\ln a$$

Переходим ко второму пункту, для $t > 0$:
$$\mathbb{P}(-(\ln X + \ln Y) < t) = \mathbb{P}(XY > e^{-t}) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

Итого:
$$F_{-\ln X - \ln Y}(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t},\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

После дифференциирования получаем функцию плотности для $S = -\ln X - \ln Y$:
$$f_S(s) = \begin{cases} 0,\ s < 0 \\ se^{-s},\ s \geqslant 0 \end{cases}$$

Приближаемся к финальной вероятности:
$$\mathbb{P}(ZS > t) = \int_t^\infty \int_{t/s}^1 se^{-s}\,dz\,ds = \int_t^\infty (s-t)\cdot e^{-s}\,ds = \ldots = e^{-t}$$

Сравниваем результат с первым пунктом и приходим к выводу, что величина $(XY)^Z$ имеет равномерное распределение на $[0;1]$.

4. Если нанято $n$ пиратов, то вероятность, того, что в конкретный день все работают равна $(364/365)^n$. Следовательно, ожидаемое количество праздничных дней равно $365(1 - (364/365)^n)$.

Решаем уравнение:
$$1 - (364/365)^n = 100/365$$

Получаем:
$$n = \frac{\ln 265 - \ln 365}{\ln 364 - \ln 365} \approx 117$$

Ожидаемое количество рабочих пирато-дней равно: $365n(364/365)^n$.

Получаем:
$$n^* = 1/(\ln 365 - \ln 364) \approx 364$$

5. а) $\mathbb{P}(R_{100}) = 1/100$ (максимум из 100 величин должен плюхнуться на сотое место), $\mathbb{P}(B_{100}) = 1/3$ (максимум из трёх величин должен плюхнуться на второе место)

б) $\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100} \approx \ln 100 \approx 4.6$. Т.к. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ и $\mathbb{E}(X_i) = 1/i$.

в) $\mathbb{P}(R_{99}|R_{100}) = 1/99$, $\mathbb{P}(R_{100}|B_{100}) = 3/101$

Для проверки: $\mathbb{P}(R_{99} \cap R_{100}) = 98!/100!$ (100! — всего перестановок, 98! — первые 98 можно переставлять свободно, а в конце должны идти второй наибольшое и наибольшее). $\mathbb{P}(R_{100} \cap B_{100}) = 1/101$ (максимум из 101 числа плюхнется на 100ое место).

6. Если все пираты открывают первый и второй сундуки, то вероятность выигрыша равна нулю.

   Оптимальная стратегия (одна из). Три пирата заранее договариваются, о названиях сундуков. Они называют эти три сундука (ещё до игры) «рубиновым», «пиастровым» и «золотым». Генри Рубинов должен начать с открытия рубинового сундука, Френсис Пиастров — с пиастрового, Эдвард Золотов — с золотого. Далее каждый пират должен открыть тот сундук, на который указывает предмет, лежащий в первом открытом им сундуке. Например, если Генри Рубинов, открыв сначала рубиновый сундук обнаруживает там пиастры, он должен открывать пиастровый сундук.

   Вероятность победы при такой стратегии легко находится перебором 6 возможных вариантов и равна...Та-дам!!! 2/3.

### 13.5. 2014-2015

**Часть 1**

Не претендуя на единственность, решения претендуют на правильность!

1. а) $\mathbb{P}(\text{все арбузы спелые}) = 0.9^2 \cdot 0.7 = 0.567$

   б) $A$ = {случайно выбранный арбуз — от тёти Маши}; $B$ = {случайно выбранный арбуз оказался спелым}. Формула условной вероятности:
   $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/3 \cdot 0.9}{2/3 \cdot 0.9 + 1/3 \cdot 0.7} = \frac{18}{25}$$

   в) $A$ = {второй и третий съеденные арбузы — от тёти Маши}; $B$ = {все три арбуза — спелые}. Дает ли нам что-то о принадлежности арбузов к тёте Маше или тёте Оле то, что все арбузы — спелые? События независимы!
   $$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$$

2. а) $\mathbb{E}(X) = \sum \mathbb{P}(X_i)X_i = 1.9$
   $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.2 + 9 \cdot 0.4 - 1.9^2 = 1.09$

   б) Раз ребенок выбран, значит, в его семье дети есть! Всего детей $n\,\mathbb{E}(X) = 1.9n$. Семей с одним ребенком — $0.3n$, значит, детей из семей с одним ребенком — $0.3n$. Аналогично, детей из семей с двумя детьми — $0.4n$; детей из семей с тремя детьми — $1.2n$.
   Теперь легко построить закон распределения случайной величины $Y$:

| $y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y)$ | 3/19 | 4/19 | 12/19 |

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{19} + \frac{8}{19} + \frac{36}{19} = \frac{47}{19} > \mathbb{E}(X)$$

3. Любителям (или нелюбителям) интегралов:

   а) Да это же интеграл от функции плотности на всей числовой прямой! Ответ: единица!

   б)
   $$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 xf(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^3 dx = \frac{3}{32}x^4\Big|_0^2 = \frac{3}{2}$$
   $$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_0^2 x^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^4 dx = \frac{3}{40}x^5\Big|_0^2 = \frac{12}{5}$$
   Формула дисперсии:
   $$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}$$

в)

$$\mathbb{P}(X > 1.5) = \int_{1.5}^{2} f(x)dx = \int_{1.5}^{2} \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{1}{8}x^3\Big|_{1.5}^{2} = \frac{37}{64}$$

Вычислим вероятность условия:

$$\mathbb{P}(X > 1) = \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{1}{8}x^3\Big|_{1}^{2} = \frac{7}{8}$$

$$\mathbb{P}(X > 1.5|X > 1) = \frac{\mathbb{P}(X > 1.5)}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{37/64}{7/8} = \frac{37}{56}$$

г) Должно выполниться следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)dx = 1$$

Применительно к нашей задаче:

$$\frac{3c}{8}\int_{0}^{2} x^3 dx = \frac{3c}{32}x^4\Big|_{0}^{2} = \frac{3c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

4. You have to learn the rules of the game. And then you have to play better than anyone else. (А. Эйнштейн)

а)

$$\operatorname{Var}(Z) = \mathbb{E}\left(Z^2\right) - (\mathbb{E}(Z))^2 = 15 - 9 = 6$$

$$\operatorname{Var}(4 - 3Z) = 9\operatorname{Var}(Z) = 54$$

$$\mathbb{E}\left(5 + 3Z - Z^2\right) = 5 + 3\cdot(-3) - 15 = -19$$

б)

$$\operatorname{Var}(X \pm Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) \pm 2\cdot\operatorname{Cov}(X, Y)$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{Var}(X + Y) - \operatorname{Var}(X - Y) = 4\operatorname{Cov}(X, Y) \Rightarrow \operatorname{Cov}(X, Y) = 2.5$$

$$\operatorname{Cov}(6 - X, 3Y) = -3\cdot 2.5 = -7.5$$

в)

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = 2.5 \neq 0$$

Случайные величины действительно независимы.

5. В условии не сказано сколько ответов являются верными. Предположим, что правильный ответ $0.25$. Но это невозможно, потому что вариантов ответа $0.25$ — два (1 и 4), значит ответ $0.5$ тоже был бы правильный. Предположим, что правильный $0.5$. Тогда $0.25$ тоже правильный — таких вариантов два из четырех, значит вероятность попасть в $0.25$, выбрав ответ наугад, равна $0.5$. Ответ $0.6$, очевидно, неверен, потому что вероятность попасть в него равна $0.25$.
**Правильный ответ**: $0$

6. Удобно рассуждать следующим образом: предположим, что каждая опечатка наугад (с равными вероятностями и независимо от других опечаток) выбирает, на какую страницу ей попасть[1].

[1] Ну очень самостоятельные!

а) Пусть $X$ — число опечаток на 13 странице.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$$

$\mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{499}{500}\right)^{400}$ — каждая из 400 опечаток не доложна попасть на 13 страницу.

$\mathbb{P}(X = 1) = 400 \cdot \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{399}$ — ровно одна опечатка (а есть 400 вариантов) должна попасть на 13 страницу, а остальные — мимо. Соответственно:

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \left(\frac{499}{500}\right)^{400} - 400 \cdot \frac{1}{500} \cdot \left(\frac{499}{500}\right)^{399} \approx 0.1911357$$

Это если считать в явном виде. А если пользоваться приближением Пуассона:

$$p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

неплохо бы вспомнить, что параметр $\lambda$ это математическое ожидание $X$, поэтому расчеты здесь пока оставим до лучших времен.

б) Пусть $X$ — число опечаток на 13 странице. Введем случайную величину

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ая опечатка попала на 13 страницу} \\ 0 & \text{если нет} \end{cases}$$

Тогда $X = \sum\limits_{i=1}^{400} X_i$. Рассмотрим отдельно $X_i$:

| $x$ | $1$ | $0$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $\frac{1}{500}$ | $\frac{499}{500}$ |

Так как $i$-ая опечатка наугад выбирает одну страницу из 500 и это должна быть именно 13. Тогда:

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{500} = \mathbb{E}(X_i^2) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = \frac{1}{500} - \left(\frac{1}{500}\right)^2 = \frac{499}{500^2}$$

Значит

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \mathbb{E}(X_i) = \frac{400}{500} = 0.8$$

$$\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \operatorname{Var}(X_i) = 400 \cdot \frac{499}{500^2} = 0.8 \cdot \frac{499}{500}$$

Теперь мы знаем, что $\lambda = \mathbb{E}(X) = 0.8$ поэтому можем вернуться к пункту (а):

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{0.8^0}{0!} e^{-0.8} - \frac{0.8^1}{1!} e^{-0.8} = 0.1912079$$

So close!

Осталось найти наиболее вероятное число опечаток на 13 странице:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{0.8^k}{k!} e^{-0.8} \to \max_k$$

Очевидно, что эта функция убывает по $k$, ведь с ростом $k$:
$k!$ растет, а $0.8^k$ убывает. Значит наиболее вероятное число ошибок — $X = 0$

в) Ох уж эти предрассудки! 13-я страница точно такая же как и все остальные, ведь везде в решении можно просто заменить номер 13 на любой другой и ничего не изменится.

7. Пусть $A = \{$«Лекция полезна»$\}$, $B = \{$«Лекция интересна»$\}$. Заметим, что лекции вообще независимы друг от друга.

   а) Пусть $X_A$ — число полезных лекций, прослушанных Васей, $X_B$ — число интересных лекций, прослушанных Васей. Введем случайную величину:

   $$X_i = \begin{cases} 1 & \text{если } i\text{-ая лекция была полезна} \\ 0 & \text{если нет} \end{cases}$$

   Тогда $X_A = \sum\limits_{i=1}^{30} X_i$. Рассмотрим отдельно $X_i$:

   | $x$ | 1 | 0 |
   |---|---|---|
   | $\mathbb{P}(X = x)$ | 0.9 | 0.1 |

   Вероятность 0.9 дана. Тогда:

   $$\mathbb{E}(X_i) = 0.9 = \mathbb{E}(X_i^2) \Rightarrow$$

   $$\operatorname{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - (\mathbb{E}(X_i))^2 = 0.9 - 0.9^2 = 0.09$$

   Значит,

   $$\mathbb{E}(X_A) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \mathbb{E}(X_i) = 0.9 \cdot 30 = 27$$

   $$\operatorname{Var}(X_A) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{30} X_i\right) = \sum_{i=1}^{30} \operatorname{Var}(X_i) = 0.09 \cdot 30 = 2.7$$

   Аналогично для числа интересных лекций можем получить:

   $$\mathbb{E}(X_B) = 0.7 \cdot 30 = 21$$

   $$\operatorname{Var}(X_B) = 0.21 \cdot 30 = 6.3$$

   б) Так как интересность и полезность — независимые свойства лекций, то:
   $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$, где $\bar{A}$ значит «не $A$». В свою очередь:
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) + \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{B}) = 0.97$ , где $(A \cup B)$ значит «$A$ или $B$». Аналогично, путем введения бинарной случайной величины можем получить:

   $$\mathbb{E}(X_{\bar{A} \cap \bar{B}}) = 0.03 \cdot 30 = 0.9$$

   $$\mathbb{E}(X_{A \cup B}) = 0.97 \cdot 30 = 29.1$$

8. Будем пользоваться свойствами функций распределения и плотности. Для начала:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{ae^x}{1+e^x} + b\right) = a + b := 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{ae^x}{1+e^x} + b\right) = b := 0$$

Откуда сразу получаем

$$a = 1, b = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

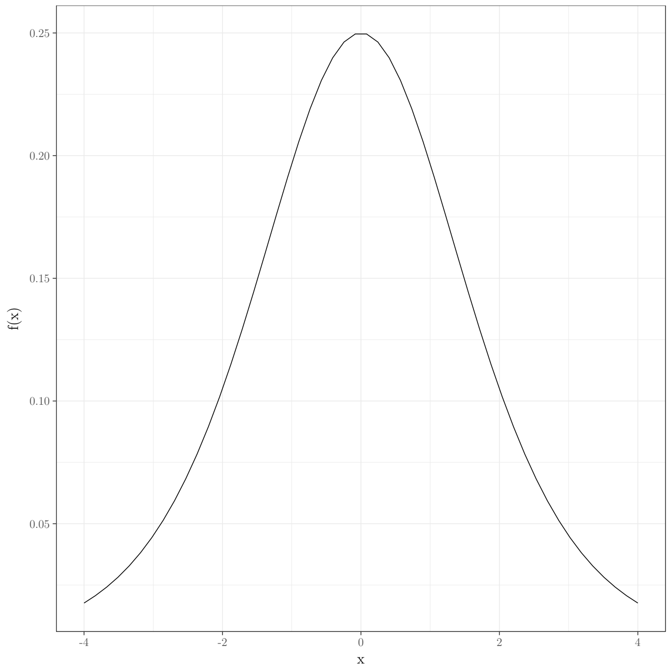
Для дальнейших развлечений нам понадобится функция плотности:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Заметим, что она симметрична относительно нуля:

$$f(-x) = \frac{\frac{1}{e^x}}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x)$$

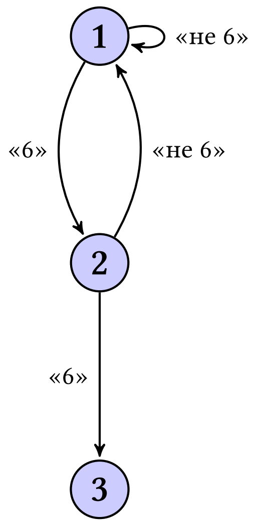
Из того этого следует, что **математическое ожидание, а так же мода и медиана равны нулю**. Более того, так как функция плотности симметрична относительно **нулевого** математического ожидания, **центральный и начальный моменты третьего порядка равны между собой и равны нулю.** Можно было выписать интегралы для математического ожидания и третьего начального момента и сослаться на нечетность функции.




**Часть 2**

— Это невозможно!
— Нет. Это необходимо.
© Interstellar

1. Алгоритм решения: рисуешь дерево → PROFIT




Комментарии к построению дерева: состояние 1 — начальное, состояние 3 — конец игры, когда выпало две «шестерки» подряд. Заметим, что выпадение любой «нешестерки» в процессе игры приводит нас к состоянию, эквивалентному начальному.

Вероятность выпадения «шестерки» равна $1/6$, «нешестерки» — $5/6$.

Теперь мы готовы оседлать коня!

а) $\mathbb{P}(N=1)=0$ — невозможно за ход закончить игру.
$\mathbb{P}(N=2)=\frac{1}{36}$
$\mathbb{P}(N=3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{216}$

б) А теперь будет видна вся сила рисования дерева:
Пусть $\mathbb{E}_1$ — число ходов, за которое мы ожидаем закончить игру, если игра начинается в состоянии 1, $\mathbb{E}_2$ — число ходов, за которое мы ожидаем закончить игру, если игра начинается в состоянии 2.
Получим два уравнения:

$$\begin{cases}\mathbb{E}_2=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}(\mathbb{E}_1+1)\\ \mathbb{E}_1=\frac{5}{6}(\mathbb{E}_1+1)+\frac{1}{6}(\mathbb{E}_2+1)\end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $\mathbb{E}_1=42$. А ведь это и есть $\mathbb{E}(N)$.
Аналогична логика для оставшихся математических ожиданий.
Найдем математическое ожидание суммы набранных очков. Ясно, что если выпадает «не 6», то мы ждем 3 очка. Тогда переопределив $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{E}_2$ следующим образом: пусть $\mathbb{E}_1$ — число набранных очков, которое мы ожидаем получить за игру, если игра начинается в состоянии 1, $\mathbb{E}_2$ — число набранных очков, которое мы ожидаем получить за игру, если игра начинается в состоянии 2.
Новые два уравнения:

$$\begin{cases}\mathbb{E}_2=\frac{1}{6}\cdot 6+\frac{5}{6}(\mathbb{E}_1+3)\\ \mathbb{E}_1=\frac{5}{6}(\mathbb{E}_1+3)+\frac{1}{6}(\mathbb{E}_2+6)\end{cases}$$

Решаем и получаем: $\mathbb{E}(S)=\mathbb{E}_1=147$
А можно было сделать еще круче! Выше показано, что $\mathbb{E}(N)=42$. А сколько мы ждем очков за 1 ход? 3.5! Тогда $\mathbb{E}(S)=\mathbb{E}(N)\cdot 3.5=147$
Применяя схожую логику для $\mathbb{E}\left(N^2\right)$:

$$\mathbb{E}(N^2)=\frac{5}{6}\cdot\mathbb{E}\left((N+1)^2\right)+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\mathbb{E}\left((N+2)^2\right)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^2$$

Учитывая, что $\mathbb{E}(N)=42$, получим: $\mathbb{E}(N^2)=3414$.

в) Veni, vidi, vici

| $x_n$ | 6 |
|---|---|
| $\mathbb{P}(X_n = x_n)$ | 1 |

2. а) $\mathbb{P}(V = 1) = 1/30$, так как именно этому равна вероятность того, что Вовочка стоит ровно вторым в очереди;

$M = 1$ значит, что между Машенькой и Вовочкой ровно один человек в очереди. Если Вовочка находится от 3 (включительно) до 28 позиции в очереди, то для Машеньки есть две благоприятные позиции для события $M = 1$ (например, если Вовочка стоит на 15 месте, то благоприятные позиции для Машеньки — стоять либо 13-ой, либо 17-ой). Если же Вовочка стоит на других позициях в очереди, то для Машеньки существует ровно одна благоприятная позиция:

$$\mathbb{P}(M = 1) = \frac{26}{30} \cdot \frac{2}{29} + \frac{4}{30} \cdot \frac{1}{29} = \frac{56}{30 \cdot 29} = \frac{28}{435}$$

$M = V$ произойдет только, если Машенька стоит за Вовочкой. При этом для Машеньки существует только одна благоприятная позиция и только в том случае, что Вовочка стоит до 15 позиции (включительно):

$$\mathbb{P}(M = V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{29} = \frac{1}{58}$$

б)

$$\mathbb{E}(V) = \frac{0 + 1 + \ldots + 29}{30} = \frac{30 \cdot 14 + 15}{30} = 14.5$$

Для $\mathbb{E}(M)$ можно решить в лоб, и получится красивая сумма, а можно вот так:

Сначала случайно кинем Вовочку и Машеньку на две из 30 позиций в очереди. Образуется три отрезка: точки между Вовочкой и Машенькой и два крайних отрезка (может быть, отрезок из 0 точек). Затем будем закидывать в очередь на оставшиеся позиции случайно 28 оставшихся людей (назовем их «пропавшими»). Т.к. все броски были случайны (или из соображений симметрии, как хотите), вероятность попасть в отрезок между Машенькой и Вовочкой для «пропавшего» равна $1/3$, вне отрезка — соответственно $2/3$, и независима от остальных бросков (!).

Введем случайную величину $X_i$ для $i$-го «пропавшего», которая равна 1, если он попал в отрезок между Машенькой и Вовочкой, 0, если не попал:

| $x_i$ | 1 | 0 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = x_i)$ | 1/3 | 2/3 |

Легко считается: $\mathbb{E}(X_i) = 1/3$, $\mathbb{E}(X_i^2) = 1/3$, $\text{Var}(X_i) = 1/3 - 1/9 = 2/9$. Ясно, что $M = \sum_1^{28} X_i$. Тогда учитывая независимость $X_i$:

$$\mathbb{E}(M) = \frac{28}{3}$$

$$\text{Var}(M) = \frac{56}{9}$$

3. Биномиальное распределение — *À l'abordage!*.

Задача интерпретируется так: последний ход — это когда мы обратились к коробку, в котором нет спичек (то есть к одному коробку нужно обратиться $n + 1$ раз).

а) Пусть $\xi$ — это случайная величина, обозначающая число оставшихся спичек в непустом коробке перед последним ходом.

Если $0 < k \leqslant n$, будем считать успехом — попадание в коробок, к которому мы на последнем ходу игры (пустому коробку) обратились. До этого момента из него было вытащено $n$ спичек, а из другого $n-k$ спичек, то есть спички брались $2n-k$ раз. Таким образом, перед последним ходом произошло $n$ успехов и $n-k$ неудач.

$$\mathbb{P}(\xi = k) = C_{2n-k}^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = C_{2n-k}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

Теперь нужно учесть, что на последнем ходе был выбран именно пустой коробок. Вероятность этого события — $1/2$, значит, искомая вероятность равна:

$$\mathbb{P}(\text{в одном коробке осталось k спичек}) = C_{2n-k}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\cdot\frac{1}{2} = C_{2n-k}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$$

б) Среднее спичек в другом коробке:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\cdot C_{2n-k}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}$$

4. Для того чтобы количество упаковок, которые необходимо купить, равнялось 50, нужно чтобы ни одну из наклеек Покупатель не встретил дважды, поэтому:

$$\mathbb{P}(X = 50) = 1\cdot\frac{49}{50}\cdot\frac{48}{50}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{50} = \frac{49!}{50^{49}} \approx 3.4\cdot 10^{-21}$$

Dum spiro, spero![2]

Теперь введём понятие «шаг». Переход на новый шаг происходит в тот момент, когда покупатель получил наклейку, которой у него раньше не было. Начинаем с шага 0, когда нет ни одной наклейки, и шагать будем до 49, потому что в момент перехода на шаг 50 Покупатель получит последнюю необходимую наклейку и «прогулка» закончится. Введём случайную величину $X_q$ равную количеству покупок в течение шага номер $q$. Тогда $X = \sum\limits_{q=0}^{49} X_q$. Найдём математическое ожидание $X_q$:

$$\mathbb{E}(X_q) = \frac{n-q}{n}\cdot 1 + \frac{q}{n}\cdot\frac{n-q}{n}\cdot 2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2\cdot\frac{n-q}{n}\cdot 3 + \ldots$$

здесь $\frac{n-q}{n}$ — это вероятность найти наклейку, которой ещё нет, а $\frac{q}{n}$, соответственно — вероятность повториться. Вопрос теперь в том, как посчитать сумму:

$$\mathbb{E}(X_q) = \frac{n-q}{n}\left(1 + \frac{q}{n}\cdot 2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2\cdot 3 + \ldots\right) = \frac{n-q}{n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{n}\right)^k (k+1)$$

Можем выписать в столбик несколько первых членов вышестоящей суммы:

$$\begin{array}{l}
1 \\
\left(\frac{q}{n}\right)^1 + \left(\frac{q}{n}\right)^1 \\
\left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{q}{n}\right)^2 \\
\left(\frac{q}{n}\right)^3 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Достаточно! Можем скомпоновать всю сумму другим способом, а именно — по столбцам. Заметим, что сумма элементов в каждом столбце это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с одним и тем же знаменателем $\frac{q}{n}$ и различными первыми членами. Соответственно:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{n}\right)^k(k+1) = \frac{1}{1-\frac{q}{n}} + \frac{\frac{q}{n}}{1-\frac{q}{n}} + \frac{\left(\frac{q}{n}\right)^2}{1-\frac{q}{n}} + \frac{\left(\frac{q}{n}\right)^3}{1-\frac{q}{n}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{q}{n}}\left(1 + \frac{q}{n} + \left(\frac{q}{n}\right)^2 + \left(\frac{q}{n}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{n}{n-q}\cdot\frac{n}{n-q} = \left(\frac{n}{n-q}\right)^2$$

[2] Надежда умирает последней!

