Оглавление

Теоретическая часть.

Постановка задачи.

Неявная схема. Моделирование тепловых режимов в зависимости от граничных условий $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$.

Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t < T, (1.1) \\ u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \le x \le l, (1.2) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u_x(l,t) = \mu_2(t), 0 \le t \le T. (1.3) \end{cases}$$

Построение аналитического решения задачи для тестовых примеров.

Тестовые примеры

$$(1)\begin{cases} u_t = \frac{1}{25} u_{xx}, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, (1.4) \\ u(x,0) = 15\sin(5x), \ 0 \le x \le 0.5\pi, (1.5) \\ u(0,t) = 0, u_x(0.5\pi,t) = 0, 0 \le t \le T. \ (1.6) \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_t = \frac{1}{25} u_{xx}, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, (1.7) \\ u(x,0) = 15\sin(5x) + 5, \ 0 \le x \le 0.5\pi, (1.8) \\ u(0,t) = 5, u_x(0.5\pi,t) = 0, 0 \le t \le T. \ (1.9) \end{cases}$$

Тестовый пример № 1

$$a^2 = \frac{1}{25}, f(x,t) = 0, \phi(x) = 15\sin(5x), \mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = 0, l = 0.5\pi. (1.10)$$

Уравнение теплопроводности является однородным, на левом конце стержня поддерживается нулевая температура, правый конец стержня теплоизолирован, начальная температура представляет собой гармонику, умноженную на константу.

Применим метод Фурье к решению этой задачи. На первом этапе будем разыскивать частные решения в виде:

$\tilde{u}(x,t) = X(x)T(t)$. (1.11)

Подставим решение (1.11) в уравнение (1.1) с учетом $f(x) = 0$ и краевые условия (1.3) и разделим переменные. Получим дифференциальное уравнение для T(t):

$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,$ (1.12)

и краевую задачу Штурма-Лиувилля для X(x):

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, x \in (0, l) \ (1.3) \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \ (1.14) \end{cases}$$

Выпишем собственные значения и собственные функции полученной краевой задачи:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2, k \in N \ (1.15)$$

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right), k \in N \ (1.16)$$

Найдём функцию T(t), которая удовлетворяет (1.12):

$$T(t) = B_k e^{-a^2 \lambda t} \ (1.17)$$

Найдены частные решения :

$$\tilde{u}_k(x,t) = B_k \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2 t}, k \in N \ (1.18)$$

На втором этапе построим решение, удовлетворяющее начальному условию (1.2). Составим ряд - линейную комбинацию бесконечного набора частных решений:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi(2k-1)}{2l}\right)^2 t} (1.19),$$

При $t = 0$ выполняется начальное условие:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right) (1.20)$$

Неизвестные коэффициенты ряда Фурье B_k:

$$B_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} \phi(x) \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right) dx (1.21)$$

Функции $\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right)$ являются собственными функциями смешанной краевой задачи. Заметим, что если функция $\phi(x)$ является $2k-1 = p$-ой гармоникой ряда (1.19), то в силу ортогональности системы синусов коэффициенты

$$B_k = \begin{cases} 0, \quad 2k-1 \neq p \\ \frac{2}{l}\int_0^l sin^2\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right)dx = 1, 2k-1 = p \end{cases} \quad (1.22)$$

Тогда решение задачи будет представляться не бесконечным рядом, а функцией вида:

$$\mathrm{u}(x,t) = \sin\left(\frac{\pi p x}{2l}\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi p}{2l}\right)^2 t} \quad (1.23)$$

Решение тестовой задачи №1: $\mathrm{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) = \mathbf{15}\boldsymbol{sin}(\mathbf{5}\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}$

Проверка:

$$\mathrm{u}_t = -15sin(5x)e^{-t}$$

$$\mathrm{u}_{xx} = -15 * 25\sin(5x)e^{-t}$$

$\mathrm{u}_t = \frac{1}{25}\mathrm{u}_{xx}$ – верно

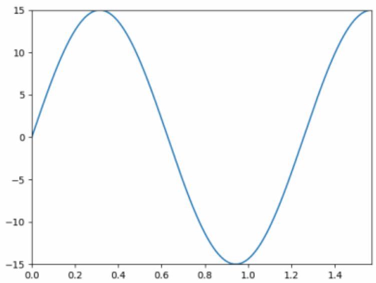
$\mathrm{u}(x,0) = 15\sin(5x)$ – верно

$\mathrm{u}(0,t) = 0$ – верно

$\mathrm{u}_x(0.5\pi, t) = 15 * 5cos(5 * 0.5\pi)e^{-t} = 0$ –верно

Решение найдено верно.

Построим профили температуры – графики решения функции $u(x,t)$ в фиксированные моменты времени. Возьмем t = от 0 до 4 с шагом 0.05. Кадров в секунду (FPS) = 5. (Двойное нажатие по картинке воспроизведёт видео, после просмотра дважды нажмите на Esc и видео закроется)



Видно, что температура стержня при t = 4 стала практически нулевой, так как на одном конце поддерживается температура, равная 0, а другой конец теплоизолирован, то есть температура выровнялась и стала равной левому концу.

Тестовый пример №2

$$a^2 = \frac{1}{25}, f(x,t) = 0, \phi(x) = 15\sin(5x) + 5, \mu_1(t) = 5, \mu_2(t) = 0, l = 0.5\pi.$$

Уравнение теплопроводности является однородным, на левом конце стержня поддерживается температура 5, правый конец стержня теплоизолирован, начальная температура представляет собой гармонику, умноженную на константу и прибавленная к константе.

Решение тестовой задачи №2: $\mathrm{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \mathbf{15}\boldsymbol{sin}(\mathbf{5}\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}} + \mathbf{5}$

Проверка:

$$\mathrm{u}_t = -15sin(5x)e^{-t}$$

$$\mathrm{u}_{xx} = -15 * 25\sin(5x)e^{-t}$$

$\mathrm{u}_t = \frac{1}{25}\mathrm{u}_{xx}$ – верно

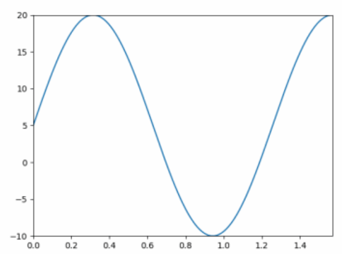
$\mathrm{u}(x,0) = 15\sin(5x) + 5$ – верно

$\mathrm{u}(0,t) = 5$ – верно

$\mathrm{u}_x(0.5\pi,t) = 15 * 5cos(5 * 0.5\pi)e^{-t} + 5 = 0$ –верно

Решение найдено верно.

Построим профили температуры – графики решения функции $u(x,t)$ в фиксированные моменты времени. Возьмем t = от 0 до 4 с шагом 0.05. Кадров в секунду (FPS) = 5.



Видно, что температура стержня при t = 4 стала практически равной 5, так как на одном конце поддерживается температура, равная 5, а другой конец теплоизолирован, то есть температура выровнялась и стала равной левому концу.

Построение собственных примеров.

Пример №1

$$\mathrm{u}(x,t) = \sin\left(\frac{\pi p x}{2l}\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi p}{2l}\right)^2 t}$$

Возьмём функцию:

$$\mathrm{u}(x,t) = 9\sin(5x)\, e^{-25t} - 5x$$

Посчитаем производные:

$$\mathrm{u}_t = -225 sin(5x) e^{-25t}$$

$$\mathrm{u}_{xx} = -225\sin(5x) e^{-25t}$$

$$\mathrm{u}_t = \mathrm{u}_{xx}$$

Начальное условие:

$$\mathrm{u}(x,0) = 9\sin(5x) - 5x$$

Краевые условия:

$$\mathrm{u}(0,t) = 0$$

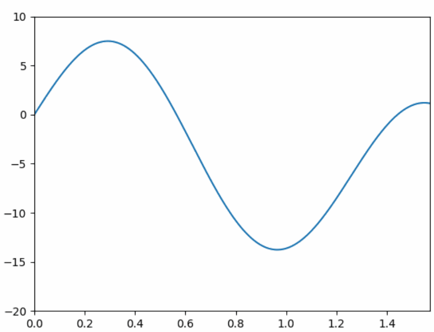
$$\mathrm{u}_x(0.5\pi,t) = 45 cos(5 * 0{,}5\pi)\, e^{-25t} - 5 = -5$$

Получили задачу:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_t = \mathrm{u}_{xx}, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, \\ \mathrm{u}(x,0) = 9\sin(5x) - 5x, \qquad 0 \le\ x\ \le 0.5\pi, \\ \mathrm{u}(0,t) = 0, \mathrm{u}_x(0.5\pi,t) = -5, 0 \le\ t\ \le T. \end{cases}$$

$$a^2 = 1, f(x,t) = 0, \phi(x) = 9\sin(5x) - 5x, \mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = -5, l = 0.5\pi.$$

Построим профили температуры – графики решения функции $u(x,t)$ в фиксированные моменты времени. Возьмем t = от 0 до 0.5 с шагом 0.005. Кадров в секунду (FPS) = 5.



Температура стержня при t = 0.5 выровнялась в прямую и распределилась линейно, убывая, так как на левом конце поддерживается температура, равная 0, а на правом конце отрицательный тепловой поток.

