Лабораторная работа 2

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Цель работы:

- ознакомление с основными методами численного интегрирования,
- выработка навыков решения простейших задач,
- анализ методов с точки зрения точности и выбор шага интегрирования.

Задание:

Этап 1

1. Вычислить определенный интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций, Симпсона, приняв ***n***=8. Проанализировать полученные результаты.
2. Вычислить погрешность **R(h,f)** методов для данного примера. Сравнить рассматриваемые методы с точки зрения точности **R(h,f).**
3. Записать приближенное значение интеграла для каждого из рассматриваемых методов с указанием погрешности.
4. Найти число шагов ***n*** ***(***или шаг ***h*** интегрирования) для обеспечения требуемой точности **ε=0,01.**

Результаты представить в виде таблицы

метод средних прямоугольников			**метод трапеций**			**метод Симпсона**		
Значение (***n***=8)	**R(h,f)**	***h*** для **ε=0,1**	**Значение** (***n***=8)	**R(h,f)**	***h*** для **ε=0,01**	**Значение** (***n***=8)	**R(h,f)**	***h*** для **ε=0,01**

Этап 2

5. Вычислить определенный интеграл методами трапеций и Симпсона с оценкой погрешности по методу Рунге. Вычисление интеграла проводится для каждого метода дважды с шагом ***h*** и шагом ***h/2.***
6. Записать приближенное значение интеграла и погрешности для каждого из методов. Сравнить с результатами на шаге 3.
7. Вычислить определенный интеграл методами трапеций и Симпсона с требуемой степенью точности. При выполнении этого этапа необходимо выбрать начальное число шагов и вычислить определенный интеграл по квадратурным формулам трапеций и Симпсона. Затем удвоить число шагов, повторить вычисление

интеграла и вычислить погрешность по методу Рунге. Если |***Rn***|>ε **(*ε=0,01*),** то процесс удвоения шагов продолжить. Процесс вычисления интеграла закончить, когда для очередного шага |***Rn***|<ε **.**

8. Для каждого из методов (Симпсона и трапеций) найти наименьшее число шагов ***n*** ***(***или ***h***), при котором |***Rn***|<ε**.** Сравнить число итераций, требуемое для получения заданной точности интегрирования. Объяснить полученные результаты.

Результаты представить в виде таблицы

метод трапеций				**метод Симпсона**			
Значение		**Rn** (по методу Рунге)	***min n*** для **ε=0,01**	**Значение**		**Rn** (по методу Рунге)	***min n*** для **ε=0,01**
h	***h/2***			***h***	***h/2***		

Примечание: Задания 5-8 выполняются в компьютерном варианте (в среде MATLAB) при начальном n=2.

Варианты заданий.

1. $I=\int\limits_0^1 \cos(x+x^3)dx$.	12. $I=\int\limits_0^{\pi/4} x\sin\left(x^3\right)dx$.
2. $I=\int\limits_0^1 e^{\sin x}dx$.	13. $I=\int\limits_0^{\pi/4} x\cos\left(x^3\right)dx$.
3. $I=\int\limits_0^1 e^{\cos x}dx$.	14. $I=\int\limits_{0,1}^{2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$.
4. $I=\int\limits_0^1 \cos x^2 dx$.	15. $I=\int\limits_0^1 \sin(x^4+2x^3+x^2)dx$.
5. $I=\int\limits_0^1 e^{-x^2}\cos x dx$.	16. $I=\int\limits_0^1 \sin(x)e^{-x^2}dx$.
6. $I=\int\limits_1^2 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)}dx$.	17. $I=\int\limits_0^1 ch(x^2)dx$.
7. $I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}e^{-x^2}dx$.	18. $I=\int\limits_1^2 sh(x^2)dx$.
8. $I=\int\limits_0^{\pi} \cos(2\sin x)dx$.	19. $I=\int\limits_0^1 \sin(x+x^3)dx$.
9. $I=\int\limits_0^{\pi} x^4e^{-x^2}dx$.	20. $I=\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x+1}dx$
10. $I=\int\limits_1^2 \sin\left(x^3\right)dx$.	21. $I=\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/2} \cos x^2 dx$
11. $I=\int\limits_1^2 \frac{e^x}{x}dx$.	22. $I=\int\limits_0^2 \frac{1}{x^2+1}dx$

Численное интегрирование

Lab1_integr_standart.m

Скрипт

```
clc, clear all
a=0;b=2;n=4;
h=(b-a)/n;
x = a:h:b;  y = x.^3 ;
X = [x(:)]; Y = [y(:)]; T  = table(X, Y)% вывод таблицы
    значений
  xl = a:h:b-h; yl = xl.^3 ;  IL=h*sum(yl)  % метод левых
    прямоугольников    =2.25
  xr = a+h:h:b; yr = xr.^3 ;  IR=h*sum(yr)  % метод правых
    прямоугольников   =6.25
  xm = a+h/2:h:b; ym = xm.^3 ;  IM=h*sum(ym)% метод средних
    прямоугольников   =3.875
plot(x,h*cumsum(y))   %суммирование элементов массива с
    накоплением (кумулятивное)
grid
    %метод трапеций
IT=trapz(x,y)% ITT=4.25, два входных аргумента - сеточная
    функция, вычисляет интеграл по формуле трапеций, площадь
    под графиком
ITT=h*trapz(y)% ITT=4.25, один аргумент для равноотстоящих
    узлов, но тогда надо умножить на шаг интегрирования
IS=quad('x.^3', a, b, 0.01)% IS=4, метод Симпсона quad(y, a,
    b[,tol, trace])
    %a, b – пределы интегрирования; tol – точность вычисления;
    =1E-6 по умолчанию

syms x %Определение символьной переменной
f=sym('exp(x) -x'); %Определение символьной функции
int(f,x) %Вычисление неопределенного интеграла exp(x)-x^2/2
         %Вычисление определенного интеграла
I1=int(exp(x)-x,x,-1,0)  %Символьное решение   3/2-exp(-1)
I11=vpa(I1,5)%Численное решение 1.1321; Функция vpa
    используется для задания количества значащих цифр
```