Таким образом, получаем, что:

$$\mathbb{E}(X_q) = \frac{n-q}{n} \cdot \left(\frac{n}{n-q}\right)^2 = \frac{n}{n-q}$$

и это верно для любого q!

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{q=0}^{49} X_q\right) = \sum_{q=0}^{49} \mathbb{E}(X_q) = \frac{50}{50-0} + \frac{50}{50-1} + \dots + \frac{50}{50-49}$$
$$= 50\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \dots + 1\right) \approx 50\int\limits_1^{50} \frac{1}{x}\mathbf{d}x = 50\ln(50) \approx 195.5$$

А теперь ещё одно решение:

Величины $X_q$ независимы (но по разному распределены). Если долго пришлось ждать $i$-го шага, это ничего не говорит о $j$-ом шаге. Величины $X_q$ имеют известный закон распределения — это число опытов до первого успеха при заданной вероятности успеха. Это геометрическое распределение, математическое ожидание которого равно $\frac{1}{p}$, а дисперсия: $\frac{1-p}{p^2}$, где $p$ — вероятность успеха.

А те, кто забыл, могут **проще решить** методом первого шага: если $X$ — число опытов до успеха при вероятности успеха $p$, то

$$\mathbb{E}(X) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \mathbb{E}(X+1)$$

Откуда $\mathbb{E}(X) = 1/p$ и дело в шляпе :) Аналогично:

$$\mathbb{E}(X^2) = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot \mathbb{E}((X+1)^2)$$

и решая, находим $\mathbb{E}(X^2)$.

5. а) Необходимое и достаточное условие — старушка не должна занять чужое место. С вероятностью $1/n$ она угадает свое место, значит, для каждого входящего его место будет свободно и он туда сядет.

   **Ответ**: $1/n$

   б) Будем искать вероятность того, что последний человек не сядет на свое место.

   Пусть $A_i = \{$Старушка села на место $i$-го$\}$, $B_{(i,j)} = \{i$-ый пассажир сел на место $j$-ого$\}$

$$P(n\text{-ый не сядет на свое место}) = \mathbb{P}(A_n) + P(A_{n-1})P(B_{(n-1,n)}) +$$
$$+ P(A_{n-2})(P(B_{(n-2,n)}) + P(B_{(n-2,n-1)})P(B_{(n-1,n)}))) + \dots$$

Можем заметить, что:

- $\mathbb{P}(A_i) = P(A_j) = \frac{1}{n}\ \forall\, i, j$
- $\mathbb{P}(B_{(n-1,n)}) = \frac{1}{2}$, потому что $n-1$-ый выбирает из двух оставшихся мест
- $\mathbb{P}(B_{(n-2,n)}) + \mathbb{P}(B_{(n-2,n-1)}]P[B_{(n-1,n)}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $$\mathbb{P}(B_{(n-3,n)}) + \mathbb{P}(B_{(n-3,n-2)})(\mathbb{P}(B_{(n-2,n)}) + \mathbb{P}(B_{(n-2,n-1)})\,\mathbb{P}(B_{(n-1,n)}))$$
$$+ \mathbb{P}(B_{(n-3,n-1)})\,\mathbb{P}(B_{(n-1,n)}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
- И так далее до того момента, пока старушка не сядет на место первого человека, который заходит после нее, — всего $n-2$ вариантов.

Таким образом мы получаем сумму:

$$\mathbb{P}[n\text{-ый не сядет на свое место}] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n}(n-2) = \frac{1}{2}$$

Значит,

$$\mathbb{P}[n\text{-ый сядет на свое место}] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

А вот ещё один вариант решения:

Метод математической индукции: допустим что это утверждение доказано для одного, двух и так далее до $k$ человек. Рассмотрим $k+1$ человека. Когда последний сядет на своё место? Если старушка сядет на своё место, а вероятность этого равна $\frac{1}{k+1}$ или, с вероятностью $\frac{1}{2}$ (по индукции), если старушка сядет на любое место кроме своего и последнего, то есть $\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{k+1}$. В этом случае тот пассажир, чьё место она заняла, становится старушкой, и мы получаем задачу при меньшем $k$. Складывая эти две дроби, получаем $\frac{1}{2}$.

Чтобы найти среднее число пассажиров, разобьем эту величину в сумму индикаторов: $Y_1$ — сел ли первый на место, ..., $Y_n$ — сел ли $n$-ый на место (индикатор равен единице, если сел).

Стало быть $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \ldots + \mathbb{E}(Y_n)$. $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}$.

Почти аналогично можем рассуждать для предпоследнего:

База индукции: если пассажиров трое ($n = 3$ включая старушку), то для предпоследнего вероятность сесть на своё место равна $\frac{2}{3}$.

Шаг индукции: допустим что для $3, 4, \ldots n$ пассажиров эта вероятность равна $\frac{2}{3}$. Рассмотрим случай $(n+1)$-го пассажира. Предпоследний сядет на своё место, если:

- старушка сядет на своё место или на место последнего $\frac{2}{n+1}$
- в $\frac{2}{3}$ тех случаев, когда старушка сядет на место $2, 3, \ldots, (n-1)$, то есть $\frac{2}{3}\cdot\frac{n-2}{n+1}$ складываем, получаем $\frac{2}{3}$. То есть по индукции вероятность того, что предпоследний сядет на своё место равна $\frac{2}{3}$.

И по аналогии можно увидеть, что вероятность того, что $k$-ый с конца пассажир сядет на своё место равна $k/(k+1)$.

Если у нас $n$ пассажиров включая СС, то среднее количество севших на свои места (раскладывая с конца) равно

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}$$

## 13.6. 2013-2014

### Часть 1

1. а) Запишем все благоприятные исходы в таблицу:

| Исход | Вероятность |
|---|---|
| ООО | $p^2\cdot\frac{1}{2}$ |
| ООН | $p^2\cdot\frac{1}{2}$ |
| ОНО | $p(1-p)\frac{1}{2}$ |
| НОО | $(1-p)p\frac{1}{2}$ |

Нас устраивает любой из этих исходов, так что

$$\mathbb{P}(\text{жюри одобрит конкурсанта}) = p^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 + p(1-p)\frac{1}{2}\cdot 2 = p$$

б) Исходя из результата предыдущего пункта, получаем, что конкурсанту безразлично.

2. Введём обозначения:

- $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}^c) = p$ — Вася пришёл, а девушки — нет.
- $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) = 5p$ — пришли и Вася, и девушки.
- $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) = 3p$ — Вася пришёл, если пришла только Маша.
- $\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) = 2p$ — Вася пришёл, если пришла только Алёна.
- $\mathbb{P}(\mathrm{M}) = 0.6$ — Маша пришла на лекцию.
- $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = 0.3$ — Алёна пришла на лекцию.

а) По теореме умножения:

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$$

Выпишем числитель:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) = \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}^c) \\ &= 5p \cdot 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 2p \cdot 0.36 \cdot 0.4 \cdot 0.3 = 1.14p\end{aligned}$$

И знаменатель:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}^c) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) + \\ + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{M}^c) = p \cdot 0.4 \cdot 0.7 + 5p \cdot 0.6 \cdot 0.3 \\ + 3p \cdot 0.6 \cdot 0.7 + 2p \cdot 0.4 \cdot 0.3 = 2.68p\end{aligned}$$

Ответ:

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{1.14p}{2.68p} \approx 0.43$$

б) Теперь необходимо найти

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}$$

Знаменатель этой дроби посчитан в предыдущем пункте, посчитаем числитель:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{B}) = \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) = P(\mathrm{B}|\mathrm{M} \cap \mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) \\ + \mathbb{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}^c \cap \mathrm{M}) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{A}^c) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{M}) = 5p \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 3p \cdot 0.6 \cdot 0.7 = 2.16p\end{aligned}$$

Ответ:

$$\mathbb{P}(\mathrm{M}|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{B})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})} = \frac{2.16p}{2.68p} \approx 0.8$$

Если Вася на лекции, вероятность застать на ней Машу выше.

в) $\mathbb{P}(\mathrm{B}) = 0.5, \mathbb{P}(\mathrm{B}) = 2.68p \Rightarrow p \approx 0.19$

3. а) Перед нами биномиальное распределение! Пусть $X$ — случайная величина, число туристов, которые не выехали за границу. Тогда:

$$\mathbb{P}(X = 5) = C_{100}^5 \cdot 0.002^5 \cdot 0.998^{95}$$

б)
- $\mathbb{E}(X) = 2$
- $\mathrm{Var}(X) = 0.2 \cdot 0.998$
- Наиболее вероятное число невыехавших — 0.

в) Пусть случайная величина $S_i$ обозначает страховые выплаты, которые может получить один турист. Она может принимать значение 0, если турист выехал за границу и не обратился за медицинской помощью, 2000, когда он не выехал и 3000, когда турист выехал за границу и обратился за медицинской помощью. Тогда $S_i$ распределена следующим образом:

| $s_i$ | 0 | 2000 | 3000 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(S_i = s_i)$ | $0.998 \cdot 0.99$ | 0.002 | $0.998 \cdot 0.01$ |

- $\mathbb{E}(S_i) = 2000 \cdot 0.002 + 3000 \cdot 0.998 \cdot 0.01 = 33.94 \Rightarrow \mathbb{E}(S) = 3394$
- $\mathbb{E}(S_i^2) = 2000^2 \cdot 0.002 + 3000^2 \cdot 0.998 \cdot 0.01 = 97820$
- $\operatorname{Var}(S_i) = 97820 - 33.94^2 = 96668 \Rightarrow \operatorname{Var}(S) = 9666800$

г)

4. а) $\mathbb{E}(Y - 2X - 3) = \mathbb{E}(Y) - 2\,\mathbb{E}(X) - 3 = 0$
$\operatorname{Var}(Y - 2X - 3) = \operatorname{Var}(Y) + 4\operatorname{Var}(X) - 2\operatorname{Cov}(Y, 2X) = 16$
$\operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Corr}(X, Y) \cdot \sqrt{\operatorname{Var}(X) \cdot \operatorname{Var}(Y)} = 6$

б) $\operatorname{Corr}(Y - 2X - 3, X) = \frac{\operatorname{Cov}(Y,X) - 2\operatorname{Var}(X)}{\sqrt{\operatorname{Var}(Y-2X-3)\cdot\operatorname{Var}(X)}} = -1$, или проще: можно было заметить, что случайные величины линейно связаны.

в) Корреляция равна 1, значит, есть линейная взаимосвязь между переменными. Пусть $Y + aX = b$, тогда $\operatorname{Var}(Y + aX) = 0$, $\mathbb{E}(Y) = -a + b = 1$. Решая уравнения, находим, что $a = -2/3, b = 1/3$.

5. а) Частные распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | 0.3 | 0.3 | 0.4 |

| $y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y)$ | 0.5 | 0.5 |

б)

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = (-1)\cdot(-1)\cdot 0.1 + (-1)\cdot 1 \cdot 0.2 + 1 \cdot (-1) \cdot 0.2 \\ + 1 \cdot 1 \cdot 0.2 - ((-1)\cdot 0.3 + 1 \cdot 0.4)(-1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5) = -0.1\end{aligned}$$

в) Да, так как $\operatorname{Cov}(X, Y) \neq 0$

г) Необходимо минимизировать дисперсию дохода:

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) \to \min_{\alpha}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + (1-\alpha)^2 \operatorname{Var}(Y) + 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{Cov}(X, Y) \\ &= 0.69\alpha^2 + (1-\alpha)^2 - 0.2\alpha(1-\alpha) \to \min_{\alpha}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \operatorname{Var}(\alpha X + (1-\alpha)Y)}{\partial \alpha} = 2 \cdot 0.69\alpha - 2(1-\alpha) - 0.2 + 0.4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \approx 0.58$$

д) Условное распределение:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x \mid Y = -1)$ | 0.2 | 0.4 | 0.4 |

е) $\mathbb{E}(X \mid Y = -1) = -1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 = 0.2$

# 14. Решения контрольной работы 2

## 14.1. 2017-2018

7. а) Всем хватит места, если число явившихся на рейс пассажиров ($X$) не превысит 300, то есть нужно найти $\mathbb{P}(X \leqslant 300)$. Найдём матожидание и дисперсию случайной величины $X$:

$$\mathbb{E}(X) = np = 330 \cdot 0.9 = 297$$
$$\operatorname{Var}(X) = np(1-p) = 330 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 29.7$$

Теперь посчитаем нужную вероятность:

$$\mathbb{P}(X \leqslant 300) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 297}{\sqrt{29.7}} \leqslant \frac{300 - 297}{\sqrt{29.7}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leqslant 0.55) \approx 0.709$$

б) Вероятность переполнения не должна превышать 0.1:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X > 300) < 0.1\\
&\mathbb{P}\left(\frac{X - 0.9\cdot n}{\sqrt{0.9\cdot 0.1\cdot n}} > \frac{300 - 0.9\cdot n}{\sqrt{0.9\cdot 0.1\cdot n}}\right) < 0.1\\
&\frac{300 - 0.9\cdot n}{\sqrt{0.9\cdot 0.1\cdot n}} > 1.28\\
&300 - 0.9n > 1.28\cdot 0.3\sqrt{n}\\
&n < 325.6
\end{aligned}$$

8. а) Выпишем случайную величину $X_i$ — цену акции после $i$-ого дня:

$$X_i = \begin{cases} 1.01, & p = 0.7\\ 0.99, & p = 0.2999\\ 0, & p = 0.0001\end{cases}$$

Нужно посчитать ожидание цены акциии после 20 дней:

$$\mathbb{E}(X_1\cdot\ldots\cdot X_{20}) \overset{\text{незав-ть}}{=} \mathbb{E}(X_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}(X_{20}) = 1.004^{20} \approx 1.083$$

б) По ЗБЧ:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_i) = 1.004$$

в) Аналогично пункту (а):

$$\mathbb{E}(X_1\cdot\ldots\cdot X_n) = (\mathbb{E}(X_1))^n = 1.004^n$$

И понятно, что $1.004^n \to_{n\to\infty} +\infty$.

г)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{разорения}) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > 0, \ldots, X_n > 0) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i > 0)\\
&= 1 - (1 - 0.0001)^n \to_{n\to\infty} 1
\end{aligned}$$

### 14.2. 2016-2017

1. а) $\mathbb{E}(2\xi - \eta + 1) = 2\,\mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\eta) + 1 = 2\cdot 1 - (-2) + 1 = 5$

$\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\,\mathbb{E}(\eta) = -1 - \cdot 1\cdot(-2) = 1$

$\operatorname{Corr}(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\cdot\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot(8-(-2)^2)}} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Var}(2\xi - \eta + 1) = 4\operatorname{Var}(\xi) + \operatorname{Var}(\eta) - 2\operatorname{Cov}(2\xi,\eta) = 4\cdot 1 + 4 - 4\cdot 1 = 4$

б) $\operatorname{Cov}(\xi+\eta, \xi+1) = \operatorname{Cov}(\xi) + \operatorname{Cov}(\xi,1) + \operatorname{Cov}(\eta,\xi) + \operatorname{Cov}(\eta,1) = 1 + 1 = 2$

$\operatorname{Corr}(\xi+\eta, \xi+1) = \frac{\operatorname{Cov}(\xi+\eta,\xi+1)}{\sqrt{\operatorname{Var}(\xi+\eta)\cdot\operatorname{Var}(\xi+1)}} = \frac{2}{\sqrt{(1+4+2\cdot 1)\cdot 1}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\operatorname{Corr}(\xi + \eta - 24, 365 - \xi - \eta) = -1$

$\operatorname{Cov}(2016\cdot\xi, 2017) = 0$

2. а) Частные распределения:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\xi = x)$ | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

| $y$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\eta = y)$ | 0.5 | 0.5 |

$\mathbb{E}(\xi) = -1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 = 0.3$
$\mathbb{E}(\xi^2) = (-1)^2 \cdot 0.3 + 0^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 = 1.5$
$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - (\mathbb{E}(\xi))^2 = 1.5 - 0.3^2 = 1.41$
$\mathbb{E}(\eta) = -1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0$
$\mathbb{E}(\eta^2) = (-1)^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.5 = 1$
$\mathrm{Var}(\eta) = \mathbb{E}(\eta^2) - (\mathbb{E}(\eta))^2 = 1 - 0^2 = 1$

б)

| $xy$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\xi \cdot \eta = xy)$ | 0.2 | 0.2 | 0.4 | 0.1 | 0.1 |

$\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = (-2) \cdot 0.2 + (-1) \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.1 = -0.3$
$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta) = -0.3 - 0.3 \cdot 0 = -0.3$

в) Пусть случайная величина $X$ принимает значения $a_1, \ldots, a_m$, случайная веилчина $Y$ принимает значения $b_1, \ldots, b_n$. Тогда случйаня величина $X$ и $Y$ называются независимыми, если $\forall i = 1, \ldots, m \quad \forall j = 1, \ldots, n : \mathbb{P}(X = a_i \cap Y = b_j) = P(X = a_i) \cdot P(Y = b_j)$

г) Заметим, что $\mathbb{P}(\xi = -1 \cap \eta = -1) = 0.1$, $\mathbb{P}(\xi = -1) = 0.3$ и $\mathbb{P}(\eta = -1) = 0.5$.
Тогда поскольку $\mathbb{P}(\xi = -1 \cap \eta = -1) \neq \mathbb{P}(\xi = -1) \cdot \mathbb{P}(\eta = -1)$, случайные величины $\xi$ и $\eta$ не являются независимыми.

д) $\mathbb{P}(\xi = -1 \cap \eta = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi=-1 \cap \eta=1)}{\mathbb{P}(\eta=1)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$
$\mathbb{P}(\xi = 0 \cap \eta = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi=0 \cap \eta=1)}{\mathbb{P}(\eta=1)} = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$
$\mathbb{P}(\xi = 2 \cap \eta = 1) = \frac{\mathbb{P}(\xi=2 \cap \eta=1)}{\mathbb{P}(\eta=1)} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$
Следовательно, условное распределение случайной величины $\xi$ при условии $\{\eta = 1\}$ может быть описано следующей таблицей:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(\xi = x)$ | 2/5 | 2/5 | 1/5 |

е) $\mathbb{E}(\xi \mid \eta = 1) = -1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = 0$

ж) $\mathbb{E}(\pi) = \mathbb{E}(0.5\xi + 0.5\eta) = 0.5\,\mathbb{E}(\xi) + 0.5\,\mathbb{E}(\eta) = 0.15$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\pi) &= \mathrm{Var}(0.5\xi + 0.5\eta) = \mathrm{Var}(0.5\xi) + \mathrm{Var}(0.5\eta) + 2\,\mathrm{Cov}(0.5\xi, 0.5\eta) \\
&= 0.25\,\mathrm{Var}(\xi) + 0.25\,\mathrm{Var}(\eta) + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5\,\mathrm{Cov}(\xi, \eta) \\
&= 0.25 \cdot 1.41 + 0.25 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot (-0.3) = 0.4525
\end{aligned}
$$

з)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\pi(\alpha)) &= \mathrm{Var}(\alpha\xi + (1-\alpha)\eta) = \alpha^2\,\mathrm{Var}(\xi) + (1-\alpha)^2\,\mathrm{Var}(\eta) \\
&+ 2\alpha(1-\alpha)\,\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = 1.41 \cdot \alpha^2 + 1 \cdot (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha) \cdot (-0.3) \\
&= 1.41 \cdot \alpha^2 + (1-\alpha)^2 - 0.6 \cdot (\alpha - \alpha^2) \to \min_{\alpha} \\
\frac{\partial}{\partial \alpha}\mathrm{Var}(\pi(\alpha)) &= 2 \cdot 1.41 \cdot \alpha - 2(1-\alpha) - 0.6 \cdot (1 - 2\alpha) \\
&= 2.82 \cdot \alpha - 2 + 2\alpha - 0.6 + 1.2 \cdot \alpha = 6.02 \cdot \alpha - 2.6 = 0 \\
\alpha &= \frac{2.6}{6.02} = 0.4319
\end{aligned}
$$

3. а) Для любой неотрицательной случайной величины $X$ и любого числа $\lambda > 0$ справедлива оценка: $\mathbb{P}(X > \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$
Пусть случайная величина $\xi_i$ означает число посетителей сайта за $i$-ый день. По условию, $\xi_i \sim Pois(\lambda = 250)$. Известно, что если $\xi \sim Pois(\lambda)$, то $\mathbb{E}(\xi) = \mathrm{Var}(\xi) = \lambda$.
Имеем:

$$
\mathbb{P}(\xi_i > 500) \leqslant \mathbb{P}(\xi_i \geqslant 500) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi_i)}{500} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}
$$

б) Для любой случайной величины $X$ с конечным $\mathbb{E}(X)$ и любого положительного числа $\epsilon > 0$ имеет место неравенство: $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geqslant \epsilon) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{\epsilon^2}$
Обозначим $\bar{\xi}_n := \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ – среднее число посетителей сайта за $n$ дней. Тогда

$$\mathbb{E}\left(\bar{\xi}_n\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\xi_i) = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\lambda = \lambda = 250$$

$$\operatorname{Var}\left(\bar{\xi}_n\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}(\xi_i) = \frac{n\cdot\lambda}{n^2} = \frac{\lambda}{n} = \frac{250}{n}$$

Оценим вероятность

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{\xi}_n - 250\right| > 10\right) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\left(\bar{\xi}_n\right)}{100} = \frac{250}{100\cdot n}$$

Следовательно, $1 - \frac{250}{100\cdot n} \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\bar{\xi}_n - 250\right| \leqslant 10\right)$.
Найдём наименьшее целое $n$, при котором левая часть неравенства ограничена снизу $0.99 \leqslant 1 - \frac{250}{100\cdot n}$.
Имеем:

$$0.99 \leqslant 1 - \frac{250}{100\cdot n} \Leftrightarrow \frac{250}{100\cdot n} \leqslant 0.01 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{250}{100\cdot 0.01} \Leftrightarrow n \geqslant 250$$

Значит, $n = 250$ – наименьшее число дней, при котором с вероятностью не менее 99% среднее число посетителей будет отличаться от 250 не более чем на 10.

