【DFS】-生成哈夫曼树

题目描述与示例

题目描述

给定长度为 `n` 的无序的数字数组，每个数字代表二叉树的叶子节点的权值，数字数组的值均大于等于 `1` 。

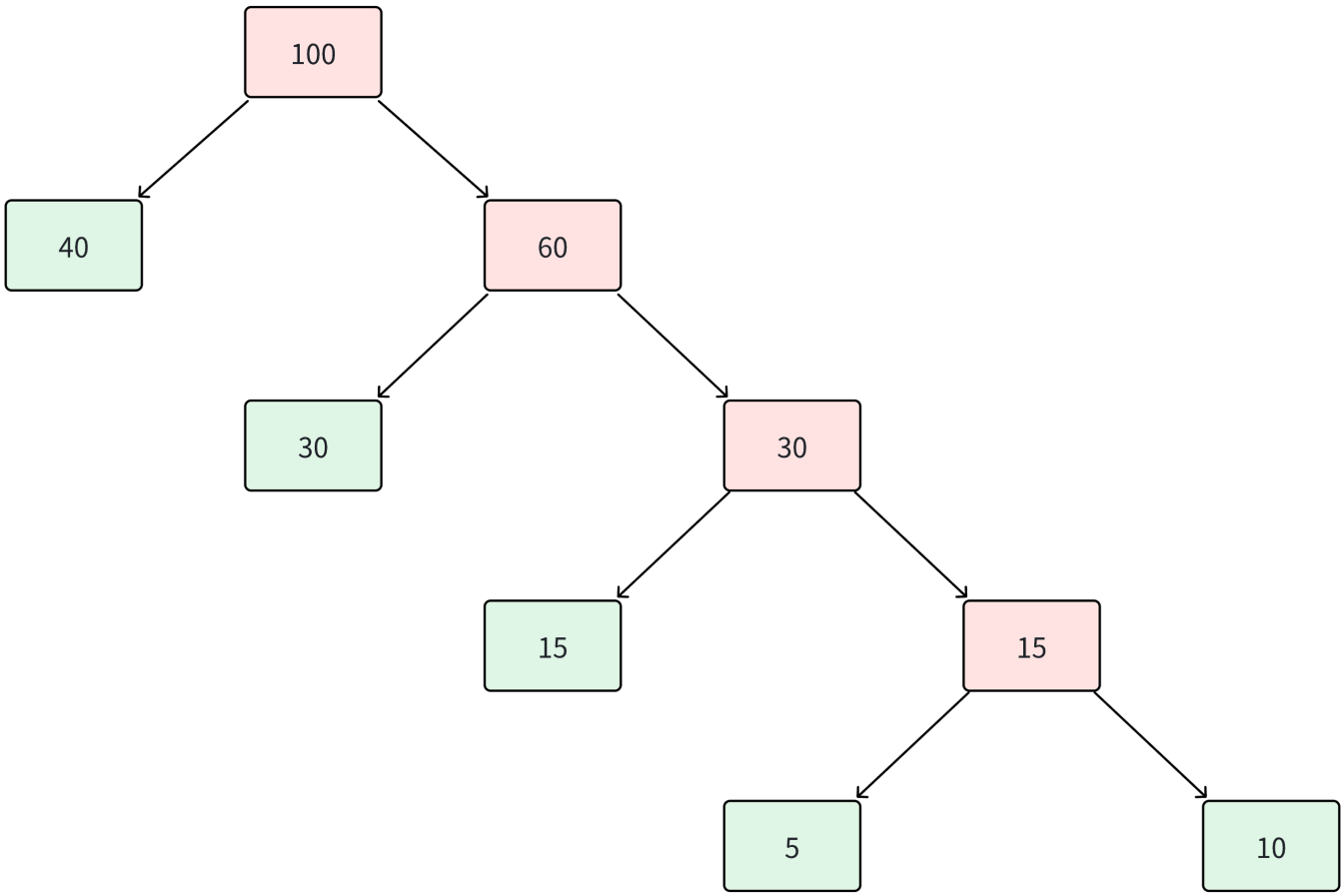
请完成一个函数，根据输入的数字数组，生成哈夫曼树，并将哈夫曼树按照中序遍历输出。

