Фамилия, имя, номер группы:

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Вопрос 1.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Известно, что оценка максимального правдоподобия параметра $\lambda$ равна $\bar{X}$. Чему равна оценка максимального правдоподобия для $1/\lambda$?

$\boxed{A}$ $\ln \bar{X}$

$\boxed{B}$ $\bar{X}/n$

$\boxed{C}$ $1/\bar{X}$

$\boxed{D}$ $\bar{X}$

$\boxed{E}$ $e^{\bar{X}}$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 2.** Время подготовки студента к экзаменам и по статистике, и макроэкономике, имеет нормальное распределение с неизвестными математическими ожиданиями и дисперсиями. По 10 наблюдениям Вениамин получил оценку стандартного отклонения времени подготовки к статистике равную 5 часам. Оценка стандартного отклонения времени подготовки к макроэкономике, рассчитанная по 20 наблюдениям, оказалась равной 2. Тестовая статистика при проверке гипотезы о равенстве дисперсий может быть равна

$\boxed{A}$ 0.16

$\boxed{B}$ 0.8

$\boxed{C}$ 0.4

$\boxed{D}$ 2.5

$\boxed{E}$ 12.5

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 3.** Случайная выборка состоит из одного наблюдения $X_1$, которое имеет плотность распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Чему равна оценка неизвестного параметра $\theta$, найденная с помощью метода максимального правдоподобия?

$\boxed{A}$ $X_1$

$\boxed{B}$ $\ln X_1$

$\boxed{C}$ $X_1/2$

$\boxed{D}$ $\frac{X_1}{\ln X_1}$

$\boxed{E}$ $1/\ln X_1$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 4.** Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ называется состоятельной для параметра $\theta$, если

$\boxed{A}$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$

$\boxed{B}$ $\operatorname{Var}(\hat{\theta}_n) = (\theta)^2/n$

$\boxed{C}$ $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$

$\boxed{D}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \to 0$ при $n \to \infty$

$\boxed{E}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathrm{E}((\tilde{\theta} - \theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta} \in K$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 5.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Пирсона равно

$\boxed{A}$ 4 $\boxed{C}$ 6 $\boxed{E}$ 8

$\boxed{B}$ 7 $\boxed{D}$ 5 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 6.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$. Чему равна информация Фишера о параметре $p$, заключенная в двух наблюдениях случайной выборки?

$\boxed{A}$ $\frac{2}{p(1-p)}$ $\boxed{C}$ $2p(1-p)$ $\boxed{E}$ $2(1-p)$

$\boxed{B}$ $2p$ $\boxed{D}$ $\frac{2}{p}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 7.** Температура планеты Плюк и её спутника являются стандартными нормальными случайными величинами, имеющими совместное нормальное распределение. Ковариация между температурами равна 0.5. Найдите вероятность того, что на Плюке положительная температура, если на спутнике температура равна -1.

$\boxed{A}$ 0.739 $\boxed{C}$ 0.282 $\boxed{E}$ 0.718

$\boxed{B}$ 0.596 $\boxed{D}$ 0.114 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 8.** Математическое ожидание оценки дисперсии $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ для выборки из распределения Пуассона с $\lambda = 3$, равняется

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{C}$ 3 $\boxed{E}$ 9

$\boxed{B}$ $9/n$ $\boxed{D}$ $3/n$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 9.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{при } x \in [0;\,\theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\,\theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Используя начальный момент 2-го порядка, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра $\theta$.

$\boxed{A}$ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ $\boxed{C}$ $\frac{3}{2}\bar{X}$ $\boxed{E}$ $\frac{2}{3}\bar{X}$

$\boxed{B}$ $\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ $\boxed{D}$ $\sqrt{\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 10.** Даны выборки объёма $n$ из равномерного на отрезке $[0, 1]$ распределения. Выборочный начальный момент второго порядка стремится по вероятности при $n \to \infty$ к

$\boxed{A}$ $1/3$ $\boxed{C}$ $1/4$ $\boxed{E}$ $1/12$

$\boxed{B}$ 1 $\boxed{D}$ $1/2$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 11.** Компоненты вектора $X = (X_1, X_2, X_3)$ имеют совместное нормальное распределение:

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 2 & 0.5\\0.5 & 0.5 & 3\end{bmatrix}\right).$$

Вероятность $\mathbb{P}(X_1 > X_2 + X_3)$ равна

$\boxed{A}$ 0.688 $\boxed{C}$ 0.215 $\boxed{E}$ 0.593

$\boxed{B}$ 0.369 $\boxed{D}$ 0.701 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 12.** Случайные величины $X$ и $Y$ распределены нормально с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. Для тестирования гипотезы о равенстве дисперсий выбирается 20 наблюдений случайной величины $X$ и 30 наблюдений случайной величины $Y$. Какое распределение может иметь статистика, используемая в данном случае?

$\boxed{A}$ $F_{20,30}$ $\boxed{C}$ $\chi^2_{48}$ $\boxed{E}$ $\chi^2_{49}$

$\boxed{B}$ $t_{48}$ $\boxed{D}$ $F_{29,19}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 13.** Если функция правдоподобия пропорциональна $a^2(1-a)^6$, априорная плотность пропорциональна $\exp(-a)$, то апостериорная плотность параметра $a$ пропорциональна

$\boxed{A}$ $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(-a)$ $\boxed{C}$ $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(-a)}$ $\boxed{E}$ $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(a)}$

$\boxed{B}$ $\frac{\exp(-a)}{a^2(1-a)^6}$ $\boxed{D}$ $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(a)$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 14.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Андрей Николаевич хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Колмогорова равно

$\boxed{A}$ $2/5$ $\boxed{C}$ $3/4$ $\boxed{E}$ $3/5$

$\boxed{B}$ $2/15$ $\boxed{D}$ $1/4$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 15.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка и $\ell(\theta)$ — её логарифмическая функция правдоподобия. Тестируется гипотеза $H_0 : \theta = 1$. Известно, что $\max_\theta \ell(\theta) = -10$, а $\ell(1) = -20$. Чему равно значение статистики отношения правдоподобия?