Пример № 2

$$\mathrm{u}(x,t) = \sin\left(\frac{\pi p x}{2l}\right) e^{-a^2\left(\frac{\pi p}{2l}\right)^2 t}$$

Возьмём функцию:

$$\mathrm{u}(x,t) = -18\sin(3x)\, e^{-18t} + 5x^2$$

Посчитаем производные:

$$\mathrm{u}_t = 324\sin(3\mathrm{x})\mathrm{e}^{-18\mathrm{t}}$$

$$\mathrm{u}_{xx} = 162\sin(3x)\, e^{-25t} + 10$$

$$\mathrm{u}_t = 2\mathrm{u}_{xx} + f(x,t)$$

$$f(x,t) = -20$$

Начальное условие:

$$\mathrm{u}(x,0) = -18\sin(3x) + 5x^2$$

Краевые условия:

$$\mathrm{u}(0,t) = 0$$

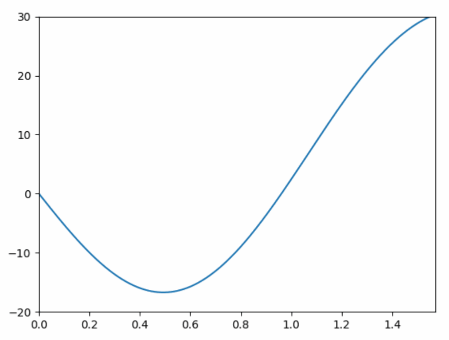
$$\mathrm{u}_x(0.5\pi,t) = -54cos(3*0{,}5\pi)\, e^{-25t} + 10*0.5\pi = 5\pi$$

Получили задачу:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_t = 2\mathrm{u}_{xx} - 20, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, \\ \mathrm{u}(x,0) = -18\sin(3x) + 5x^2, \quad 0 \le x \le 0.5\pi, \\ \mathrm{u}(0,t) = 0, \mathrm{u}_x(0.5\pi,t) = 5\pi, 0 \le t \le T. \end{cases}$$

$$a^2 = 2, f(x,t) = -20, \phi(x) = -18\sin(3x) + 5x^2, \mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = 5\pi, l = 0.5\pi.$$

Построим профили температуры – графики решения функции $u(x,t)$ в фиксированные моменты времени. Возьмем t = от 0 до 0.2 с шагом 0.005. Кадров в секунду (FPS) = 7.



Температура стержня при t = 0.2 практически перестала изменяться, она не линейна, имеет выпуклость вниз по синусу, так как начальная температура отрицательна, на левом конце поддерживается температура, равная 0, а на другом конце положительный тепловой поток.

Построение разностной схемы

Введём равномерную сетку:

$$x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, hN = l, \qquad t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M, \tau M = T,$$

и будем использовать обозначения $u_i^j = u(x_i, t_j)$, $f_i^j = f(x_i, t_j)$.

Построим разностную аппроксимацию уравнения в соответствии с неявной схемой:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^j, i = 1,2, \dots, N-1, j = 0,1, \dots, M-1 \quad (1.24)$$

Дополним разностное уравнение (1.24) начальными и граничными условиями на сетке. Начальное и граничное условие Дирихле при x = 0 аппроксимируются точно:

$$u_i^0 = \phi(x_i), i = 0,1, \dots, N, \qquad u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), j = 0,1, \dots, M-1.$$

Для аппроксимации граничного условия при x = l, воспользуемся односторонней разностной производной :

$$\frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h} = \mu_2(t_{j+1}), \qquad j = 0,1, \dots, M-1.$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$u_N^{j+1} = u_{N-1}^{j+1} + h\mu_2(t_{j+1}).$$

Будем использовать его для завершения перехода на слой j+1 при уже найденном u_{N-1}^{j+1}.

Получим неявную разностную схему:

$$\begin{cases} u_i^0 = \phi(x_i), i = 0,1,\dots,N, \\ u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}), j = 0,1,\dots,M-1, \\ \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} = a^2\frac{u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^j, i = 1,2,\dots,N-1, j = 0,1,\dots,M-1, \\ u_N^{j+1} = u_{N-1}^{j+1} + h\mu_2(t_{j+1})\ j = 0 = 0,1,\dots,M-1. \end{cases} \quad (1.25)$$

Вывод коэффициентов для метода прогонки.

Преобразуем неявную разностную схему (1.25), группируя в левой части члены, содержащие значения функции u на (j+1)-ом шаге по времени, а в правой – все остальные члены. Также заметим, что значения сеточной функции u_i^j на нулевом слое по времени известны из начального условия, поэтому при каждом фиксированном $j = 0,1,\dots,M-1$ неизвестными являются u_i^{j+1}. Система уравнений, которым они удовлетворяет, имеет вид:

$$\begin{cases} u_0^{j+1} = \mu_1(t^{j+1}), \\ -\frac{\tau a^2}{h^2}u_{i-1}^{j+1} + \left(1+\frac{2\tau a^2}{h^2}\right)u_i^{j+1} - \frac{\tau a^2}{h^2}u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + \tau f_i^j, i = 1,2,\dots,N-1, \\ u_N^{j+1} = u_{N-1}^{j+1} + h\mu_2(t^{j+1}), \end{cases}$$

то есть является системой с трёхдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} u_0^{j+1} = \mu_1(t^{j+1}), (1.26) \\ A_i u_{i-1}^{j+1} + B_i u_i^{j+1} + C_i u_{i+1}^{j+1} = F_i, i = 1,2,\dots,N-1, (1.27) \\ u_N^{j+1} = \alpha u_{N-1}^{j+1} + h\mu_2(t^{j+1}), (1.28) \end{cases}$$

где $A_i = -\frac{\tau a^2}{h^2} = C_i$, $B_i = 1 + \frac{2\tau a^2}{h^2}$, $F_i^j = u_i^j + \tau f_i^j$, $\alpha = 1$. Выполнено достаточное условие сходимости метода прогонки и условие устойчивости:

$$|B_i| \geq |A_i| + |C_i|, |\alpha| \leq 1.$$

Вывод рекуррентного прогоночного соотношения.

Получили преобразование неявной разностной схемы вида, удобного для прогонки. Данная разностная схема содержит три неизвестные величины – значения функции u на (j+1)-ом шаге по времени. Введём дополнительное условие, связывающее значения функции u на (j+1)-ом шаге по времени. Представим данное условие в виде линейной зависимости:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}+1} = \alpha_i \mathrm{u}_{i+1}^{j+1} + \beta_i, i = 1,2, \dots, N-1. (1.29)$$

Соотношение (1.29) называется рекуррентным прогоночным соотношением. Коэффициенты α_i, β_i – прогоночные коэффициенты.

Определим прогоночные коэффициенты. Перепишем соотношение (1.29) в виде:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{i}-1}^{\mathrm{j}+1} = \alpha_{i-1} \mathrm{u}_{i}^{j+1} + \beta_{i-1} (1.30).$$

Подставим данное выражение в (1.27) и выразим из полученного равенства $\mathrm{u}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}+1}$:

$$\mathrm{u}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}+1} = -\frac{A_i}{B_i + C_i \alpha_{i-1}} \mathrm{u}_{\mathrm{i}+1}^{\mathrm{j}+1} + \frac{\mathrm{F}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}} - C_i \beta_{i-1}}{B_i + C_i \alpha_{i-1}} (1.31).$$

Из выражений (1.30) и (1.31) получаем:

$$\alpha_i = -\frac{A_i}{B_i + C_i \alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{\mathrm{F}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}} - C_i \beta_{i-1}}{B_i + C_i \alpha_{i-1}} (1.32).$$

Выражения (1.32) позволяют вычислять значения прогоночных коэффициентов на i-ом шаге по координате x, если известны их значения на (i-1)-ом шаге по координате x, а также коэффициенты в выражении (1.27). Следовательно, чтобы определить значения прогоночных коэффициентов на любом шаге, необходимо знать их значения на 0-м шаге: α_0 и β_0.

Определение прогоночных коэффициентов на 1-м шаге по координате.

Для определения прогоночных коэффициентов н 1-м шаге по координате x используем рекуррентное прогоночное соотношение (1.29) для i=0:

$$\mathrm{u}_0^{\mathrm{j}+1} = \alpha_0 \mathrm{u}_1^{j+1} + \beta_0 ,$$

и левое граничное условие (1.26):

$$\mathrm{u}_0^{\mathrm{j}+1} = \mu_1\left(t^{j+1}\right).$$

Сравнивая два выражения, получаем:

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = \mu_1(t^{j+1}).$$

Определение решения на правой границе.

Используя левое граничное условие и выражения (1.32), можно определить значения прогоночных коэффициентов на любом шаге по координате x. Однако рекуррентное прогоночное соотношение (1.29) позволит рассчитать значение функции u_i^{j+1}, только если будет известно значение функции в точке $(i+1)$, в соседней справа точке на разностной сетке. Необходимо знать значение функции u на $(j+1)$ шаге по времени в крайней справа точке, которое можно определить из правого граничного условия (1.28). Для расчета решения на правой границе в случае условия второго рода воспользуемся рекуррентным прогоночным соотношением (1.29) для $i = N-1$:

$$u_{N-1}^{j+1} = \alpha_{N-1} u_N^{j+1} + \beta_{N-1}$$

и правое граничное условие второго рода (1.28):

$$u_N^{j+1} = u_{N-1}^{j+1} + h\mu_2(t^{j+1}).$$

Подставляя соотношение (1.29) в данное равенство, выразим u_N^{j+1}:

$$u_N^{j+1} = \frac{h\mu_2(t^{j+1}) + \beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1}}.$$

Оценка погрешности

Найдём погрешность аппроксимации разностной схемы.

Вторая производная по x аппроксимируется центральной разностной производной, которая имеет второй порядок точности, а производная по времени в разностной схеме аппроксимируется правой разностной производной, имеющей первый порядок точности. Получаем оценку погрешности.

Но также, аппроксимируется правое граничное условие левой разностной производной – она имеет первый порядок точности.

