Ejercicios

6.1 Dada una distribución continua uniforme, demuestre que

a) $\mu = \frac{A+B}{2}$, y

b) $\sigma^2 = \frac{(B-A)^2}{12}$

a) $\mu = \int_A^B \frac{x}{B-A}\,dx = \frac{B^2-A^2}{2(B-A)} = \frac{A+B}{2}$

b) $Ex^2 = \int_A^B \frac{x^2}{B-A}\,dx = \frac{B^3-A^3}{3(B-A)}$

donde $\sigma^2 = \frac{B^3-A^3}{3(B-A)} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = \frac{(B-A)^2}{12}$

6.4 Un autobús llega cada 10 minutos a una parada. Se supone que el tiempo de espera para un individuo en particular es una variable aleatoria con distribución continua uniforme.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo espere más de 7 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo espere entre 2 y 7 minutos?

a) $P(x>7) = \frac{10-7}{10} = 0.3$

b) $P(2<x<7) = \frac{7-2}{10} = 0.5$

6.8 Dada una distribución normal con $\mu = 30$ y $\sigma = 6$, calcule

a) el área de la curva normal a la derecha de $x = 17$;

b) el área de la curva normal a la izquierda de $x = 22$;

c) el área de la curva normal entre $x = 32$ y $x = 41$;

d)) el valor de x que tiene 80% del área de la curva normal a la izquierda;

e) los dos valores de x que contienen 75% central del área de la curva normal.

a) $z = (17-30)/6 = -2.17$

area $= 1 - 0.0150 = 0.985$

b) $z = \frac{(22-30)}{6} = -1.33$

area $= 0.0918$

c) $z_1 = \frac{32-30}{6} = 0.33$

$z_2 = \frac{(41-30)}{6} = 1.83$

area $= 0.966 - 0.629 = 0.337$

D) = $z = 0.84$. $x = 30 + (6)(0.84) = \underline{35.04}$

e) $z_1 = -1.15$; $x_1 = 30 + (6)(-1.15) = \underline{23.1}$
$z_2 = 1.15$ $x_2 = 30 + (6)(1.11) = \underline{36.9}$

6.12 Las barras de pan de centeno que cierta panade- ría distribuye a las tiendas locales tienen una longitud promedio de 30 centímetros y una desviación estándar de 2 centímetros. Si se supone que las longitudes están distribuidas normalmente, ¿qué porcentaje de las barras son

a) más largas que 31.7 centímetros?
b) de entre 29.3 y 33.5 centímetros de longitud?
c) más cortas que 25.5 centímetros?

a) = $z_1 = \dfrac{31.7 - 30}{2} = 0.35$

area $= 0.192$ = -

el 19% es mas larga de 31.7cm

b) $z_1 = \dfrac{29.3 - 30}{2} = -0.35$ area $= 0.95$

$z_2 = \dfrac{33.5 - 30}{2} = 1.75$ area $= 0.36$

$0.95 - 0.36 = 0.59$

el .59% esta entre 29 y 33.5 cm

6.14 El diámetro interior del anillo de un pistón ter- minado se distribuye normalmente con una media de 10 centímetros y una desviación estándar de 0.03 cen- tímetros.

a) ¿Qué proporción de anillos tendrá diámetros inte- riores que excedan 10.075 centímetros?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el anillo de un pis- tón tenga un diámetro interior de entre 9.97 y 10.03 centímetros?
c) ¿Por debajo de qué valor del diámetro interior cae- rá el 15% de los anillos de pistón?

a) $z = \dfrac{10.075 - 10}{0.03} = 2.5$

area $= 0.0062$

el 0.62% exede 10.075cm

b) = $z = \dfrac{9.97 - 10}{0.3} = -1$ area $= 0.8413$

$z_2 = \dfrac{10.03 - 10}{0.03} = 1$ area$_2$ $= 0.1587$

$0.8413 - 0.15 = \underline{0.682}$

6.18 La estatura de 1000 estudiantes se distribuye normalmente con una media de 174.5 centímetros y una desviación estándar de 6.9 centímetros. Si se supo- ne que las estaturas se redondean al medio centímetro más cercano, ¿cuántos de estos estudiantes esperaría que tuvieran una estatura

a) menor que 160.0 centímetros?
b) de entre 171.5 y 182.0 centímetros inclusive?
c) igual a 175.0 centímetros?
d)) mayor o igual que 188.0 centímetros?