в) Требуется найти наименьшее целое $n$, при котором $\mathbb{P}\left(\left|\bar{\xi}_n - 250\right| \leqslant 10\right) = 0.99$
Имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|\bar{\xi}_n - 250| \leqslant 10) = 0.99 \Leftrightarrow \mathbb{P}(-10 \leqslant \bar{\xi}_n - 250 \leqslant 10) = 0.99\\
&\mathbb{P}(-10n \leqslant S_n - 250n \leqslant 10n) = 0.99\\
&\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{E}(\xi_1) + \ldots + \mathbb{E}(\xi_n) = 250\cdot n\\
&\operatorname{Var}(S_n) = \operatorname{Var}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \operatorname{Var}(\xi_1) + \ldots + \operatorname{Var}(\xi_n) = 250\cdot n\\
&\mathbb{P}\left(\frac{-10n}{\sqrt{250n}} \leqslant \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \leqslant \frac{10n}{\sqrt{250n}}\right) = 0.99\\
&2\Phi\left(\frac{10n}{\sqrt{250n}}\right) - 1 = 0.99\\
&\Phi\left(\frac{10n}{\sqrt{250n}}\right) = \frac{1 + 0.99}{2}\\
&\frac{10n}{\sqrt{250n}} = 2.58\\
&\sqrt{n} = 2.58\cdot\frac{\sqrt{250}}{10}\\
&n = 16.641
\end{aligned}$$

Следовательно, наименьшее целое $n$, есть $n = 17$.

г) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин с одинаковыми конечными математическими ожиданимяи и фиксированными конечными дисперсиями. Тогда $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_i)$ при $n \to \infty$.
В нашем случае случаные величины $\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots, \xi_n^2, \ldots$ – независимы,
$\mathbb{E}(\xi_1^2) = \ldots = \mathbb{E}(\xi_n^2) = \ldots < +\infty$ и $\operatorname{Var}(\xi_1^2) = \ldots = \operatorname{Var}(\xi_n^2) = \ldots < +\infty$ . Поэтому в соответствии с ЗБЧ имеем:

$$\frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\xi_i^2) = \operatorname{Var}(\xi_i) + \mathbb{E}(\xi_i)^2 = \lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda+1) = 250\cdot 251 = 62750$$

4. а) Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с $0 < \mathrm{Var}(X_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда для любого (борелевского) множества $B \subseteq R$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \in B\right) = \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt,$$

где $S_n := X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$

б) Введём случайную величину

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если на i-ом шаге Винни-Пух пошёл направо} \\ -1, & \text{если пошёл налево} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n;$$

Тогда $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ означает местоположение Винни-Пуха в $n$-ую минуту его блужданий по прямой.

$\mathbb{E}(X_i) = -1 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0$,
$\mathbb{E}(X_i^2) = (-1)^2 \cdot 1/2 + (1)^2 \cdot 1/2 = 1$,
$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = 1$,
$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = 0$,
$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n) = n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \in (-\infty, -5]) = \mathbb{P}(S_n \leqslant -5) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leqslant \frac{-5-0}{\sqrt{n}}\right) \\ \overset{n=60}{=} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leqslant -0.6454\right) \approx \int_{-\infty}^{-0.6454} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \\ = \Phi(-0.6454) = 1 - \Phi(0.6454) \approx 0.2593\end{aligned}$$

в) Для любых $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место оценка:

$$\left|F_{S_n^*}(x) - \Phi(x)\right| \leqslant 0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|\xi_i - \mathbb{E}\,\xi_i|^3)}{\mathrm{Var}^{3/2}(\xi_i) \cdot \sqrt{n}},$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$, $\;S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$, $\;S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

В нашем случае:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{60} - \mathbb{E}(S_{60})}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_{60})}} \leqslant -0.6454\right) = \mathbb{P}(S_{60}^* \leqslant -0.6454) = F_{S_{60}^*}(-0.6454)$$

Согласно неравенству Берри-Эссеена, погрешность $|F_{S_{60}^*}(-0.6454) - \Phi(-0.6454)|$ оценивается сверху величиной

$$0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_i - \mathbb{E}(X_i)|^3)}{\mathrm{Var}(X_i)^{3/2} \cdot \sqrt{n}} = 0.48 \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_i|^3)}{1 \cdot \sqrt{60}} = \frac{0.48}{\sqrt{60}} \approx 0.062$$

5. а) Сначала найдём плотность распределения случайной величины $X$. Пусть $x \leqslant 0$, тогда $f_X(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = 0$.

Пусть $x > 0$, тогда

$$\begin{aligned} f_X(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^{+\infty} 0.005e^{-0.05x-0.1y}dy \\ = 0.005e^{-0.05x}\int_0^{+\infty} e^{-0.1y}dy = 0.005e^{-0.05x} \cdot \left(-10e^{-0.1y}\right)\Big|_{y=0}^{y=+\infty} = 0.05e^{-0.05x}\end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.05e^{-0.05x} & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}$$

То есть $X \sim Exp(\lambda = 0.05)$ – случайная величина $X$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0.05$.

Теперь найдём плотность распределения случайной величины $Y$.

Пусть $y \leqslant 0$, тогда $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = 0$.

Пусть $y > 0$, тогда

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{0}^{+\infty} 0.005e^{-0.05x-0.1y}dx \\ &= 0.005e^{-0.1y}\int_{0}^{+\infty} e^{-0.05x}dx = 0.005e^{-0.1y} \cdot \left(-20e^{-0.05x}\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} = 0.1e^{-0.1y} \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1y} & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0 \end{cases}$$

То есть $Y \sim Exp(\lambda = 0.1)$ – случайная величина $Y$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0.1$.

б) Поскольку для любых точек $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, случайные величины $X$ и $Y$ являются независимыми.

в) Найдём вероятность $\mathbb{P}(Y > 5)$:

$$\mathbb{P}(Y > 5) = \int_{5}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_{5}^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}dy = 0.1 \cdot (-10e^{-0.1x})\Big|_{y=5}^{y=+\infty} = e^{-0.5} \approx 0.6065$$

г) Требуется найти условную вероятность $\mathbb{P}(Y > 8 \mid Y \geqslant 3)$. Для этого предварительно найдём вероятности $\mathbb{P}(Y > 8)$ и $\mathbb{P}(y \geqslant 3)$:

$$\mathbb{P}(Y > 8) = \int_{8}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_{8}^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}dy = 0.1 \cdot (-10e^{-0.1x})\Big|_{y=8}^{y=+\infty} = e^{-0.8}$$

$$\mathbb{P}(Y \geqslant 3) = \int_{3}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_{3}^{+\infty} 0.1e^{-0.1y}dy = 0.1 \cdot (-10e^{-0.1x})\Big|_{y=3}^{y=+\infty} = e^{-0.3}$$

Теперь находим требуемую условную веростность:

$$\mathbb{P}(Y > 8 \mid Y \geqslant 3) = \frac{\mathbb{P}(Y > 8 \cap Y \geqslant 3)}{\mathbb{P}(Y \geqslant 3)} = \frac{\mathbb{P}(Y > 8)}{\mathbb{P}(Y \geqslant 3)} = \frac{e^{-0.8}}{e^{-0.3}} = e^{-0.5} \approx 0.6065$$

д) Сначала найдём условную плотность распределения случайной величины $X$ при условии $Y = y$:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x \mid y) &= \begin{cases} \frac{f_{X|Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{при } f_Y(y) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{0.005e^{-0.05x-0.1y}}{0.1e^{-0.1y}} & \text{при } x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.05e^{-0.05x} & \text{при } x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_X(x) & \text{при } y > 0 \\ 0 & \text{при } y \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь находим условное математическое ожидание

$$\mathbb{E}(X \mid Y=5) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid 5)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{0.05} = 20$$

Здесь мы воспользовались известным фактом, что если $X \sim Exp(\lambda)$, то $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

e) Требуется найти вероятность $\mathbb{P}(X - Y > 2)$. Для этого введём множества $B := \{(x, y) \in \mathbb{R} : y < x - 2\}$ и $C := \{(x, y) \in \mathbb{R} : y < x - 2, x > 0, y > 0\}$.
Заметим, что искомая вероятность $\mathbb{P}(X - Y > 2)$ может быть записана в виде

$$\mathbb{P}(X - Y > 2) = \mathbb{P}((X, Y) \in B) = \int\int_B f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int\int_C f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

Стало быть, искомая вероятность

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X - Y > 2) &= \int\int_C f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_2^{+\infty} \left[\int_0^{x-2} f_{X,Y}(x, y)dy\right] dx \\
&= \int_2^{+\infty} \left[\int_0^{x-2} 0.005e^{-0.05x-0.1y}dy\right] dx \\
&= \int_2^{+\infty} \left[0.005e^{-0.05x} \cdot (-10e^{-0.1y})\Big|_{y=0}^{y=x-2}\right] dx \\
&= \int_2^{+\infty} \left[0.005e^{-0.05x} \cdot \left(1 - e^{-0.1(x-2)}\right)\right] dx = \int_2^{+\infty} 0.005e^{-0.05x}dx \\
&- \int_2^{+\infty} 0.005e^{-0.05x-0.1x+0.2}dx = 0.05 \cdot \left(-\frac{1}{0.05}e^{-0.05x}\right)\Big|_{x=2}^{x=+\infty} \\
&- e^{0.02} \cdot 0.05 \cdot \left(\frac{1}{0.15}e^{-0.15x}\right)\Big|_{x=2}^{x=+\infty} = e^{-0.1} - \frac{1}{3}e^{-0.1} = \frac{2}{3}e^{-0.1} \approx 0.6032
\end{aligned}$$

6. Для решения задачи воспользуемся хорошо известными соотношениями:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu^2 + \sigma^2$$

а) Указанная в задании функция $f_X$ является плотностью распределения, так как она удовлетворяет двум условиям: $f_X$ является неотрицательной и интеграл от функции $f_X$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} dx = 1$$

б) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} dx = 1 - 1 = 0$

в)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2}(1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2) = 2
\end{aligned}$$

г) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2 - 0^2 = 2$

### 14.3. 2015-2016

1. а) $\mathbb{E}(\xi_1 \cdot \xi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot x^2y + \frac{3}{2} \cdot xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{y}{6} + \frac{3y^2}{4}\,dy = \frac{1}{3}$

   б) $f_{\xi_1|\xi_2}(x|y) = \frac{f_{\xi_1,\xi_2}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)} = \frac{0.5x+1.5y}{0.25+1.5y}$, при $y \in (0,1)$

   в)

$$\mathbb{E}(\xi_1|\xi_2 = y) = \int_0^1 xf_{\xi_1|\xi_2}(x|y)dx = \int\limits_0^1 x\frac{0.5x + 1,5y}{0.25 + 1.5y}dx$$

$$= \frac{1}{0.25 + 1,5y}\left(\frac{0.5x^3}{3} + \frac{1.5yx^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1/6 + 3/4y}{0.25 + 1.5y}$$

   г) Для того, чтобы функция являлась совместной плотностью для пары случайных величин, должно выполнятся следующее:

$$\int_\Omega kxf(x,y)\,dx\,dy = 1$$

   Вычислим, чему равняется левая часть:

$$1 = \int_\Omega kxf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 kx\left(\frac{x+3y}{2}\right)dx\,dy = \int_0^1 \frac{k}{6} + \frac{3ky}{4}\,dy = \frac{k}{6} + \frac{3k}{8} \Rightarrow$$

$$k = \frac{24}{13}$$

2. Заметим, что $\xi + \eta = 10$, тогда $\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = \operatorname{Cov}(\xi, 10 - \xi) = -\operatorname{Var}(\xi)$.

   Представим случайную величину $\xi$ в виде суммы случайных величин $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_{10}$, где

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если у студента есть хотя бы один незачёт}, p = 0.2 \\ 0, & \text{иначе}, p = 0.8 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, 10$$

   Поскольку результаты каждого из стуентов независимы, $\operatorname{Var}(\xi) = 10\operatorname{Var}(\xi_1)$

$$\operatorname{Cov}(\xi, \eta) = -10(1^2 \cdot 0.2 - (1 \cdot 0.2)^2) = -1.6$$

   Так как случайные величины $\xi$ и $\eta$ связаны соотношением $\xi = 10 - \eta$, $\operatorname{Corr}(\xi, \eta) = -1$.

   Подставив в $\operatorname{Cov}(\xi - \eta, \xi)$ выражение $\eta = 10 - \xi$, получим:

$$\operatorname{Cov}(\xi - \eta, \xi) = 2\operatorname{Cov}(\xi, \xi) = 2 \cdot 0.16 = 0.32$$

   Случайные величины $\xi - \eta$ и $\xi$ не являются независиыми.

3. Найдем ожидаемую доходность и риск портфеля $R = \alpha\xi + (1-\alpha)\eta$ для любого $\alpha$, тогда при $\alpha = 1$ получим результаты Пети, при $\alpha = 0.5$ — результаты Васи.

$$\mathbb{E}\,R = \alpha + (1 - \alpha) = 1\ \forall\ \alpha \in [0, 1]$$

   Находим дисперсию:

$$\operatorname{Var}(R) = \alpha^2 \cdot 4 + (1-\alpha)^2 \cdot 9 - 6\alpha(1-\alpha) = 19\alpha^2 - 24\alpha + 9 \to \min_\alpha$$

   Теперь, найдем оптимальное $\alpha$:

$$\alpha = \frac{24}{38}$$

   Финальные цифры:

$$\begin{cases} \operatorname{Var}(R)^P = 4 \Rightarrow \sigma_P = 2 \\ \operatorname{Var}(R)^V = 1.75 \Rightarrow \sigma_V \approx 1.32 \\ \operatorname{Var}(R)^M = \frac{27}{19} \Rightarrow \sigma_M \approx 1.19 \end{cases}$$

4. а) Пусть $S$ количество мальчиков, тогда используя неравенство Маркова получаем:

$$\mathbb{P}(S \geqslant 750) \leqslant \frac{\mathbb{E}(S)}{750} = \frac{2}{3}$$

б) Пусть, теперь, $\bar{X}$ доля мальчиков, то есть, $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, где

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый ребёнок — мальчик} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

тогда используя неравенство Чебышева получаем:

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - 0.5| \geqslant 0.25) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(\bar{X})}{0.25^2} = \frac{1/4000}{0.25^2} = 0.004$$

в) Вероятность из предыдущего пункта можно записать в таком виде:

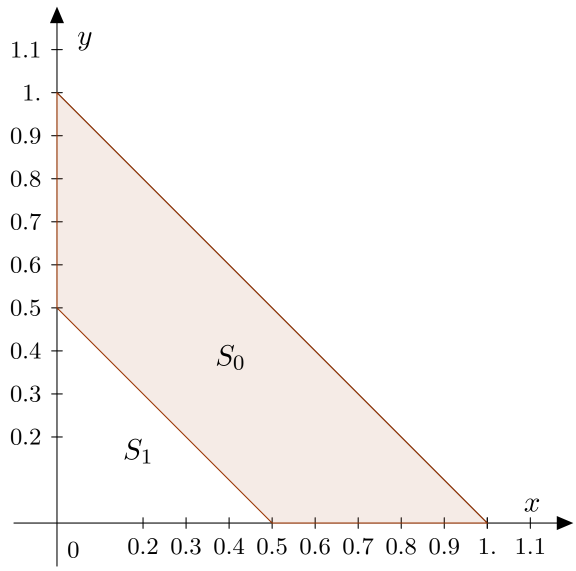
$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X} - 0.5\right| \geqslant 0.25\right) = \mathbb{P}\left(\bar{X} \geqslant 0.75\right) + \mathbb{P}\left(\bar{X} \leqslant 0.25\right) = 2\,\mathbb{P}\left(\bar{X} \geqslant 0.75\right) =$$
$$= 2\,\mathbb{P}(\mathcal{N}(0;1) \geqslant 0.25\sqrt{4000}) = 2\,\mathbb{P}(\mathcal{N}(0;1) \geqslant 15.8) = 1.3 \cdot 10^{-56} \approx 0$$

5. Пусть случайная величина $S$ — это валютный курс через полгода. Заметим, что $S = 100 + \delta_1 + \ldots + \delta_{171}$. Тогда по ЦПТ $S \sim \mathcal{N}(142.75, 203.0625)$. Теперь можно искать нужную вероятность:

$$\mathbb{P}(S > 250) = \mathbb{P}\left(\frac{S - 142.75}{\sqrt{203.0625}} > \frac{250 - 142.75}{\sqrt{203.0625}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 7.6) \approx 0$$

## 14.4. 2014-2015

1. а) Так как $(X, Y)$ имеют совместное равномерное распределение, $\mathbb{P}\{X + Y > 1/2\}$ можно рассчитать как отношение соответствующих площадей:




Соответственно:

$$\mathbb{P}\left(X + Y > \frac{1}{2}\right) = \frac{S_0}{S_0 + S_1} = \frac{0.5 - S_1}{0.5} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

б)

$$f_Y(y) = \int\limits_0^{1-y} f_{XY}(x, y)dx$$

Поэтому, нам сначала нужно найти $f_{XY}(x,y)$, которая для равномерного распределения должна быть константой. Это можно сделать из условия:

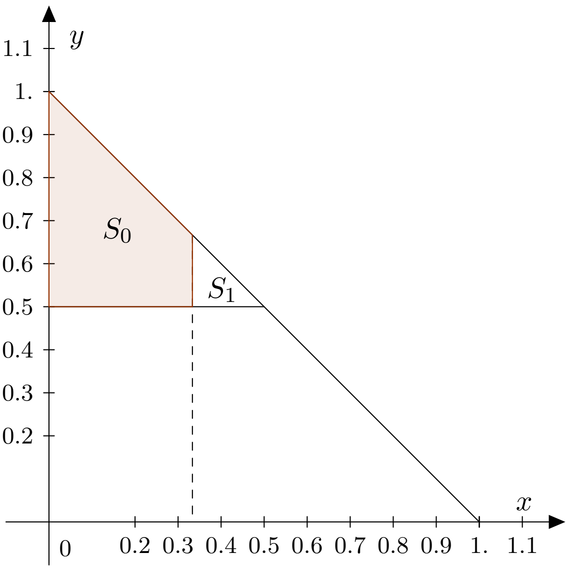
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} Cdxdy = 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} Cdxdy = \int_0^1 C(1-x)dx = \left(Cx - C\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{C}{2} = 1$$

Откуда имеем $f_{XY}(x,y) = C = 2$. Теперь можем найти плотность распределения расходов Васи:

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2dx = 2(1-y)$$

в) В данном случае площади немного другие, но смысл тот же:




$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{3} \middle| Y > \frac{1}{2}\right) = \frac{S_0}{S_0 + S_1} = \frac{\frac{1}{8} - S_1}{\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{72}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

г) При $Y = 1/2$, $X$ распределен равномерно от 0 до $1/2$, поэтому его плотность равна

$$f_X(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} = 2$$

Соответственно, условное математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\left(X \middle| Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

д) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$, а маргинальную функцию плотности для $X$ мы можем найти так же, как искали для $Y$, и получим $f_X(x) = 2(1-x)$. Отсюда:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2x(1-x)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

e) Если вспомнить формулу для корреляции:

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

то станет более-менее очевидно, что надо найти $\mathbb{E}(XY)$ и дисперсии $X$ и $Y$.

$$\mathbb{E}(XY) = \int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x} 2xydxdy = \int\limits_0^1 2xdx\int\limits_0^{1-x} ydy = \int\limits_0^1 x(x^2-2x+1)dx =$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Соответственно:

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$$

Найдем теперь дисперсии $X$ и $Y$ (они будут одинаковыми, как и математические ождания, в силу симметрии):

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int\limits_0^1 2x^2(1-x)dx = \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{x_4}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Поэтому:

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

Теперь наконец-то можем найти корреляцию:

$$\rho_{XY} = -\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}} = -\frac{1}{2}$$

2. а) Закон больших чисел гласит, что $\bar{X} \to \mathbb{E}(X)$ при $n \to \infty$. Проверим его выполнение в данном случае:

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2n}(-\sqrt{n}) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot 0 + \frac{1}{2n}\sqrt{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\bar{X} = \lim_{n\to\infty}\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = 0$$

так как числитель ограничен, а знаменатель бесконечно возрастает. Видим, что ЗБЧ в данном случае, конечно, выполняется.

Как вариант, можно было сказать, что дисперсия ограничена, и из этого также следует выполнение ЗБЧ.

б) Неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\operatorname{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

Соответственно, искомую вероятность можем оценить следующим образом:

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}\right| \leqslant 1\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}\right| \geqslant 1\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}\right| \leqslant 1\right) \geqslant 1 - \frac{\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)}{1}$$

$$\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var} X_i$$

В свою очередь:

$$\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = 2 \cdot \frac{1}{2n} \cdot n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 0 = 1 \Rightarrow \operatorname{Var}(X_i) = 1 \Rightarrow \operatorname{Var}\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n}$$

Поэтому:

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}\right| \leqslant 1\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n}$$

в)

$$1 - \frac{1}{n} = 0.9 \Rightarrow n = 10$$

3. Обозначим за $R$ — необходимое количество наличных денег в банке. Пусть $X$ — случайная величина, показывающее размер суммарной выплаты 60 ($n$ — достаточное большое для применения ЦПТ) клиентам. Ясно, что т.к. выплаты отдельным клиентам независимы: $\mathbb{E}\,X = 60 \cdot 5000 = 3 \cdot 10^5$; $\operatorname{Var} X = 60 \cdot 2000^2 = 2.4 \cdot 10^8$; $\sigma_X = \sqrt{2.4} \cdot 10^4 \approx 1.55 \cdot 10^4$

   Теперь по ЦПТ:

$$\mathbb{P}(R \geqslant X) = 0.95$$
$$\mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}\,X}{\sigma_X} \leqslant \frac{R - \mathbb{E}\,X}{\sigma_X}\right) = 0.95$$
$$\mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{R - 3 \cdot 10^5}{1.55 \cdot 10^4}\right) = 0.95$$

   Слева функция распределения; подставляя 95-% квантиль стандартного нормального распределения, получаем:

$$\frac{R - 3 \cdot 10^5}{1.55 \cdot 10^4} = 1.64 \Rightarrow R = 325420$$

4. а) По предельной теореме Муавра-Лапласа:

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{p} - p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leqslant \frac{0.1}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|Z| \leqslant \frac{0.1}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \geqslant 0.99$$

   Из симметричности стандартного нормального распределения и зная его 99.5-% квантиль, равный приблизительно 2.58, получаем:

$$\frac{0.1}{\sqrt{p(1-p)/n}} \geqslant 2.58$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \geqslant \frac{2.58}{0.1}$$

$$\sqrt{n} \geqslant \frac{2.58}{0.1}\sqrt{p(1-p)}$$

$$n \geqslant 665.64 \cdot p(1-p)$$

   С помощью неравенства Чебышева:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p} - p| \leqslant 0.1\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p} - p| \geqslant 0.1\right) \leqslant 0.01$$

Теперь просто смотрим на неравенство Чебышева и на строчку выше, на неравенство Чебышева и на строчку выше...

$$\frac{p(1-p)/n}{0.1^2} = 0.01$$
$$n = 10^4 p(1-p)$$

Принимаются оба ответа!

б) По предельной теореме Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{p}-p|}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)/1000}}\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|Z| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)/1000}}\right) \geqslant 0.99$$

Аналогично пункту 1:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{p(1-p)/1000}} \geqslant 2.58$$
$$\varepsilon \geqslant 0.082\sqrt{p(1-p)}$$

С помощью неравенства Чебышева:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p}-p| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 0.99$$

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p}-p| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 0.01$$

Аналогично пункту 1:

$$\frac{p(1-p)/1000}{\varepsilon^2} = 0.01$$
$$\varepsilon^2 = \frac{p(1-p)}{10}$$
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{p(1-p)}{10}} \approx 0.316\sqrt{p(1-p)}$$

Нужно было показать, как мастерство владения теоремой Муавра-Лапласа, так и неравенством Чебышева.