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ 20 | $\boxed{C}$ 10 | $\boxed{E}$ $-10$ |
| $\boxed{B}$ 0 | $\boxed{D}$ $-20$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 16.** Максимальная ширина 90%-го симметричного по вероятности доверительного интервала для доли, построенного по выборке из 64 наблюдений, приблизительно равна

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ 0.102 | $\boxed{C}$ 0.368 | $\boxed{E}$ 0.234 |
| $\boxed{B}$ 0.156 | $\boxed{D}$ 0.206 | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 17.** Требуется проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий по двум нормальным независимым выборкам размером 33 и 16 наблюдений. Истинные дисперсии по обеим выборкам известны, совпадают и равны 196. Разница выборочных средних равна 1. Тестовая статистика может быть равна

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ $-1/7$ | $\boxed{C}$ $-1/4$ | $\boxed{E}$ $-1/14$ |
| $\boxed{B}$ $-1/49$ | $\boxed{D}$ $-1/2$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 18.** При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий оценок по статистике в двух группах против альтернативной гипотезы, что в первой группе оценки выше, оказалось, что выборочные средние равны. Тогда P-значение в этом тесте

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ равно $0.25$ | $\boxed{C}$ равно $0$ | $\boxed{E}$ Недостаточно данных для ответа |
| $\boxed{B}$ равно $0.5$ | $\boxed{D}$ равно $1$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 19.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. При верной $H_0$ критерий Пирсона имеет распределение

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ $\chi^2_1$ | $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(0;1)$ | $\boxed{E}$ $\chi^2_2$ |
| $\boxed{B}$ $\chi^2_3$ | $\boxed{D}$ $\chi^2_{99}$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 20.** Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При проверке этой гипотезы, тестовая статистика может иметь распределение

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ $t_{100}$ | $\boxed{C}$ $t_{99}$ | $\boxed{E}$ $t_{198}$ |
| $\boxed{B}$ $\mathcal{N}(0,1)$ | $\boxed{D}$ $t_{98}$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 21.** Рассмотрим алгоритм Метрополиса-Гастингса для получения выборки параметра с апостериорной плотностью пропорциональной $t^2$. Предлагаемый переход из $a$ в $b$ задаётся правилом, $b = a + Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0; 4)$. Вероятность одобрения перехода из точки $0.5$ в точку $0.3$ равна

$\boxed{A}$ $0.6$ $\boxed{C}$ $0.5$ $\boxed{E}$ $0.36$

$\boxed{B}$ $1$ $\boxed{D}$ $0.64$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 22.** Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной оценкой параметра $\theta$ в классе оценок $K$, если

$\boxed{A}$ $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = (\theta)^2/n$ $\boxed{D}$ $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$

$\boxed{B}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \to 0$ при $n \to \infty$ $\boxed{E}$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$

$\boxed{C}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathrm{E}((\tilde{\theta} - \theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta} \in K$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 23.** Дана реализация выборки: -1, 1, 0, 2. Эмпирическая (выборочная) функция распределения в точке $x = 0.5$ принимает значение равное

$\boxed{A}$ $0.25$ $\boxed{C}$ $1$ $\boxed{E}$ $0.5$

$\boxed{B}$ $0$ $\boxed{D}$ $0.8$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 24.** Длины катетов в сантиметрах прямоугольного треугольника являются модулями независимых стандартных нормальных случайных величин. Какую длину не превысит гипотенуза этого треугольника с вероятностью $0.95$?

$\boxed{A}$ $4.61$ $\boxed{C}$ $0.21$ $\boxed{E}$ $0.68$

$\boxed{B}$ $5.99$ $\boxed{D}$ $0.1$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 25.** При построения доверительного интервала для разности математических ожиданий в двух нормальных независимых выборках размером $m$ и $n$ в случае равных известных дисперсий используется распределение

$\boxed{A}$ $F_{m-1,n-1}$ $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(0, 1)$ $\boxed{E}$ $t_{m+n-2}$

$\boxed{B}$ $F_{m,n}$ $\boxed{D}$ $t_{m+n}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 26.** Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При расчётах Вася получил P-значение равное 0.0038. Это означает, что гипотеза

- $\boxed{A}$ отвергается на уровне значимости 5%, но не отвергается на 1%
- $\boxed{B}$ отвергается на уровне значимости 1%, но не отвергается на 5%
- $\boxed{C}$ не отвергается на любом возможном уровне значимости
- $\boxed{D}$ отвергается на любом возможном уровне значимости
- $\boxed{E}$ отвергается на уровне значимости 1%
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 27.** Для выборки 1, 2, 3, 4, 5 границы 95%-го доверительного интервала для математического ожидания равны

- $\boxed{A}$ $[1.04, 4.96]$
- $\boxed{B}$ $[3.08, 5.92]$
- $\boxed{C}$ $[-4.02, 1, 02]$
- $\boxed{D}$ $[1.54, 5.46]$
- $\boxed{E}$ $[0.86, 5.14]$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 28.** Пусть $t_n$ — случайная величина, распределенная по Стьюденту с $n$ степенями свободы. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(t_n^2 > 1\right)$ равен

- $\boxed{A}$ $0.102$
- $\boxed{B}$ $0.841$
- $\boxed{C}$ $0.788$
- $\boxed{D}$ $0.253$
- $\boxed{E}$ $0.317$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 29.** Истинное значение параметра $\theta$ равно 2, в случайной выборке 100 наблюдений, а информация Фишера о параметре $\theta$, заключенная в одном наблюдении равна $I_1(\theta) = 9$. Распределение оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ похоже на

- $\boxed{A}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/900)$
- $\boxed{B}$ $\mathcal{N}(2,\ 9)$
- $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/3)$
- $\boxed{D}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/9)$
- $\boxed{E}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/30)$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 30.** При проверке гипотезы о равенстве дисперсии 5 по 11 наблюдениям за нормально распределенной случайной величиной, оказалось, что тестовая статистика равна 2. Несмещённая оценка дисперсии была равна

- $\boxed{A}$ $5/11$
- $\boxed{B}$ $10$
- $\boxed{C}$ $5$
- $\boxed{D}$ $1$
- $\boxed{E}$ $5/10$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

Фамилия, имя, номер группы:

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Вопрос 1.** Пусть $t_n$ — случайная величина, распределенная по Стьюденту с $n$ степенями свободы. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(t_n^2 > 1\right)$ равен

$\boxed{A}$ 0.788 $\boxed{C}$ 0.253 $\boxed{E}$ 0.317

$\boxed{B}$ 0.102 $\boxed{D}$ 0.841 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 2.** Длины катетов в сантиметрах прямоугольного треугольника являются модулями независимых стандартных нормальных случайных величин. Какую длину не превысит гипотенуза этого треугольника с вероятностью $0.95$?

