

Имя, фамилия и номер группы:

.....

1. Маша подбрасывает правильную монетку три раза. Величина X_i равна единице, если в i -м броске выпал орёл, и нулю иначе. Определим также суммы $S_2 = X_1 + X_2$ и $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$.

Рассмотрим геометрию, порождаемую скалярным произведением $\langle L, R \rangle = \text{Cov}(L, R)$.

- а) Какие величины из набора X_1, X_2, X_3, S_2, S_3 ортогональны?
- б) Приведите пример любой непостоянной случайной величины, лежащей в S_3^\perp , ортогональном дополнении к S_3 .
- в) Выразите через X_1 и S_3 проекцию X_1 на S_3 .
- г) Выразите через X_1 и S_3 проекцию X_1 на S_3^\perp .

Определение :) Частной корреляцией между величинами L и R при фиксированной величине M , $\text{rCorr}(L, R; M)$, называется корреляция между проекциями L и R на подпространство M^\perp .

- д) Найдите частную корреляцию между X_1 и X_2 при фиксированной S .

2. В данном упражнении храбрый Винни-Пух докажет, что нормальное распределение обладает максимальной энтропией среди всех распределений с заданным ожиданием и дисперсией.

- а) Помогите медведю с опилками в голове определить, что больше, $\ln t$ или $t - 1$?
- б) У Винни-Пуха есть две функции плотности, $q(x)$ и $p(x)$. Подставив в найденное неравенство вместо t отношение плотностей докажите, что

$$CE_p(q) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln q(x) dx \geq - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx = H(p)$$

- в) Помогите Винни-Пуху вспомнить формулу плотности $q(x)$ для нормального распределения. И найдите энтропию данного распределения, $H(q)$.
- г) Для произвольной случайной величины с ожиданием μ , дисперсией σ^2 и плотностью $p(x)$, и для нормальной плотности $q(x)$ найдите кросс-энтропию $CE_p(q)$ и завершите доказательство.

3. В банке 10 независимых клиентских «окошек». В момент открытия в банк вошло 10 человек. Других клиентов банке не было. Предположим, что время обслуживания одного клиента распределено экспоненциально с параметром λ .

Оцените параметр λ методом максимального правдоподобия в каждой из ситуаций:

- а) Менеджер записал время обслуживания первого клиента в каждом окошке. Первое окошко обслужило своего первого клиента за 10 минут, второе, своего первого, — за 20 минут; оставшуюся часть записей менеджер благополучно затерял.
 - б) Менеджер наблюдал за окошками в течение получаса и записывал время обслуживания первого клиента. Первое окошко обслужило своего первого клиента за 10 минут, второе, своего первого, — за 20 минут; остальные окошки еще обслуживали своих первых клиентов в тот момент, когда менеджер удалился.
 - в) Менеджер наблюдал за окошками в течение получаса. За эти полчаса два окошка успели обслужить своих первых клиентов. Остальные окошки ещё обслуживали своих первых клиентов в тот момент, когда менеджер удалился.
 - г) Менеджер наблюдал за окошками и решил записать время обслуживания первых двух клиентов. Первое окошко обслужило своего первого клиента за 10 минут, другое, своего первого, — за 20 минут. Сразу после того, как был обслужен второй клиент менеджер прекратил наблюдение.
4. В день метеоролога, 23 марта, 23 метеоролога собрались сыграть в странную игру :) У каждого из них есть монетка. Монетка первого метеоролога выпадает орлом с вероятностью $1/2$, второго — $2/3$, третьего — $3/4$, и так далее.

Метеорологи садятся за круглым столом в случайном порядке и одновременно подкидывают монетки. Затем каждый смотрит на результаты подбрасываний двух своих соседей. Если результаты бросков соседей совпадают между собой, то метеоролог покидает игру. Оставшиеся в игре метеорологи повторяют подбрасывание монеток до тех пор, пока в игре не останется один метеоролог или вообще никого.

Если в финале остался один метеоролог, то он объявляется Самым Главным Метеорологом Года.

У кого больше шансов стать Самым Главным?

5. Аня и Белла нашли неправильную монетку, что падает на орла с вероятностью p . В первый день они подкинули её 100 раз, во второй — 200 раз, в третий — 400 раз.

Аня запомнила суммарное количество орлов за первые два дня — 120 орлов. А Белла — суммарное количество за второй и третий день — 300 орлов.

- а) Найдите оценку p с наименьшей дисперсией.
 - б) Оцените дисперсию полученной оценки.
 - в) Постройте 95%-й доверительный интервал для p .
-