为了保证输出的二叉树中序遍历结果统一，增加以下限制：**二叉树节点中，左节点权值小于等于右节点权值，根节点权值为左右节点权值之和。当左右节点权值相同时，左子树高度高度小于等于右子树**

注意：所有用例保证有效，并能生成哈夫曼树。

提醒：哈夫曼树又称最优二叉树，是一种带权路径长度最短的二叉树。所谓树的带权路径长度，就是树中所有的叶结点的权值乘上其到根结点的路径长度（若根结点为 `0` 层，叶结点到根结点的路径长度为叶结点的层数）。

例如：由叶子节点 `5 15 40 30 10` 生成的最优二叉树如下图所示



该树的最短带权路径长度为 `40*1+30*2+15*3+5*4+10*4 = 205`

输入描述

第一行输入为数组长度，记为 `N`， `1<=N<=1000`

第二行输入无序数值数组，以空格分割，数值均大于等于 `1`，小于 `100000`

输出描述

输出一个哈夫曼树的中序遍历的数组，数值间以空格分割

示例

输入

```
5
5 15 40 30 10
```

输出

```
40 100 30 60 15 30 5 15 10
```

解题思路

节点类的构建

普通的二叉树节点包括三个属性，值 `val` ，左节点 `left` ，右节点 `right` 。

但本题构建哈夫曼树的过程，还需要考虑到子树的高度，因此还需要储存一个高度 `height` 属性。

```python
class TreeNode:
    def __init__(self, val, left, right, height):
        self.val = val
        self.left = left
        self.right = right
        self.height = height
```