$\boxed{A}$ 5.99 $\boxed{C}$ 0.1 $\boxed{E}$ 0.68

$\boxed{B}$ 4.61 $\boxed{D}$ 0.21 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 3.** Истинное значение параметра $\theta$ равно $2$, в случайной выборке $100$ наблюдений, а информация Фишера о параметре $\theta$, заключенная в одном наблюдении равна $I_1(\theta) = 9$. Распределение оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ похоже на

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(2,\ 9)$ $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/30)$ $\boxed{E}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/9)$

$\boxed{B}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/900)$ $\boxed{D}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/3)$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 4.** Температура планеты Плюк и её спутника являются стандартными нормальными случайными величинами, имеющими совместное нормальное распределение. Ковариация между температурами равна $0.5$. Найдите вероятность того, что на Плюке положительная температура, если на спутнике температура равна -1.

$\boxed{A}$ 0.596 $\boxed{C}$ 0.114 $\boxed{E}$ 0.282

$\boxed{B}$ 0.739 $\boxed{D}$ 0.718 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 5.** Время подготовки студента к экзаменам и по статистике, и макроэкономике, имеет нормальное распределение с неизвестными математическими ожиданиями и дисперсиями. По $10$ наблюдениям Вениамин получил оценку стандартного отклонения времени подготовки к статистике равную $5$ часам. Оценка стандартного отклонения времени подготовки к макроэкономике, рассчитанная по $20$ наблюдениям, оказалась равной $2$. Тестовая статистика при проверке гипотезы о равенстве дисперсий может быть равна

$\boxed{A}$ 0.4 $\boxed{C}$ 12.5 $\boxed{E}$ 2.5

$\boxed{B}$ 0.16 $\boxed{D}$ 0.8 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 6.** При построении доверительного интервала для разности математических ожиданий в двух нормальных независимых выборках размером $m$ и $n$ в случае равных известных дисперсий используется распределение

$\boxed{A}$ $F_{m-1,n-1}$

$\boxed{B}$ $F_{m,n}$

$\boxed{C}$ $t_{m+n}$

$\boxed{D}$ $t_{m+n-2}$

$\boxed{E}$ $\mathcal{N}(0,1)$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 7.** Для выборки 1, 2, 3, 4, 5 границы 95%-го доверительного интервала для математического ожидания равны

$\boxed{A}$ $[-4.02, 1, 02]$

$\boxed{B}$ $[3.08, 5.92]$

$\boxed{C}$ $[0.86, 5.14]$

$\boxed{D}$ $[1.04, 4.96]$

$\boxed{E}$ $[1.54, 5.46]$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 8.** Величина $X$ принимает три значения $1$, $2$ и $3$. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что $1$ выпало $40$ раз, $2$ — $40$ раз и $3$ — $20$ раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. При верной $H_0$ критерий Пирсона имеет распределение

$\boxed{A}$ $\chi^2_1$

$\boxed{B}$ $\chi^2_3$

$\boxed{C}$ $\chi^2_{99}$

$\boxed{D}$ $\mathcal{N}(0;1)$

$\boxed{E}$ $\chi^2_2$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 9.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Известно, что оценка максимального правдоподобия параметра $\lambda$ равна $\bar{X}$. Чему равна оценка максимального правдоподобия для $1/\lambda$?

$\boxed{A}$ $1/\bar{X}$

$\boxed{B}$ $e^{\bar{X}}$

$\boxed{C}$ $\bar{X}$

$\boxed{D}$ $\ln \bar{X}$

$\boxed{E}$ $\bar{X}/n$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 10.** При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий оценок по статистике в двух группах против альтернативной гипотезы, что в первой группе оценки выше, оказалось, что выборочные средние равны. Тогда P-значение в этом тесте

$\boxed{A}$ равно $0.5$

$\boxed{B}$ Недостаточно данных для ответа

$\boxed{C}$ равно $1$

$\boxed{D}$ равно $0.25$

$\boxed{E}$ равно $0$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 11.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка и $\ell(\theta)$ — её логарифмическая функция правдоподобия. Тестируется гипотеза $H_0 : \theta = 1$. Известно, что $\max_\theta \ell(\theta) = -10$, а $\ell(1) = -20$. Чему равно значение статистики отношения правдоподобия?

$\boxed{A}$ 20 $\boxed{C}$ $-20$ $\boxed{E}$ 10

$\boxed{B}$ 0 $\boxed{D}$ $-10$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 12.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{при } x \in [0;\,\theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\,\theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Используя начальный момент 2-го порядка, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра $\theta$.

$\boxed{A}$ $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ $\boxed{C}$ $\frac{3}{2}\bar{X}$ $\boxed{E}$ $\frac{2}{3}\bar{X}$

$\boxed{B}$ $\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$ $\boxed{D}$ $\sqrt{\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 13.** Максимальная ширина 90%-го симметричного по вероятности доверительного интервала для доли, построенного по выборке из 64 наблюдений, приблизительно равна

$\boxed{A}$ 0.368 $\boxed{C}$ 0.102 $\boxed{E}$ 0.156

$\boxed{B}$ 0.206 $\boxed{D}$ 0.234 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 14.** Математическое ожидание оценки дисперсии $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ для выборки из распределения Пуассона с $\lambda = 3$, равняется

$\boxed{A}$ 9 $\boxed{C}$ $9/n$ $\boxed{E}$ 3

$\boxed{B}$ $3/n$ $\boxed{D}$ 1 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 15.** Случайные величины $X$ и $Y$ распределены нормально с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. Для тестирования гипотезы о равенстве дисперсий выбирается 20 наблюдений случайной величины $X$ и 30 наблюдений случайной величины $Y$. Какое распределение может иметь статистика, используемая в данном случае?