## 14.5. 2013-2014

1. а)

$$\mathbb{P}\left(Y < X^2\right) = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y)dydx = \int_0^1 \left(xy\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx =$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\Big|_0^1 = 0.35$$

б) $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + 0.5$

$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 f_X(x)\cdot xdx = \int_0^1 (x^2 + 0.5x)dx = 7/12$

в) $f_{X|Y=2}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,2)}{f_Y(2)} = \frac{x+2}{2.5}$

2. а) Из условия находим, что $X \sim \mathcal{N}(0,9)$, тогда

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X-0}{3} > \frac{1-0}{3}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > \frac{1}{3}\right) = 0.37$$

б) Подготовимся: $\mathbb{E}(2X+Y)=0$, $\operatorname{Var}(2X+Y)=4\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+4\operatorname{Cov}(X,Y)=36$

$$\mathbb{P}(2X+Y>3)=\mathbb{P}\left(\frac{2X+Y-0}{6}>\frac{3-0}{6}\right)=\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)>0.5)=0.31$$

в) $\mathbb{P}(2X+Y>3|X=1)=\mathbb{P}(Y>1)=\mathbb{P}\left(\frac{Y-0}{2}>\frac{1}{2}\right)=\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)>0.5)=0.31$

г) Заметим, что $\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}\sim\chi^2_2$, и тогда по таблице находим, что $\mathbb{P}\left(\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}>12\right)=0.0025$

д) Совместная функция плотности имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\cdot 3\sqrt{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot 9}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^2\right)\left(9x^2+2xy+4y^2\right)\right)$$

3. а) Заметим, что $\frac{X_1}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{3}}}\sim t_3$. По таблице находим искомую вероятность: 0.15.

б)

в) Заметим, что $\frac{X_1^2}{X_2^2+X_3^2}\sim F_{1,2}$. Нужное значение находим в таблице: 0.95.

4. а) По неравенству Чебышёва: $\mathbb{P}(|X_i-0.5|\geqslant 0.3)\leqslant\frac{1/12}{9/100}=\frac{25}{27}$

б) По неравенству Маркова: $\mathbb{P}(X_i\geqslant 0.8)\leqslant\frac{5}{8}$

в) $\mathbb{E}\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{2}$, $\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{36\cdot 12}$, $\bar{X}\sim\mathcal{N}(\frac{1}{2},\frac{1}{36\cdot 12})$

$\mathbb{P}\left(\bar{X}>0.8\right)=\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{36\cdot 12}}}\geqslant\frac{0.8-0.5}{\frac{1}{36\cdot 12}}\right)=\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)\geqslant 6.235)\approx 0$

г) $\mathbb{P}(|X_i-0.5|\geqslant 0.3)=1-\mathbb{P}(|X_i-0.5|\geqslant 0.3)=1-\mathbb{P}(-0.3\leqslant X_i-0.5\leqslant 0.3)=0.4$

д) Нужно воспользоваться неравенством Берри-Ессеена.

$$\mathbb{E}\left(|X_1-0.5|^3\right)=\int_0^1|x_1-0.5|^3\cdot 1dx=2\int_{0.5}^1(x_1-0.5)^3dx=\frac{1}{2^5}$$

е) $\mathbb{P}\left(\bar{X}-0.5>0.3\right)=\frac{25}{27n}\to_{n\to\infty}0$

5. $\mathbb{P}\left(\hat{p}\leqslant 0.25\right)=\mathbb{P}\left(\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{n}}}\leqslant\frac{0.25}{\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{n}}}\right)=0.99$

По таблице: $\frac{0.25}{\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{n}}}=2.33\Rightarrow n=348$

6. а) $3,4,5,7,8,9$

б) $F(x)=\begin{cases}0 & x<3\\ 1/6 & 3<x\leqslant 4\\ 2/6 & 4<x\leqslant 5\\ 3/6 & 5<x\leqslant 7\\ 4/6 & 7<x\leqslant 8\\ 5/6 & 8<x\leqslant 9\\ 1 & x>9\end{cases}$

в) $\bar{X}=6$, $\widehat{\operatorname{Var}}(X)=28$

### 14.6. 2012-2013

1. $f(s,t) = f(s) \cdot f(t|s) = \frac{1}{3s}$ при $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 3$. Бонус тем, кто прочитал условие, $\mathbb{P}(S > T) = 1$.

$$\mathbb{E}\left(T^2\right) = \int_0^3 \int_0^s \frac{t^2}{3s}\,dt\,ds = 1$$

2. а) $\mathbb{P}(X > 0.5) = \mathbb{P}(Z > 0.13) \approx 0.45$, $\sigma_X \approx 0.38$

   б) $\mathbb{P}(X + Y > 0.5) = \mathbb{P}(Z > -0.65) \approx 0.74$, $\sigma_{X+Y} \approx 0.17$, $\mathbb{E}(X + Y) = 0.61$

   в) $X = 0.25$ при нормировке даёт $\tilde{X} = -0.53$. Получаем:

$$\mathbb{E}\left(\tilde{Y} \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.47$$
$$\mathrm{Var}\left(\tilde{Y} \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.19$$

   Значит $\mathbb{E}\left(Y \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.34$, $\mathrm{Var}\left(Y \mid \tilde{X} = -0.53\right) = 0.027$.

   г) $\mathbb{P}\left(Y > 1/3 \mid \tilde{X} = -0.53\right) = \mathbb{P}(Z > -0.04) = 0.52$

   д) Ноль

3. $\mathbb{E}(\hat{p}) = 0.5$, $\mathrm{Var}(\hat{p}) = 0.25/n = 1/16000$. По Чебышёву:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - 0.5| \leqslant 0.01) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{Var}(\hat{p})}{0.01^2} = \ldots = 0.375$$

   Используя нормальную аппроксимацию:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - 0.5| \leqslant 0.01) = \mathbb{P}(|Z| \leqslant 1.26) \approx 0.79$$

4. Обозначим $N$ — количество подключенных абонентов, тогда $N \sim Bin(n, 0.3)$. При больших $n$ биномиальное распределение можно заменить на нормальное, $N \sim \mathcal{N}(0.3n, 0.21n)$.

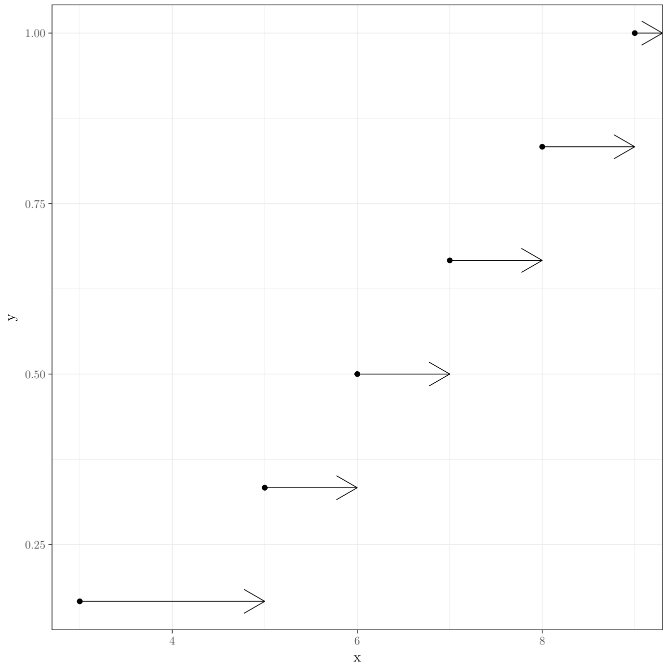
$$\mathbb{P}(120N > 1\,080\,000) = \mathbb{P}(N > 9000) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{9000 - 0.3n}{\sqrt{0.21n}}\right) = 0.99$$

   Из таблицы находим, что

$$\frac{9000 - 0.3n}{\sqrt{0.21n}} = -2.33$$

   Решаем квадратное уравнение, находим корни, один — отрицательный, другой, $n \approx 30622$.

5. Вариационный ряд: 3, 5, 6, 7, 8, 9. $\bar{X} \approx 6.3$, $\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1} \approx 4.7$, $\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n} \approx 3.9$




## 14.7. 2011-2012

1. а) $\mathbb{P}(X+Y>1)=4/5$. Здесь нужно брать интеграл...
   б) $\mathbb{E}(X)=13/20=0.65$, $\mathbb{E}(XY)=2/5=0.4$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=-9/400=-0.0225$
   в) Нет, так как функция плотности не раскладывается в произведение $h(x)\cdot g(y)$.
   г) Да, так как функция плотности симметрична по $x$ и $y$

2. а) Заметим, что величина $|X_i|$ распределена равномерно на $[0;b]$, поэтому $\mathbb{E}(|X_i|)=b/2$ и $\mathrm{Var}(|X_i|)=b^2/12$. Значит $\mathbb{E}(\hat{b})=cb$ и для несмещённости $c=1$.
   б) Находим $MSE$ через $b$ и $c$:

$$MSE=\mathrm{Var}(\hat{b})+(\mathbb{E}(\hat{b})-b)^2=2c^2\cdot\frac{b^2}{12}+(c-1)^2\cdot b^2=b^2\left(\frac{7}{6}c^2-2c+1\right)$$

   Отсюда $c=\frac{6}{7}$.

3. а) $\mathbb{E}(\hat{\mu}_1)=6\mu/6=\mu$, несмещённая
   б) $\mathbb{E}(\hat{\mu}_2)=\alpha\mu+\beta\mu$ и $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_2)=\alpha^2\frac{\sigma^2}{3}+\beta^2\frac{2\sigma^2}{3}$. Для несмещённости необходимо условие $\alpha+\beta=1$. Для минимизации дисперсии получаем уравнение

$$\alpha-2(1-\alpha)=0$$

   Отсюда оценка имеет вид $\frac{2}{3}\bar{X}+\frac{1}{3}\bar{Y}$

4. а) $S=X_1+X_2+X_3$, слагаемых мало, использовать нормальное распределение некорректно. Можно использовать неравенство Чебышева, $\mathbb{E}(S)=27$, $\mathrm{Var}(S)=27$, поэтому

$$\mathbb{P}(S\in[20;34])=\mathbb{P}(|S-\mathbb{E}(X)|\leqslant 7)\geqslant 1-\frac{27}{7^2}=\frac{22}{49}$$

   б) Используем неравенство Маркова:

$$\mathbb{P}(X_1\geqslant 12)\leqslant \mathbb{E}(X_1)/12=9/12=0.75$$

   в) Если $S=X_1+\ldots+X_{50}$, то можно считать, что $S\sim\mathcal{N}(450;450)$, поэтому

$$\mathbb{P}(S\in[430;470])\approx\mathbb{P}(N(0;1)\in[-0.94;+0.94])\approx 0.6528$$

5. а) Если $Y = X_1 + X_2$, то $\mathbb{E}(Y) = 3$ и $\mathrm{Var}(Y) = 1 + 9 - 2 = 8$, значит $\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > -2/\sqrt{8}) \approx \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > -0.71) \approx 0.7602$

   б) Находим $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = 1 - 1 = 0$. Итого: вектор имеет совместное нормальное распределение с

$$(X_1, Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right)$$

   в) Стандартизируем величины. То есть мы хотим представить их в виде:

$$\begin{cases} X_1 = 1 + aZ_1 + bZ_2 \\ X_2 = 2 + cZ_2 \end{cases}$$

   Единица и двойка — это математические ожидания $X_1$ и $X_2$. Мы хотим, чтобы величины $Z_1$ и $Z_2$ были $\mathcal{N}(0,1)$ и независимы. Получаем систему:

$$\begin{cases} \mathrm{Var}(X_1) = 1 \\ \mathrm{Var}(X_2) = 9 \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 = 9 \\ bc = -1 \end{cases}$$

   Одно из решений этой системы: $c = 3$, $b = -1/3$, $a = 2\sqrt{2}/3$

   Используя это разложение получаем:

$$(X_1 \mid X_2 = 2) \sim \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}Z_1 - \frac{1}{3}Z_2 \mid 2 + 3Z_2 = 2\right) \sim$$
$$\sim \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}Z_1 - \frac{1}{3}Z_2 \mid Z_2 = 0\right) \sim \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}Z_1\right) \sim \mathcal{N}(1; 8/9)$$

   Еще возможные решения: выделить полный квадрат в совместной функции плотности, готовая формула, etc

6. а) $\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$. Максимально возможное значение $p(1-p)$ равно $1/4$, поэтому максимально возможное значение $\mathrm{Var}(\hat{p}) = 1/4n$.

   б) У нас задано неравенство:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - p| > 0.02) < 0.1$$

   Делим внутри вероятности на $\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{p})}$:

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0;1)| > 0.02\sqrt{4n}\right) < 0.1$$

   По таблицам получаем $0.02\sqrt{4n} \approx 1.65$ и $n \approx 1691$

   Если вместо ЦПТ использовать неравенство Чебышева, то можно получить менее точный результат $n = 6250$.

7. а) $\mathbb{E}(X_i) = (1 + 10)/2 = 5.5$, $\mathbb{E}\left(X_i^2\right) = \frac{1}{10}\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6} = 77/2$, $\mathrm{Var}(X_i) = 33/4 = \sigma^2$. Можно найти $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ по готовой формуле, но мы пойдем другим путем. Заметим, что сумма номеров всех вариантов — это константа, поэтому $\mathrm{Cov}(X_1, X_1 + \ldots + X_{40}) = 0$. Значит, $\mathrm{Var}(X_1) + 39\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$. В итоге получаем $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -\sigma^2/39$

   б) $\mathbb{E}(\bar{X}) = 11/2$, $\mathrm{Var}(\bar{X}) = 4\frac{1}{52}$

   в) Да, являются, так как и $X_1$ и $X_2$ — это номер случайно выбираемого варианта

   г) Нет, если известно чему равно $X_1$, то шансы получить такой же $X_2$ падают

8. Если мы наняли $n$ работников, то ожидаемое количество рабочих человеко-дней равно:

$$\mathbb{E}(X) = 365 \cdot n \cdot \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

   Для удобства берем логарифм $\ln(\mathbb{E}(X) = c + \ln(n) + n\ln(364/365)$ и получаем условие первого порядка $1/n + \ln(364/365) = 0$. Пользуясь разложением в ряд Тейлора $\ln(1+t) \approx t$ получаем: $1/n - 1/365 \approx 0$, $n \approx 365$

## 14.8. 2010-2011

1. Перед нами функция плотности двумерного нормального распределения!

   Поэтому: $\mathbb{E}(X) = 0$, $\operatorname{Var}(Y) = 1$, $\operatorname{Cov}(X, Y) = \rho$

2. С помощью таблицы находим, что $\mathbb{P}(X > \sqrt{2}) = 1 - \mathbb{P}(X < 1.14) \approx 0.13$

   Заметим, что $X^2 + Y^2 \sim \chi^2_2$, и находим искомую вероятность по таблице: $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 > 4) \approx 0.87$

3. Вспомним важные формулы:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}(X) + \operatorname{Cov}(X, Y) \cdot \operatorname{Var}^{-1}(Y) \cdot (y - \mu_y)$$

$$\operatorname{Var}(X|Y = y) = \operatorname{Var}(X) - \operatorname{Cov}(X, Y)\operatorname{Var}^{-1}(Y) \cdot \operatorname{Cov}(Y, X)$$

   Применив их, получим: $\mathbb{E}(X|Y = 0) = \frac{22}{9}$, $\operatorname{Var}(X|Y = 0) = \frac{32}{9}$. Тогда:

$$\mathbb{P}(X > 0|Y = 0) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) > \frac{0 - \frac{22}{9}}{\sqrt{\frac{32}{9}}}\right) \approx 0.9$$

   Далее, найдём дисперсию портфеля и минимизиреум её по $\alpha$:

$$\operatorname{Var}(\alpha X + (1 - \alpha)Y) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X) + (1 - \alpha)^2 \operatorname{Var}(Y) + 2\alpha(1 - \alpha)\operatorname{Cov}(X, Y) =$$
$$= 4\alpha^2 + 9(1 - \alpha)^2 - 4\alpha(1 - \alpha) = 17\alpha^2 - 22\alpha + 5 \to \min_\alpha$$

$$\alpha = \frac{11}{17}$$

   Нельзя, так как из $\operatorname{Cov}(X + Y, 7X - 2Y) = 0$ не следует независимость $X + Y$ и $7X - 2Y$.

4. Сначала подготовимся и найдём дисперсию случайной величины $X$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty \frac{3}{x^4} \cdot x dx = \left.\frac{3x^{-2}}{-2}\right|_1^\infty = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_1^\infty \frac{3}{x^4} \cdot x^2 dx = \left.\frac{3x^{-1}}{-1}\right|_1^\infty = 3$$

$$\operatorname{Var}(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

   Перепишем исходное неравенство в виде: $\mathbb{P}(|\bar{X} - \mathbb{E}(X)| < 0.1) \geqslant 1 - 0.02$.

$$\frac{\operatorname{Var}(\overline{X})}{0.1^2} \leqslant 0.02 \Rightarrow \frac{\operatorname{Var}(X)}{n} \leqslant 0.0002 \Rightarrow n \geqslant 3750$$

5. Нужно найти $\mathbb{P}(\hat{p} > \frac{60}{90})$. Воспользуемся теоремой Муавра-Лапласа:

$$\mathbb{P}\left(\hat{p} > \frac{60}{90}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\hat{p} - 0.8}{\frac{0.8 \cdot 0.2}{90}} > \frac{2/3 - 0.8}{\frac{0.8 \cdot 0.2}{90}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) > -3.16) \approx 1$$

   Найдём объём выборки:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\hat{p} - 0.8}{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} > \frac{0.02}{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{0.02}{\frac{0.8 \cdot 0.2}{n}} = 1.65 \Rightarrow n = 33$$

6.

7. Необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} D(\overline{X}_S) = \sum_{l=1}^{L} \left(\frac{w_l^2 \sigma_l^2}{n_l}\right) \to \min \\ n = n_1 + n_2 + n_3 \end{cases}$$

Выпишем лагранжиан:

$$L = \sum_{l=1}^{L} \frac{w_l^2 \sigma_l^2}{n_l} - \lambda(n_1 + n_2 + n_3 - n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_l} = 0 \Rightarrow n_l^o = \sqrt{\frac{w_l^2 \sigma_l^2}{-\lambda}} \Rightarrow \sum_{l=1}^{L} w_l \sigma_l = \sqrt{-\lambda} n \Rightarrow \sqrt{-\lambda} = \frac{\sum_{l=1}^{L} w_l \sigma_l}{n}$$

Тогда находим объём выборки каждой группы по формуле: $n^o = \frac{w_l \sigma_l}{\sum_{k=1}^{L} w_k \sigma_k} n$

- $n^o_{\text{недорогие}} = 0.255n$
- $n^o_{\text{средние}} = 0.532n$
- $n^o_{\text{дорогие}} = 0.213n$

8. Выборочное среднее: $-0.2$; выборочная дисперсия: $70.98$;

вариационный ряд: $-5.6, -3.2, -0.8, 1.1, 2.9, 4.4$.

9. Для проверки свойства несмещённости найдём математические ожидания оценок:

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(2\overline{X}) = 2\,\mathbb{E}(X_1) = \theta$$

$$\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}((n+1)X_{(1)}) = (n+1)\frac{\theta}{2}$$

Несмещённой является только оценка $T_1$.

Для проверки оставшихся свойств посчитаем дисперсию оценок:

$$\operatorname{Var}(T_1) = 4\operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{3n} \to_{n\to\infty} 0$$

$$\operatorname{Var}(T_2) = (n+1)^2 \cdot \frac{\theta^2}{12}$$

Оценка $T_1$ является более эффективной, и она состоятельна. $T_2$ не является состоятельной оценкой.

10. По формуле Байеса:

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = k) = \frac{\mathbb{P}(X = k \cap X + Y = n)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{\mathbb{P}(X + Y = k | X = k)\,\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)}$$

Находим числитель:

$$\mathbb{P}(X + Y = n | X = k) \cdot \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = n - k) \cdot \mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{n-k-1} \cdot p \cdot p^{k-1} = p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$$

И знаменатель:

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i \cap Y = n - i) = \sum_{i=1}^{n} p \cdot (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-i-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p^2 (1-p)^n = np^2(1-p)^n$$

Итого:

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = k) = \frac{p^2 \cdot (1-p)^{n-2}}{np^2(1-p)^n} = \frac{1}{n(1-p)^2}$$

Второе выражение:

$$\mathbb{P}(Y = k | X = Y) = \frac{\mathbb{P}(Y = k \cap X = Y)}{\mathbb{P}(X = Y)} = \mathbb{P}(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$$

## 14.9. 2009-2010

1. Из условия: $\mathrm{Var}(X) = 5^2 = 25$, $\mathrm{Var}(Y) = 4^2 = 16$, $\mathrm{Var}(X - Y) = 2^2 = 4$. Есть такое тождество, $\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$. Отсюда находим $\mathrm{Cov}(X,Y) = 37/2$ и $\mathrm{Corr}(X,Y) = 37/40$.

2. По таблице: $\mathbb{P}(X < \sqrt{3}) = 0.9582$

   Заметим, что $X^2 + Y^2 \sim \chi^2_2$. По таблице находим искомую вероятность: $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 6) = 0.95$

3. а) $\mathbb{P}(|X - 16| > 4) \leqslant 0.75$

   б) $\mathbb{P}(|X - 16| > 4) = 1 - \mathbb{P}(-4 < X - 16 < 4) = 1 - \mathbb{P}(12 < X < 20) = \frac{1}{3}$

   в) $\mathbb{P}(|X - 16| > 4) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{-4}{\sqrt{12}} < \frac{X-16}{\sqrt{12}} < \frac{4}{\sqrt{12}}\right) = 2\,\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < \frac{4}{\sqrt{12}}\right) = 0.75$

4. $\mathbb{E}(2X + Y) = 2$, $\mathrm{Var}(2X + Y) = 3$

   $\mathbb{P}(2X + Y > 1) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{2X+Y-2}{\sqrt{3}} < \frac{1-2}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 0.72$

   $\mathbb{P}(2X + Y > 1 \mid Y = 2) = \mathbb{P}(2X > -1) = \mathbb{P}\left(\frac{X+1}{1} > \frac{-0.5+1}{1}\right) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < -0.5) = 0.31$

5. Если $S$ — финальная стоимость акции, то $S = 1000 + X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$. Тогда по ЦПТ $S \sim \mathcal{N}(1000, 100)$ и $\mathbb{P}(S > 1010) = \mathbb{P}(Z > 1)$.

## 14.10. 2008-2009 Демо-версия

1. $\mathbb{P}(Y > 2X) = \int_0^{0.5}\int_{2x}^1 (x+y)dydx = 5/24$

   $f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = x + \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) xdx = \frac{7}{12}$

2. а) $\mathbb{E}(X_1 + 3X_2) = -1$, $\mathrm{Var}(X_1 + 3X_2) = 207$

   $\mathbb{P}(X_1 + 3X_2 > 20) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1+3X_2+1}{\sqrt{207}} > \frac{20+1}{\sqrt{207}}\right) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > 1.46) \approx 0.07$

   б) $\mathbb{E}(X_1|X_2 = 0) = 2 - 4.5 \cdot \frac{1}{25}(0+1) = 1.82$, $\mathrm{Var}(X_1|X_2 = 0) = 9 - (-4.5)\cdot\frac{1}{25}\cdot(-4.5) = 8.19$

   $X_1|X_2 = 0 \sim \mathcal{N}(1.82, 8.19)$

3. а) $\mathbb{E}(X) = 1000$, $\mathrm{Var}(X) = 10^6$

   б) $X$ — случайная величина, сумма выплат по одному контракту, $X \sim \exp(0.001)$

   $\mathbb{P}(1000X > 110000) = \mathbb{P}(X > 100) = \int_{110}^{+\infty} 0.001\exp(-0.001x)dx \approx 0.9$

4. $\mathbb{P}\left(\frac{(X-30)^2}{\mathrm{Var}(X)} < 3\right) = \mathbb{P}(|X - 30| < \sqrt{3\,\mathrm{Var}(X)}) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{3\,\mathrm{Var}(X)}} = \frac{2}{3}$

   $\mathbb{P}(|X - 30| < \sqrt{3\,\mathrm{Var}(X)}) = \mathbb{P}(X < \sqrt{3 \cdot 900} + 30) = \int_0^{82}\frac{1}{30}\exp\left(-\frac{1}{30}x\right)dx \approx 0.94$

5. $a \approx 1.28$

9-Б. Подразумевая под точками концы гирлянды, докажем следующее утверждение.

