

Имя, фамилия и номер группы:

.....

Ровно 189 лет назад, 1 июня 1830 британский учёный Джон Росс открыл северный магнитный полюс :)

1. Пусть y — стандартный нормальный n -мерный вектор. Он случайный, просто Джону Россу лень писать заглавные буквы для векторов :) Вектор a — неслучайный, но тоже гордый n -мерный.

Пусть H — матрица, проецирующая любой вектор на $(n-1)$ -мерное подпространство a^\perp , являющееся ортогональным дополнением к вектору a . То есть, для любого вектора v вектор Hv перпендикулярен вектору a .

- а) Найдите матрицу H , если $n = 3$ и $a = (1, 2, 2)'$.
 - б) Найдите матрицу H для произвольного n и a ;
 - в) Найдите $E(y)$ и $\text{Var}(y)$;
 - г) Найдите $E(Hy)$ и $\text{Var}(Hy)$;
 - д) Укажите закон распределения $y'Hy$, где y' — это транспонированный вектор y .
2. Рассмотрим формулу, здорово упрощающую подсчёт критерия Пирсона:

$$\sum_{j=1}^m \frac{(X_j - np_j)^2}{np_j} + n = \sum_{j=1}^m \frac{X_j^2}{np_j}$$

- а) Докажите формулу.
 - б) Нарисуйте картинку к этой формуле. На картинке подпишите прямой угол, катеты и гипотенузу.
3. На Земле короля Уильяма Джон Росс нашёл странную монетку. Он подбрасывает её n раз и обнаруживает, что она выпадает на орла, решку и ребро. Джон Росс проверяет гипотезу H_0 о том, что все три вероятности равны.

Пусть $y = (y_1, y_2, y_3)'$ — количество выпадений орла, решки и ребра. Рассмотрим так же вектор $z = (z_1, z_2, z_3)'$, такой, что $z_i = (y_i - E(y_i))/\sqrt{E(y_i)}$. Джон Росс сознательно перепутал ожидание и дисперсию в классической формуле!

Предположим, что гипотеза H_0 верна.

- а) Укажите закон распределения каждой величины y_i ;
- б) Найдите вектор $E(y)$ и матрицу $\text{Var}(y)$;
- в) Найдите вектор $E(z)$ и матрицу $\text{Var}(z)$;
- г) Докажите, что матрица $H = \text{Var}(z)$ является проектором на ортогональное дополнение к некоторому вектору a . Явно выпишите вектор a .
- д) Объясните, почему критерий Пирсона имеет хи-квадрат распределение с нужным числом степеней свободы.

4. На Земле короля Уильяма Джон Росс нашёл странную монетку. Он подбрасывает её n раз и обнаруживает, что она выпадает на орла, решку и ребро. Джон Росс проверяет гипотезу о том, что все три вероятности равны с помощью двух статистики: LR , отношения правдоподобия, и CP , критерия Пирсона.

а) Найдите $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{LR}{CP}$;

б) Обобщите решение на случай произвольного количества равновероятных граней у монетки.

5. Идея доказательства состоятельности ML оценки :)

Пусть наблюдения y_1, \dots, y_n независимы и одинаково распределены с функцией плотности, зависящей от параметра a . Истинное значение параметра обозначим буквой a_0 . Оценку максимального правдоподобия обозначим \hat{a} .

Рассмотрим отмасштабированную логарифмическую функцию правдоподобия $\ell_n(a) = \ell(a)/n$, и ожидаемую логарифмическую функцию правдоподобия¹, $\tilde{\ell}(a) = E(\ell(a))$.

а) Что больше, $\ln x$ или $x - 1$? Докажите!

б) В какой точке находится максимум функции $\ell_n(a)$?

в) В какой точке находится максимум функции $\tilde{\ell}(a)$?

Подсказка: рассмотрите выражение $\tilde{\ell}(a) - \tilde{\ell}(a_0)$ и примените доказанное неравенство :)

г) К чему сходится $\ell_n(a)$ по вероятности?

¹Внимание: ожидание считается с помощью истинного a_0 от функции, в которую входит константа a .
