**Задача №1**

Рассмотрим случайную величину  – цена -го проданного кокошника, где . Рассмотрим множество платьев, стоимостью . Через  обозначим количество таких платьев. Тогда очевидно, что . Отсюда следует, что:



Таким образом  и  имеют одинаковые маргинальные распределения. По индукции нетрудно показать, что маргинальные распределения всех  совпадают. Отметим, что отсюда следует, что  и  для любых .

Обратим внимание, что, несмотря на равенство маргинальных распределений, случайные величины  – зависимы. При этом . Поскольку маргинальные распределения  совпадают, то достаточно показать, что . Через  обозначим множество стоимостей платьев, а через  – соответствующих им количеств, где . Без потери общности допустим, что  и . Тогда получаем, что:



В свете вышесказанного математическое ожидание вырученных Василисой денег принимает вид:



Теперь найдем дисперсию:



Из условия известно, что , поэтому остается найти лишь . Во-первых, обратим внимание, что:



Во-вторых, это же выражение можно расписать следующим образом:



Объединяя оба полученных выше результата имеем:



Решая получаем, что . Подставляя данный результат в изначальное уравнение имеем:



**Задача №2**

Воспользуемся первым начальным моментом, то есть математическим ожиданием:



Отсюда следует, что . Подставляя вместо математического ожидания его оценку получаем: , где .

**Задача №3**

а) Оценка является несмещенной, поскольку:



б) Найдем дисперсию оценки:



Необходимо посчитать второй начальный момент:



Подставляя полученный результат в выражение для дисперсии оценки получаем:



в) Оценка является состоятельной, так как соблюдены оба достаточных условия:

1. 

2. 

г) Сперва найдем распределение оценки . Для этого найдем функцию распределения на интервале , пользуясь свойствами независимости и одинаковой распределенности элементов выборки:



Дифференцируя функцию распределения получаем функцию плотности:



Теперь нетрудно показать, что оценка является смещенной, поскольку:



Величина смещения составляет:



д) Поскольку оценка  является несмещенной, то:



Для оценки  получаем:



Найдем второй начальный момент этой оценки:



Подставляя моменты в выражение для  имеем:



Рассмотрим разницу в MSE:



Знак этой разницы зависит от знака , . Поэтому, следует рассмотреть три случая.

Во-первых, предположим, что , а значит  или , чего быть не может, следовательно, рассматриваемые оценки никогда не будут одинаково эффективными.

Во-вторых, допустим, что , тогда  и при таком объеме выборки оценка  оказывается более эффективной.

В-третьих, если , то  или  и лишь при таком объеме выборки оценка  будет более эффективной согласно рассматриваемому критерию.

**Задача №4**

а) Функция правдоподобия имеет вид:



Тогда логарифм функции правдоподобия принимает форму:



Условия первого порядка принимают вид:



Решая данное равенство получаем точку экстремума:



Проверим условия второго порядка:



Полученный результат свидетельствует в пользу того, что  является точкой глобального максимума функции правдоподобия, а значит оценка максимального правдоподобия  параметра  принимает вид:



б) Полученная оценка является несмещенной, поскольку:



в) Вычислим информацию Фишера следующим образом:



г) Рассмотрим произвольную несмещенную оценку  параметра . Тогда, согласно неравенству Рао-Крамера, получаем:



Покажем, что для оценки  данное равенство соблюдается строго, что докажет её эффективность:



**Задача №5**

Введем обозначения для реализаций экстремальных статистик:  и . Обратим пристальное внимание на то, что функция плотности  принимает значение  только при , а в противном случае – принимает нулевое значение. Учитывая это обстоятельство, аккуратно запишем функцию правдоподобия:



Поскольку функция правдоподобия строго убывает по  при  и равна нулю в противном случае, то точкой максимума будет , а значит оценка максимального правдоподобия принимает вид: , где .