Бросим $2n \geqslant 4$ точек $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ случайным образом на отрезок $[0;1]$. Пусть для $1 \leqslant i \leqslant n$ $J_i$ — это отрезок с концами $X_{2i-1}$ и $X_{2i}$. Тогда вероятность того, что найдётся такой отрезок $J_i$, который пересекает все другие отрезки, равна $2/3$ и не зависит от $n$.

Доказательство. Бросим $2n + 1$ точек на окружность, тогда $2n$ точек образуют пары, а оставшуюся обозначим $X$ и будем считать её и началом, и концом отрезка. Каждому получившемуся отрезку присвоим уникальное имя. Далее, будем двигаться от точки $X$ по часовой стрелке до тех пор, пока не встретим одно и то же имя дважды, например «а». После этого пойдём в обратную сторону, и будем идти, пока не встретим какое-нибудь другое имя дважды, например, «б». Теперь посмотрим на получившуюся последовательность между «б» и «а» на концах пути, читая её по часовой стрелке от «б» до «а». Нас интересует взаимное расположение $X$, второй «а» и второй «б». Зная, что «а» стоит после $X$, выпишем все возможные случаи, где может стоять «б»:

а) перед $X$

б) между $X$ и «а»

в) после «а»

Покажем, что во втором и третьем случае отрезок «б» пересекает все остальные, а в первом такого отрезка вообще нет. Попутно заметим, что появление каждого и случаев равновероятно.

Действительно, если «б» стоит после $X$, и отрезок соответствующий этому имени, не пересекает какой-нибудь другой отрезок «в», то последовательность выглядела бы как «бвв$X$б» или «б$X$ввб», что противоречит описанному построению. Если «б» стоит перед $X$ и отрезок «в» пересекает оба отрезка «а» и «б», то мы снова приходим в противоречие с построением. В итоге, получаем, что искомая вероятность равна $2/3$.

## 14.11. 2008-2009

1. а) $\int_0^1 \int_x^1 p(x,y)dydx = 5/12$
   $\int_0^1 \int_0^1 y \cdot p(x,y)dydx = 13/24$

   б) Нет, так как совместная функция плотности не разлагается в произведение индивидуальных

2. а) $\mathbb{P}(|X_1 + X_2 + ... + X_7| > 14) \leqslant \frac{7}{14^2} = \frac{1}{28}$
   $\mathbb{P}(X_1^2 + \ldots + X_7^2 > 14) = \mathbb{P}(X_1^2 + \ldots + X_7^2 - 7 > 7) = \mathbb{P}(|X_1^2 + \ldots + X_7^2 - 7| > 7) \leqslant \frac{2 \cdot 7}{7^2} = \frac{2}{7}$

   б) $\mathbb{P}(|X_1 + \ldots + X_7| > 14) = \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0;1)| > 14/\sqrt{7}) = \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0;1)| > 5.29) \approx 0$
   $\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_7^2 > 14) \approx 0.05$

3. а) $X_1 + 2X_2 \sim \mathcal{N}(5;89)$, $\mathbb{P}(Z > 1.59) = 0.056$

$$\operatorname{Var}(X_1 + 2X_2) = \operatorname{Var}(X_1) + 4\operatorname{Var}(X_2) + 4\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 89$$

   б) Нормальное, причем $\mathcal{N}(1.4;8)$, корреляция равна $-1/3$

4. $\beta = \frac{1}{3}a^2$
   $\mathbb{E}(XY) = \frac{3}{4}a^2$
   $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = 3a^2$
   $\hat{\beta}_1 = \frac{4}{9}XY$
   $\hat{\beta}_2 = \frac{1}{9}Y^2$
   Так как обе оценки несмещенные вместо сравнения дисперсий можно сравнить квадраты ожиданий
   $\frac{16}{81}\mathbb{E}\left(X^2Y^2\right)$ vs $\frac{1}{81}\mathbb{E}\left(Y^4\right)$
   ...
   $16a^4$ vs $\frac{81}{5}a^4$
   Дисперсия васиной оценки меньше.

5. Заметим, что Пуассоновская величина с положительной вероятностью принимает значение ноль, значит бывает, что монстры дохнут от одного устрашающего взгляда Васи :)

   а) Сумма трех независимых пуассоновских величин - пуассоновская с параметром: $3\lambda = 6$.
   $\mathbb{P}(X = 6) = e^{-6}\frac{6^6}{6!} \approx 0.16$
   Ответ с факториалам считается полным.

   б) Сумма 80 величин имеет пуассоновское распределение, но при большом количестве слагаемых пуассоновское мало отличается от нормального.
   $\mathbb{E}(S) = 160$, $\operatorname{Var}(S) = 160$
   $\mathbb{P}(S > 200) = \mathbb{P}\left(\frac{S-160}{\sqrt{160}} > 3.16\right) \approx 0$

6. а) $\lambda = 1/10$, $\mathbb{P}(X < 7) = 0.5$

   б) $\mathbb{P}(\bar{X} > 0.55) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0;1) > \frac{0.05\sqrt{1000}}{0.5}) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(0;1) > 3.16) \approx 0$

7. $\mathrm{Var}(X) = 5 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 1.7$

   $\mathrm{Var}(Y) = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 7 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 2.02$

   Пусть $Z$ — число правильных ответов на вопросы с 3-го по 7-ой (у Пети и у Васи)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Z + (X - Z), Z + (Y - Z)) = \mathrm{Var}(Z) \\ + \mathrm{Cov}(X - Z, Z) + \mathrm{Cov}(Z, Y - Z) + \mathrm{Cov}(X - Z, Y - Z) = \mathrm{Var}(Z)$$

   $Y - Z$ — это сколько правильных ответов дал лично Вася и оно не зависит от числа $Z$ правильных списанных ответов, значит, $\mathrm{Cov}(Y - Z, Z) = 0$.

   Аналогично все остальные ковариации равны нулю.

   $\mathrm{Var}(Z) = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.77$

8. Любые совпадения с курсом экономической и социальный статистики случайны и непреднамеренны.

   Чтобы оценка среднего по всем трем стратам была несмещена, она должна строиться по формуле:

   $\bar{X} = w_1\bar{X}_1 + w_2\bar{X}_2 + w_3\bar{X}_3$ (здесь $\bar{X}_i$ — среднее арифметическое по $i$-ой страте)

   Поэтому $\mathrm{Var}(\bar{X})$ (минимизируемая функция) равняется:

   $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sum \frac{w_i^2\sigma_i^2}{n_i}$

   Принцип кота Матроскина[5] (aka бюджетное ограничение): $4n_1 + 16n_2 + 25n_3 = 7000$

   Решаем Лагранжем и получаем ответ: 35, 35, 252.

   Некоторые маньяки наизусть знают:

   $n_i = \frac{C}{\sum w_i \cdot \sigma_i \cdot \sqrt{c_i}} \frac{w_i \cdot \sigma_i}{\sqrt{c_i}}$

9-А. Замечание: неудачные переноски считаются, так как иначе решение тривиально — пробовать нести по 1000 шашек.

   а) Так как $p$ небольшая будем считать, что $\ln(1 - p) \approx -p$. Уже страшно, да?

   б) Допустим, что $s(n)$ оптимальная стратегия, указывающая, сколько нужно брать сейчас шашек, если осталось перенести $n$ шашек. Возможно, что $s$ зависит от $n$. Обозначим $e(n)$ ожидаемое количество переносов при использовании оптимальной стратегии.

   в) Начинаем:
   $s(1) = 1$, $e(1) = 1/(1 - p)$
   $s(n) = \arg\min_a (1/(1 - p)^a + e(n - a))$, $e(n) = \min_a (1/(1 - p)^a + e(n - a))$
   Замечаем, что поначалу (где-то до $1/p$ шашек) все идет хорошо, а затем плохо...

   г) Ищем упрощенное решение вида $s(n) = s$.
   Ожидаемое число переносок равно $\frac{1000}{s} \frac{1}{(1-p)^s}$
   Минимизируем по $s$. Получаем: $s = -1/\ln(1 - p) \approx 1/p$.

   д) Для тех кому интересно, точный график (10000 шашек, p=0.01):

   [Здесь оставлено место для картины Усама-Бен-Ладен будь он не ладен таскает шашки.]

   ps. В оригинале мы сканировали ксерокопию учебника Микоша. Сканер был очень умный: в него нужно положить стопку листов, а на выходе он выдавал готовый pdf файл. Проблема была в том, что он иногда жевал бумагу. В этом случае он обрывал сканирование и нужно было начинать все заново. Возник вопрос, какого размера должна быть партия, чтобы минимизировать число подходов к ксероксу.

[5] «Чтобы продать что-нибудь ненужное, нужно сначала купить что-нибудь ненужное. А у нас денег нет!»

9-Б. а) Если сейчас 0 долларов, то брать 1 доллар.

Назовем ситуацию, «шоколадной» если можно выиграть без риска. То есть если игр осталось больше, чем недостающее количество денег.

б) Если игрок не в шоколаде, то оптимальным будет рисковать на первом ходе.

Почему? Получение одного доллара можно перенести на попозже.

в) В любой оптимальной стратегии достаточно одного успеха для выигрыша.

Почему? Допустим стратегии необходимо два успеха в двух рискованных играх. Заменим их на одну рискованную игру. Получим большую вероятность.

Оптимальная стратегия:

Если сейчас 0 долларов, то брать доллар.

Пусть $d$ — дефицит в долларах, а $k$ — число оставшихся попыток.

Если $d \leqslant k$, то брать по доллару.

Если $d > k$, то с риском попробовать захапнуть $1 + d - k$ долларов.

## 14.12. 2007-2008 Демо-версия

1. $c = 0.4$

   $\mathbb{P}(Y > X) = \mathbb{P}(Y = 1, X = -1) + \mathbb{P}(Y = 2, X = -1) + \mathbb{P}(Y = 2, X = 1) = 0.7$

   $\mathbb{E}(XY) = 0.1 - 0.4 - 0.4 - 0.1 + 0.1 + 0.2 = -0.5$

   $\mathbb{E}(X|Y > 0) = -1 \cdot \frac{0.6}{0.8} + 1 \cdot \frac{0.2}{0.8} = -0.5$

   Случайны величины $X$ и $Y$ не являются независимыми.

2. а) Найдём распредление случайной величины $Z = X_1 + X_2$:

   $$\mathbb{E}(Z) = -1, \operatorname{Var}(Z) = \operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 37$$

   Получили, что $Z \sim \mathcal{N}(-1, 37)$, тогда

   $$\mathbb{P}(Z > 0) = \mathbb{P}\left(\frac{Z+1}{\sqrt{37}} > \frac{0+1}{\sqrt{37}}\right) = 0.4364$$

   б) $\mathbb{E}(X_1|X_2 = -1) = -2 - 4 \cdot \frac{1}{36} \cdot (-1 - 1) = -\frac{16}{9}$

   $\operatorname{Var}(X_1|X_2 = -1) = 9 - (-4) \cdot \frac{1}{36} \cdot (-4) = \frac{77}{9}$

   $X_1|X_2 = -1 \sim \mathcal{N}(-\frac{16}{9}, \frac{77}{9})$

3. $c = 6$

   $\mathbb{P}(3Y > X) = \int_0^1 \int_0^{3y} 6(x - y)dxdy = 3$

   $f_X(x) = \int_0^x 6(x - y)dy = 3x^2 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \int_0^1 3x^3 dx = 0.75$

4. Введём следующие случайные величины:

   $$X = \begin{cases} 1 & \text{в субботу не будет дождя}, p = 0.5 \\ 0 & \text{иначе}, p = 0.5 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{в воскресенье не будет дождя }, p = 0.7 \\ 0 & \text{иначе }, p = 0.3 \end{cases}$$

   Найдем их математические ожидания и дисперсии: $\mathbb{E}(X) = 0.5$, $\operatorname{Var}(X) = 0.25$, $\mathbb{E}(Y) = 0.3$, $\operatorname{Var}(Y) = 0.21$.

   В условии дана корееляция $X$ и $Y$, найдём ковариацию: $\operatorname{Cov}(X, Y) = r \cdot 0.5\sqrt{0.21}$. По определению, $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$, откуда можно найти $\mathbb{E}(XY)$: $\mathbb{E}(XY) = r \cdot 0.5\sqrt{0.21} + 0.5 \cdot 0.7$.

   Заметим, что $\mathbb{E}(XY)$ — это и есть искомая вероятность, потому что при подсчёте совместного математического ожидания в сумме будет только одно слагаемое, в котором $X = 1$ и $Y = 1$, остальные же будут равны нулю.

5. Пусть $X$ — случайная величина, обозначающая количество проданных книг. Будем считать, что продажи каждой книги — независимые события.

   $\mathbb{E}(50+5X)=100$, $\mathrm{Var}(50+5X)=25$

6. Пусть $X$ — случайная величина, обозначающая изменение цены акции за день, а $S$ — финальную стоимость акции.

   а) $\mathbb{E}(S)=\mathbb{E}(1000+60X)=1000+60(0.5\cdot 3+0.5\cdot 5)=1240$
   $\mathrm{Var}(S)=\mathrm{Var}(1000+60X)=3600(0.5\cdot 9+0.5\cdot 25-16)=3600$

   б) $\mathbb{P}(S>900)=\mathbb{P}\left(\frac{S-1240}{60}>\frac{900-1240}{60}\right)=1-\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)<-\frac{17}{3})\approx 1$

7. $\mathbb{P}\left(|\hat{p}-0.6|<0.01\right)=0.99\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{|\hat{p}-0.6|}{\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{n}}}<\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{n}}}\right)=0.99$

   По таблице: $\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{n}}}=2.57\Rightarrow n=62$

8. а) $\mathbb{P}(-2<\mathcal{N}(0,1)<2)=0.9544$, $1-\frac{1}{4}<\mathbb{P}(-2\sigma<X-\mu<2\sigma)<1$

   б) $\mathbb{P}(8<X<12)=0.2$, $1-\frac{20^2}{12}<\mathbb{P}(-2<X-\mathbb{E}(X)<2)<1$

   в) $\mathbb{P}(-1<X<3)=\int_{-1}^{3}e^{-x}dx\overset{x\geq 0}{=}1-e^{-3}$, $1-\frac{1}{4}<\mathbb{P}(-2<X-\mathbb{E}(X)<2)<1$

9-А. Если убийц нечетное число, то в живых останется только один убийца. Если убийц чётное число, то в живых либо не останется никого, либо мирные граждане.

Следовательно, если кроме гостя в городе нечётное число убийц $u$, то шансов у гостя никаких нет. Если гость мирный, то в живых останется в финале один из убийц, если гость — убийца, то в финале убийц не останется.

Если кроме гостя в городе чётное число убийц $u$, и гость будет новым нечётным убийцей, то в финале останется один убийца, и вероятность выжить для гостя равна $1/(u+1)$.

Рассмотрим случай чётного числа убийц и мирного гостя. Замечаем, что прочие мирные лишь отдаляют по времени разборки и не влияют на вероятность выжить гостя. Поэтому уберём остальных мирных жителей.

Чтобы гость выжил, все встречи должны быть между убийцами. Следовательно, вероятность выжить равна:

$$\frac{u}{u-1}\frac{u-1}{u-2}\cdot\frac{u-2}{u-3}\frac{u-3}{u-4}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{u+1}$$

От стратегии гостя ничего не зависит. И вероятность выжить гостя либо 0, либо $1/(u+1)$ в зависимости от чётности числа убийц.

9-Б. Подразумевая под точками концы гирлянды, докажем следующее утверждение.

Бросим $2n\geqslant 4$ точек $X_1,X_2,\ldots,X_{2n}$ случайным образом на отрезок $[0;1]$. Пусть для $1\leqslant i\leqslant n$ $J_i$ — это отрезок с концами $X_{2i-1}$ и $X_{2i}$. Тогда вероятность того, что найдётся такой отрезок $J_i$, который пересекает все другие отрезки, равна $2/3$ и не зависит от $n$.

Доказательство. Бросим $2n+1$ точек на окружность, тогда $2n$ точек образуют пары, а оставшуюся обозначим $X$ и будем считать её и началом, и концом отрезка. Каждому получившемуся отрезку присвоим уникальное имя. Далее, будем двигаться от точки $X$ по часовой стрелке до тех пор, пока не встретим одно и то же имя дважды, например «а». После этого пойдём в обратную сторону, и будем идти, пока не встретим какое-нибудь другое имя дважды, например, «б». Теперь посмотрим на получившуюся последовательность между «б» и «а» на концах пути, читая её по часовой стрелке от «б» до «а». Нас интересует взаимное расположение $X$, второй «а» и второй «б». Зная, что «а» стоит после $X$, выпишем все возможные случаи, где может стоять «б»:

i. перед $X$
ii. между $X$ и «а»
iii. после «а»

Покажем, что во втором и третьем случае отрезок «б» пересекает все остальные, а в первом такого отрезка вообще нет. Попутно заметим, что появление каждого и случаев равновероятно.

Действительно, если «б» стоит после $X$, и отрезок соответствующий этому имени, не пересекает какой-нибудь другой отрезок «в», то последовательность выглядела бы как «бвв$X$б» или «б$X$ввб», что противоречит описанному построению. Если «б» стоит перед $X$ и отрезок «в» пересекает оба отрезка «а» и «б», то мы снова приходим в противоречие с построением. В итоге, получаем, что искомая вероятность равна $2/3$.

## 14.13. 2007-2008

1. $c = 0.2$, далее $\mathbb{P}(Y > -X) = 0.5$ и $\mathbb{E}(X \cdot Y) = 0.1$

   $\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{-0.02}{\sqrt{0.24 \cdot 1.41}}$

   $\mathbb{E}(Y | X > 0) = 0.25$

2. а) $\mathbb{E}(S) = -1$, $\mathrm{Var}(S) = 207$, $\mathbb{P}(Z > 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$

   б) $p(x_1|0) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - 2 & 0 + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4.5 \\ -4.5 & 25 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ 0 + 1 \end{pmatrix}\right)$

   $p(x_1|0) \sim \exp\left(-\frac{1}{2det}(25(x_1 - 2)^2 + 9(x_1 - 2) + 9)\right)$

   $p(x_1|0) \sim \exp\left(-\frac{1}{2 \cdot 8.19}(x_1 - 1.82)^2\right)$

   $\mathrm{Var}(X_1 | X_2 = 0) = 8.19$, $\mathbb{E}(X_1 | X_2 = 0) = 1.82$

   Есть страшные люди, которые наизусть помнят, что:

   $\mathrm{Var}(X_1 | X_2 = x_2) = (1 - \rho^2)\sigma_1^2$

   $\mathbb{E}(X_1 | X_2 = x_2) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$

3. $\mathbb{P}(Y > 2X) = \int_0^1 \int_0^{y/2} (x + y)\,dxdy = \frac{5}{24}$

   $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \int_0^1 x(x + y)\,dxdy = \frac{7}{12}$

   Зависимы

4. Рассмотрим $X = 8 -$ (Васин бал) и $Y =$ (Петин бал) $- 6$

   $\mathrm{Corr}(X, Y) = -0.7$ (т.к. при линейном преобразовании может поменяться только знак корреляции)

   $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

   $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$

   Интересующая нас величина - это $\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 1) = \mathbb{E}(XY) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

   answer: $\frac{10 - 7\sqrt{2}}{60} \approx 0.001675$

   key point: $\mathrm{Cov} = -\frac{7\sqrt{2}}{60}$

5. $\frac{37}{40} = 0.925$

6. Частая ошибка в «а» — решение другой задачи, где проценты заменены на копейки.

   Пусть $N$ — число подъемов акции.

   а)

$$\mathbb{P}(100 \cdot 1.08^N \cdot 0.95^{64-N} > 110) = \mathbb{P}(N \ln(1.08) + (64 - N)\ln(0.95) > \ln(1.1)) = \\ = \mathbb{P}\left(N > \frac{\ln(1.1) - 64\ln(0.95)}{\ln(1.08) - \ln(0.95)}\right)$$

   Заметим, что $N$ - биномиально распределена, примерно $N\left(64 \cdot \frac{1}{2}, 64 \cdot \frac{1}{4}\right)$

   $Z = \frac{N - 32}{4}$ - стандартная нормальная и $\mathbb{P}(Z > -1,42) = 0.92$

б) $\mathbb{E}(N\ln(1.08)+(100-N)\ln(0.95))$
На этот раз $\mathbb{E}(N)=50$ и $\mathbb{E}(\ln(P_{100}))=1.28$

7. $p_{break}=1-\exp(-5/7)=0.51=\int_0^5 \frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}dt$
$p=0.8\cdot 0.51\approx 0.4$
$\mathbb{E}(S)=1000p=400$, $\text{Var}(S)=1000p(1-p)=240$
$\mathbb{P}(S>350)=\mathbb{P}(Z>-3.23)\approx 1$

8. а) $\mathbb{P}(X^2>2.56\,\text{Var}(X))=\mathbb{P}(|X-0|>1.6\sigma)\leqslant \frac{\text{Var}\,X}{2.56\,\text{Var}(X)}=\frac{100}{256}\approx 0.4$
б) $\mathbb{P}(X^2>2.56\,\text{Var}(X))=\mathbb{P}(|Z|>1.6)=0.11$

9-А. б) Искомая вероятность равна $\mathbb{P}(A)=f(k+1,n-k)/f(k,n-k)$, где
$f(a,b)=\int_0^1 x^a(1-x)^b dx$
Проинтегрировав по частям, видим, что $f(a,b)=f(a+1,b-1)\frac{b}{a+1}$
Отсюда $f(a,b)=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}$
Подставляем, и получаем: $\mathbb{P}(A)=\frac{k+1}{n+2}$
Если кто получит этот ответ более интуитивным образом — тому большой дополнительный балл (!) — обращайтесь на boris.demeshev@gmail.com

9-Б. Занумеруем детей в порядке появления на свет. Обозначим $M_i$ — индикатор того, что $i$-ый ребенок — мальчик, и $F_i$ — индикатор того, что $i$-ый ребенок — девочка. Конечно, $F_i+M_i=1$ и $F_iM_i=0$. $M$, $F$ — общее число мальчиков и девочек соответственно.
Запасаемся простыми фактами:
$\mathbb{E}(F_i)=\mathbb{E}(M_i)=\mathbb{E}(F_i^2)=\mathbb{E}(M_i^2)=\frac{1}{2}$
$\mathbb{E}(F)=\mathbb{E}(M)=\frac{n}{2}$
$\text{Var}(F_i)=\text{Var}(M_i)=\frac{1}{4}$
$\text{Var}(F)=\text{Var}(M)=\frac{n}{4}$
$\mathbb{E}(F^2)=\mathbb{E}(M^2)=\text{Var}(F)+\mathbb{E}(F)^2=\frac{n(n+1)}{4}$
$\mathbb{E}(FF_i)=\frac{n+1}{4}$
Заметим, что $X_i=X_i+M_iF_i=M_iF$. Таким образом,
$X=MF=nF-F^2$
$Y_i=F-F_i-X_i$
$Y=(n-1)F-MF=(n-1)F-nF+F^2=F^2-F$
Далее берём математическое ожидание (легко) и дисперсию (громоздко): $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{n(n-1)}{4}$
...(если кто решил до сих пор, то наверняка, он смог и дальше решить) ...