$\boxed{A}$ $\chi^2_{48}$ $\boxed{C}$ $t_{48}$ $\boxed{E}$ $\chi^2_{49}$

$\boxed{B}$ $F_{20,30}$ $\boxed{D}$ $F_{29,19}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 16**. Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ называется состоятельной для параметра $\theta$, если

- $\boxed{A}$ $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = (\theta)^2/n$
- $\boxed{B}$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$
- $\boxed{C}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathrm{E}((\tilde{\theta} - \theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta} \in K$
- $\boxed{D}$ $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$
- $\boxed{E}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \to 0$ при $n \to \infty$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 17**. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной оценкой параметра $\theta$ в классе оценок $K$, если

- $\boxed{A}$ $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = (\theta)^2/n$
- $\boxed{B}$ $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$
- $\boxed{C}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \to 0$ при $n \to \infty$
- $\boxed{D}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathrm{E}((\tilde{\theta} - \theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta} \in K$
- $\boxed{E}$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 18**. Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При проверке этой гипотезы, тестовая статистика может иметь распределение

- $\boxed{A}$ $t_{99}$
- $\boxed{B}$ $\mathcal{N}(0,1)$
- $\boxed{C}$ $t_{98}$
- $\boxed{D}$ $t_{100}$
- $\boxed{E}$ $t_{198}$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 19**. Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При расчётах Вася получил P-значение равное 0.0038. Это означает, что гипотеза

- $\boxed{A}$ отвергается на любом возможном уровне значимости
- $\boxed{B}$ не отвергается на любом возможном уровне значимости
- $\boxed{C}$ отвергается на уровне значимости 1%
- $\boxed{D}$ отвергается на уровне значимости 1%, но не отвергается на 5%
- $\boxed{E}$ отвергается на уровне значимости 5%, но не отвергается на 1%
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 20**. Если функция правдоподобия пропорциональна $a^2(1-a)^6$, априорная плотность пропорциональна $\exp(-a)$, то апостериорная плотность параметра $a$ пропорциональна

- $\boxed{A}$ $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(a)$
- $\boxed{B}$ $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(-a)}$
- $\boxed{C}$ $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(a)}$
- $\boxed{D}$ $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(-a)$
- $\boxed{E}$ $\frac{\exp(-a)}{a^2(1-a)^6}$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 21.** Даны выборки объёма $n$ из равномерного на отрезке $[0, 1]$ распределения. Выборочный начальный момент второго порядка стремится по вероятности при $n \to \infty$ к

$\boxed{A}$ $1/3$ $\boxed{C}$ $1/12$ $\boxed{E}$ $1/2$

$\boxed{B}$ $1$ $\boxed{D}$ $1/4$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 22.** Рассмотрим алгоритм Метрополиса-Гастингса для получения выборки параметра с апостериорной плотностью пропорциональной $t^2$. Предлагаемый переход из $a$ в $b$ задаётся правилом, $b = a + Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0; 4)$. Вероятность одобрения перехода из точки $0.5$ в точку $0.3$ равна

$\boxed{A}$ $0.5$ $\boxed{C}$ $1$ $\boxed{E}$ $0.6$

$\boxed{B}$ $0.36$ $\boxed{D}$ $0.64$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 23.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;\, 1)$. Чему равна информация Фишера о параметре $p$, заключенная в двух наблюдениях случайной выборки?

$\boxed{A}$ $\frac{2}{p(1-p)}$ $\boxed{C}$ $2(1-p)$ $\boxed{E}$ $2p$

$\boxed{B}$ $\frac{2}{p}$ $\boxed{D}$ $2p(1-p)$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 24.** Требуется проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий по двум нормальным независимым выборкам размером 33 и 16 наблюдений. Истинные дисперсии по обеим выборкам известны, совпадают и равны 196. Разница выборочных средних равна 1. Тестовая статистика может быть равна

$\boxed{A}$ $-1/7$ $\boxed{C}$ $-1/49$ $\boxed{E}$ $-1/14$

$\boxed{B}$ $-1/2$ $\boxed{D}$ $-1/4$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 25.** Компоненты вектора $X = (X_1, X_2, X_3)$ имеют совместное нормальное распределение:

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 2 & 0.5\\0.5 & 0.5 & 3\end{bmatrix}\right).$$

Вероятность $\mathbb{P}(X_1 > X_2 + X_3)$ равна

$\boxed{A}$ $0.593$ $\boxed{C}$ $0.369$ $\boxed{E}$ $0.701$

$\boxed{B}$ $0.688$ $\boxed{D}$ $0.215$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 26.** Случайная выборка состоит из одного наблюдения $X_1$, которое имеет плотность распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Чему равна оценка неизвестного параметра $\theta$, найденная с помощью метода максимального правдоподобия?

$\boxed{A}$ $1/\ln X_1$ $\boxed{C}$ $\frac{X_1}{\ln X_1}$ $\boxed{E}$ $\ln X_1$

$\boxed{B}$ $X_1/2$ $\boxed{D}$ $X_1$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 27.** При проверке гипотезы о равенстве дисперсии $5$ по $11$ наблюдениям за нормально распределенной случайной величиной, оказалось, что тестовая статистика равна 2. Несмещённая оценка дисперсии была равна

$\boxed{A}$ $10$ $\boxed{C}$ $5$ $\boxed{E}$ $5/11$

$\boxed{B}$ $1$ $\boxed{D}$ $5/10$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 28.** Дана реализация выборки: -1, 1, 0, 2. Эмпирическая (выборочная) функция распределения в точке $x = 0.5$ принимает значение равное

$\boxed{A}$ $0.8$ $\boxed{C}$ $0.5$ $\boxed{E}$ $1$

$\boxed{B}$ $0$ $\boxed{D}$ $0.25$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 29.** Величина $X$ принимает три значения $1$, $2$ и $3$. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что $1$ выпало $40$ раз, $2$ — $40$ раз и $3$ — $20$ раз. Андрей Николаевич хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Колмогорова равно

$\boxed{A}$ $3/5$ $\boxed{C}$ $3/4$ $\boxed{E}$ $1/4$

$\boxed{B}$ $2/15$ $\boxed{D}$ $2/5$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 30.** Величина $X$ принимает три значения $1$, $2$ и $3$. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что $1$ выпало $40$ раз, $2$ — $40$ раз и $3$ — $20$ раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Пирсона равно

$\boxed{A}$ $4$ $\boxed{C}$ $6$ $\boxed{E}$ $5$

$\boxed{B}$ $8$ $\boxed{D}$ $7$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

Фамилия, имя, номер группы:

.............................................................................................