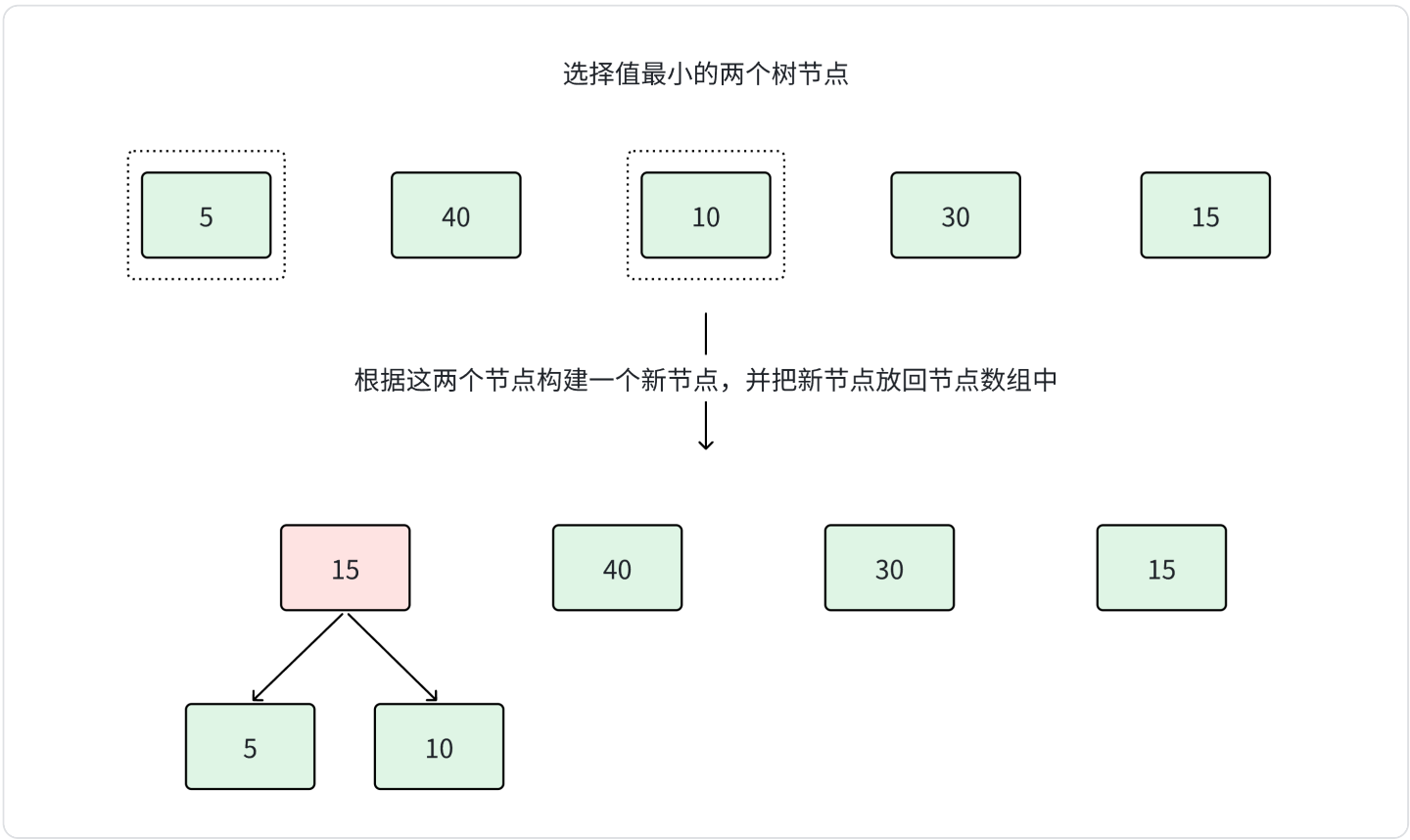
构建哈夫曼树

本题的难点其实在于如何构建哈夫曼树。

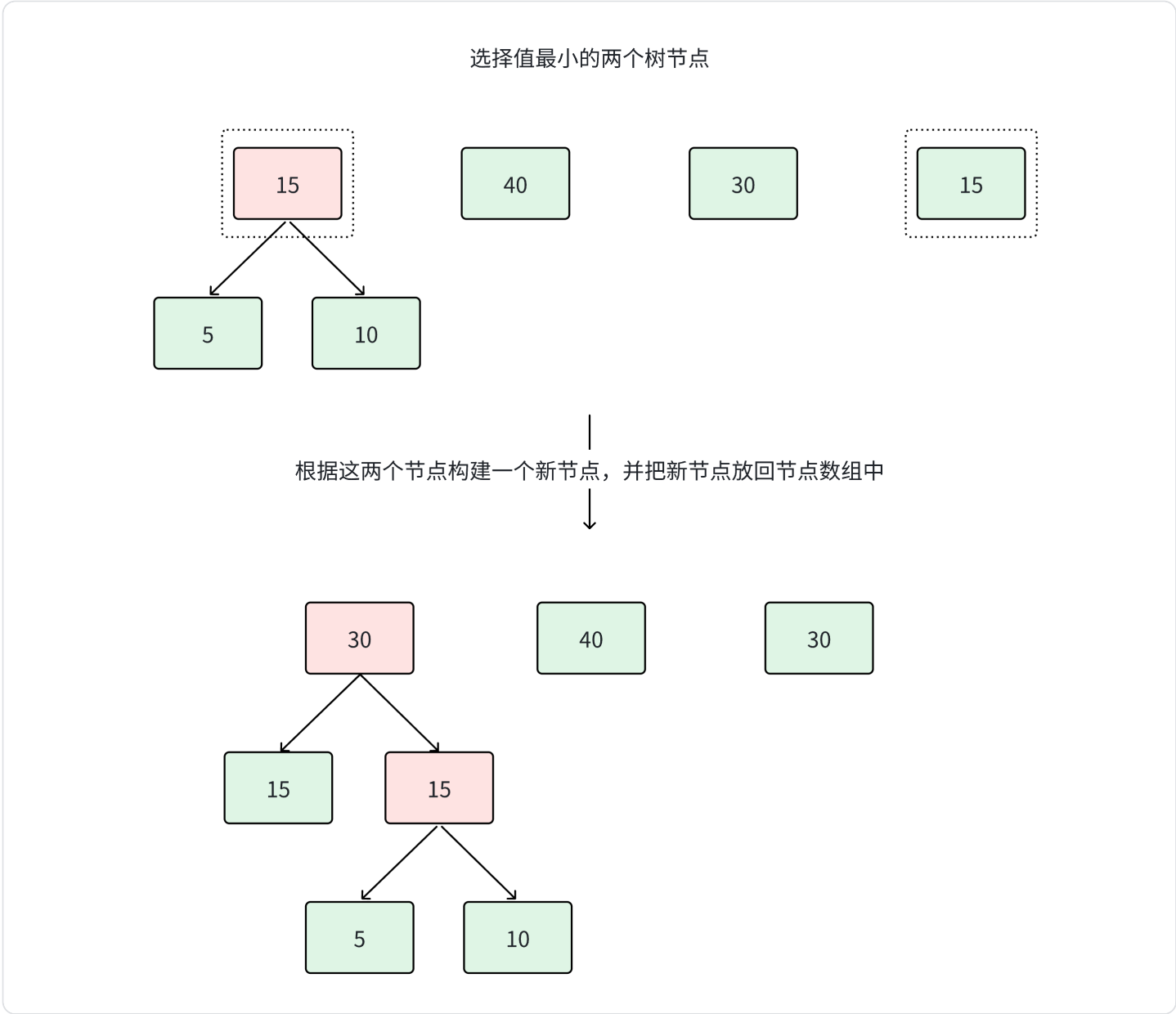
具体例子

我们先看一个具体的例子。对于例子

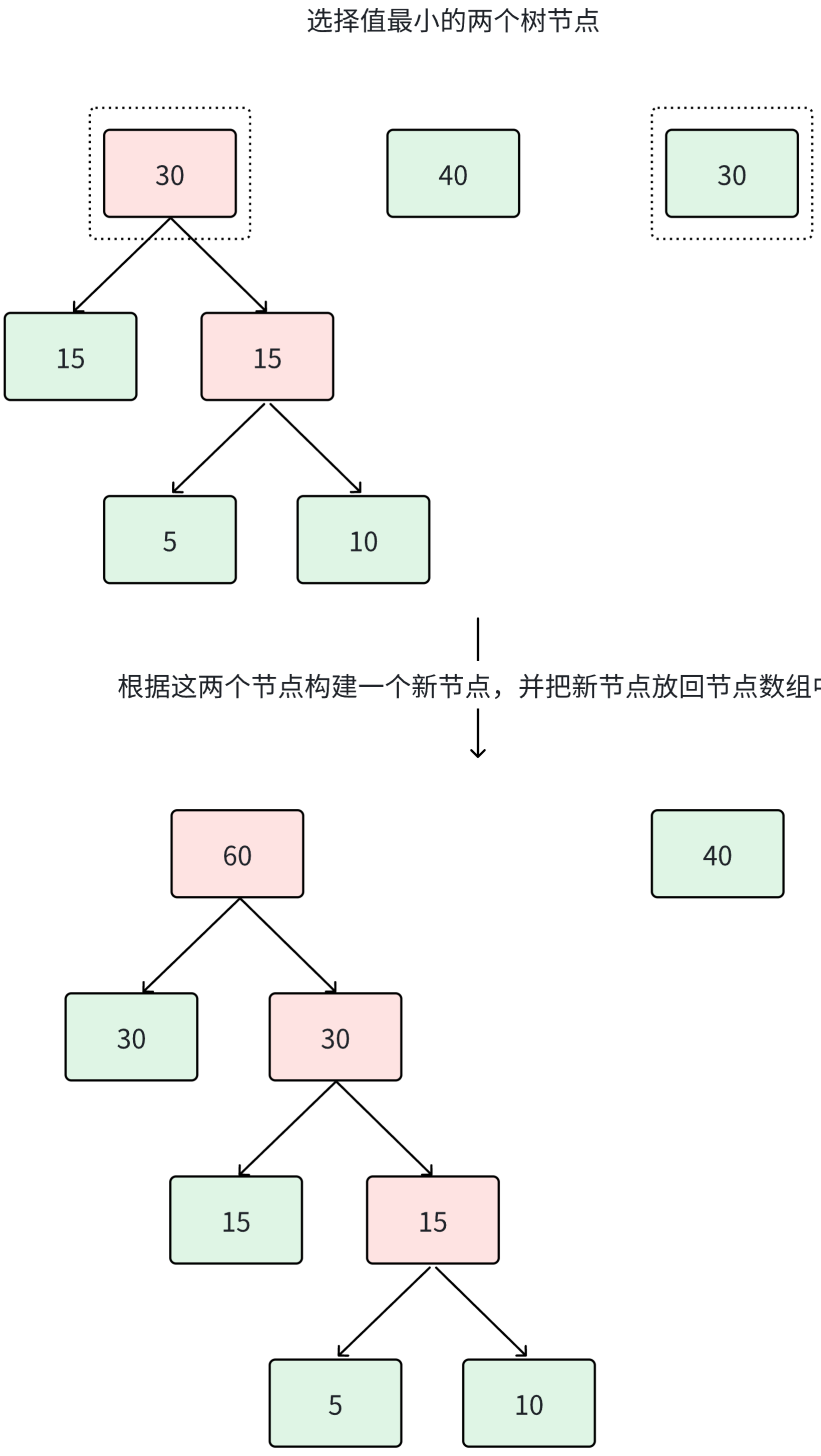
我们可以从叶节点开始进行哈夫曼树的构建，其过程如下。



再重复上述过程


选择值最小的两个树节点
15
40
30
15
5
10
根据这两个节点构建一个新节点，并把新节点放回节点数组中
30
40
30
15
15
5
10

然后重复上述过程



构建树的逻辑

从上述例子可以窥见我们构建哈夫曼树的逻辑。

节点数组初始化

最开始的时候，我们需要构建一个节点数组，其中包含了所有的叶节点。

这些叶节点的左右节点均为 `None` ，高度为 `0` 。

```
node_lst = [TreeNode(val, None, None, 0) for val in lst]
```

这些叶节点会是构建哈夫曼树的基础。

只考虑节点值来构建树

我们需要在 `node_lst` 中挑选出两个值最小的节点，根据这两个节点来构建一个新节点 `new_node` 。

由于需要挑选出值最小的两个节点，所以我们可以对 `node_lst` 进行排序。

```
node_lst.sort(key = lambda node: -node.val)
left, right = node_lst.pop(), node_lst.pop()