Получили оценку погрешности: $O(\tau + h)$

Практическая часть

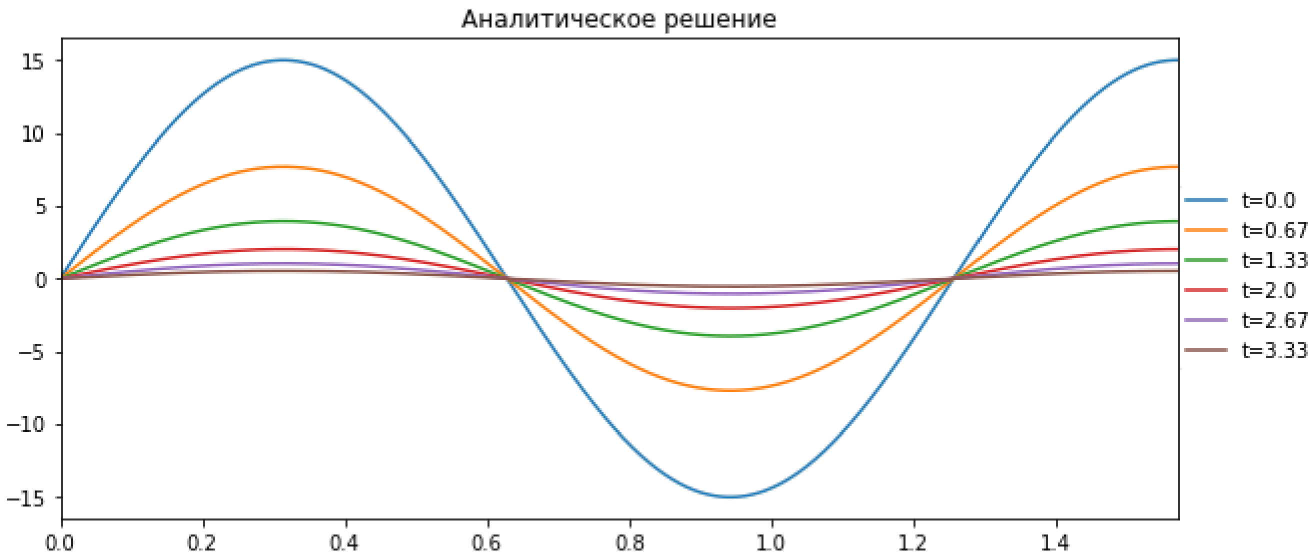
Численное решение задачи для тестовых примеров

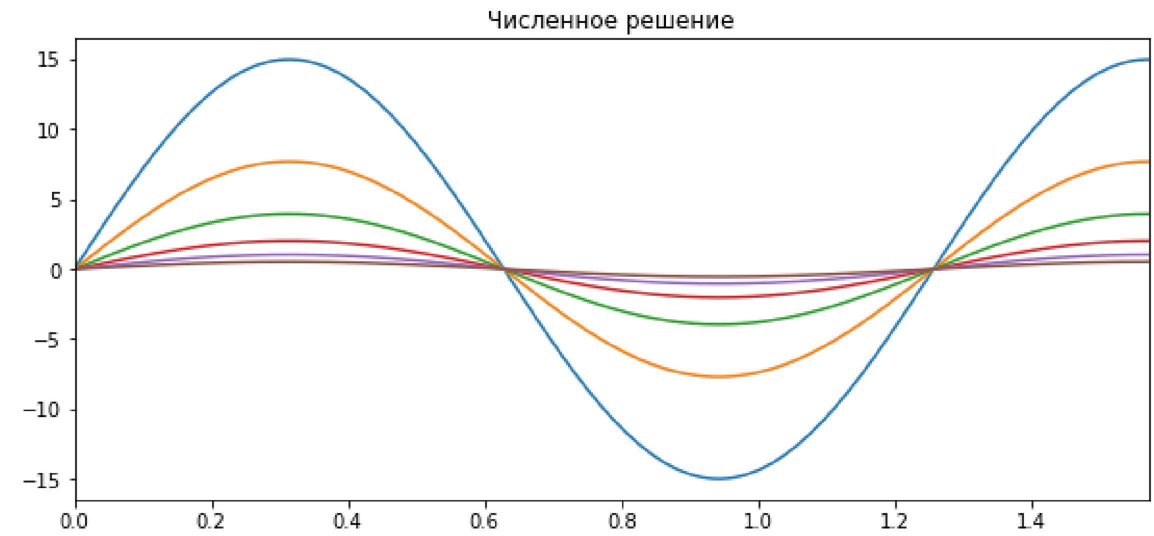
Представим решения задач: график аналитического решения, график численного решения и график погрешности на выбранном профиле. Также выведем для каждой задачи таблицу решения. Так как объёмы таблицы не позволят просмотреть её всю, то будет выведена лишь её часть.

Решение задач и просмотр полных таблиц возможно просмотреть, воспользовавшись кодом из приложения, который реализует всё перечисленное.

Первый тестовый пример

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{25} u_{xx}, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, \\ u(x,0) = 15\sin(5x), \qquad 0 \le x \le 0.5\pi, \\ u(0,t) = 0, u_x(0.5\pi, t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases}$$





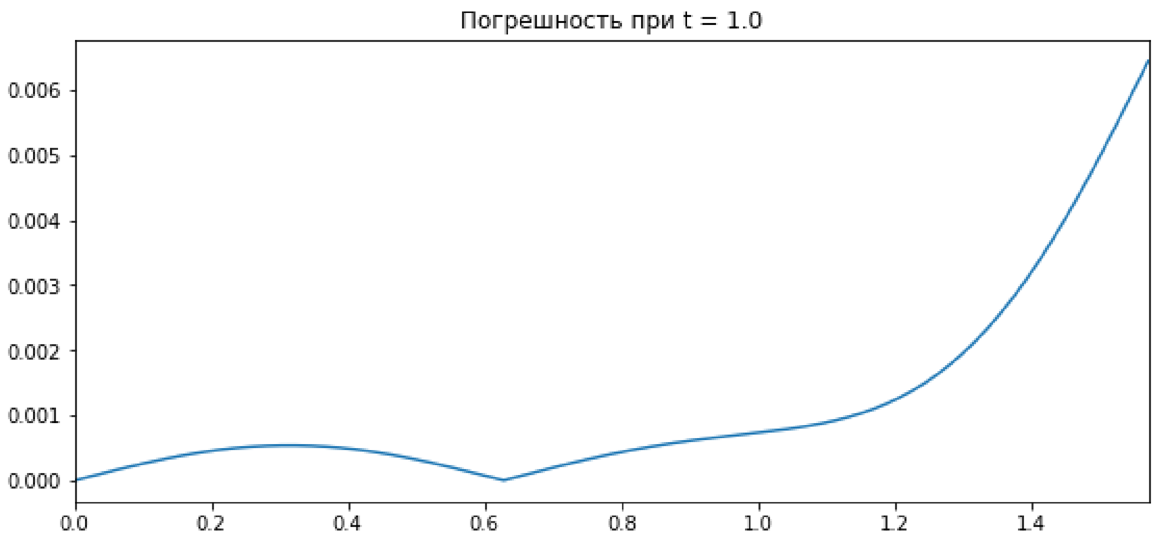


Таблица решения:

0	1	2	3	4	5	6	\
0	0.0	0.023010	0.046019	0.069029	0.092038	0.115047	0.138056
1	0.0	0.023005	0.046010	0.069015	0.092020	0.115025	0.138029
2	0.0	0.023001	0.046001	0.069002	0.092002	0.115003	0.138002
3	0.0	0.022996	0.045992	0.068988	0.091984	0.114980	0.137975
4	0.0	0.022992	0.045983	0.068975	0.091966	0.114958	0.137949
...	...	...	...	...	...	...	...
20476	0.0	0.000422	0.000844	0.001265	0.001687	0.002109	0.002531
20477	0.0	0.000422	0.000843	0.001265	0.001687	0.002109	0.002530
20478	0.0	0.000422	0.000843	0.001265	0.001687	0.002108	0.002530
20479	0.0	0.000422	0.000843	0.001265	0.001686	0.002108	0.002529
20480	0.0	0.000421	0.000843	0.001264	0.001686	0.002107	0.002529

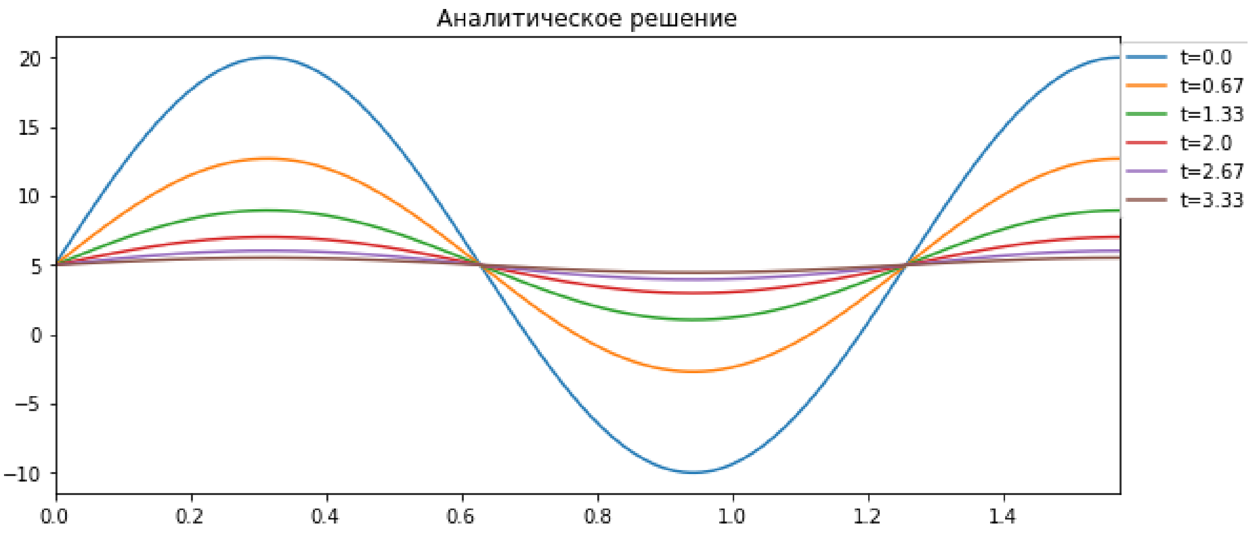
	7	8	9	...	5111	5112	5113	\
0	0.161065	0.184073	0.207081	...	14.998571	14.998871	14.999135	
1	0.161033	0.184037	0.207040	...	14.995578	14.995871	14.996128	
2	0.161002	0.184001	0.207000	...	14.992589	14.992878	14.993132	
3	0.160971	0.183965	0.206960	...	14.989609	14.989896	14.990148	
4	0.160939	0.183929	0.206919	...	14.986635	14.986922	14.987173	
...	...	...	...	...	...	...	...	
20476	0.002953	0.003374	0.003796	...	0.271121	0.271126	0.271131	
20477	0.002952	0.003374	0.003796	...	0.271067	0.271073	0.271077	
20478	0.002952	0.003373	0.003795	...	0.271014	0.271019	0.271023	
20479	0.002951	0.003373	0.003794	...	0.270960	0.270965	0.270970	
20480	0.002950	0.003372	0.003793	...	0.270907	0.270912	0.270916	