**Вопрос 1.** При проверке гипотезы о равенстве дисперсии $5$ по $11$ наблюдениям за нормально распределенной случайной величиной, оказалось, что тестовая статистика равна $2$. Несмещённая оценка дисперсии была равна

- [A] $10$
- [B] $5/10$
- [C] $5$
- [D] $5/11$
- [E] $1$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 2.** Случайные величины $X$ и $Y$ распределены нормально с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. Для тестирования гипотезы о равенстве дисперсий выбирается $20$ наблюдений случайной величины $X$ и $30$ наблюдений случайной величины $Y$. Какое распределение может иметь статистика, используемая в данном случае?

- [A] $\chi^2_{48}$
- [B] $F_{20,30}$
- [C] $t_{48}$
- [D] $F_{29,19}$
- [E] $\chi^2_{49}$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 3.** Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При проверке этой гипотезы, тестовая статистика может иметь распределение

- [A] $t_{99}$
- [B] $t_{100}$
- [C] $t_{198}$
- [D] $\mathcal{N}(0,1)$
- [E] $t_{98}$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 4.** Требуется проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий по двум нормальным независимым выборкам размером 33 и 16 наблюдений. Истинные дисперсии по обеим выборкам известны, совпадают и равны 196. Разница выборочных средних равна 1. Тестовая статистика может быть равна

- [A] $-1/4$
- [B] $-1/2$
- [C] $-1/49$
- [D] $-1/14$
- [E] $-1/7$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 5.** Если функция правдоподобия пропорциональна $a^2(1-a)^6$, априорная плотность пропорциональна $\exp(-a)$, то апостериорная плотность параметра $a$ пропорциональна

- [A] $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(a)}$
- [B] $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(a)$
- [C] $\frac{\exp(-a)}{a^2(1-a)^6}$
- [D] $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(-a)}$
- [E] $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(-a)$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 6.** Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При расчётах Вася получил P-значение равное 0.0038. Это означает, что гипотеза

- [A] отвергается на уровне значимости 5%, но не отвергается на 1%
- [B] отвергается на уровне значимости 1%
- [C] не отвергается на любом возможном уровне значимости
- [D] отвергается на уровне значимости 1%, но не отвергается на 5%
- [E] отвергается на любом возможном уровне значимости
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 7.** При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий оценок по статистике в двух группах против альтернативной гипотезы, что в первой группе оценки выше, оказалось, что выборочные средние равны. Тогда P-значение в этом тесте

- [A] равно 1
- [B] равно 0.5
- [C] равно 0.25
- [D] Недостаточно данных для ответа
- [E] равно 0
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 8.** Случайная выборка состоит из одного наблюдения $X_1$, которое имеет плотность распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Чему равна оценка неизвестного параметра $\theta$, найденная с помощью метода максимального правдоподобия?

- [A] $X_1/2$
- [B] $\ln X_1$
- [C] $X_1$
- [D] $\frac{X_1}{\ln X_1}$
- [E] $1/\ln X_1$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 9.** Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ называется состоятельной для параметра $\theta$, если

- [A] $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = (\theta)^2/n$
- [B] $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ при $n \to \infty$
- [C] $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \to 0$ при $n \to \infty$
- [D] $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$
- [E] $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \le \mathrm{E}((\tilde{\theta} - \theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta} \in K$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 10.** Рассмотрим алгоритм Метрополиса-Гастингса для получения выборки параметра с апостериорной плотностью пропорциональной $t^2$. Предлагаемый переход из $a$ в $b$ задаётся правилом, $b = a + Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0; 4)$. Вероятность одобрения перехода из точки $0.5$ в точку $0.3$ равна

- [A] 0.6
- [B] 1
- [C] 0.64
- [D] 0.36
- [E] 0.5
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 11.** Математическое ожидание оценки дисперсии $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ для выборки из распределения Пуассона с $\lambda = 3$, равняется

$\boxed{A}$ $9/n$ $\boxed{C}$ 1 $\boxed{E}$ $3/n$

$\boxed{B}$ 3 $\boxed{D}$ 9 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 12.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$. Чему равна информация Фишера о параметре $p$, заключенная в двух наблюдениях случайной выборки?

$\boxed{A}$ $2p$ $\boxed{C}$ $2(1-p)$ $\boxed{E}$ $\frac{2}{p}$

$\boxed{B}$ $\frac{2}{p(1-p)}$ $\boxed{D}$ $2p(1-p)$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 13.** Истинное значение параметра $\theta$ равно 2, в случайной выборке 100 наблюдений, а информация Фишера о параметре $\theta$, заключенная в одном наблюдении равна $I_1(\theta) = 9$. Распределение оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ похоже на

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/9)$ $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/900)$ $\boxed{E}$ $\mathcal{N}(2,\ 9)$

$\boxed{B}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/3)$ $\boxed{D}$ $\mathcal{N}(2,\ 1/30)$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 14.** Дана реализация выборки: -1, 1, 0, 2. Эмпирическая (выборочная) функция распределения в точке $x = 0.5$ принимает значение равное

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{C}$ 0.8 $\boxed{E}$ 0

$\boxed{B}$ 0.5 $\boxed{D}$ 0.25 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 15.** Пусть $t_n$ — случайная величина, распределенная по Стьюденту с $n$ степенями свободы. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(t_n^2 > 1\right)$ равен

$\boxed{A}$ 0.788 $\boxed{C}$ 0.102 $\boxed{E}$ 0.317

$\boxed{B}$ 0.253 $\boxed{D}$ 0.841 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 16.** Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной оценкой параметра $\theta$ в классе оценок $K$, если

$\boxed{A}$ $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = (\theta)^2/n$

$\boxed{B}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \to 0$ при $n \to \infty$

$\boxed{C}$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$

$\boxed{D}$ $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$

$\boxed{E}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathrm{E}((\tilde{\theta} - \theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta} \in K$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 17.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка и $\ell(\theta)$ — её логарифмическая функция правдоподобия. Тестируется гипотеза $H_0 : \theta = 1$. Известно, что $\max_\theta \ell(\theta) = -10$, а $\ell(1) = -20$. Чему равно значение статистики отношения правдоподобия?

$\boxed{A}$ 10

$\boxed{B}$ $-20$

$\boxed{C}$ 0

$\boxed{D}$ $-10$

$\boxed{E}$ 20

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 18.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Известно, что оценка максимального правдоподобия параметра $\lambda$ равна $\bar{X}$. Чему равна оценка максимального правдоподобия для $1/\lambda$?