```

新节点的值为这两个节点值的和，新节点的左节点为值较小的节点，新节点的右节点为值较大的节点。高度暂时先不考虑，设置为 `0` 。

```
val = left.val + right.val
new_node = TreeNode(val, left, right, 0)
```

新节点需要重新加入 `node_lst` ，在后续这个节点会继续作为树中的节点来构建树

```
node_lst.append(new_node)
```

同时考虑节点高度来构建树

在只考虑节点值的来构建树的过程中，我们默认了左节点的值是小于右节点的值的。

但题目中的描述存在这样一句话：**当左右节点权值相同时，左子树高度高度小于等于右子树**

这意味着左节点的值可能等于右节点的值，且在相等的时候我们需要同时考虑两棵子树的高度。

所以我们在对 `node_lst` 进行排序的时候，要同时考虑每一个节点的高度。

仍然优先按照节点值进行逆序排序，再按照高度进行逆序排序。修改代码

```
node_lst.sort(key=lambda node: (-node.val, -node.height))
left, right = node_lst.pop(), node_lst.pop()
```

而新节点的高度 `height` ，等于弹出的两个左右节点的高度中的较大值再加 `1` ，其中加 `1` 表示新节点带来的新增高度。

```
height = max(left.height, right.height) + 1
```

`height` 也要作为属性来构建 `new_node` 。所以上述代码修改为

```
val = left.val + right.val
new_node = TreeNode(val, left, right, height)
node_lst.append(new_node)
```

在循环中构建树

上述的流程只是构建了一棵子树，我们需要重复上述过程，直到构建出一棵完整的哈夫曼树。

那么构建到什么程度说明哈夫曼树完全构建完毕了呢？答案是当 `node_lst` 中只剩下一个节点的时候，那么这个剩下的唯一节点就是根节点。

因此整体的构建树的函数 `build_tree()` 如下

```
def build_tree(node_lst):
    while (len(node_lst) > 1):
        node_lst.sort(key=lambda node: (-node.val, -node.height))
        left, right = node_lst.pop(), node_lst.pop()
        val = left.val + right.val
        height = max(left.height, right.height) + 1
        new_node = TreeNode(val, left, right, height)
        node_lst.append(new_node)
```