## 14.14. 2006-2007

1. $c=0.3$, $\mathbb{P}(Y>-X)=0.5$, $\mathbb{E}(XY^2)=0.5$, $\mathbb{E}(Y|X>0)=\frac{0.1}{0.4}=0.25$
2. $\mathbb{E}(Y)=-1$, $\text{Var}(Y)=207$, $\mathbb{P}(Y>20)=\mathbb{P}(Z>\frac{21}{\sqrt{207}})=\mathbb{P}(Z>1.46)=0.07$
3. $\mathbb{P}(Y>2X)=\int_0^1\int_0^{y/2}(x+y)dxdy=\frac{5}{24}$
$\mathbb{E}(X)=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)dxdy=\frac{7}{12}$

4. Используя метод множителей Лагранжа:

   $L = \frac{(0.1\cdot 24)^2}{a} + \frac{(0.3\cdot 12)^2}{b} + \frac{(0.6\cdot 10)^2}{c} + \lambda(10 - a - b - c)$

   ...

   $a = 2, b = 3, c = 5$, можно было использовать готовую формулу $n_i = \frac{w_i \sigma_i}{\sum w_j \sigma_j}$

   $\mathrm{Var}(\bar{X}^s) = 14.4$

5. а) $(2\theta - 0.2)(1.2 - 3\theta) \to \max$
   $\hat{\theta} = 0.25$

   б) $2.4 - 7\hat{\theta} = 1, \hat{\theta} = 0.2$

6. $\mathbb{P}(\bar{X} > 0.33) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-0.3}{\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{200}}} > \frac{0.33-0.3}{\sqrt{\frac{0.3\cdot 0.7}{200}}}\right) = \mathbb{P}(Z > 1.03) = 0.15$

7. $\bar{X} = 1, \hat{\sigma}^2 = 1$

   $\mathbb{P}(\hat{\sigma}^2 > 3\sigma^2) = \mathbb{P}\left(2\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > 6\right) = \mathbb{P}(\chi^2_2 > 6) = 0.05$

8. а) $\mathbb{P}(X^2 > 4\,\mathrm{Var}(X)) = \mathbb{P}(|X - 0| > 2\sigma) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{4\,\mathrm{Var}(X)} = \frac{1}{4}$

   б) $\mathbb{P}(X^2 > 4\,\mathrm{Var}(X)) = \mathbb{P}(|Z| > 2) = 0.05$

9. а) $\bar{X}$

   б) Да

   в) $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n}$;

   г) Да: несмещенность и предел дисперсии равный нулю

10. а) $\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{a}{2}$ $\theta = \frac{1}{\mathbb{P}(X_i<5)} = \frac{1}{5/a} = \frac{1}{5}a$
    $\hat{\theta} = \frac{2}{5}\bar{X}$

    б) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = (\frac{2}{5})^2 \cdot \frac{a^2}{12n}$

    в) $\lim \mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$, оценка несмещённая, следовательно, состоятельная.

11-А. Обозначим $e_n$ — сколько дней осталось в среднем ждать, если уже набрано $n$ копеек.

Тогда:

$e_{100} = 0$

$e_{99} = 1$

$e_{98} = \frac{1}{100}e_{99} + \frac{99}{100}e_{100} + 1 = 1 + \frac{1}{100}$
$e_{97} = \frac{1}{100}e_{98} + \frac{1}{100}e_{99} + \frac{98}{100}e_{100} + 1 = (1 + \frac{1}{100}))^2$
$e_{96} = \frac{1}{100}e_{97} + \frac{1}{100}e_{98} + \frac{1}{100}e_{99} + \frac{97}{100}e_{100} + 1 = (1 + \frac{1}{100})^3$

...

По индукции легко доказать, что $e_n = (1 + \frac{1}{100})^{99-n}$

Таким образом, $e_0 = (1 + \frac{1}{100})^{99} = 2.718\ldots$

11-Б. $p_0 = 0.1, p_1 = 0.7 \cdot 0.1$;

$p_n = \mathbb{P}($в первый день Петя познакомился с одной девушкой$)p_{n-1} + \mathbb{P}($в первый день Петя познакомился с дву

Разностное уравнение: $p_n = 0.7p_{n-1} + 0.2p_{n-2}$

**14.15.** 2005-2006

1. $\mathbb{P}(X=0)=e^{-0.003}\approx 0.997$

2. $c=0.3$, $\mathbb{P}(Y>-X)=0.4$, $\mathbb{E}(X\cdot Y^2)=0.5$, $\mathbb{E}(Y|X>0)=1/3$

3. $\mathbb{P}(X_1+3X_2>20)=\mathbb{P}\left(\frac{X_1+3X_2+1}{\sqrt{207}}>\frac{20+1}{\sqrt{207}}\right)=\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)>1.46)=0.0721$

   $\mathbb{E}(X_1+3X_2)=-1$, $\mathrm{Var}(X_1+3X_2)=9+9\cdot 25+6\cdot(-4.5)=207$

4. $\mathbb{P}(Y>X)=\int_0^1\int_x^1(x+y)dydx=0.5$

   $\mathbb{E}(X)=\int_0^1(x+0.5)xdx=7/12$

5. $\mathbb{P}(\hat p<0.21)=\mathbb{P}\left(\frac{\hat p-0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}}}<\frac{0.21-0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}}}\right)\approx 0$

6.

7. а) 0.5118

   б) 7/30

   в) $-e^{-\frac{1}{20\cdot 23}}+e^{-\frac{1}{20\cdot 16}}\approx 0.13$

8. Если $S$ — финальная стоимость акции, то $S=1000+X_1+X_2+\ldots+X_{100}$. Тогда по ЦПТ $S\sim\mathcal{N}(1000,100)$ и $\mathbb{P}(S>1030)\approx 0.001$.

9. $\mathbb{E}(X)=-c\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\mathrm{Var}(X)=c\frac{5}{4}\frac{\pi}{2}-c^2\frac{\pi}{2}$

10. 

$$\mathbb{P}(X=k|X+Y=50)=\frac{\mathbb{P}(X+Y=50|X=k)\,\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=50)}=\frac{\mathbb{P}(Y=50-k)\,\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=50)}=$$
$$\frac{\left(\frac{e^{-15}15^{50-k}}{(50-k)!}\right)\left(\frac{e^{-5}5^k}{k!}\right)}{\frac{e^{-(5+15)}(5+15)^{50}}{50!}}=C_{50}^k\frac{5^k\cdot 15^{50-k}}{(5+15)^{50}}=C_{50}^k\left(\frac{5}{5+15}\right)^k\left(\frac{15}{5+15}\right)^{50-k}$$

   Получили биномиальное распределение с параметрами $p=1/4$, $n=50$.

**14.16.** 2004-2005

1. $\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}(X)|>2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right)=\mathbb{P}\left(\frac{|X-\mathbb{E}(X)|}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}>2\right)=2\,\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1)>2)\approx 0.05$

2. $\mu=-1$, $\sigma^2=9$

3. $C_{200}^4\left(\frac{1}{130}\right)^4\left(\frac{129}{130}\right)^{196}$

4. $C_{20}^5 0.52^{15}0.48^9$

5. $\mathbb{P}(|X|>15)\leqslant\frac{16}{15^2}$

6. Подготовимся: $\mathbb{E}(2X-Y)=-5$, $\mathrm{Var}(2X-Y)=16+\mathrm{Var}(Y)$

   $\mathbb{P}(Z>0)=0.9\Rightarrow\mathbb{P}\left(\frac{2X-Y+5}{\sqrt{16+\mathrm{Var}(Y)}}>\frac{5}{\sqrt{16+\mathrm{Var}(Y)}}\right)\Rightarrow\frac{5}{\sqrt{16+\mathrm{Var}(Y)}}=1.28$

   $\mathrm{Var}(Y)=0.74$

7. $\mathbb{E}(X)=\mathrm{Var}(X)=\lambda=0.09$

$$\mathbb{P}(|X-0.09|>0.18)=1-\mathbb{P}(-0.18<X-0.09<0.18)\overset{X\geqslant 0}{=}1-\mathbb{P}(X=0)=1-e^{-0.09}$$

8. Пусть $X$ — случайная величина, число страховых случаев, $X \sim Bin(n = 1000, p = 0.05)$. $S$ — размер резерва.

   Тогда условие можно записать в виде: $\mathbb{P}(1500X \leqslant S) = 0.95$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-50}{\sqrt{1000\cdot 0.05\cdot 0.95}} \leqslant \frac{\frac{S}{1500}-50}{\sqrt{1000\cdot 0.05\cdot 0.95}}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{\frac{S}{1500}-50}{\sqrt{1000\cdot 0.05\cdot 0.95}} \approx 1.65 \Rightarrow S \approx 92058$$

9. а) Да
   б) Нет
   в) 1356

10. Пусть $X$ — случайная величина, число сочинённых песенок в день, когда Винни-Пуха кусает пчела, $X \sim Bin(n,p)$.

    Из данной в условии выборки находим $\overline{X} = 19/18$, поскольку число наблюдений достаточно велико, $\mathbb{E}(X) = np = 36p = 19/18$, откуда получаем $p = 19/(18\cdot 36)$ и $\operatorname{Var}(X) = np(1-p) \approx 1$.

    Нормальная аппроксимация: $X \sim \mathcal{N}(19/18, 1)$.

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}\left(X - \frac{19}{18} > -\frac{1}{18}\right) \approx 0.52$$

11. а) Заметим, что величину $X_t$ можно представить в виде:

$$X_t = A_t \cdot X_{t-1} = A_t \cdot A_{t-1} \cdot X_{t-1} = \ldots = A_t \cdot A_{t-1} \cdot \ldots \cdot A_2 \cdot X_1$$

   Тогда и предел тоже можно переписать:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln X_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln A_n + \ldots + \ln A_2 + \ln X_1}{n} \overset{X_1=1}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln A_n + \ldots + \ln A_2}{n} \overset{\text{ЗБЧ}}{=} \mathbb{E}(\ln A_1)$$

   Осталось найти математическое ожидание $\ln A_1$:

$$\mathbb{E}(\ln A_1) = \int_0^{2a} \frac{1}{2a} \cdot \ln x dx = \ln(2a) - 1$$

   б) Из неравенста $\ln(2a) - 1 > 0$ получаем, что темп роста будет положительным при $a > e/2$.

# 15. Решения контрольной номер 3

## 15.1. 2017-2018

5. а) $L(X_1, \ldots, X_n, \mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}$
   б) $\hat{\mu}_{ML} = \bar{X}$
   в) $\mathbb{E}(\hat{\mu}_{ML}) = \mathbb{E}(\bar{X}) = \mu \Rightarrow$ оценка несмещённая
      $\operatorname{plim} \hat{\mu}_{ML} = \operatorname{plim} \bar{X} = \mu \Rightarrow$ оценка состоятельная
   г) $I(\mu) = n$
   д) $\operatorname{Var}(\theta) \geqslant \frac{1}{I(\theta)}$
   е) $\operatorname{Var}(\hat{\mu}_{ML}) = \frac{1}{n}$, так как неравенство Рао-Крамера выполнено как равенство, оценка является эффективной.
   ж) $\theta = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \operatorname{Var}(X) + \mu^2 = 1 + \mu^2$. Тогда в силу инвариантности оценок максимального правдоподобия: $\hat{\theta}_{ML} = 1 + \hat{\mu}^2$.

з) $\mathbb{E}(\hat{\theta}_{ML}) = 1 + \mathbb{E}(\hat{\mu}^2) = 1 + \mathbb{E}((\bar{X})^2)$
Пользуясь соотношением $\mathbb{E}((\bar{X})^2) = \operatorname{Var}(\bar{X}) + (\mathbb{E}(\bar{X}))^2$, получим: $\mathbb{E}(\hat{\theta}_{ML}) = 1 + \frac{1}{n} + \mu^2$, то есть оценка смещена.
Однако, $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n} + \mu^2\right) = 1 + \mu^2$, значит, оценка асимптотически несмещена.

и) $\hat{\theta}_{ML} \approx 1 + \mu^2 + 2\mu(\hat{\mu} - \mu)$
$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{ML}) \approx 4\mu^2 \operatorname{Var}(\hat{\mu}) = \frac{4\mu^2}{n}$

к) Так как $\hat{\theta}_{ML}$ асимптотически несмещена, то для проверки состоятельности достаточно показать, что $\operatorname{Var}(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{4\mu^2}{n} \to_{n\to\infty} 0$.

6. а) $\mathbb{E}(X_1) = \int_0^\theta \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)x\,dx = \frac{\theta}{3}$
$\frac{\hat{\theta}_{MM}}{3} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = 3\bar{X}$

б) Оценка $\hat{\theta}$ состоятельна. если $\operatorname{plim}\hat{\theta}_n = \theta$.
$\operatorname{plim}\hat{\theta}_{MM} = \operatorname{plim} 3\bar{X} = 3\,\mathbb{E}(X_1) = \theta \Rightarrow$ оценка состоятельна.

7. а) $\mathbb{E}\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3\,\mathbb{E}(X_1) = 132.5$
$\operatorname{Var}\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = \frac{1}{9}\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + X_3) = \frac{1}{9}(\operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2) + \operatorname{Var}(X_3) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_3) + 2\operatorname{Cov}(X_2, X_3)) = \frac{1}{9}(3\operatorname{Var}(X_1) + 6\operatorname{Cov}(X_1, X_2))$
$\operatorname{Var}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{1}{4}\cdot 30^2 - \frac{1}{4}\cdot 500^2 - 132.5^2 = 45168.75$
$\operatorname{Cov}(X_1, X_1 + \ldots + X_4 = \operatorname{Var}(X_1) + 3\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 0 \Rightarrow \operatorname{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{45168.75}{3} = -15056.25$
$\operatorname{Var}\left(\frac{X_1+X_2+X_3}{3}\right) = 5018.75$

б) $3/4$

8. $\Delta_i = X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y, \sigma^2)$
$\bar{X} = 297.5$, $\bar{Y} = 247.5$, $\bar{\Delta} = \bar{X} - \bar{Y} = 50$
$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(\Delta_i - \bar{\Delta})^2 = 18266.(6)$.
Критическое значение — $t_{0.975,3} = 3.182$ и доверительный интервал имеет вид:

$$50 - 3.182\sqrt{\frac{18266.(6)}{3}} < \mu_x - \mu_y < 50 + 3.182\sqrt{\frac{18266.(6)}{3}}$$

Так как 0 входит в доверительный интервал, нельзя отвергнуть предположение о равенстве расхожов.

9. а) $0.7 - 1.96\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{60}} < p < 0.7 + 1.96\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{60}}$

б) Да, так как 0.7667 входит в доверительный интервал.

в) $\mathbb{P}(|p - \hat{p}| \leqslant 0.01) = 0.95$
$\mathbb{P}\left(\frac{|0.7-p|}{\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{n}}} < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{n}}}\right) = 0.95$
$\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{n}}} = 1.96 \Rightarrow n \approx 8068$

## 15.2. 2016-2017

1. а) $-2, 1, 4, 7, 10$

б) 4

в) $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2 = 18$

г) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2 = 22.5$

д) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = 34$

e) $F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{5}, & -2 \leqslant x < 1 \\ \frac{2}{5}, & 1 \leqslant x < 4 \\ \frac{3}{5}, & 4 \leqslant x < 7 \\ \frac{4}{5}, & 7 \leqslant x < 10 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

2. $E(X_1 + X_2) = 2 \cdot 11000 = 22000$

   $\mathrm{Var}(X_1+X_2) = \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2) - \frac{2\,\mathrm{Var}(X_1)}{N-1} = 2\cdot 3000 - \frac{2\cdot 3000}{3-1} = 3000$

3. a) Необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{0.4^2\cdot 10^2}{n_1} + \frac{0.5^2\cdot 30^2}{n_2} + \frac{0.1^2\cdot 60^2}{n_3} \to \min_{n_1,n_2,n_3} \\ 150n_1 + 300n_2 + 600n_3 \leqslant 30000 \end{cases}$$

Выпишем функцию Лагранжа и найдём её частные производные по $n_1$, $n_2$ и $n_3$:

$$L(n_1,n_2,n_3,\lambda) = \frac{0.4^2\cdot 10^2}{n_1} + \frac{0.5^2\cdot 30^2}{n_2} + \frac{0.1^2\cdot 60^2}{n_3} + \lambda(150n_1 + 300n_2 + 600n_3 - 30000)$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_1} = -\frac{0.4^2\cdot 10^2}{n_1^2} + 150\lambda \quad\Rightarrow\quad 150\lambda = \frac{0.4^2\cdot 10^2}{n_1^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_2} = -\frac{0.5^2\cdot 30^2}{n_2^2} + 300\lambda \quad\Rightarrow\quad 150\lambda = \frac{0.5^2\cdot 30^2}{2n_2^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_2} = -\frac{0.1^2\cdot 60^2}{n_3^2} + 600\lambda \quad\Rightarrow\quad 150\lambda = \frac{0.1^2\cdot 60^2}{4n_3^2}$$

Выразим $n_2$ и $n_3$ через $n_1$:

$$\frac{0.4\cdot 10}{n_1} = \frac{0.5\cdot 30}{\sqrt{2}n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{15n_1}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{0.4\cdot 10}{n_1} = \frac{0.1\cdot 60}{2n_3} \Rightarrow n_3 = \frac{6n_1}{8}$$

Подставим всё в бюджетное ограничение:

$$150n_1 + 300\cdot\frac{15n_1}{4\sqrt{2}} + 600\cdot\frac{6n_1}{8} = 30000$$

Откуда получаем: $n_1 = 21.5 \approx 22$, $n_2 \approx 57$, $n_3 \approx 16$.

б) $\mathrm{Var}(\bar{X}_S) = \sum_{l=1}^{L}\frac{w_l^2\cdot\sigma_l^2}{n_l} = \frac{0.4^2\cdot 10^2}{22} + \frac{0.5^2\cdot 30^2}{57} + \frac{0.1^2\cdot 60^2}{16} \approx 6.92$

4. $\hat{p} = \frac{8000}{12300000} = \frac{2}{3075}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 7.27\cdot 10^{-6}$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

   $\frac{2}{3075} - 1.96\cdot 7.27\cdot 10^{-6} < p < \frac{2}{3075} + 1.96\cdot 7.27\cdot 10^{-6}$

   $0.00064 < p < 0.00066$

   Поскольку 0 не входит в доверительный интервал, утверждать, что доля статистически не отличается от нуля нельзя.

5. a) i. $\bar{Y} = 43$, $\hat{\sigma}_Y^2 = 32.5$, $t_{0.005,4} = 4.6$

   $43 - 4.6\cdot\sqrt{\frac{32.5}{5}} < \mu < 43 + 4.6\cdot\sqrt{\frac{32.5}{5}}$

   $31.27 < \mu < 54.72$

   ii. $\chi^2_{0.95,4} = 9.49$, $\chi^2_{0.05,4} = 0.71$

   $\frac{32.5\cdot 4}{9.49} < \sigma^2 < \frac{32.5\cdot 4}{0.71}$

   $13.7 < \sigma^2 < 183$

б) i. $X_1, \ldots, X_{n_X} \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2), Y_1, \ldots, Y_{n_Y} \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2), \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_0^2$, выборки независимы

ii. $\bar{Y} - \bar{X} = 43 - 37 = 6$

$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_X}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_Y}(Y_i-\bar{Y})^2}{n_X+n_Y-2} = \frac{680+130}{5+5-2} = 101.25$

$t_{0.95,8} = 1.86$

$6 - 1.86\sqrt{101.25}\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} < \mu_Y - \mu_X < 6 + 1.86\sqrt{101.25}\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}$

$-5.83 < \mu_Y - \mu_X < 17.83$

iii. Да, так как ноль входит в доверительный интервал.

6. а) Выборочный второй начальный момент: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

Теоретический второй начальный момент: $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}\,X)^2 = \theta$

$\hat{\theta}_{MM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$

б) $\mathbb{E}(\hat{\theta}_{MM}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) = \theta$ — оценка несмещённая.

в) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MM}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i^2) = \frac{3\theta^2-\theta^2}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ — оценка состоятельная ($\mathbb{E}(X^4) = 3\theta^2$).

г)

$$L(x,\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x_i^2}{\theta}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta})^n} \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

$$l(x,\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\theta - \frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial l}{\partial\theta} = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

д)

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2} = \frac{n}{2\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$-\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial\theta^2}\right) = -\frac{n}{2\theta^2} + \frac{1}{\theta^3}\cdot n\theta = \frac{n}{2\theta^2}$$

$$I(\theta) = \frac{n}{2\theta^2}$$

е) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \geqslant \frac{1}{I(\theta)}$

ж) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{ML}) = \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\,\mathrm{Var}(X_1^2) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}(X_1^4) - \mathbb{E}(X_1^2)^2) = \frac{2\theta^2}{n}$

Так как $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{1}{I(\theta)}$, $\hat{\theta}_{ML}$ — эффективная оценка.

7. а) Вспомним, что для распределения Пуассона $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$

$$L(x,\lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}$$

$$l(x,\lambda) = -n\lambda + \ln\lambda\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln x_i!$$

$$\frac{\partial l}{\partial\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i$$

$$\hat{\lambda}_{ML} = \bar{X}$$

Значение по выборке: $\bar{X} = 14.5$

б) см. предыдущий пункт

в) $\hat{\sigma}^2 = \sqrt{\lambda_{ML}} = \sqrt{14.5}$

г) $\mathbb{P}(X=0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} \Rightarrow \widehat{\mathbb{P}(X=0)} = e^{-\hat{\lambda}} = e^{-\bar{X}}$

д) $\left[14.5 - 1.96\sqrt{\frac{14.5}{6}}; 14.5 + 1.96\sqrt{\frac{14.5}{6}}\right]$, где $1.96$ — критическое значение $\mathcal{N}(0;1)$. Конечно, этот результат верен только при больших $n$. Мы усиленно делаем вид, что $n=6$ велико. Полученный нами интервал может быть довольно далёк от 95%-го.

е) В данном случае: $g(\hat{\lambda}) = e^{-\hat{\lambda}}$, $g'(\hat{\lambda}) = -e^{-\hat{\lambda}}$. И доверительный интервал имеет вид:

$$\left[e^{-\bar{X}} - 1.96\sqrt{\frac{e^{-2\bar{X}}\bar{X}}{n}}; e^{-\bar{X}} + 1.96\sqrt{\frac{e^{-2\bar{X}}\bar{X}}{n}}\right]$$
$$\left[e^{-14.5} - 1.96\sqrt{\frac{e^{-29}14.5}{6}}; e^{-14.5} + 1.96\sqrt{\frac{e^{-29}14.5}{6}}\right]$$

Снова отметим, что наш интервал может на самом деле быть далеко не 95%-ым, так наше $n=6$ мало для серьёзного применения метода максимального правдоподобия.