$\boxed{A}$ $\bar{X}$

$\boxed{B}$ $e^{\bar{X}}$

$\boxed{C}$ $\ln \bar{X}$

$\boxed{D}$ $\bar{X}/n$

$\boxed{E}$ $1/\bar{X}$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 19.** Время подготовки студента к экзаменам и по статистике, и макроэкономике, имеет нормальное распределение с неизвестными математическими ожиданиями и дисперсиями. По 10 наблюдениям Вениамин получил оценку стандартного отклонения времени подготовки к статистике равную 5 часам. Оценка стандартного отклонения времени подготовки к макроэкономике, рассчитанная по 20 наблюдениям, оказалась равной 2. Тестовая статистика при проверке гипотезы о равенстве дисперсий может быть равна

$\boxed{A}$ 0.4

$\boxed{B}$ 0.16

$\boxed{C}$ 2.5

$\boxed{D}$ 12.5

$\boxed{E}$ 0.8

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 20.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Андрей Николаевич хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Колмогорова равно

$\boxed{A}$ $3/4$

$\boxed{B}$ $3/5$

$\boxed{C}$ $1/4$

$\boxed{D}$ $2/5$

$\boxed{E}$ $2/15$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 21.** Даны выборки объёма $n$ из равномерного на отрезке $[0, 1]$ распределения. Выборочный начальный момент второго порядка стремится по вероятности при $n \to \infty$ к

$\boxed{A}$ $1/3$

$\boxed{B}$ $1/12$

$\boxed{C}$ $1/4$

$\boxed{D}$ $1/2$

$\boxed{E}$ $1$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 22.** Для выборки 1, 2, 3, 4, 5 границы 95%-го доверительного интервала для математического ожидания равны

$\boxed{A}$ $[0.86, 5.14]$

$\boxed{B}$ $[1.54, 5.46]$

$\boxed{C}$ $[3.08, 5.92]$

$\boxed{D}$ $[-4.02, 1, 02]$

$\boxed{E}$ $[1.04, 4.96]$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 23.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{при } x \in [0;\,\theta], \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\,\theta], \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Используя начальный момент 2-го порядка, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра $\theta$.

$\boxed{A}$ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

$\boxed{B}$ $\frac{3}{2}\bar{X}$

$\boxed{C}$ $\frac{2}{3}\bar{X}$

$\boxed{D}$ $\sqrt{\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

$\boxed{E}$ $\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 24.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Пирсона равно

$\boxed{A}$ $5$

$\boxed{B}$ $8$

$\boxed{C}$ $4$

$\boxed{D}$ $7$

$\boxed{E}$ $6$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 25.** Температура планеты Плюк и её спутника являются стандартными нормальными случайными величинами, имеющими совместное нормальное распределение. Ковариация между температурами равна $0.5$. Найдите вероятность того, что на Плюке положительная температура, если на спутнике температура равна -1.

$\boxed{A}$ $0.596$

$\boxed{B}$ $0.718$

$\boxed{C}$ $0.739$

$\boxed{D}$ $0.114$

$\boxed{E}$ $0.282$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 26.** Максимальная ширина 90%-го симметричного по вероятности доверительного интервала для доли, построенного по выборке из 64 наблюдений, приблизительно равна

$\boxed{A}$ 0.102 $\boxed{C}$ 0.234 $\boxed{E}$ 0.206

$\boxed{B}$ 0.368 $\boxed{D}$ 0.156 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 27.** Компоненты вектора $X = (X_1, X_2, X_3)$ имеют совместное нормальное распределение:

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 2 & 0.5\\0.5 & 0.5 & 3\end{bmatrix}\right).$$

Вероятность $\mathbb{P}(X_1 > X_2 + X_3)$ равна

$\boxed{A}$ 0.701 $\boxed{C}$ 0.369 $\boxed{E}$ 0.593

$\boxed{B}$ 0.215 $\boxed{D}$ 0.688 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 28.** При построения доверительного интервала для разности математических ожиданий в двух нормальных независимых выборках размером $m$ и $n$ в случае равных известных дисперсий используется распределение

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(0,1)$ $\boxed{C}$ $t_{m+n-2}$ $\boxed{E}$ $F_{m-1,n-1}$

$\boxed{B}$ $t_{m+n}$ $\boxed{D}$ $F_{m,n}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 29.** Длины катетов в сантиметрах прямоугольного треугольника являются модулями независимых стандартных нормальных случайных величин. Какую длину не превысит гипотенуза этого треугольника с вероятностью $0.95$?

$\boxed{A}$ 0.68 $\boxed{C}$ 4.61 $\boxed{E}$ 0.21

$\boxed{B}$ 5.99 $\boxed{D}$ 0.1 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 30.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. При верной $H_0$ критерий Пирсона имеет распределение

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(0;1)$ $\boxed{C}$ $\chi^2_2$ $\boxed{E}$ $\chi^2_3$

$\boxed{B}$ $\chi^2_1$ $\boxed{D}$ $\chi^2_{99}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

Фамилия, имя, номер группы:

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Вопрос 1.** При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий оценок по статистике в двух группах против альтернативной гипотезы, что в первой группе оценки выше, оказалось, что выборочные средние равны. Тогда P-значение в этом тесте

- [A] равно $0$
- [B] равно $1$
- [C] равно $0.5$
- [D] Недостаточно данных для ответа
- [E] равно $0.25$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 2.** Максимальная ширина 90%-го симметричного по вероятности доверительного интервала для доли, построенного по выборке из 64 наблюдений, приблизительно равна

- [A] 0.206
- [B] 0.234
- [C] 0.156
- [D] 0.102
- [E] 0.368
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 3.** Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При проверке этой гипотезы, тестовая статистика может иметь распределение

- [A] $t_{99}$
- [B] $t_{100}$
- [C] $t_{198}$
- [D] $t_{98}$
- [E] $\mathcal{N}(0,1)$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 4.** Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ называется состоятельной для параметра $\theta$, если

- [A] $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n-\theta)^2)\to 0$ при $n\to\infty$
- [B] $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n-\theta)^2)\leq \mathrm{E}((\tilde{\theta}-\theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta}\in K$
- [C] $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n)=\theta$
- [D] $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ при $n\to\infty$
- [E] $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)=(\theta)^2/n$
- [F] Нет верного ответа.