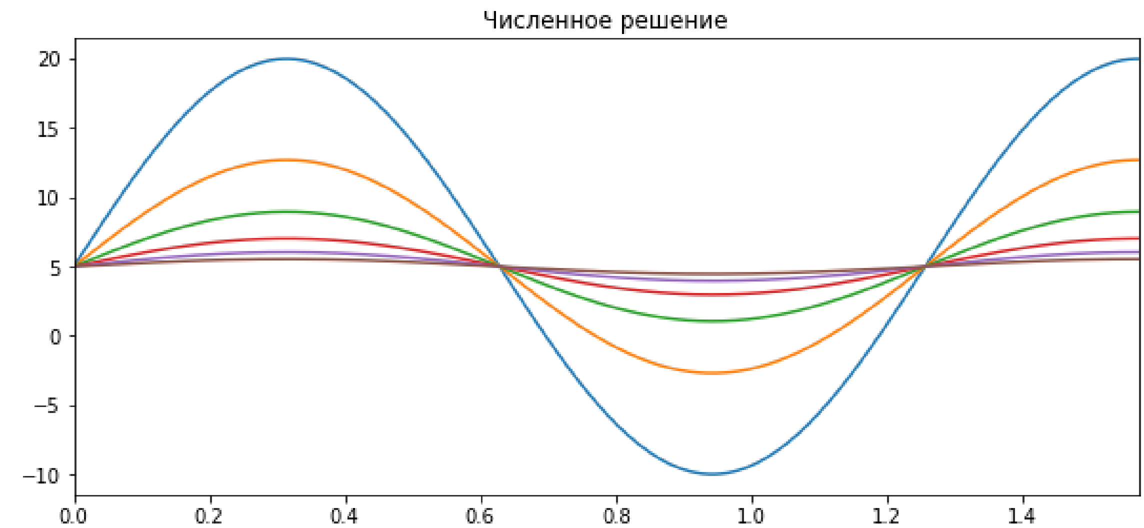
	5114	5115	5116	5117	5118	5119	\
0	14.999365	14.999559	14.999718	14.999841	14.999929	14.999982	
1	14.996348	14.996532	14.996679	14.996790	14.996864	14.996901	
2	14.993349	14.993530	14.993675	14.993784	14.993856	14.993892	
3	14.990364	14.990544	14.990688	14.990796	14.990868	14.990904	
4	14.987389	14.987568	14.987711	14.987819	14.987891	14.987927	
...	...	...	...	...	...	...	
20476	0.271134	0.271138	0.271140	0.271142	0.271144	0.271144	
20477	0.271081	0.271084	0.271087	0.271089	0.271090	0.271091	
20478	0.271027	0.271031	0.271033	0.271035	0.271036	0.271037	
20479	0.270974	0.270977	0.270980	0.270982	0.270983	0.270983	
20480	0.270920	0.270923	0.270926	0.270928	0.270929	0.270930	

	5120
0	15.000000
1	14.996901
2	14.993892
3	14.990904
4	14.987927
...	...
20476	0.271144
20477	0.271091
20478	0.271037
20479	0.270983
20480	0.270930

Второй тестовый пример.

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{25} u_{xx}, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, \\ u(x,0) = 15\sin(5x) + 5, \quad 0 \le x \le 0.5\pi, \\ u(0,t) = 5, u_x(0.5\pi, t) = 0, 0 \le t \le T. \end{cases}$$





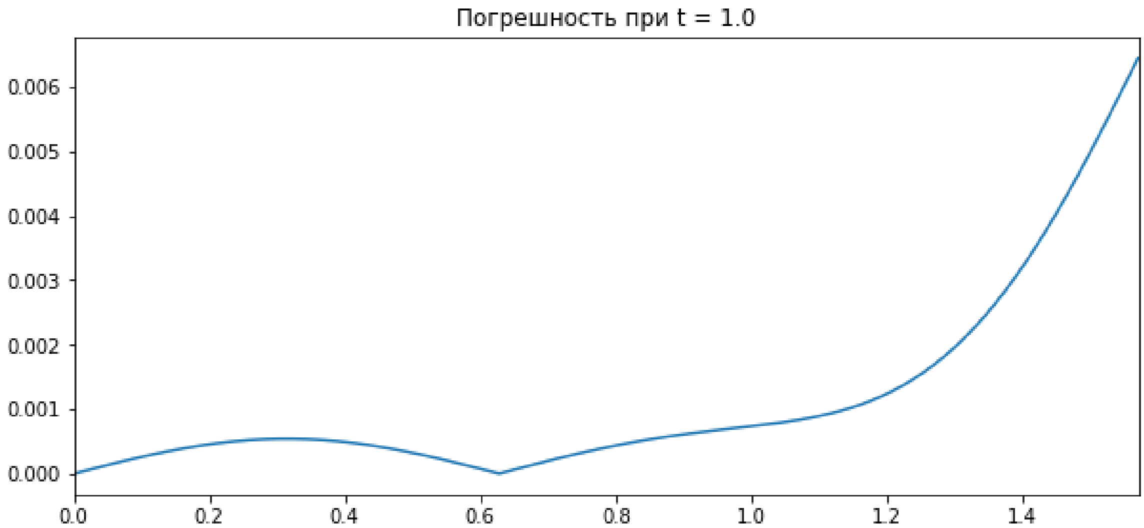


Таблица решения:

	0	1	2	3	4	5	6	\
0	5.0	5.023010	5.046019	5.069029	5.092038	5.115047	5.138056	
1	5.0	5.023005	5.046010	5.069015	5.092020	5.115025	5.138029	
2	5.0	5.023001	5.046001	5.069002	5.092002	5.115003	5.138002	
3	5.0	5.022996	5.045992	5.068988	5.091984	5.114980	5.137975	
4	5.0	5.022992	5.045983	5.068975	5.091966	5.114958	5.137949	
...	...	...	...	...	...	...	...	
20476	5.0	5.000422	5.000844	5.001265	5.001687	5.002109	5.002531	
20477	5.0	5.000422	5.000843	5.001265	5.001687	5.002109	5.002530	
20478	5.0	5.000422	5.000843	5.001265	5.001687	5.002108	5.002530	
20479	5.0	5.000422	5.000843	5.001265	5.001686	5.002108	5.002529	
20480	5.0	5.000421	5.000843	5.001264	5.001686	5.002107	5.002529	

	7	8	9	...	5111	5112	5113	\
0	5.161065	5.184073	5.207081	...	19.998571	19.998871	19.999135	
1	5.161033	5.184037	5.207040	...	19.995578	19.995871	19.996128	
2	5.161002	5.184001	5.207000	...	19.992589	19.992878	19.993132	
3	5.160971	5.183965	5.206960	...	19.989609	19.989896	19.990148	
4	5.160939	5.183929	5.206919	...	19.986635	19.986922	19.987173	
...	...	...	...	...	...	...	...	
20476	5.002953	5.003374	5.003796	...	5.271121	5.271126	5.271131	
20477	5.002952	5.003374	5.003796	...	5.271067	5.271073	5.271077	
20478	5.002952	5.003373	5.003795	...	5.271014	5.271019	5.271023	
20479	5.002951	5.003373	5.003794	...	5.270960	5.270965	5.270970	
20480	5.002950	5.003372	5.003793	...	5.270907	5.270912	5.270916	