中序遍历

构建完哈夫曼树之后，剩下的中序遍历就非常简单了。

在得到根节点 `root = node_lst[0]` 之后，直接套模板即可。

```python
# 中序遍历递归函数
def inorder(ans, node):
    if node == None:
        return
    inorder(ans, node.left)
    ans.append(node.val)
    inorder(ans, node.right)

# 构建哈夫曼树
node_lst = [TreeNode(val, None, None, 0) for val in lst]
build_tree(node_lst)

# 中序遍历，其中根节点为node_lst[0]
ans = list()
inorder(ans, node_lst[0])

# 输出答案
print(*ans)
```

其他优化

上述解法已经是可以通过全部用例了，但如果想实现更优的时间复杂度，排序并取节点的这一步，可以用**堆排序即优先队列**来代替。

这样可以将构建树中 `while` 循环中的单步操作的时间复杂度从 `O(NlogN)` 降为 `O(logN)` 。

代码

Python

```python
# 题目：【DFS】2024E-生成哈夫曼树
# 分值：100
# 作者：闭着眼睛学数理化
# 算法：DFS/排序/树
# 代码看不懂的地方，请直接在群上提问


# 定义树节点的类，包括
# 值val，左节点left，右节点right，该节点的高度（向下的层数）height
class TreeNode:
    def __init__(self, val, left, right, height):
        self.val = val
        self.left = left
        self.right = right
        self.height = height


# 构建树的函数
def build_tree(node_lst):
    # while循环，直到node_lst中只剩下一个节点，即为根节点
    while (len(node_lst) > 1):
        # 对node_lst进行排序，先按照节点值val逆序排序，再按照节点高度height逆序排序
        node_lst.sort(key=lambda node: (-node.val, -node.height))
        # 弹出末尾元素，为当前所选择的，用来构建新节点的两个节点
        left, right = node_lst.pop(), node_lst.pop()
        # 新节点的值为左右节点值的和
        val = left.val + right.val
        # 新节点的高度为左右节点的高度的较大值再+1
        # 其中+1表示新节点增加的高度
        height = max(left.height, right.height) + 1
        # 构建新节点new_node
        new_node = TreeNode(val, left, right, height)
        # 将新节点加入列表new_node中
        node_lst.append(new_node)


# 中序遍历的函数
def inorder(ans, node):
    if node == None:
        return
    inorder(ans, node.left)
    ans.append(node.val)
    inorder(ans, node.right)
```

```python

# 输入
n = int(input())
lst = list(map(int, input().split()))

# 初始化节点列表node_lst，包含为所有叶节点的列表
node_lst = [TreeNode(val, None, None, 0) for val in lst]
# 构建树，退出后node_lst的长度为1
build_tree(node_lst)

# 初始化答案列表
ans = list()
# 中序遍历函数，传入根节点为node_lst中唯一的一个节点node_lst[0]
inorder(ans, node_lst[0])

# 输出结果
print(*ans)
```

Java

```java
import java.util.*;

class TreeNode {
    int val;
    TreeNode left, right;
    int height;

    TreeNode(int val, TreeNode left, TreeNode right, int height) {
        this.val = val;
        this.left = left;
        this.right = right;
        this.height = height;
    }
}

public class Main {

    // 构建树的函数
    public static void buildTree(List<TreeNode> nodeList) {
        // while循环，直到node_lst中只剩下一个节点，即为根节点
        while (nodeList.size() > 1) {
            // 对node_lst进行排序，先按照节点值val逆序排序，再按照节点高度height逆序排序
            nodeList.sort((a, b) -> {
```

```java
                if (b.val != a.val) return b.val - a.val;
                return b.height - a.height;
            });
            // 弹出末尾元素，为当前所选择的，用来构建新节点的两个节点
            TreeNode left = nodeList.remove(nodeList.size() - 1);
            TreeNode right = nodeList.remove(nodeList.size() - 1);
            // 新节点的值为左右节点值的和
            int val = left.val + right.val;
            // 新节点的高度为左右节点的高度的较大值再+1
            // 其中+1表示新节点增加的高度
            int height = Math.max(left.height, right.height) + 1;
            // 构建新节点new_node
            TreeNode newNode = new TreeNode(val, left, right, height);
            // 将新节点加入列表new_node中
            nodeList.add(newNode);
        }
    }

    // 中序遍历的函数
    public static void inorder(List<Integer> ans, TreeNode node) {
        if (node == null) return;
        inorder(ans, node.left);
        ans.add(node.val);
        inorder(ans, node.right);
    }

    public static void main(String[] args) {
        Scanner sc = new Scanner(System.in);
        int n = sc.nextInt();
        int[] lst = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            lst[i] = sc.nextInt();
        }

        // 初始化节点列表node_lst，包含为所有叶节点的列表
        List<TreeNode> nodeList = new ArrayList<>();
        for (int val : lst) {
            nodeList.add(new TreeNode(val, null, null, 0));
        }
        // 构建树，退出后node_lst的长度为1
        buildTree(nodeList);

        // 初始化答案列表
        List<Integer> ans = new ArrayList<>();
        // 中序遍历函数，传入根节点为node_lst中唯一的一个节点node_lst.get(0)
        inorder(ans, nodeList.get(0));