## 15.3. 2015-2016

1. Пусть случайная величина $S$ – это сумма поглощённых калорий

| $s$ | 650 | 800 | 950 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(S=s)$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

Тогда

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{3}\cdot 650 + \frac{1}{3}\cdot 800 + \frac{1}{3}\cdot 950 = 800$$
$$\mathrm{Var}(S) = \frac{1}{3}(650-800)^2 + \frac{1}{3}(800-800)^2 + \frac{1}{3}(950-800)^2 = 15000$$

2. Вариационный ряд: $4, 6, 11$; медиана: $6$; выборочное среднее: $7$; несмещённая оценка дисперсии: $13$

3. Фунуция плотности двумерного нормального распределения имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left[\sigma_x^2(x-\mu_x)^2 - 2\rho\sigma_x\sigma_y(x-\mu_x)(y-\mu_y) + \sigma_y^2(y-\mu_y)^2\right]\right\}$$

Откуда: $\mu_X = 1$, $\mu_Y = 0$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 1$, $\rho = 0.2$

4. а) $X \sim \mathcal{N}(178, 49)$

$$P(X > 185) = 1 - \mathbb{P}(X < 185) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X-178}{7} < \frac{185-178}{7}\right)$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

б) Нет, так как $\mathrm{Cov}(X,Y) = 5.6 \neq 0$

в) $Y \mid X \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y + \rho\sigma_Y\cdot\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}; \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)\right)$

$Y \mid X = 185 \sim \mathcal{N}(42.8; 0.36)$

$\mathbb{P}(Y < 42 \mid X = 185) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-42.8}{0.6} < \frac{42-42.8}{0.6} \mid X = 185\right) = 0.9082$

5. а) $\mathbb{E}(X) = \frac{0+2\theta}{2} |_{\hat{\theta}} = \bar{X}, \hat{\theta}_{MM} = \bar{X}$

б) $\forall \theta \in \Theta : \mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ – несмещённая.

$\forall \theta \in \Theta, \forall \epsilon > 0 : \mathbb{P}\left(|\widehat{\theta}_n - \theta| > \epsilon\right) \to 0 \Rightarrow \widehat{\theta}_n$ – состоятельная.

$\forall \theta \in \Theta : I_n^{-1}(\theta) = \text{Var}\left(\hat{\theta}\right) \Rightarrow \hat{\theta}$ – эффективная.

в) $\mathbb{E}(\theta) = \mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}(X_1) = \theta \Rightarrow \hat{\theta}$ – несмещённая оценка

$\text{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right) = \text{Var}\left(\bar{X}\right) = \frac{\text{Var}(X_1)}{n} = \frac{4\theta^2}{12\cdot n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$; из условий $\mathbb{E}\left(\widehat{\theta}_n\right) = \theta$ и $\text{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ следует, что $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$, т.е. $\widehat{\theta}_n$ является состоятельной.

г)

$$F_{X_{(n)}} = \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = (\mathbb{P}(X_1 \leqslant x))^n$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \left(\frac{x}{2\theta}\right)^n & \text{при } x \in [0, 2\theta] \\ 1 & \text{при } x > 2\theta \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \frac{nx^{n-1}}{2^n\theta^n} & \text{при } x \in [0, 2\theta] \\ 0 & \text{при } x > 2\theta \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_0^{2\theta} x \cdot \frac{nx^{n-1}}{2^n\theta^n}dx = \frac{n}{2^n\theta^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x=0}^{x=2\theta}$$
$$= \frac{n}{2^n\theta^n} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot \theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n2\theta}{n+1}$$

Следовательно, $\mathbb{E}\left(\frac{n+1}{2n} \cdot X_{(n)}\right) = \theta$, а значит, $\tilde{\theta} = \frac{n+1}{2n} \cdot X_{(n)}$ – несмещённая оценка вида $c \cdot X_{(n)}$

д) $\text{Var}\left(\tilde{\theta}\right) = \frac{(n+1)^2}{4n^2}\text{Var}(X_{(n)})$

$$\mathbb{E}\left(X_{(n)}^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_0^{2\theta} x^2\frac{nx^{n-1}}{2^n\theta^n}dx = \frac{n}{2^n\theta^n}\int_0^{2\theta} x^{n+1}dx$$
$$= \frac{n}{2^n\theta^n} \cdot \frac{x^{n+2}}{n+2}\Bigg|_{x=0}^{x=2\theta} = \frac{n}{2^n\theta^n} \cdot \frac{2^{n+2} \cdot \theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n \cdot 4 \cdot \theta^2}{n+2}$$

$$\text{Var}(X_{(n)}) = \mathbb{E}\left(X_{(n)}^2\right) - (\mathbb{E}(X_{(n)}))^2 = \frac{4n\theta^2}{n+2} - \frac{4n^2 \cdot \theta^2}{(n+1)^2} = 4n\theta^2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right)$$

$$\text{Var}\left(\tilde{\theta}\right) = \frac{(n+1)^2}{4n^2}\text{Var}(X_{(n)}) = \frac{(n+1)^2}{4n^2} \cdot 4n\theta^2\left(\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)^2}\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

Оценка $\tilde{\theta}_n$ является состоятельной, так как $\mathbb{E}\left(\tilde{\theta}_n\right) = \theta$ и $\text{Var}\left(\tilde{\theta}_n\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

е) Поскольку $\text{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right) = \frac{\theta^2}{3n}$, $\text{Var}\left(\tilde{\theta}_n\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$ при достаточно большом $n$ $\text{Var}\left(\tilde{\theta}_n\right) < \text{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right)$. Значит, при таких $n$ оценка $\tilde{\theta}_n$ будет более эффективной по сравнению с оценкой $\widehat{\theta}_n$.

6. а) $X_i \sim Bin(n = 10, p)$

б) $L(p) = \prod_{i=1}^n C_{10}^{x_i}p^{x_i}(1-p)^{10-x_i}$

в) $\ln L(p) = \sum_{i=1}^n \ln C_{10}^{x_i} + \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \sum_{i=1}^n (10 - x_i)\ln(1-p) \to \max_p$

$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^n(10-x_i)}{1-p} |_{p=\hat{p}} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{X}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{10n}$

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} - \frac{\sum_{i=1}^n(10-x_i)}{(1-p)^2}$

г) $I(p) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (10-x_i)}{(1-p)^2}\right) = \frac{10np}{p^2} + \frac{10n-10np}{(1-p)^2} = \frac{10n}{p(1-p)}$

$i(p) = \frac{I(p)}{n} = \frac{10}{p(1-p)}$

д) $\operatorname{Var}(T) \geqslant \frac{1}{ni(T)}$

е) $\operatorname{Var}(\hat{p}_{ML}) = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{10n}\right) = \frac{1}{(10n)^2} n \operatorname{Var}(X_i) = \frac{1}{100n} 10p(1-p) = \frac{p(1-p)}{10n}$

$\frac{p(1-p)}{10n} = \frac{1}{\frac{10n}{p(1-p)}} \Rightarrow$ да

ж) $\mathbb{E}(X_i) = 10p \Rightarrow \widehat{\mathbb{E}(X_i)} = 10\hat{p}_{ML} = \bar{X}$

$\operatorname{Var}(X_i) = 10p(1-p) \Rightarrow \widehat{\operatorname{Var}(X_i)} = \bar{X}\left(1 - \frac{\bar{X}}{10}\right)$

з) $\hat{p} = \frac{3+4+0+2+6}{10\cdot 5} = 0.3$

7. $L(x,\theta) = \prod_{i=1}^n (1+\theta)x_i^\theta = (1+\theta)^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta \to \max_\theta$

$\ln L(x,\theta) = n\ln(1+\theta) + \theta\sum_{i=1}^n \ln x_i \to \max_\theta$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{1+\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i \,|_{\theta=\hat{\theta}} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{ML} = -\frac{1}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} - 1$

8. $\bar{X} - 1.96\frac{7}{\sqrt{20}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{7}{\sqrt{20}}$

## 15.4. 2014-2015

1. Пусть случайная величина $S$ – это сумма поглощённых калорий

| $s$ | 650 | 800 | 950 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(S=s)$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 |

Тогда

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{3}\cdot 650 + \frac{1}{3}\cdot 800 + \frac{1}{3}\cdot 950 = 800$$
$$\operatorname{Var}(S) = \frac{1}{3}(650-800)^2 + \frac{1}{3}(800-800)^2 + \frac{1}{3}(950-800)^2 = 15000$$

2. Ответ — решение оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \operatorname{Var}(\bar{X}_S) = \frac{0.3^2\cdot 10^2}{n_1} + \frac{0.6^2\cdot 30^2}{n_2} + \frac{0.1^2\cdot 60^2}{n_3} \to min_{n_1,n_2,n_3} \\ 150\cdot n_1 + 300\cdot n_2 + 600\cdot n_3 \leqslant 15000 \end{cases}$$

3. а) $\mathbb{E}(\mu_1) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(\mu+\mu) = \mu \Rightarrow$ несмещённая

$\mathbb{E}(\mu_2) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{4} + \frac{X_2+\ldots+X_{n-1}}{2n-4} + \frac{X_n}{4}\right) = \frac{1}{4}\mu + \frac{n-2}{2n-4}\mu + \frac{1}{4}\mu = \mu \Rightarrow$ несмещённая

$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) = \mu \Rightarrow$ несмещённая

б) $\operatorname{Var}(\mu_1) = \operatorname{Var}\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right) = \frac{1}{4}2\operatorname{Var}(X_1) = \frac{\sigma^2}{2}$

$\operatorname{Var}(\mu_2) = \operatorname{Var}\left(\frac{X_1}{4} + \frac{X_2+\ldots+X_{n-1}}{2n-4} + \frac{X_n}{4}\right) = \frac{\sigma^2}{16} + \frac{(n-2)\sigma^2}{(2n-4)^2} + \frac{\sigma^2}{16} = \sigma^2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2(2n-4)}\right)$

$\operatorname{Var}(\mu_3) = \operatorname{Var}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

4. а) $X \sim \mathcal{N}(1;1)$

$\mathbb{P}(X > 1) = 0.5$, так как нормальное распределение симметрично относительно своего математического ожидания.

б) $X \sim \mathcal{N}(1;1), 2X \sim \mathcal{N}(2;4), Y \sim \mathcal{N}(2,4) \Rightarrow 2X+Y \sim \mathcal{N}(4,4)$
$\mathbb{P}(2X+Y>2) = 1-\mathbb{P}(2X+Y<1) = 1-\mathbb{P}\left(\frac{2X+Y-4}{2} < \frac{1-4}{2}\right) = 1-0.0668 = 0.9332$

в) $Y \mid X \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y + \rho\sigma_Y \cdot \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}; \sigma_Y^2\left(1-\rho^2\right)\right), Y \mid X=2 \sim \mathcal{N}(1.5, 3)$
$\mathbb{E}(2X+Y \mid X=2) = 2\,\mathbb{E}(X \mid X=2) + \mathbb{E}(Y \mid X=2) = 4+1.5 = 5.5$

5. а) $X_1^2 + X_2^2 \sim \chi_2^2, \mathbb{P}(X_1^2+X_2^2 > 6) \approx 0.05$

б) $\mathbb{P}\left(\frac{X_1^2}{X_2^2+X_3^2} > 9.25\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\frac{X_1^2}{1}}{\frac{X_2^2+X_3^2}{2}} > 18.5\right) \approx 0.05, \frac{\frac{X_1^2}{1}}{\frac{X_2^2+X_3^2}{2}} \sim F_{1,2}$

6. а)

$$F_{X_{(n)}} = \mathbb{P}(\max(X_1,\ldots,X_n) \leqslant x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = (\mathbb{P}(X_1 \leqslant x))^n$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{при } x<0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{при } x\in[0,\theta] \\ 1 & \text{при } x>\theta \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0 \\ \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & \text{при } x\in[0,\theta] \\ 0 & \text{при } x>\theta \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_0^\theta x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x=0}^{x=\theta}$$
$$= \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\cdot\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$$

Следовательно, $\mathbb{E}\left(\frac{n+1}{n}\cdot X_{(n)}\right) = \theta$, а значит, $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n}\cdot X_{(n)}$ – несмещённая оценка вида $c\cdot X_{(n)}$.

б) $\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\operatorname{Var}(X_{(n)})$

$$\mathbb{E}\left(X_{(n)}^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_{(n)}}(x)dx = \int_0^\theta x^2\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx$$
$$= \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{x^{n+2}}{n+2}\bigg|_{x=0}^{x=\theta} = \frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\cdot\theta^2}{n+2}$$

$$\operatorname{Var}(X_{(n)}) = \mathbb{E}\left(X_{(n)}^2\right) - (\mathbb{E}(X_{(n)}))^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\cdot\theta^2}{(n+1)^2} = n\theta^2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right)$$

$$\operatorname{Var}\left(\tilde{\theta}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\operatorname{Var}(X_{(n)}) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot n\theta^2\left(\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)^2}\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

Оценка $\hat{\theta}_n$ является состоятельной, так как $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$ и $\operatorname{Var}(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

в) $\mathbb{E}(X_1) = \frac{\theta}{2}\big|_{\theta=\hat{\theta}_{MM}} = \bar{X} \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = 2\bar{X}$

г) $\operatorname{Var}\left(2\bar{X}\right) = \frac{4}{n^2}n\operatorname{Var}(X_1) = \frac{4\theta}{12n} = \frac{\theta}{3n} > \operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_n\right)$

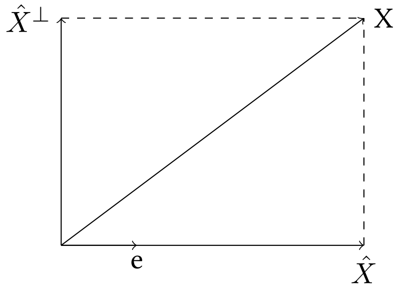
7. а) $L(x,p) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = p^{\sum_{i=1}^n (x_i-1)}(1-p)^n$
$\ln L(x,p) = \sum_{i=1}^n (x_i-1)\ln p + n\ln(1-p)$
$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-1)}{p} - \frac{n}{1-p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n}{\sum_{i=1}^n x_i}$

б) $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{p} \Rightarrow \hat{\mathbb{E}}(X) = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i - n}$

# 16. Решения контрольной номер 3. ИП

## 16.1. 2017-2018

1а) - в) См. картинку :)




г) $\hat{X} = e \cdot \bar{X}$
$\|\hat{X}\| = \sqrt{n} \cdot \bar{X}$
$\hat{X}^{\perp} = X - e \cdot \bar{X} = (X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$
$\|\hat{X}^{\perp}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$

д) $\|X\|^2 = \|\hat{X}^{\perp}\|^2 + \|\hat{X}\|^2$
$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n\bar{X}^2$

е) t-статистика для построения доверительного интервала для $\mu$ имеет вид:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\bar{\sigma}^2/n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/(n \cdot (n-1))}}$$
$$= \sqrt{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n} \cdot (\bar{X} - \mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}} = \sqrt{n-1} \cdot \frac{\|\hat{X}\| - \sqrt{n} \cdot \mu}{\|\hat{X}^{\perp}\|}$$

Заметим, что $\operatorname{ctg}\alpha$ есть отношение прилежащего катета к противолежащему, таким образом, нужный нам угол $\alpha$ образуется между векторами $X$ и $\hat{X}$. Зметим однако, что в нашем случае

$$t = \sqrt{n-1} \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\|\hat{X}\|}{\|\hat{X}^{\perp}\|},$$

то есть наша статистика подойдёт только для проверки гипотезе о равенстве матожидания нулю. Замечание. $t = \sqrt{n-1} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ будет t-статистикой только в том случае, если $X_i$ будут н.о.р.с.в. с нормальным распределением, о чём в условие сказано не было.

2. Выпишем функцию правдоподобия для выборки из трёх видов, два из которых совпадают. Первый медведепришелец будет нового вида с вероятностью 1. Вероятность, что вид второго пойманного медведепришельца совпадёт с первмым, составляет $1/n$. После этого нужно поймать медведепришельца нового вида – это произойдёт с вероятностью $(n-1)/n$, и ещё одного нового вида – вероятность этого $(n-2)/n$. Поскольку медведепришелец, вид которого встречается дважды, мог встретить на любой из трёх позиций, функцию правдоподобия необходимо домножить на $C_3^1$. Таким образом, функция правдоподобия имеет вид:

$$L(n) = C_3^1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n}, n \geqslant 3.$$

Максимизируя её, внутри области определения получаем $\hat{n} = 5$.

Так как количество медведей велико и все они встречаются равновероятно, то $p_1 = p_2 = p_3 = 1/n$. Так же из выборки известно, что число видов космомедведей не меньше трёх. Потому $\hat{n} \geqslant 3$.

Найдите хитрую ошибку в предложенном решении:

$L(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = n^{-4}$

$\frac{\partial L(n)}{\partial n} = -4 \cdot n^{-5} = 0$

Данное уравнение не имеет решений при конечных $n$, но заметим, что при всех $n \geqslant 3$ выполняется $\frac{\partial L(n)}{\partial n} = -4 \cdot n^{-5} < 0$, таким образом максимальное значение находится в граничных точках.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{-4}} = 0 < \frac{1}{3^{-4}}$

Таким образом получаем, что $\hat{n} = 3$.

3. а) $L(p_1, p_2) = p_1^{150} \cdot p_2^{100} \cdot (1 - p_1 - p_2)^{50}$

   $\ell(p_1, p_2) = 150 \ln p_1 + 100 \ln p_2 + 50 \ln(1 - p_1 - p_2)$

   $\begin{cases} \frac{\partial \ell(p_1,p_2)}{\partial p_1} = \frac{150}{p_1} - \frac{50}{1-p_1-p_2} = 0 \\ \frac{\partial \ell(p_1,p_2)}{\partial p_2} = \frac{100}{p_2} - \frac{50}{1-p_1-p_2} = 0 \end{cases}$

   Откуда получаем:

   $\begin{cases} \hat{p}_1 = 1/2 \\ \hat{p}_2 = 1/3 \end{cases}$

   б) Найдём, какие значения должны стоять в теоретической ковариационной матрице. Заметим, что случайная величина найти кальмаромедведя ($X$) или двурога ($Y$) есть бернулевская случайная величина с параметром $p_{1+2} = p_1 + p_2$ и дисперсией $p_{1+2} \cdot (1 - p_{1+2})$, но тогда:

   $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y)$

   $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{Var}(X+Y) - \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)) = \frac{1}{2} \cdot ((p_1+p_2) \cdot (1-p_1-p_2) - p_1 \cdot (1-p_1) - p_2 \cdot (1-p_2)) = -p_1 \cdot p_2$

   Тогда подставляя в теоретическую ковариационную матрицу оценки параметров и домнажая всё на $1/300$, так как $\hat{p}_1$ и $\hat{p}_2$ являются средними, получим:

$$\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) & -\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 \\ -\hat{p}_1 \cdot \hat{p}_2 & \hat{p}_1 \cdot (1 - \hat{p}_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{300} \begin{pmatrix} 1/4 & -1/6 \\ -1/6 & 2/9 \end{pmatrix}$$

   в) Для начала, найдём теоретическую дисперсию $\mathrm{Var}(X - Y)$.

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2 \cdot \mathrm{Cov}(X, Y) = p_1 \cdot (1 - p_1) + p_2 \cdot (1 - p_2) + 2 \cdot p_1 \cdot p_2$$

   Тогда подставляя оценки для $p_1$ и $p_2$ и учитывая, что это оценки среднего, получим оценку:

$$\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 1/300 \cdot (1/4 + 2/9 + 2 \cdot 1/6) = 29/(36 \cdot 300)$$

   г) Так как выборка достаточно велика, то статистика $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, являясь средним, будет иметь примерно нормальное распределение, и тогда:

   $\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

   $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} \leqslant p_1 - p_2 \leqslant \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}$

4. а) $\hat{\alpha} = \bar{X} + \sqrt{\bar{X} + 6} = 10 + \sqrt{10 + 6} = 14$

   б) Так как $\bar{X}$ сходится по распределению к нормальному распределению и $\hat{\alpha} = g(\bar{X})$, где $g(\bar{X})$ гладкая по $\bar{X}$ функция при $\bar{X} \geqslant 0$, а также $\bar{X}$ сходится по вероятности к матожиданию, то можно абсолютно спокойно применить дельта-метод. Тогда:

$$(\alpha - g(\bar{X})) \sim N(0; \sigma^2 (g'(\mathbb{E}(X_1)))^2 / n)$$

   Но так как $\hat{\alpha}$ является состоятельной оценкой, то можно заменить $g'(\mathbb{E}(X_1))$ на $g'(\bar{X})$:

$$g'(\bar{X}) = 1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\bar{X} + 6}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{9}{8} = 1.125$$

и тогда можно построить ассимтотический доверительный интервал:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha} - z_{97.5\%} \cdot \sqrt{\sigma^2 \cdot (g'(\bar{X}))^2/n} \leqslant & \alpha \leqslant \hat{\alpha} - z_{2.5\%} \cdot \sqrt{\sigma^2 \cdot (g'(\bar{X}))^2/n} \\
16 - 1.96 \cdot 2 \cdot 9/(8 \cdot 10) \leqslant & \alpha \leqslant 16 + 1.96 \cdot 2 \cdot 9/(8 \cdot 10) \\
13.559 \leqslant & \alpha \leqslant 14.441
\end{aligned}
$$

5. а) Так как не известно точно, кто сколько фотографий сделал, и так как метод оценки не указан, то воспользуемся методом моментов для построения оценки.

$$
\begin{aligned}
N &= \mathbb{E}(\text{«фото Андрея»}) + \mathbb{E}(\text{«фото Беллы»}) \\
130 &= 100 \cdot 0.5 + p \cdot 100 \\
\hat{p} &= 0.8
\end{aligned}
$$

Так как выборка достаточно велика, то $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})/W}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
\hat{p} - z_{97.5\%}\sqrt{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})/W} \leqslant & p \leqslant \hat{p} - z_{2.5\%}\sqrt{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})/W} \\
0.8 - 1.96 \cdot \sqrt{0.8 \cdot 0.2/100} \leqslant & p \leqslant 0.8 + 1.96 \cdot \sqrt{0.8 \cdot 0.2/100} \\
0.72 \leqslant & p \leqslant 0.88
\end{aligned}
$$

б) Так как неизвестно, кто больше снимков сделал, то рассмотрим два случая: Андрей сделал 60 фото и Белла — 70 фото, Андрей сделал 70 фото и Белла — 60 фото. В каждом случае при помощи метода максимального правдоподобия оценим вероятность $p$, после чего сравним значения функции правдоподобия с оценёнными параметрами для каждого случая.

$$
\begin{aligned}
L(p) &= C_{100}^{60} \cdot 0.5^{60} \cdot 0.5^{40} \cdot C_{100}^{70} \cdot p^{70} \cdot (1-p)^{30} \\
\ell(p) &= const + 70 \ln p + 30 \ln(1-p) \\
\frac{\partial \ell(p)}{\partial p} &= \frac{70}{p} - \frac{30}{1-p} = 0 \\
\hat{p}_1 &= 0.7
\end{aligned}
$$

Аналогично для второго случая получим оценку: $\hat{p}_2 = 0.6$.
Для простоты, будем сравнивать логарифмическии функции правдоподобия $\ell_1(p_1)$ и $\ell_2(p_2)$ и тогда получим:

$$
\begin{aligned}
\ell_1(p_1) &= const + 70 \ln 0.7 + 30 \ln 0.3 \approx const - 70 \cdot 0.357 - 30 \cdot 1.204 = const - 61.11 \\
\ell_2(p_2) &= const + 60 \ln 0.6 + 40 \ln 0.4 \approx const - 60 \cdot 0.511 - 40 \cdot 0.916 = const - 67.3
\end{aligned}
$$

Так как $-67.3 < -61.11$, то более вероятно, что $\hat{p} = 0.7$
Тогда анологично предыдущему пункту получим доверительный интервал:

$$
\begin{aligned}
0.7 - 1.96 \cdot \sqrt{0.7 \cdot 0.3/100} \leqslant & p \leqslant 0.7 + 1.96 \cdot \sqrt{0.7 \cdot 0.3/100} \\
0.61 \leqslant & p \leqslant 0.79
\end{aligned}
$$

# 17. Решения контрольной номер 4

## 17.1. 2017-2018

1. Проверяем следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = 100 \\ H_a : \mu_D > 100 \end{cases}$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$t_{obs} = \frac{\bar{X} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n_D}}} = \frac{136 - 100}{\frac{55}{\sqrt{40}}} \approx 4.14$$

При верной $H_0$ $t$-статистика имеет распределение $t_{40-1}$, значит, $t_{crit} \approx 1.68$. Поскольку $t_{crit} > t_{obs}$, основная гипотеза отвергается, $p - value \approx 0$.