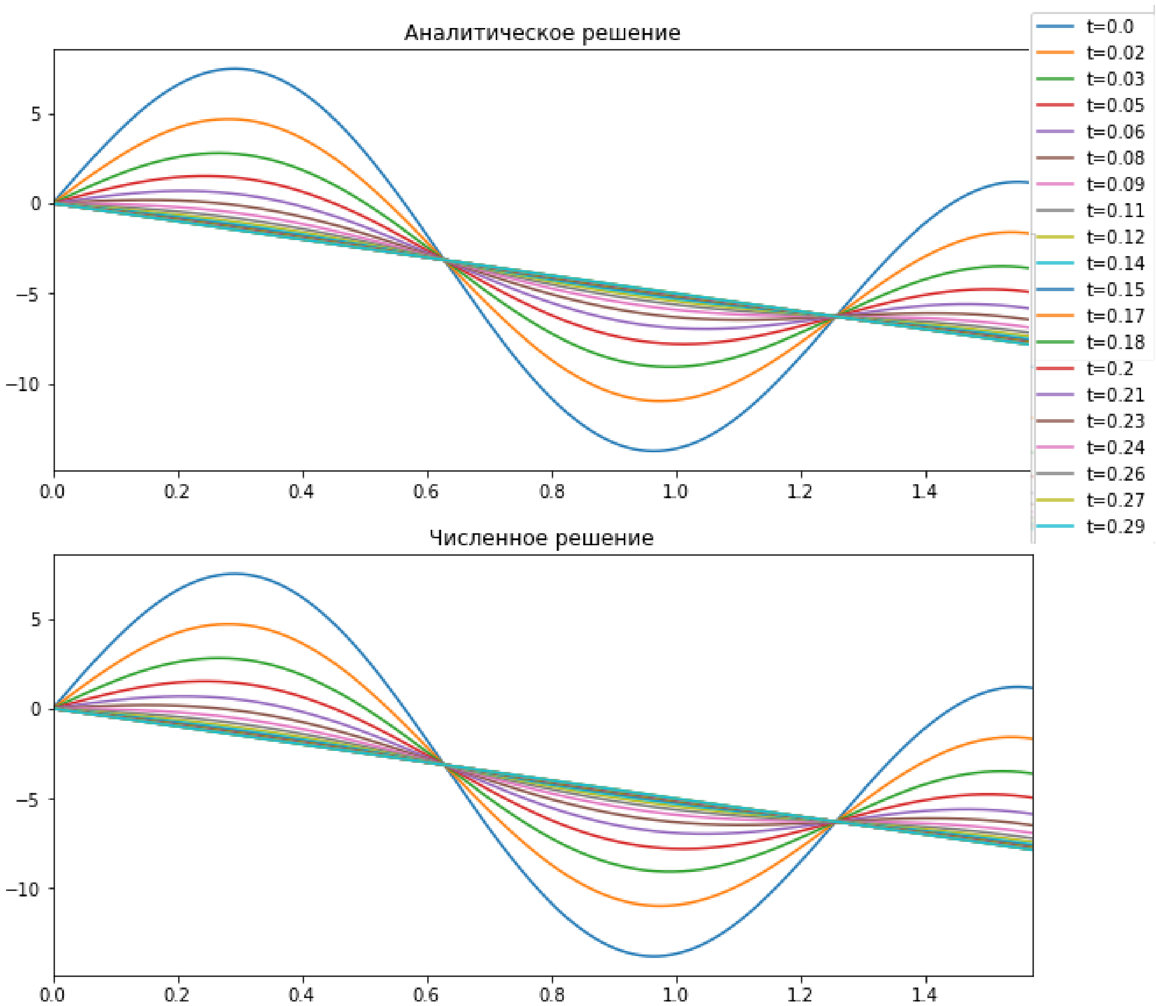
	5114	5115	5116	5117	5118	5119	\

0	19.999365	19.999559	19.999718	19.999841	19.999929	19.999982
1	19.996348	19.996532	19.996679	19.996790	19.996864	19.996901
2	19.993349	19.993530	19.993675	19.993784	19.993856	19.993892
3	19.990364	19.990544	19.990688	19.990796	19.990868	19.990904
4	19.987389	19.987568	19.987711	19.987819	19.987891	19.987927
...	...	...	...	...	...	...
20476	5.271134	5.271138	5.271140	5.271142	5.271144	5.271144
20477	5.271081	5.271084	5.271087	5.271089	5.271090	5.271091
20478	5.271027	5.271031	5.271033	5.271035	5.271036	5.271037
20479	5.270974	5.270977	5.270980	5.270982	5.270983	5.270983
20480	5.270920	5.270923	5.270926	5.270928	5.270929	5.270930

	5120
0	20.000000
1	19.996901
2	19.993892
3	19.990904
4	19.987927
...	...
20476	5.271144
20477	5.271091
20478	5.271037
20479	5.270983
20480	5.270930

Первый собственный пример.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, \\ u(x,0) = 9\sin(5x) - 5x, \quad 0 \le x \le 0.5\pi, \\ u(0,t) = 0, u_x(0.5\pi, t) = -5, 0 \le t \le T. \end{cases}$$



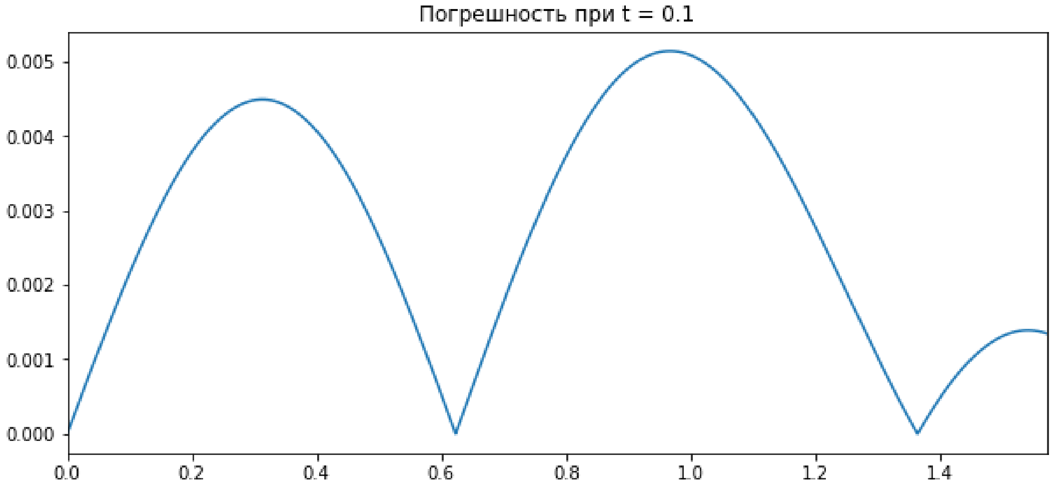


Таблица решения:

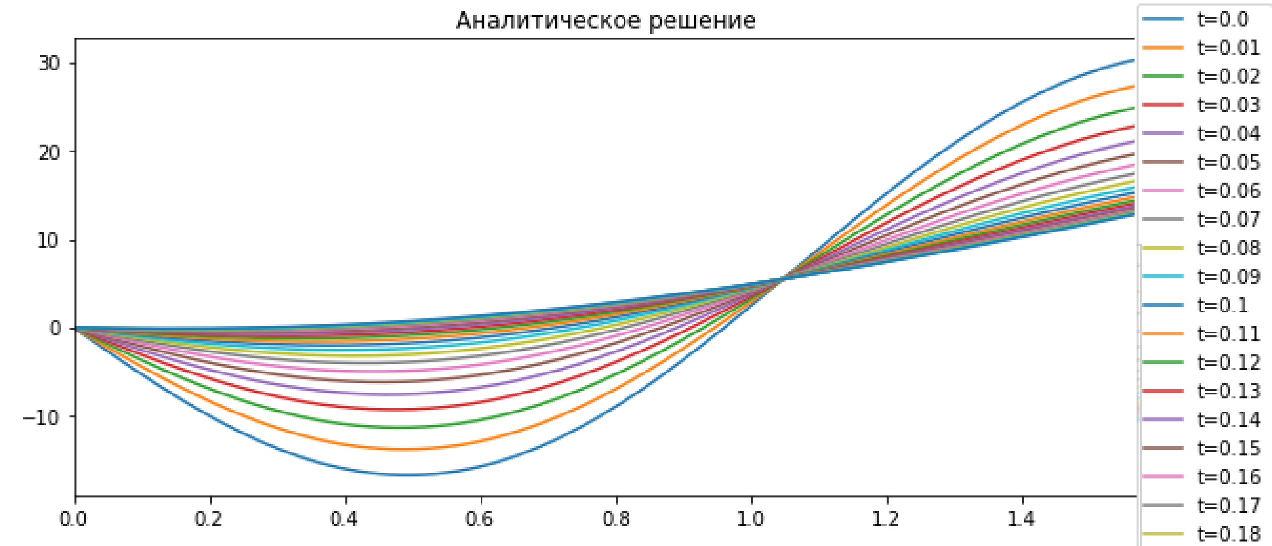
	0	1	2	3	4	5	6
0	0.0	0.012272	0.024544	0.036815	0.049087	0.061359	0.073630
1	0.0	0.012205	0.024409	0.036614	0.048819	0.061023	0.073227
2	0.0	0.012138	0.024276	0.036414	0.048552	0.060689	0.072827
3	0.0	0.012072	0.024143	0.036215	0.048286	0.060357	0.072428
4	0.0	0.012005	0.024011	0.036016	0.048022	0.060027	0.072032
...	...	...	...	...	...	...	...
1531	0.0	-0.001526	-0.003053	-0.004579	-0.006105	-0.007631	-0.009158
1532	0.0	-0.001526	-0.003053	-0.004579	-0.006105	-0.007632	-0.009158
1533	0.0	-0.001526	-0.003053	-0.004579	-0.006105	-0.007632	-0.009158
1534	0.0	-0.001526	-0.003053	-0.004579	-0.006106	-0.007632	-0.009158
1535	0.0	-0.001526	-0.003053	-0.004579	-0.006106	-0.007632	-0.009159

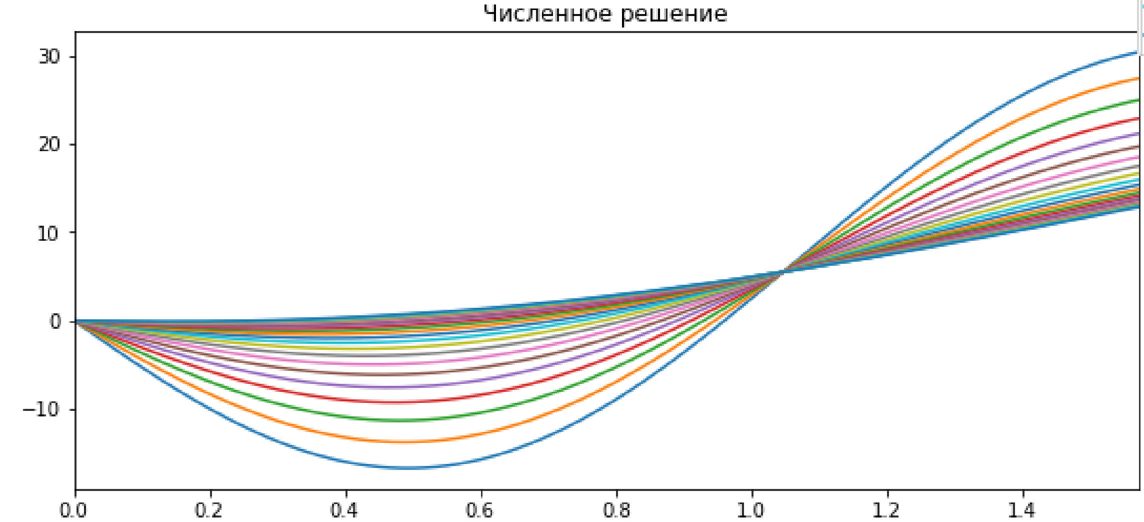
	7	8	9	...	5111	5112	5113
0	0.085901	0.098172	0.110443	...	1.158967	1.157613	1.156237
1	0.085431	0.097635	0.109839	...	1.114841	1.113477	1.112092
2	0.084964	0.097101	0.109238	...	1.071091	1.069726	1.068339
3	0.084499	0.096570	0.108640	...	1.027612	1.026245	1.024858
4	0.084036	0.096041	0.108045	...	0.984373	0.983005	0.981617
...	...	...	...	...	...	...	...
1531	-0.010684	-0.012210	-0.013736	...	-7.836534	-7.838068	-7.839602
1532	-0.010684	-0.012210	-0.013737	...	-7.836559	-7.838093	-7.839626
1533	-0.010684	-0.012211	-0.013737	...	-7.836583	-7.838117	-7.839651
1534	-0.010685	-0.012211	-0.013737	...	-7.836608	-7.838141	-7.839675
1535	-0.010685	-0.012211	-0.013738	...	-7.836632	-7.838166	-7.839700