**Вопрос 5.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка и $\ell(\theta)$ — её логарифмическая функция правдоподобия. Тестируется гипотеза $H_0 : \theta = 1$. Известно, что $\max_\theta \ell(\theta) = -10$, а $\ell(1) = -20$. Чему равно значение статистики отношения правдоподобия?

$\boxed{A}$ $-20$ $\boxed{C}$ $-10$ $\boxed{E}$ $0$

$\boxed{B}$ $10$ $\boxed{D}$ $20$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 6.** Длины катетов в сантиметрах прямоугольного треугольника являются модулями независимых стандартных нормальных случайных величин. Какую длину не превысит гипотенуза этого треугольника с вероятностью $0.95$?

$\boxed{A}$ $5.99$ $\boxed{C}$ $0.68$ $\boxed{E}$ $4.61$

$\boxed{B}$ $0.1$ $\boxed{D}$ $0.21$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 7.** Для выборки 1, 2, 3, 4, 5 границы 95%-го доверительного интервала для математического ожидания равны

$\boxed{A}$ $[1.04, 4.96]$ $\boxed{C}$ $[0.86, 5.14]$ $\boxed{E}$ $[3.08, 5.92]$

$\boxed{B}$ $[-4.02, 1, 02]$ $\boxed{D}$ $[1.54, 5.46]$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 8.** Рассмотрим алгоритм Метрополиса-Гастингса для получения выборки параметра с апостериорной плотностью пропорциональной $t^2$. Предлагаемый переход из $a$ в $b$ задаётся правилом, $b = a + Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0; 4)$. Вероятность одобрения перехода из точки $0.5$ в точку $0.3$ равна

$\boxed{A}$ $0.5$ $\boxed{C}$ $0.64$ $\boxed{E}$ $0.36$

$\boxed{B}$ $0.6$ $\boxed{D}$ $1$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 9.** Случайные величины $X$ и $Y$ распределены нормально с неизвестным математическим ожиданием и неизвестной дисперсией. Для тестирования гипотезы о равенстве дисперсий выбирается $20$ наблюдений случайной величины $X$ и $30$ наблюдений случайной величины $Y$. Какое распределение может иметь статистика, используемая в данном случае?

$\boxed{A}$ $\chi^2_{49}$ $\boxed{C}$ $t_{48}$ $\boxed{E}$ $F_{20,30}$

$\boxed{B}$ $F_{29,19}$ $\boxed{D}$ $\chi^2_{48}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 10.** Требуется проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий по двум нормальным независимым выборкам размером 33 и 16 наблюдений. Истинные дисперсии по обеим выборкам известны, совпадают и равны 196. Разница выборочных средних равна 1. Тестовая статистика может быть равна

$\boxed{A}$ $-1/4$ $\boxed{C}$ $-1/7$ $\boxed{E}$ $-1/2$

$\boxed{B}$ $-1/14$ $\boxed{D}$ $-1/49$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 11.** Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной оценкой параметра $\theta$ в классе оценок $K$, если

$\boxed{A}$ $\mathrm{E}(\hat{\theta}_n) = \theta$

$\boxed{B}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \leq \mathrm{E}((\tilde{\theta} - \theta)^2)$ для всех $\tilde{\theta} \in K$

$\boxed{C}$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ при $n \to \infty$

$\boxed{D}$ $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n) = (\theta)^2/n$

$\boxed{E}$ $\mathrm{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) \to 0$ при $n \to \infty$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 12.** Время подготовки студента к экзаменам и по статистике, и макроэкономике, имеет нормальное распределение с неизвестными математическими ожиданиями и дисперсиями. По $10$ наблюдениям Вениамин получил оценку стандартного отклонения времени подготовки к статистике равную $5$ часам. Оценка стандартного отклонения времени подготовки к макроэкономике, рассчитанная по $20$ наблюдениям, оказалась равной $2$. Тестовая статистика при проверке гипотезы о равенстве дисперсий может быть равна

$\boxed{A}$ $0.16$

$\boxed{B}$ $0.4$

$\boxed{C}$ $12.5$

$\boxed{D}$ $2.5$

$\boxed{E}$ $0.8$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 13.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Известно, что оценка максимального правдоподобия параметра $\lambda$ равна $\bar{X}$. Чему равна оценка максимального правдоподобия для $1/\lambda$?

$\boxed{A}$ $\bar{X}/n$

$\boxed{B}$ $e^{\bar{X}}$

$\boxed{C}$ $\ln \bar{X}$

$\boxed{D}$ $1/\bar{X}$

$\boxed{E}$ $\bar{X}$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 14.** Величина $X$ принимает три значения $1$, $2$ и $3$. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что $1$ выпало $40$ раз, $2$ — $40$ раз и $3$ — $20$ раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Пирсона равно

$\boxed{A}$ $7$

$\boxed{B}$ $8$

$\boxed{C}$ $6$

$\boxed{D}$ $4$

$\boxed{E}$ $5$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 15.** Температура планеты Плюк и её спутника являются стандартными нормальными случайными величинами, имеющими совместное нормальное распределение. Ковариация между температурами равна $0.5$. Найдите вероятность того, что на Плюке положительная температура, если на спутнике температура равна -1.

$\boxed{A}$ $0.282$

$\boxed{B}$ $0.114$

$\boxed{C}$ $0.596$

$\boxed{D}$ $0.739$

$\boxed{E}$ $0.718$

$\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 16.** Пусть $t_n$ — случайная величина, распределенная по Стьюденту с $n$ степенями свободы. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(t_n^2 > 1\right)$ равен

$\boxed{A}$ 0.317 $\boxed{C}$ 0.253 $\boxed{E}$ 0.102

$\boxed{B}$ 0.841 $\boxed{D}$ 0.788 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 17.** Компоненты вектора $X = (X_1, X_2, X_3)$ имеют совместное нормальное распределение:

$$X \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 2 & 0.5\\0.5 & 0.5 & 3\end{bmatrix}\right).$$

Вероятность $\mathbb{P}(X_1 > X_2 + X_3)$ равна

$\boxed{A}$ 0.701 $\boxed{C}$ 0.215 $\boxed{E}$ 0.593

$\boxed{B}$ 0.369 $\boxed{D}$ 0.688 $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 18.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения

$$f(x;\,\theta) = \begin{cases}\frac{2x}{\theta^2} & \text{при } x \in [0;\,\theta],\\ 0 & \text{при } x \notin [0;\,\theta],\end{cases}$$

где $\theta > 0$. Используя начальный момент 2-го порядка, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра $\theta$.