lab1_METOD_INT.M

```
% y=x^3
clear all;
a = 0; b = 2; p = 1;  eps = 0.01;
Ih1 = lleftrectangle(a,b,1)   % 0
Ih2 = lleftrectangle(a,b,2)   % 1
%Ih1 =rightrectangle( a, b, 1)       % 16
%Ih2 =rightrectangle( a, b, 2)       % 9
%Ih1 =midllrectangle( a, b, 1)      % 2
%Ih2 =midllrectangle( a, b, 2)       % 3.5
%Ih1 =traprectangle( a, b, 1)      % 8
%Ih2 =traprectangle( a, b, 2)       %5
%Ih1 =simsrectangle( a, b, 1)      % 4
%Ih2 =simsrectangle( a, b, 2)       % 4

R = abs((Ih1 - Ih2)/(2^p-1));
n = 1;
while (R >= eps)
    Ih1 = Ih2;
    n = n + 1;
    Ih2 = lleftrectangle(a,b,2^n);
    %Ih2 = rightrectangle(a,b,2^n);
    %Ih2 = midllrectangle(a,b,2^n);%n=5 Ih2=3.998 I=4
    %Ih2 = traprectangle(a,b,2^n);%n=6 Ih2=4.0010 I=4
    %Ih2 = simsrectangle(a,b,2^n);%n=1 Ih2=4 I=4
    R = abs((Ih1 - Ih2)/(2^p-1));
end;
n
syms x;
J = double(int(integral_f(x),x,a,b)); % встроенный метод
Ih2 %для правых=4,0078 при n=10
disp('Интеграл='), disp(J)
```

```
function [ y ] = integral_f( x )%Подынтегральная функция
y=x^3  end
-----------------------
function [ Ih ] = lleftrectangle( a, b, n )
% Численное интегрирование методом левых прямоугольников с
оценкой погрешности по Рунге. Вход: пределы интегрирования
a,b, количество % отрезков разбиения
h = (b-a)/n;
Ih = 0;
for i = 0:1:(n-1)
    x = a + i*h;
       F = integral_f(x);          Ih = Ih + F*h;
end;%Ih = Ih*h;
Ih;
end
```

рямоугольни-
лников, метод
нге. $\varepsilon = 0{,}01$

?

Раздаточный материал

Формула трапеций

4) $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2(y_1 + \ldots + y_{n-1}) + y_n\right) + R(h,f)$$

- $$|R_h| = |J - J_h| \le \frac{h^3 n}{12}\cdot \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)| = \frac{(b-a)h^2}{12}\cdot \max_{\xi\in[a,b]} |f''(\xi)|$$

Формула Средних прямоугольников

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + R(h,f),$$

- $$R(h,f) = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(\xi) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = \frac{h^3 n}{24} f''(\xi),\ a \le \xi \le b$$

$h = \frac{b-a}{n}$

Для остаточного члена получим следующую оценку: $|R| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot \max\limits_{[a,b]} |f''(x)|$.

Формула Левых прямоугольников

1) $$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + R(h,f),$$

- $$R(h,f) = \frac{h(b-a)}{2} f'(\xi) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi) = \frac{h^2 n}{2} f'(\xi),\ a \le \xi \le b$$

Правых прямоугольников

2). $$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) + R(h,f),\ R(h,f) = \frac{h(b-a)}{2} f'(\xi),\ a \le \xi \le b$$

Для остаточного члена получим следующую оценку: $|R| \le \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$.

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left((y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\right) + R(h,f)$$

$$R(h,f) = \frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi) = \frac{h^5 m}{90} f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180(2m)^4} f^{(4)}(\xi),\ a \le \xi \le b$$

Для остаточного члена получим следующую оценку: $|R| \le \frac{(b-a)^5}{180(2m)^4}\cdot \max\limits_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

АЛГОРИТМ Метод Рунге

Найти приближенное значение определенного интеграла одним из методов, с точностью ε

Дано:

$a,\ b,\ x_i \in [a,b],\quad y_i = f(x_i),\ i = 0,\ldots,2n,$

$\varepsilon > 0$ – точность

По заданной точности надо найти n и $h=(b-a)/n$, *котрые эту точность обеспечивают. Поиск осуществляется итерационно*

1. Находим I_h *и* $I_{h/2}$
2. Если $\left|\frac{J_{h/2} - J_h}{2^p - 1}\right| < \varepsilon$, то $I_{h/2}$ искомое значение, иначе

Полагаем $h:=h/2$ и переходим к шагу 1.