	5114	5115	5116	5117	5118	5119	5120
0	1.154841	1.153424	1.151985	1.150525	1.149044	1.147542	1.146018
1	1.110686	1.109258	1.107809	1.106339	1.104848	1.103335	1.101801
2	1.066932	1.065503	1.064054	1.062583	1.061091	1.059578	1.058044
3	1.023450	1.022020	1.020570	1.019099	1.017607	1.016094	1.014560
4	0.980208	0.978779	0.977328	0.975857	0.974364	0.972851	0.971317
...	...	...	...	...	...	...	...
1531	-7.841136	-7.842670	-7.844204	-7.845738	-7.847272	-7.848806	-7.850340
1532	-7.841160	-7.842694	-7.844228	-7.845762	-7.847296	-7.848830	-7.850364
1533	-7.841185	-7.842719	-7.844253	-7.845787	-7.847321	-7.848855	-7.850389
1534	-7.841209	-7.842743	-7.844277	-7.845811	-7.847345	-7.848879	-7.850413
1535	-7.841234	-7.842767	-7.844301	-7.845835	-7.847369	-7.848903	-7.850437

Второй собственный пример.

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} - 20, 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, \\ u(x,0) = -18\sin(3x) + 5x^2, \quad 0 \le x \le 0.5\pi, \\ u(0,t) = 0, u_x(0.5\pi, t) = 5\pi, 0 \le t \le T. \end{cases}$$





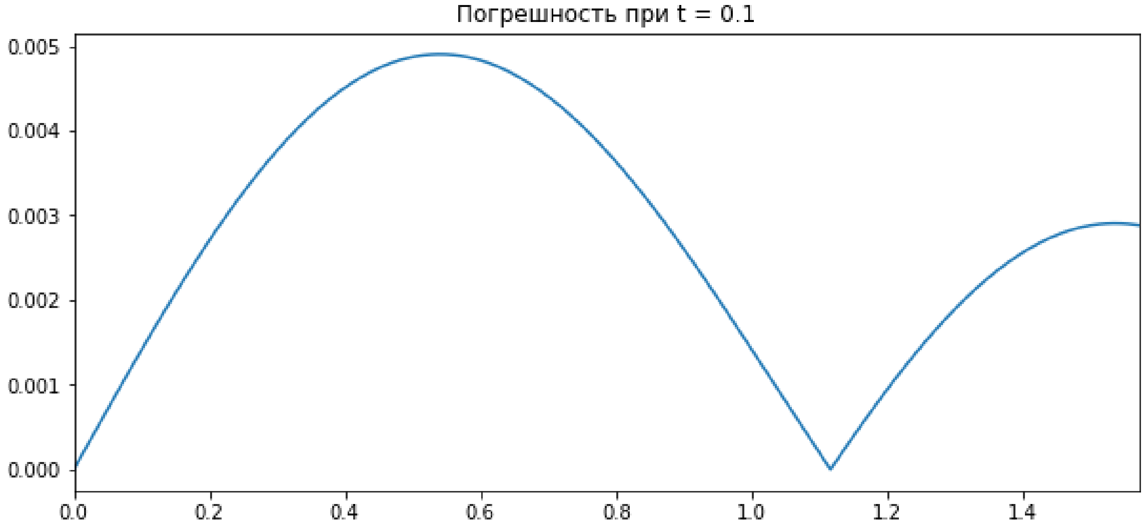


Таблица решения:

	0	1	2	3	4	5	6	\
0	0.0	-0.008283	-0.016567	-0.024849	-0.033132	-0.041415	-0.049697	
1	0.0	-0.008269	-0.016537	-0.024806	-0.033074	-0.041342	-0.049609	
2	0.0	-0.008254	-0.016508	-0.024762	-0.033016	-0.041269	-0.049522	
3	0.0	-0.008240	-0.016479	-0.024719	-0.032958	-0.041197	-0.049436	
4	0.0	-0.008225	-0.016451	-0.024675	-0.032900	-0.041125	-0.049349	
...	...	...	...	...	...	...	...	...
2044	0.0	-0.000229	-0.000457	-0.000685	-0.000913	-0.001141	-0.001368	
2045	0.0	-0.000228	-0.000456	-0.000684	-0.000912	-0.001139	-0.001366	
2046	0.0	-0.000228	-0.000455	-0.000683	-0.000910	-0.001137	-0.001364	

```
2047    0.0 -0.000227 -0.000455 -0.000682 -0.000908 -0.001135 -0.001361
2048    0.0 -0.000227 -0.000454 -0.000680 -0.000907 -0.001133 -0.001359

            7         8         9     ...      10231      10232      10233  \
0    -0.057979 -0.066260 -0.074542  ...  30.315175  30.317614  30.320051
1    -0.057877 -0.066144 -0.074411  ...  30.283442  30.285880  30.288315
2    -0.057775 -0.066028 -0.074280  ...  30.251831  30.254270  30.256704
3    -0.057674 -0.065912 -0.074150  ...  30.220297  30.222735  30.225169
4    -0.057573 -0.065796 -0.074020  ...  30.188828  30.191266  30.193700
...        ...       ...       ...  ...        ...        ...        ...
2044 -0.001596 -0.001823 -0.002049  ...  12.811220  12.813629  12.816037
2045 -0.001593 -0.001819 -0.002046  ...  12.810349  12.812757  12.815166
2046 -0.001590 -0.001816 -0.002042  ...  12.809479  12.811888  12.814296
2047 -0.001587 -0.001813 -0.002039  ...  12.808611  12.811019  12.813428
2048 -0.001584 -0.001810 -0.002035  ...  12.807744  12.810153  12.812562

          10234      10235      10236      10237      10238      10239  \
0     30.322484  30.324913  30.327339  30.329761  30.332179  30.334594
1     30.290746  30.293173  30.295597  30.298017  30.300434  30.302847
2     30.259135  30.261563  30.263986  30.266407  30.268823  30.271237
3     30.227600  30.230028  30.232452  30.234872  30.237289  30.239702
4     30.196131  30.198559  30.200982  30.203403  30.205819  30.208232
...         ...        ...        ...        ...        ...        ...
2044  12.818446  12.820855  12.823264  12.825673  12.828082  12.830492
2045  12.817575  12.819984  12.822393  12.824802  12.827211  12.829621
2046  12.816705  12.819114  12.821523  12.823932  12.826342  12.828751
2047  12.815837  12.818246  12.820655  12.823064  12.825473  12.827883
2048  12.814970  12.817379  12.819788  12.822197  12.824607  12.827016

          10240
0     30.337006
1     30.305257
2     30.273646
3     30.242111
4     30.210642
...         ...
2044  12.832901
2045  12.832030
2046  12.831161
2047  12.830292
2048  12.829426
```

Результат моделирования тепловых режимов в зависимости от граничных условий

Моделирование тепловых режимов

Для моделирования зависимости тепловых режимов от граничных условий, воспользуемся следующей задачей:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_t = \dfrac{1}{25}\mathrm{u}_{xx} + f(x,t), 0 < x < 0.5\pi, 0 < t < T, \\ \mathrm{u}(x,0) = 15\sin(5x) + \varphi(x), \quad 0 \le x \le 0.5\pi, \\ \mathrm{u}(0,t) = \mu_1(t), \mathrm{u}_x(0.5\pi,t) = \mu_2(t), 0 \le t \le T. \end{cases}$$

$$a^2 = \frac{1}{25}, \phi(x) = 15\sin(5x) + \varphi(x), l = 0.5\pi.$$

Распишем четыре модели для изучения зависимости:

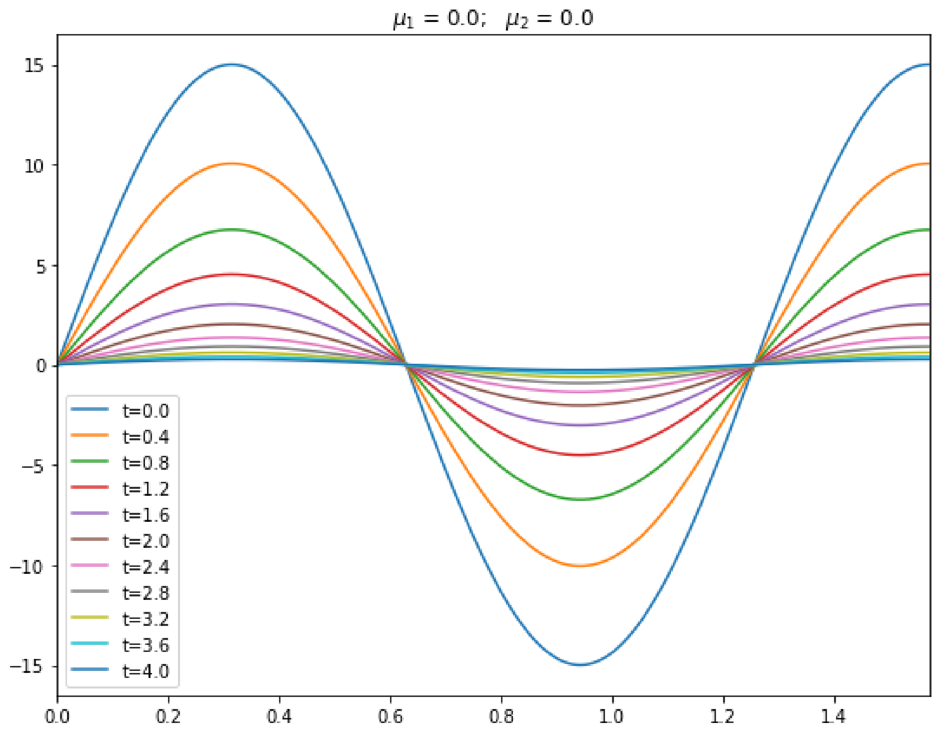
1) $f(x,t) = 0, \varphi(x) = 0, \mu_1(t) = 0,\ \mu_2(t) = 0.$

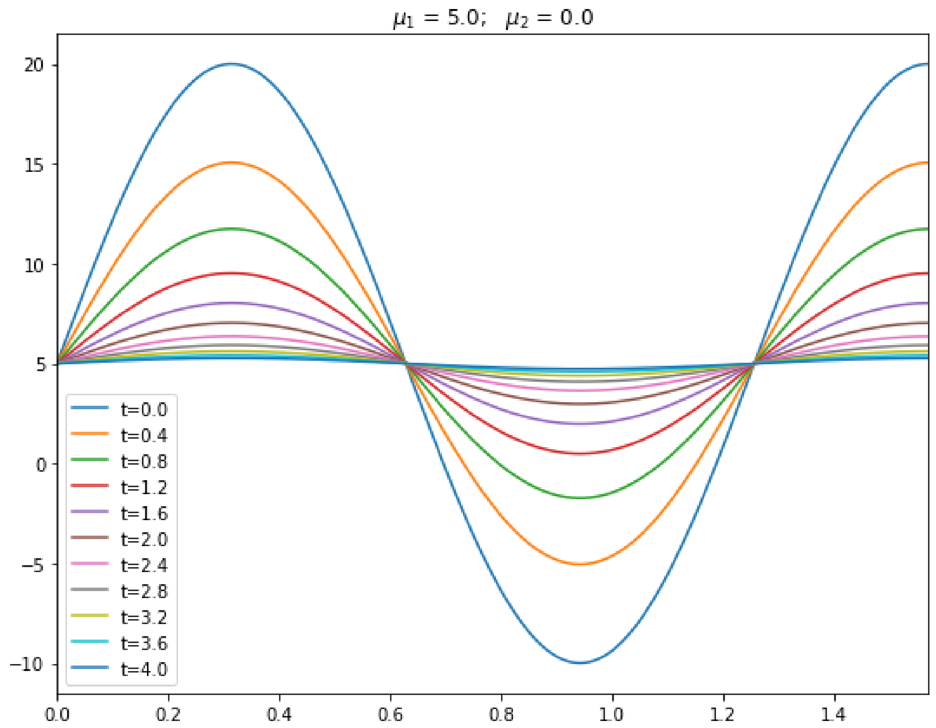
2) $f(x,t) = 0, \varphi(x) = 5, \mu_1(t) = 5,\ \mu_2(t) = 0.$

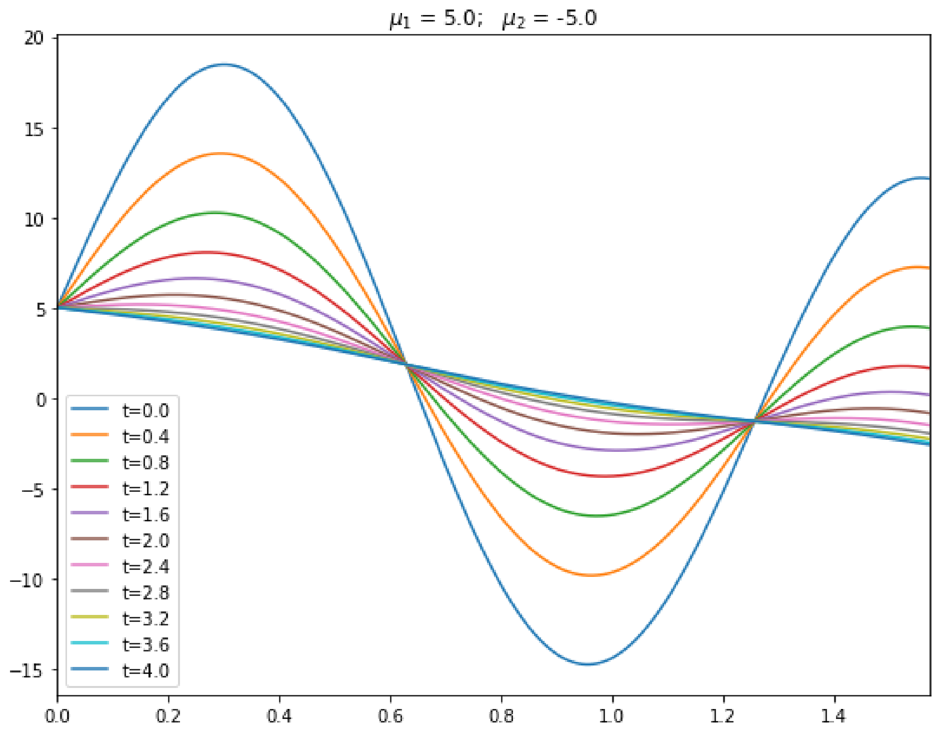
3) $f(x,t) = 0, \varphi(x) = -5x + 5, \mu_1(t) = 5,\ \mu_2(t) = -5.$

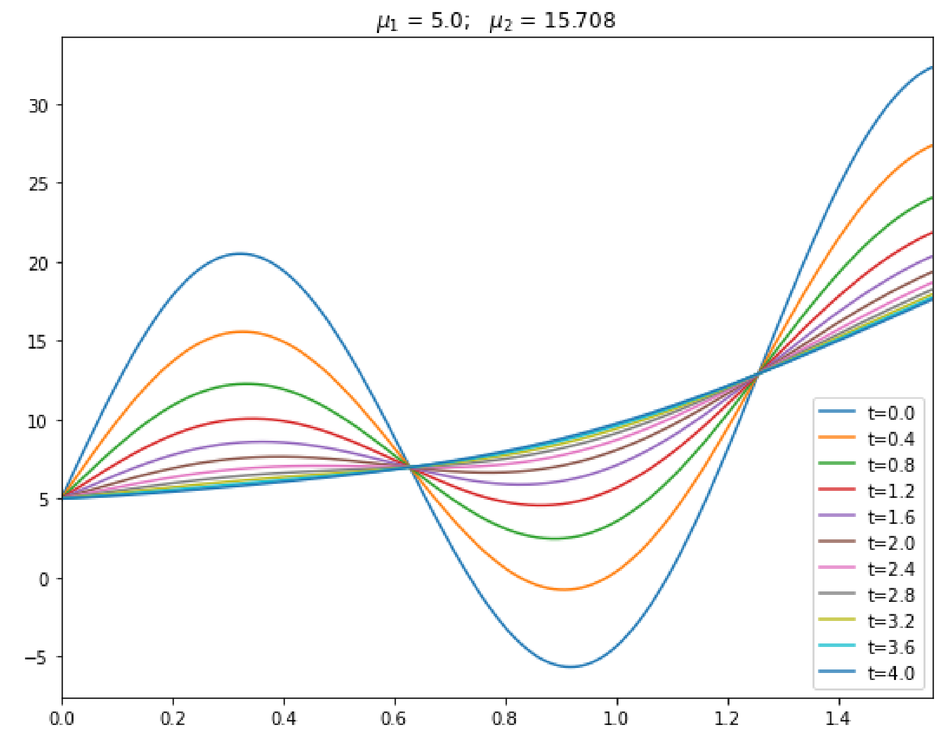
4) $f(x,t) = -\frac{2}{5}, \varphi(x) = 5x^2 + 5, \mu_1(t) = 5,\ \mu_2(t) = 15.708.$

Выведем графики и проследим как протекают тепловые процессы и что меняется в зависимости от граничных условий (код для построения и вывода моделей представлен в приложении):









Вывод

По графикам смоделированных ситуаций для разных граничных условий видно, что на левом конце стержня всегда поддерживается выбранная изначально температура, она неизменна с течением времени, на правом конце возможны следующие ситуации: отсутствие теплового потока, тогда температура стержня с течением времени выровняется и станет равной температуре на левом конце; отрицательный или положительный тепловой поток, то есть на правом конце внешняя температура отрицательная или положительная, тогда график выпрямится линейно, если плотность теплового потока будет нулевой, или будет иметь выпуклость, если плотность теплового потока будет не нулевой.

Литература

1) Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – 2-е изд., доп. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 596 с., ил.
2) Казёнкин, К. О. Численное решение задач математической физики. Нестационарные уравнения [Текст] : учебно-методическое пособие по курсу "Вычислительные методы" для студентов МЭИ, обучающихся по всем направлениям подготовки / К. О. Казёнкин, О. А. Амосова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Национальный исследовательский университет "МЭИ". - Москва : Изд-во МЭИ, 2016. - 35 с. : ил., табл.; 20 см.
3) Казенкин К. О. Указания к решению задач по вычислительной математике. Теория погрешностей. Нелинейные уравнения. Системы линейных алгебраических уравнений — М.: Издательский дом МЭИ, 2009.
4) Казенкин К. О. Численное решение задачи Коши. Численное решение двухточечных краевых задач. Указания к решению задач по вычислительной математике — М.: Издательство МЭИ, 2014.
5) Самарский А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: «Наука», 1989.