$\boxed{A}$ $\frac{2}{3}\bar{X}$ $\boxed{C}$ $\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$ $\boxed{E}$ $\sqrt{\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n X_i^2}$

$\boxed{B}$ $\frac{3}{2}\bar{X}$ $\boxed{D}$ $\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 19.** Если функция правдоподобия пропорциональна $a^2(1-a)^6$, априорная плотность пропорциональна $\exp(-a)$, то апостериорная плотность параметра $a$ пропорциональна

$\boxed{A}$ $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(a)$ $\boxed{C}$ $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(a)}$ $\boxed{E}$ $\frac{a^2(1-a)^6}{\exp(-a)}$

$\boxed{B}$ $\frac{\exp(-a)}{a^2(1-a)^6}$ $\boxed{D}$ $0.5a^2(1-a)^6 + 0.5\exp(-a)$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 20.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Карл хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. При верной $H_0$ критерий Пирсона имеет распределение

$\boxed{A}$ $\mathcal{N}(0;1)$ $\boxed{C}$ $\chi^2_2$ $\boxed{E}$ $\chi^2_{99}$

$\boxed{B}$ $\chi^2_3$ $\boxed{D}$ $\chi^2_1$ $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 21.** При построения доверительного интервала для разности математических ожиданий в двух нормальных независимых выборках размером $m$ и $n$ в случае равных известных дисперсий используется распределение

- $\boxed{A}$ $t_{m+n}$
- $\boxed{B}$ $F_{m,n}$
- $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(0,1)$
- $\boxed{D}$ $F_{m-1,n-1}$
- $\boxed{E}$ $t_{m+n-2}$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 22.** При проверке гипотезы о равенстве дисперсии $5$ по $11$ наблюдениям за нормально распределенной случайной величиной, оказалось, что тестовая статистика равна $2$. Несмещённая оценка дисперсии была равна

- $\boxed{A}$ $1$
- $\boxed{B}$ $5/10$
- $\boxed{C}$ $10$
- $\boxed{D}$ $5/11$
- $\boxed{E}$ $5$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 23.** Вася считает, что контрольные по макроэкономике и статистике нравятся студентам с одинаковой вероятностью. Чтобы проверить эту гипотезу, он опросил по 100 случайных однокурсников после каждой контрольной и выяснил, что макроэкономика понравилась 30 студентам, а статистика — 50. При расчётах Вася получил P-значение равное 0.0038. Это означает, что гипотеза

- $\boxed{A}$ отвергается на уровне значимости 5%, но не отвергается на 1%
- $\boxed{B}$ отвергается на уровне значимости 1%
- $\boxed{C}$ отвергается на уровне значимости 1%, но не отвергается на 5%
- $\boxed{D}$ отвергается на любом возможном уровне значимости
- $\boxed{E}$ не отвергается на любом возможном уровне значимости
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 24.** Дана реализация выборки: -1, 1, 0, 2. Эмпирическая (выборочная) функция распределения в точке $x = 0.5$ принимает значение равное

- $\boxed{A}$ $1$
- $\boxed{B}$ $0.8$
- $\boxed{C}$ $0.5$
- $\boxed{D}$ $0$
- $\boxed{E}$ $0.25$
- $\boxed{F}$ Нет верного ответа.

**Вопрос 25.** Величина $X$ принимает три значения 1, 2 и 3. По случайной выборке из ста наблюдений оказалось, что 1 выпало 40 раз, 2 — 40 раз и 3 — 20 раз. Андрей Николаевич хочет проверить гипотезу о том, что все три вероятности одинаковые. Значение критерия согласия Колмогорова равно

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ 3/5 | $\boxed{C}$ 1/4 | $\boxed{E}$ 2/5 |
| $\boxed{B}$ 2/15 | $\boxed{D}$ 3/4 | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 26.** Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0; 1)$. Чему равна информация Фишера о параметре $p$, заключенная в двух наблюдениях случайной выборки?

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ $\frac{2}{p(1-p)}$ | $\boxed{C}$ $\frac{2}{p}$ | $\boxed{E}$ $2p$ |
| $\boxed{B}$ $2p(1-p)$ | $\boxed{D}$ $2(1-p)$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 27.** Математическое ожидание оценки дисперсии $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ для выборки из распределения Пуассона с $\lambda = 3$, равняется

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ $3/n$ | $\boxed{C}$ $9/n$ | $\boxed{E}$ 3 |
| $\boxed{B}$ 9 | $\boxed{D}$ 1 | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 28.** Случайная выборка состоит из одного наблюдения $X_1$, которое имеет плотность распределения

$$f(x;\, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\theta > 0$. Чему равна оценка неизвестного параметра $\theta$, найденная с помощью метода максимального правдоподобия?

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ $\ln X_1$ | $\boxed{C}$ $\frac{X_1}{\ln X_1}$ | $\boxed{E}$ $1/\ln X_1$ |
| $\boxed{B}$ $X_1/2$ | $\boxed{D}$ $X_1$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 29.** Даны выборки объёма $n$ из равномерного на отрезке $[0, 1]$ распределения. Выборочный начальный момент второго порядка стремится по вероятности при $n \to \infty$ к

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ 1/2 | $\boxed{C}$ 1/12 | $\boxed{E}$ 1/3 |
| $\boxed{B}$ 1 | $\boxed{D}$ 1/4 | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |

**Вопрос 30.** Истинное значение параметра $\theta$ равно 2, в случайной выборке 100 наблюдений, а информация Фишера о параметре $\theta$, заключенная в одном наблюдении равна $I_1(\theta) = 9$. Распределение оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}$ похоже на

| | | |
|---|---|---|
| $\boxed{A}$ $\mathcal{N}(2,\, 9)$ | $\boxed{C}$ $\mathcal{N}(2,\, 1/3)$ | $\boxed{E}$ $\mathcal{N}(2,\, 1/900)$ |
| $\boxed{B}$ $\mathcal{N}(2,\, 1/30)$ | $\boxed{D}$ $\mathcal{N}(2,\, 1/9)$ | $\boxed{F}$ Нет верного ответа. |