2. Проверяем следующую гипотезу:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_D^2 = \sigma_T^2 \\ H_a : \sigma_D^2 \neq \sigma_T^2 \end{cases}$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$F_{obs} = \frac{\hat{\sigma}_D^2}{\hat{\sigma}_T^2} = \frac{55^2}{60^2} \approx 0.84$$

При верной $H_0$ $F$-статистика имеет распределение $F_{40-1,60-1}$. Находим критические значения: $F_{left} \approx 0.6$, $F_{right} \approx 1.6$. Поскольку $F_{left} < F_{obs} < F_{right}$, нет оснований отвергать $H_0$.

3. Проверяем гипотезу

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = \mu_T \\ H_a : \mu_D < \mu_T \end{cases}$$

Когда $n_D$, $n_T$ велики,

$$\frac{\bar{D} - \bar{T} - (\mu_D - \mu_T)}{\sqrt{\frac{\sigma_D^2}{n_D} + \frac{\sigma_T^2}{n_T}}} \overset{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$z_{obs} = \frac{136 - 139}{\sqrt{\frac{3025}{40} + \frac{3600}{60}}} \approx -0.25$$

По таблице находим $z_{crit} = -1.28$. Так как $z_{crit} < z_{obs}$, нет оснований отвергать $H_0$.

а) Когда считаем дисперсии одинаковыми, то:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\sigma}_D^2(n_D - 1) + \hat{\sigma}_T^2(n_T - 1)}{n_D + n_T - 2} = \frac{3025 \cdot 39 + 3600 \cdot 59}{30 + 60 - 2} \approx 3371$$

и

$$\frac{\bar{D} - \bar{T} - (\mu_D - \mu_T)}{\hat{\sigma}_0^2\sqrt{\frac{1}{n_D} + \frac{1}{n_T}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n_D + n_T - 2}$$

Считаем наблюдаемое значение статистики:

$$t_{obs} = \frac{136 - 139}{\sqrt{3371}\sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}}} \approx -0.25$$

По таблице находим критическое значение: $t_{crit} \approx -1.29$. Поскольку $t_{crit} < t_{obs}$, нет оснований отвергать $H_0$.

4. а) Сначала найдём оценку максимального правдоподобия параметра $\lambda$:

$$L = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ell = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda}\Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{0.52}$$

Так как

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{1}{I(\lambda)}}} \overset{as}{\sim} \mathcal{N}(0, 1),$$

доверительный интервал имеет вид

$$\frac{1}{0.52} - 1.96 \frac{1}{\frac{10}{0.52}} < \lambda < \frac{1}{0.52} + 1.96 \frac{1}{\frac{10}{0.52}}$$

б) Найдём вероятность того, что наушник проработает без сбоев 45 минут:

$$g(\lambda) = \mathbb{P}(X > 0.75) = 1 - F(0.75) = e^{-0.75\lambda}$$

Тогда

$$g(\hat{\lambda}) = e^{-0.75/0.52}$$

$$g'(\hat{\lambda}) = -0.75 e^{-0.75/0.52}$$

И доверительный интервал имеет вид:

$$e^{-0.75/0.52} - 1.96 \cdot \frac{0.75 \cdot 0.52}{10} \cdot e^{-0.75/0.52} < g(\lambda) < e^{-0.75/0.52} + 1.96 \cdot \frac{0.75 \cdot 0.52}{10} \cdot e^{-0.75/0.52}$$

5. Выпишем функцию правдоподобия:

$$L = p_1^{10} \cdot p_2^{10} \cdot p_3^{15} \cdot p_4^{15} \cdot p_5^{25} \cdot (1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)^{25}$$

$$\ell = 10 \ln p_1 + 10 \ln p_2 + 15 \ln p_3 + 15 \ln p_4 + 25 \ln p_5 + 25 \ln(1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)$$

Максимизируя логарифмическую функцию правдоподобия по всем параметрам, получим следующие оценки для неограниченной модели:

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = 0.1$$

$$\hat{p}_3 = \hat{p}_4 = 0.15$$

$$\hat{p}_5 = 0.25$$

Подставив найденные значения в логарифмическую функцию правдоподобия, получим

$$\ell_{UR} \approx -172$$

В ограниченной модели $p_1 = \ldots = p_6 = 1/6$, и значение функции правдоподобия будет

$$\ell_R \approx -179$$

Теперь можно посчитать наблюдаемое значение:

$$LR = 2(\ell_{UR} - \ell_R) = 2(-172 - (-179)) = 14$$

Критическое значение $\chi_{0.95,5} =\approx 11 < 14$, значит, основная гипотеза отвергается.

## 17.2. 2016-2017

1. а) $t_{obs} = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} = \frac{9.5-10}{0.5/\sqrt{100}} = -10$
   В таблице для $t_{0.975;100-1}$ находим $-t_{crit} = -1.66$.
   Поскольку $t_{obs} < -t_{crit}$, основная гипотеза отвергается.

   б) $p - value \approx 0$

   в) $X_1, \ldots, X_{100} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

   г) $\gamma_{obs} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}(n-1) = \frac{0.5^2}{0.3}(100-1) = 82.5$
   В таблице находим нужные значения $\chi^2_{0.975;100-1}$, $\gamma_{crit,r} = 128$ и $\chi^2_{0.025;100-1}$, $\gamma_{crit,l} = 73$.
   Так $\gamma_{crit,l} < \gamma_{obs} < \gamma_{crit,r}$, нет оснований отвергать $H_0$.

2. $\hat{p} = \frac{16}{40} = 0.4$, проверять будем двустороннюю гипотезу.
   $z_{obs} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} = \frac{0.4-0.5}{\sqrt{0.4 \cdot 0.6/40}} \approx -1.3$
   В таблице нормального распределения находим значение $z_{0.975}$, $z_{crit} = 1.96$.
   Так как $|z_{obs}| < z_{crit}$, нет оснований отвергать $H_0$.

3. а) $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\sigma}^2_\alpha(n_\alpha-1)+\hat{\sigma}^2_\beta(n_\beta-1)}{n_\alpha+n_\beta-2} = \frac{0.25\cdot 19+0.36\cdot 24}{20+25-2} = 0.31$
   $\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\hat{\sigma}_0\sqrt{\frac{1}{n_\alpha}+\frac{1}{n_\beta}}} \sim t_{n_\alpha+n_\beta-2}$
   $t_{obs} = \frac{9.5-9.8}{0.56\sqrt{\frac{1}{20}+\frac{1}{25}}} = -1.79$
   $t_{crit} = 2.02$
   Поскольку $|t_{obs}| < t_{crit}$, нет оснований отвергать $H_0$.

   б) Выборки независимы, дисперсии неизвестны, но равны, $X_1, \ldots, X_{n_\alpha} \sim \mathcal{N}\left(\mu_X, \sigma^2_X\right)$, $X_1, \ldots, Y_{n_\beta} \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y, \sigma^2_Y\right)$.

   в) $\frac{\hat{\sigma}^2_\alpha}{\hat{\sigma}^2_\beta} \sim F_{n_{\alpha-1}, n_{\beta-1}}$
   $F_{obs} = \frac{0.5}{0.6} \approx 0.83$
   $F_{crit,0.975} = 2.35$, $F_{crit,0.025} = 0.41$
   Поскольку $F_{crit,0.025} < F_{obs} < F_{crit,0.975}$, нет оснований отвергать $H_0$.

4. $H_0 : p = 0.5$, где $p$ — вероятность того, что бутерброд упадёт маслом вниз.
   $\hat{p} = \frac{105}{200} = 0.525$
   $z_{obs} = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} = \frac{0.525-0.5}{\sqrt{0.525\cdot 0.475/200}} \approx 0.7$
   $z_{crit} = 1.96$
   Так как $z_{obs} < z_{crit}$, нет оснований отвергать $H_0$.

5. $LR \sim \chi^2_1$, так как в основной гипотезе одно уравнение. Выпишем функцию правдоподобия и найдём $\hat{\mu}_{ML}$ и $\hat{\nu}_{ML}$.

$$L = \prod_{i=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i-\mu)^2}{\nu}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\nu})^{100}} \exp\left(-\frac{1}{2\nu}\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$\ell = -\frac{100}{2}\ln(2\pi) - \frac{100}{2}\ln\nu - \frac{1}{2\nu}\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu) \Rightarrow \hat{\mu}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} = 0.3$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \nu} = -\frac{100}{2\nu} + \frac{1}{2\nu^2}\sum_{i=1}^{100}(x_i-\mu)^2 \Rightarrow \hat{\nu}_{ML} = 1.37$$

Тогда $LR = 2(\ell(\hat{\mu}_{ML}, \hat{\nu}_{ML}) - \ell(\hat{\mu}_{ML}, \nu = 1))$ имеет вид:

$$Q_{obs} = 2\left(-50\ln(2\pi) - 50\ln 1.37 - \frac{1}{2\cdot 1.37}\cdot 137 + 50\ln(2\pi) + 0 + \frac{1}{2}\cdot 137\right) \approx 5.5$$

Из таблицы: $Q_{crit} = 3.84$. Поскольку $Q_{obs} > Q_{crit}$, основная гипотеза отвергается.

## 17.3. 2015-2016

2. а)

$$L(x,\lambda) = \prod_{i=1}^{250} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-250\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{250} x_i}\prod_{i=1}^{250}\frac{1}{x_i!}$$

$$\ell(x,\lambda) = -250\lambda + \ln\lambda\sum_{i=1}^{250} x_i - \sum_{i=1}^{250}\ln x_i!$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial\lambda} = -250 + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{250} x_i$$

$$\hat{\lambda}_{ML} = \bar{X}$$

б) $\mathbb{E}\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = \mathbb{E}\left(\bar{X}\right) = \lambda \Rightarrow$ оценка несмещённая.

$\operatorname{Var}\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = \operatorname{Var}\left(\bar{X}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\operatorname{Var}(X_1) = \frac{\lambda}{n} \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow$ оценка состоятельная.

$\frac{\partial^2\ell}{\partial\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n x_i$, $I(\lambda) = -\mathbb{E}\left(-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{n}{\lambda}$. Так как $\operatorname{Var}\left(\hat{\lambda}_{ML}\right) = \frac{1}{I(\lambda)}$, оценка является эффективной.

в) $\mathbb{P}(X=0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} \Rightarrow \widehat{\mathbb{P}(X=0)} = e^{-\hat{\lambda}} = e^{-\bar{X}}$

г) В данном случае: $g\left(\hat{\lambda}\right) = e^{-\hat{\lambda}}$, $g'\left(\hat{\lambda}\right) = -e^{-\hat{\lambda}}$. И доверительный интервал имеет вид:

$$\left[e^{-\bar{X}} - 1.96\sqrt{\frac{e^{-2\bar{X}}\bar{X}}{n}}; e^{-\bar{X}} + 1.96\sqrt{\frac{e^{-2\bar{X}}\bar{X}}{n}}\right]$$

3. а) $\hat{p} \overset{as.}{\sim} \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

O1P: лекарство помогает в 80% случаев, но в данной выборке оно помогло менее чем 12 людям.

$\alpha = \mathbb{P}(\text{O1P}) = \mathbb{P}\left(\hat{p} < \frac{12}{20}\middle| p = 0.8\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\hat{p}-0.8}{\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{20}}} < \frac{\frac{12}{20}-0.8}{\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{20}}}\right) = 0.0125$

б) O2P: лекарство помогает в 60% случаев, но $Y \geqslant 12$.

$\hat{p} \sim \mathcal{N}\left(0.6, \frac{0.6\cdot 0.4}{20}\right)$

$\beta = \mathbb{P}\left(\hat{p} \geqslant \frac{12}{20}\right) = \frac{1}{2}$

в) $\mathbb{P}(Z < a) = 0.1$, из таблицы находим, что $a = -1.28$.

$$a = \frac{\frac{c}{20} - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8\cdot 0.2}{20}}} = -1.28 \Rightarrow c \approx 13.7$$

г) $\mathbb{P}(|\hat{p} - p| \leqslant 0.01) \geqslant 0.95$, будем считать, что $p = 0.6$.

$$\mathbb{P}(|\hat{p}-p| \leqslant 0.01) = \mathbb{P}(-0.01 \leqslant \hat{p} - p \leqslant 0.01) = \mathbb{P}\left(-\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{n}}} \leqslant Z \leqslant \frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{n}}}\right) = 0.95$$

Из таблицы находим

$$\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{n}}} = 1.96 \Rightarrow n = \frac{0.6\cdot 0.4\cdot 1.96^2}{0.01^2}$$

4. $H_0 : p_с = \frac{1}{7}, p_л = \frac{2}{7}, p_к = \frac{4}{7}$
   $Q = \sum_{i=1}^{s=3} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2_{s-k-1} = \chi^2_2$
   $Q_{obs} = \frac{\left(10-50\frac{1}{7}\right)^2}{50\frac{1}{7}} + \frac{\left(1-50\frac{2}{7}\right)^2}{50\frac{2}{7}} + \frac{\left(39-50\frac{4}{7}\right)^2}{50\frac{4}{7}} = 17.29$
   $Q_{crit} = 5.99, Q_{crit} < Q_{obs} \Rightarrow$ гипотеза отвергается

5. $LR \sim \chi^2_1$, так как основная гипотеза содержит одно уравнение
   $L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n=50} \lambda e^{-\lambda x} = \lambda^{50} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n=50} x_i}$
   $\ln L(x, \lambda) = 50 \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n=50} x_i \to \max_\lambda$
   $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{50}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n=50} x_i \,|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{10}{11}$
   При верной $H_0 : \lambda = 1$, тогда $\ln L(\lambda = 1) = 50 \ln 1 - 1 \cdot 1.1 \cdot 50 = -55$
   При верной $H_1 : \lambda = \lambda_{ML}$, тогда $\ln L\left(\lambda = \frac{10}{11}\right) = 50 \ln \frac{10}{11} - \frac{10}{11} \cdot 50 \cdot 1.1 = -54.77$
   $LR_{obs} = 2(\ln L(H_1) - \ln(H_0)) = 2(-54.77 - (-55)) = 0.46$
   $LR_{crit} = 2.71, LR_{crit} > LR_{obs} \Rightarrow$ оснований отвергать $H_0$ нет

6. Будем проверять гипотезы на уровне значимости 0.05
   а) $\hat{\sigma}^2_в = 484, \hat{\sigma}^2_р = 400$
      $\frac{\hat{\sigma}^2_в}{\hat{\sigma}^2_р} \sim F_{21-1,19-1}$
      $F_{obs} = \frac{484}{400} = 1.21, F_{crit,left} = 0.4, F_{crit,right} = 2.6 \Rightarrow$ оснований отвергать $H_0$ нет
   б) $\hat{\sigma}^2_0 = \frac{484 \cdot (21-1) + 400 \cdot (19-1)}{21+19-2} \approx 444$
      $t_{obs} = \frac{78-67}{\sqrt{444}\sqrt{\frac{1}{21}+\frac{1}{19}}} \approx 1.8$
      $t_{crit} \sim t_{21+19-2} = t_{38}, t_{crit} = \pm 2.02 \Rightarrow$ нет оснований отвергать $H_0$

7. $\gamma = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}} \sim \chi^2_{(s-1)(m-1)}$
   $\gamma_{obs} = \frac{\left(12-\frac{44\cdot 48}{100}\right)^2}{\frac{44\cdot 48}{100}} + \frac{\left(36-\frac{56\cdot 48}{100}\right)^2}{\frac{56\cdot 48}{100}} + \frac{\left(32-\frac{44\cdot 52}{100}\right)^2}{\frac{44\cdot 52}{100}} + \frac{\left(20-\frac{50\cdot 52}{100}\right)^2}{\frac{50\cdot 52}{100}} \approx 12$
   $\gamma_{crit} = 3.84 \Rightarrow$ гипотеза отвергается

## 17.4. 2014-2015

1. **Задача для первого потока.**

   а)

$$-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$-1.96 < \frac{0.4 - p}{\sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{40}}} < 1.96$$

$$-0.56 < p < 1.36$$

   б) $H_0$ не отвергается, так как

$$-0.56 < 0.5 < 1.36$$

   в) $H_0$ отвергается, если $p = 0.5$ не лежит в построенном доверительном интервале:

$$0.5 \geqslant 0.5 Z_{\frac{\alpha}{2}} + 0.4$$

$$0.2 \geqslant Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \alpha = 0.0456$$

1. **Задача для второго потока**.

   а) При верной $H_0 : \mu = 55$. Находим $t_{crit} = 1.721$ и $t_{obs} = \frac{51-55}{0.45} = -8.9$, $H_0$ отвергается.

   б) При верной $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$. Находим $F_{left} = 0.5$, $F_{right} = 2.07$ и $F_{obs} = 2/3$, $H_0$ не отвергается.

2. **Задача для первого потока**.

   При верной $H_0 : \mu_\alpha = \mu_\beta$. Находим $t_{crit} = 2.048$ и $t_{obs} = \frac{9.5-9.8}{0.216} = -1.4$, $H_0$ не отвергается.

2. **Задача для второго потока**.

   а)

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_1^2 &= 0.2 \cdot 0.8 = 0.16 \\
\hat{\sigma}_2^2 &= 0.17 \cdot 0.83 = 0.1411
\end{aligned}
$$

   При верной $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Находим $Z_{crit} = 2.58$ и $t_{obs} = \frac{0.2-0.17}{0.06} = 0.5$, $H_0$ не отвергается.

   б)

$$
p_{value} = 1 - F(0.5) \approx 1 - 0.6915 = 0.3085
$$

3.

$$
\begin{aligned}
& L(x, \theta) = \theta^{-2n} x^n \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_i x_i\right) \\
& \ell = \ln(L) = -2n \ln(\theta) + n \ln(x) - \frac{1}{\theta} \sum_i x_i \\
& \ell'_\theta = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_i x_i \\
& -2n \frac{1}{\hat{\theta}} \sum_i x_i = 0 \\
& \hat{\theta}_{ML} = \frac{1}{2} \bar{X}
\end{aligned}
$$

4. Пусть $\ell = \ln(L)$ — логарифмическая функция правдоподобия.

$$
\ell = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\nu) - \frac{1}{2\nu} \sum_i (x_i - \bar{x})^2
$$

   Известно, что для выборки из нормального распределения $\hat{\mu}_{ML} = \bar{x} = 0.3$, $\hat{\nu}_{ML} = S^2 = 1.37$, поэтому

$$
\begin{aligned}
& \ell_{UR} = -50 \ln(2\pi) - 50 \ln(1.37) - \frac{137}{2 \cdot 1.37} \\
& \ell_R = -50 \ln(2\pi) - \frac{137}{2} \\
& LR_{obs} = 2\left(-50 \ln(2\pi) - 50 \ln(1.37) - \frac{137}{2 \cdot 1.37} + 50 \ln(2\pi) + \frac{137}{2}\right) \approx 12
\end{aligned}
$$

   При верной $H_0$ $LR \sim \chi^2_1 \Rightarrow LR_{crit} \approx 3.8$, основная гипотеза отвергается.

5. **Исследовательская задача**.

а) Пусть $\ell = \ln(L)$ — логарифмическая функция правдоподобия. Воспользуемся также тем, что для выборки из нормального распределения $\hat{\mu}_{ML} = \bar{X}$, $\hat{\nu}_{ML} = S^2$.

$$\ell = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\nu) - \frac{1}{2\nu}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\operatorname{Var}\left(\ell'(\hat{\mu})\right) = \frac{1}{\nu^2}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})\right) = \frac{n}{\nu^2}\operatorname{Var}(X_1) = \frac{n}{\nu}$$

$$LM = \frac{(\ell'(\hat{\mu}) - \ell'(0))^2}{\operatorname{Var}(\ell'(\hat{\mu}))} = \frac{\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) - \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}{\frac{n}{\nu}} = \frac{n}{\nu}\bar{X}^2$$

$$W = \frac{(\hat{\mu} - 0)^2}{\operatorname{Var}(\hat{\mu})} = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)^2}{\frac{\nu}{n}} = \frac{n}{\nu}\bar{X}^2$$

$$\begin{aligned}
LR &= 2\left(-\frac{1}{2\nu}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}) + \frac{1}{2\nu}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \\
&= \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \sum_{i=1}^{n}X_i^2 + 2\bar{X}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i - n\bar{X}^2\right) = \\
&= \frac{1}{\nu}\left(2\bar{X}\cdot n\cdot\bar{X} - n\bar{X}^2\right) = \frac{n}{\nu}\bar{X}^2
\end{aligned}$$

Как видим, $LR = LM = W$.

б)

6. **Исследовательская задача.**

а)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} a^2x^2e^{-ax}dx = -ax^2e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} axe^{-ax}dx = \\
&= -2xe^{-ax}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = -\frac{2}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{a}
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{\hat{a}_{MM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \Rightarrow \hat{a}_{MM} = \frac{2}{3}$$

б)

$$\hat{a}_{MM} = \frac{2}{\bar{X}}$$

Разложим $\hat{a}_{MM}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\bar{X} = 3$:

$$\hat{a}_{MM} \approx \frac{2}{3} - \frac{2}{9}\left(\bar{X} - 3\right)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\operatorname{Var}}(X) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2}{n} \\
&= \frac{1000 - 6\cdot 300 + 100\cdot 9}{100} = 1
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Var}\left(\hat{a}_{MM}\right) \approx \frac{4}{81}\operatorname{Var}\left(\bar{X}\right) = \frac{4\cdot 100}{81\cdot 100^2}\operatorname{Var}(X) \Rightarrow \widehat{\operatorname{Var}}\left(\hat{a}_{MM}\right) = \frac{4}{8100}$$

в)

$$-t_{\frac{\alpha}{2};n-1} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2};n-1}$$

$$-1.98 < \frac{3 - \mu}{\frac{1}{10}} < 1.98$$

Воспользуемся тем, что $\mu = \frac{2}{a}$:

$$
\begin{aligned}
-1.98 < \frac{3 - \frac{2}{a}}{\frac{1}{10}} < 1.98 \\
-0.198 < 3 - \frac{2}{a} < 0.198 \\
0.63 < a < 0.71
\end{aligned}
$$

# 18. Решения финальных экзаменов

## 18.1. 2017-2018

Здесь табличка с ответами