a) $z = \dfrac{159.75-(174.5)}{6.9} = -2.14$

área $= 0.0162$

$(1000)(0.0162 =$ 16 estudiantes

b) $z_1 = \dfrac{(171.25 - 174.5}{6.9} = 0.74$ area $= 0.8686$

$z_2 = \dfrac{182. - 174.5}{69} = 7.12$ area $= 0.3192$

$0.86 - 0.34 = 0.54$; $(1000)(0.54) = 54$ estudiante

c) $z_1 = \dfrac{175 - 174}{69} = 0.04$ area $= 0.54$

$z_2 = \dfrac{174 - 174}{69} = 0.11$ areo $= 0.51$

$0.54 - 0.51 = 0.2 = (100)(0.2) =$ 28 estudiantes

d) $z = \dfrac{187.75 - 174.5}{6.9} = 1.92$ area $= 0.0274$

$(1000)(0.024) =$ 27 estudiantes

6.20 Los pesos de un gran número de *poodle* miniatura se distribuyen aproximadamente de forma normal con una media de 8 kilogramos y una desviación están- dar de 0.9 kilogramos. Si las mediciones se redondean al décimo de kilogramo más cercano, calcule la frac- ción de estos *poodle* con pesos

a) por arriba de 9.5 kilogramos;
b) a lo sumo 8.6 kilogramos;
c) entre 7.3 y 9.1 kilogramos.

a) = $z = \dfrac{9.55-8}{0.9} = 1.78$

area = 0.0427

b) $z = \dfrac{8.6-8}{0.9} = 0.72$ area = 0.7642

c) = $z_1 = \dfrac{7.25-8}{0.9} = -0.83$ area = 0.8997

$z_2 = \dfrac{9.1-8}{0.9} = 1.28$ area = 0.2033

0.89 − 0.20 = 0.6964

$\boxed{6.23}$

$z = \dfrac{94.5-115}{12} = -1.71$

area = 0.0436 ; (600)(0.0436) = 26 alu

6.24 Se lanza una moneda 400 veces. Utilice la aproximación a la curva normal para calcular la probabilidad de obtener

a) entre 185 y 210 caras;
b) exactamente 205 caras;
c) menos de 176 o más de 227 caras.

a) $z_1 = \frac{(184.5 - 200)}{10} = -1.55$ area $= 0.8531$

$z_2 = \frac{210 - 200}{10} = 1.05$ area $= 0.0606$

$0.8531 - 0.0606 = 0.7925$

b) $z = \frac{204.5 - 200}{10} = 0.45$ area $= 0.7088$

$z_2 = \frac{205.5 - 200}{10} = 0.55$ area $= 0.6736$

$0.7088 - 0.6736 = 0.0359$

c) $z_1 = \frac{175.5 - 200}{10} = -2.45$ area $= 0.007$

$z_2 = \frac{227.5 - 200}{10} = 2.75$ area $= -0.9970$

$0.007 - 0.997 + 1 = 0.0101$

6.27 Un paciente tiene 0.9 de probabilidad de recuperarse de una operación de corazón delicada. De los siguientes 100 pacientes que se someten a esta operación, ¿cuál es la probabilidad de que

a) sobrevivan entre 84 y 95 inclusive?
b) sobrevivan menos de 86?

$\mu = (100)(0.9) = 90$

$\sigma = \sqrt{(100)(0.9)(0.1)} = 3$

a) $z_1 = \frac{83.5 - 90}{3} = -2.17$ area $= 0.9664$

$z_2 = \frac{95.5 - 90}{3} = 1.83$ area $= 0.0150$

$0.9664 - 0.0150 = 0.9664$

b) $z = \frac{85.5-90}{3} = -1.50$ area $= 0.0668$

6.28 Investigadores de la Universidad George Washington y del Instituto Nacional de Salud informan que aproximadamente 75% de las personas cree que "los tranquilizantes funcionan muy bien para lograr que una persona esté más tranquila y relajada". De las siguientes 80 personas entrevistadas, ¿cuál es la probabilidad de que

a) al menos 50 tengan esta opinión?

b) a lo sumo 56 tengan esta opinión?

$\mu = (80)(3/4) = 60$

$\sigma = \sqrt{(80)(3/4)(1/4)} = 3.873$

a) $z = \frac{49.5-60}{3.87} = -2.71$

área $= 0.0034$ $\quad 1-0.0034 = 0.9966$

b) $z = \frac{56.5-60}{3.873} = -0.9$ area $= 0.1841$

6.30 Un fabricante de medicamentos sostiene que cierto medicamento cura una enfermedad de la sangre, en promedio, 80% de las veces. Para verificar la aseveración, inspectores gubernamentales utilizan el medicamento en una muestra de 100 individuos y deciden aceptar la afirmación si se curan 75 o más.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los inspectores gubernamentales rechacen la aseveración si la probabilidad de curación es, de hecho, de 0.8?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el gobierno acepte la afirmación si la probabilidad de curación resulta tan baja como 0.7?

$\mu = (100)(0.8) = 80$

$\sigma = \sqrt{(100)(.8)(0.2)} = 4$

a) $z_1 = \frac{74.5-80}{4} = -1.38$

area $= 0.0838$

b) $\mu = (100)(0.7) = 70$

$\sigma = \sqrt{100 * 0.7 * 0.3} = 4.583$

$z_1 = \frac{74.5-70}{4.58} = 0.9$

area $= 0.7635$

6.32 Una empresa farmacéutica sabe que aproximadamente 5% de sus píldoras anticonceptivas no contiene la cantidad suficiente de un ingrediente, lo que las vuelve ineficaces. ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 píldoras en una muestra de 200 sean ineficaces?