```

```
        // 输出结果
        for (int val : ans) {
            System.out.print(val + " ");
        }
    }
}

```

C++

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
using namespace std;

class TreeNode {
public:
    int val;
    TreeNode* left;
    TreeNode* right;
    int height;

    TreeNode(int val, TreeNode* left, TreeNode* right, int height) {
        this->val = val;
        this->left = left;
        this->right = right;
        this->height = height;
    }
};

// 构建树的函数
void buildTree(vector<TreeNode*>& nodeList) {
    // while循环，直到node_lst中只剩下一个节点，即为根节点
    while (nodeList.size() > 1) {
        // 对node_lst进行排序，先按照节点值val逆序排序，再按照节点高度height逆序排序
        sort(nodeList.begin(), nodeList.end(), [](TreeNode* a, TreeNode* b) {
            if (a->val != b->val) return a->val > b->val;
            return a->height > b->height;
        });
        // 弹出末尾元素，为当前所选择的，用来构建新节点的两个节点
        TreeNode* left = nodeList.back(); nodeList.pop_back();
        TreeNode* right = nodeList.back(); nodeList.pop_back();
        // 新节点的值为左右节点值的和
        int val = left->val + right->val;
        // 新节点的高度为左右节点的高度的较大值再+1
```

```
        // 其中+1表示新节点增加的高度
        int height = max(left->height, right->height) + 1;
        // 构建新节点new_node
        TreeNode* newNode = new TreeNode(val, left, right, height);
        // 将新节点加入列表new_node中
        nodeList.push_back(newNode);
    }
}

// 中序遍历的函数
void inorder(vector<int>& ans, TreeNode* node) {
    if (node == nullptr) return;
    inorder(ans, node->left);
    ans.push_back(node->val);
    inorder(ans, node->right);
}

int main() {
    int n;
    cin >> n;
    vector<int> lst(n);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        cin >> lst[i];
    }

    // 初始化节点列表node_lst，包含为所有叶节点的列表
    vector<TreeNode*> nodeList;
    for (int val : lst) {
        nodeList.push_back(new TreeNode(val, nullptr, nullptr, 0));
    }
    // 构建树，退出后node_lst的长度为1
    buildTree(nodeList);

    // 初始化答案列表
    vector<int> ans;
    // 中序遍历函数，传入根节点为node_lst中唯一的一个节点node_lst[0]
    inorder(ans, nodeList[0]);

    // 输出结果
    for (int val : ans) {
        cout << val << " ";
    }

    // 清理内存
    for (TreeNode* node : nodeList) {
        delete node;
    }
```

```
83
84      return 0;
85  }
86
```

时空复杂度

时间复杂度： `O(N^2logN+M)` 。其中 `N` 为数组初始长度， `M` 为最终树的节点数。

- 在构建树的函数中，每一次 `while` 循环数组中的节点数减少 `1` 个， `while` 循环所需时间复杂度为 `O(N)` ，而循环中的单次排序时间复杂度为 `O(NlogN)` ，故构建树的总时间复杂度为 `O(N^2logN)` 。
- 中序遍历树需要经过每一个节点，所需时间复杂度为 `O(M)`

空间复杂度： `O(M)` 。