Приложение

Численное решение

Необходимые модули:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from matplotlib import rc
```

Получение входных параметров:

```
def get_entry_conditions(n=1):
    """
    Входные данные:
    n - номер примера
    n = 1 - первый тестовый пример
    n = 2 - второй тестовый пример
    n = 3 - первый собственный пример
    n = 4 - второй собственный пример

    Возвращает:
    a - коэффициент
    f - функция внешних источников тепла
    phi - начальное условие
    ph1 - левое граничное условие
    ph2 - правое граничное условие
    sol - аналитическое решение
    """
    if n == 1:
        a = 1 / 5
        f = lambda x,t: 0.
        phi = lambda x: 15 * np.sin(5*x)
        ph1 = lambda t: 0
        ph2 = lambda t: 0
        l = 0.5 * np.pi
        sol = lambda x,t: 15 * np.sin(5*x) * np.exp(-t)

    elif n == 2:
        a = 1 / 5
        f = lambda x,t: 0.
        phi = lambda x: 15 * np.sin(5*x) + 5
        ph1 = lambda t: 5
        ph2 = lambda t: 0
        l = 0.5 * np.pi
        sol = lambda x,t: 15 * np.sin(5*x) * np.exp(-t) + 5

    elif n == 3:
        a = 1
        f = lambda x,t: 0.
        phi = lambda x: 9 * np.sin(5*x) - 5 * x
        ph1 = lambda t: 0
        ph2 = lambda t: - 5
        l = 0.5 * np.pi
        sol = lambda x,t:  9 * np.sin(5*x) * np.exp(-25*t) - 5 * x

    elif n == 4:
```

```
        a = 2**(1 / 2)
        f = lambda x,t: -20.
        phi = lambda x: - 18 * np.sin(3*x) + 5 * x**2
        ph1 = lambda t: 0
        ph2 = lambda t: 5 * np.pi
        l = 0.5 * np.pi
        sol = lambda x,t: - 18 * np.sin(3*x) * np.exp(-18*t) + 5 * x**2

    return a, f, phi, ph1, ph2, l, sol
```

Метод прогонки:

```
def progonka(a, b, c, f, ph1, ph2, h):
    """
    Входные данные:
    a - коэффициент A_i
    b - коэффициент B_i
    c - коэффициент C_i
    f - правая часть (F_i)^j
    ph1 - левое граничное условие, передано значение на нужном уровне времени
    ph2 - правое граничное условие, передано значение на нужном уровне времени
    h - шаг по x

    Возвращает:
    res - массив
    """
    alpha = [0]
    beta = [ph1]
    n = len(f)
    for i in range(1, n - 1):
        alpha.append(-a / (b + c * alpha[i - 1]))
        beta.append((f[i] - c * beta[i - 1]) / (b + alpha[i - 1] * c))
    res = np.zeros(n)
    res[n - 1] = (h * ph2 + beta[n - 2]) / (1 - alpha[n - 2])

    for i in range(n - 2, -1, -1):
        res[i] = alpha[i] * res[i + 1] + beta[i]
    return res
```

Получение сетки:

```
def get_grid(t, h, xs, xl, T, a, phi, ua, ub,f):
    """
    Входные данные:
    t - шаг по времени
    h - шаг по координате
    xs - начальная координата
    xl - конечная координата
    T - данное время
    a - коэффициент
    phi - начальное условие
    ua - граничное левое условие
    ub - граничное правое условие
    f - функция внешних источников тепла

    Выходные данные:
    u - сетка
    """
```

```
    tn = int(T / t) + 1
    hn = int((xl - xs) / h) + 1

    u = np.zeros((tn, hn))

    u[0] = np.array([phi(i * h) for i in range(0, hn)])

    A = - (t * a**2) / (h**2)
    C = A
    B = 1 + (2 * t * a**2) / (h**2)
    for j in range(tn - 1):
        F = np.array([(u[j][i] + t * f(i * h, j * t)) for i in range(0, hn)])
        u[j + 1] = progonka(A, B, C, F, ua(j), ub(j), h)
    return u
```

Правило Рунге:

```
def runge_rul(u, u2, p):
    r = u2.copy()
    for i in range(u2.shape[0]):
        r[i] = u[i * 2][::2]
    r = r.reshape(u2.shape[0] * u2.shape[1])
    u2 = u2.reshape(u2.shape[0] * u2.shape[1])

    return  max(abs((r - u2) / (2**p - 1)))
```

Решение с заданной точностью:

```
def get_solution(xs, xl, T, acc, phi, a, ua, ub, f, t_):
    """
    Входные данные:
    xs - цначальная координата
    xl - конечная координата
    T - данное время
    a - коэффициент
    phi - начальное условие
    ua - граничное левое условие
    ub - граничное правое условие
    f - функция внешних источников тепла
    acc - точность

    Выходные данные:
    u - решение
    h - шаг по координате
    t - шаг по времени
    """
    h0 = xl / 10
    t0 =  0.1
    j = 2
    t = t0 / j
    h = h0 / 2

    u2 = get_grid(t0, h0, xs, xl, T, a, phi, ua, ub, f)
    u = get_grid(t, h, xs, xl, T, a, phi, ua, ub, f)

    i = int(T/t_/t0)
    while runge_rul(u, u2, 1) > acc:
        print(runge_rul(u, u2, 1))
        t /= j
```

```python
        h /= 2
        i *= j
        u2 = u
        u = get_grid(t, h, xs, xl, T, a, phi, ua, ub, f)

    return u, h, t, i * j
```

Функция рисования трёх графиков:

```python
def draw(a, b, u, u_analytic, k, n):
    """
    Рисует график аналитического решения, численного и график погрешности.

    Входные параметры:
    a - начальная координата
    b - конечная координата
    u - численное решение
    u_analytic - аналитическое решение
    k - время на котором выводится погрешность
    n - число выводимых временных отрезков

    Выходные параметры:
    1 - график аналитического решения
    2 - график численного решения
    3 - график погрешности
    """
    fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(nrows=3,ncols=1, figsize=(10,15))

    x = np.linspace(0, l, u[0].shape[1])
    N = u[0].shape[0]
    t = u[2]

    ax1.set_title('Аналитическое решение')
    ax1.set_xlim((0, b))
    for i in range(0, N, round(N / n)):
        ax1.plot(x, u[0][i], label='t={}'.format(round(i * t, 2)))

    ax2.set_title('Численное решение')
    ax2.set_xlim((0, l))
    for i in range(0, N, round(N / n)):
        ax2.plot(x, u_analytic(x,i * t))

    ax3.set_title('Погрешность при t = {}'.format(k * t))
    ax3.set_xlim((0, l))
    ax3.plot(x, abs(u[0][k] - u_analytic(x, k * t)))

    fig.legend()
    fig.show()
```

Первый тестовый пример:

```python
a, f, phi, ph1, ph2, l, sol1 = get_entry_conditions(1)

u1 = get_solution(0, l, 4, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 4)

draw(0, l, u1, sol1, u1[3], 6)

df1 = pd.DataFrame(u1[0])

print(df1)
```

Второй тестовый пример:

```
a, f, phi, ph1, ph2, l, sol2 = get_entry_conditions(2)
u2 = get_solution(0, l, 4, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 4)
draw(0, l, u2, sol2, u2[3], 6)
df2 = pd.DataFrame(u2[0])
print(df2)
```

Первый собственный пример:

```
a, f, phi, ph1, ph2, l, sol3 = get_entry_conditions(3)
u3 = get_solution(0, l, 0.3, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 2)
draw(0, l, u3, sol3, u3[3], 20)
df3 = pd.DataFrame(u3[0])
print(df3)
```

Второй собственный пример:

```
a, f, phi, ph1, ph2, l, sol4 = get_entry_conditions(4)
u4 = get_solution(0, l, 0.2, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 2)
draw(0, l, u4, sol4, u4[3], 20)
df4 = pd.DataFrame(u4[0])
print(df4)
```

Моделирование тепловых режимов в зависимости от граничных условий

Вывод графика:

```
def draw_model(a, b, u, n, left, right):
    """
    Рисует график аналитического решения, численного и график погрешности.

    Входные параметры:
    a - начальная координата
    b - конечная координата
    u - численное решение
    n - число выводимых временных отрезков
    left - левое граничное условие
    right - правое граничное условие

    Выходные параметры:
    график численного решения
    """
    fig = plt.figure(figsize=(9,7))

    x = np.linspace(0, l, u[0].shape[1])
    N = u[0].shape[0]
```

```
    t = u[2]

    plt.title('$\mu_1$ = {};    $\mu_2$ = {}'.format(round(left(0), 4), round(ri
ght(0), 4)))
    plt.xlim((0, b))
    for i in range(0, N, round(N / n)):
        plt.plot(x, u[0][i], label='t={}'.format(round(i * t, 2)))

    plt.legend()
    plt.show()

a, f, phi, ph1, ph2, l, sol1 = get_entry_conditions_for_modeling(1)

u1 = get_solution(0, l, 4, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 4)

draw_model(0, l, u1, 10, ph1, ph2)


a, f, phi, ph1, ph2, l, sol2 = get_entry_conditions_for_modeling(2)

u2 = get_solution(0, l, 4, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 4)

draw_model(0, l, u2, 10, ph1, ph2)


a, f, phi, ph1, ph2, l, sol3 = get_entry_conditions_for_modeling(3)

u3 = get_solution(0, l, 4, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 4)

draw_model(0, l, u3, 10, ph1, ph2)


a, f, phi, ph1, ph2, l, sol4 = get_entry_conditions_for_modeling(4)

u4 = get_solution(0, l, 4, 0.01, phi, a, ph1, ph2, f, 4)

draw_model(0, l, u4, 10, ph1, ph2)
```