$\mu = (200)(0.05) = 10$

$\sigma = \sqrt{200 * 0.05 * 0.95} = 3.0$

$z_1 = \frac{9.5 - 10}{3.082} = -0.16$

area = 0.4364

6.34 Un par de dados se lanza 180 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra un total de 7

a) al menos 25 veces?
b) entre 33 y 41 veces?
c) exactamente 30 veces?

$\mu = (180)(1/6) = 30$

$\sigma = \sqrt{(180)(1/6)(5/6)} = 5$

a) $z = \frac{(24.5 - 30)}{5} = -1.1$ area $= 0.1357$

$1 - 0.1357 = 0.8643$

b) $z_1 = \frac{33 - 30}{5} = 0.5$ area $= 0.9893$

$z_2 = \frac{41 - 30}{5} = 2.3$ area $= 0.6915 =$

$0.9893 - 0.6915 = 0.2978$

c) $z_1 = \frac{29.5 - 30}{5} = -0.1$ area $= 0.5399$

$z_2 = \frac{30.5 - 30}{5} = 0.1$ area $= 0.4602$

$0.5398 - 0.4602 = 0.0796$

6.36 Una práctica común por parte de las aerolíneas consiste en vender más boletos que el número real de asientos para un vuelo específico porque los clientes que compran boletos no siempre se presentan a abordar el avión. Suponga que el porcentaje de pasajeros que no se presentan a la hora del vuelo es de 2%. Para un vuelo particular con 197 asientos, se vendieron un total de 200 boletos. ¿Cuál es la probabilidad de que la aerolínea haya sobrevendido el vuelo?

$n = 200$

$x = 0.02$

$$z = \frac{3 - 0.5 - 4}{\sqrt{(200)(0.02)(0.98)}} = 0.76 \qquad \text{area} = 0.7764$$

$$1 - 0.7764 = 0.2236$$

6.37 El nivel X de colesterol en la sangre en muchachos de 14 años tiene aproximadamente una distribución normal, con una media de 170 y una desviación estándar de 30.

a) Determine la probabilidad de que el nivel de colesterol en la sangre de un muchacho de 14 años elegido al azar exceda 230.

b) En una escuela secundaria hay 300 muchachos de 14 años. Determine la probabilidad de que por lo menos 8 de ellos tengan un nivel de colesterol superior a 230.

a) $$z = \frac{230 - 170}{30} = 2$$

$\text{area} = 0.0228$

$\mu = (300)(0.0228) = 6.84$

$\sigma = \sqrt{(300)(0.028)(0.0028)} = 0.3974$

6.38 Una empresa de telemarketing tiene una máquina especial para abrir cartas que abre y extrae el contenido de los sobres. Si un sobre se colocara de forma incorrecta en la máquina, no se podría extraer su contenido, o incluso se podría dañar. En este caso se dice que "falló" la máquina.

a) Si la probabilidad de que falle la máquina es de 0.01, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra más de una falla en un lote de 20 sobres?

b) Si la probabilidad de que falle la máquina es de 0.01 y se abrirá un lote de 500 sobres, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran más de 8 fallas?

a) $x = b(x, 20, 0, 01)$

$P(x > 1) = 1 - b(0, 20, 0, 01) - b(1, 20, 0, 0$

$= 1 - \binom{20}{0}(0.01)^0(0.99)^{20} - \binom{20}{1}(0.01)(0.$

$= 0.01689$

b)

$P = 0.01$

$n = 500$

$\mu = (500)(0.01) = 5$

$\sigma = \sqrt{(500)(0.01)(0.99)} = 2.2249$

$$z = \frac{8.5 - 5}{2.2249} = 0.9418$$

$1 - 0.9418 = 0.0582$

6.40 En cierta ciudad, el consumo diario de agua (en millones de litros) sigue aproximadamente una distribución gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Si la capacidad diaria de dicha ciudad es de 9 millones de litros de agua, ¿cuál es la probabilidad de que en cualquier día dado el suministro de agua sea inadecuado?

$$P(x>9) = \frac{1}{9}\int_9^{\infty} x e^{-x/3}\,dx = \frac{x}{3}e^{-x/3} - e^{-x/3}\Big]_9^{\infty}$$

$$P(x>9) = \underline{0.1992}$$

6.43 *a)* Calcule la media y la varianza del consumo diario de agua del ejercicio 6.40.

a) De acuerdo con el teorema de Chebyshev, ¿hay por lo menos 3/4 de probabilidad de que el consumo de agua en cualquier día determinado caiga dentro de cuál intervalo?

$$\mu = \alpha\beta = (2)(3) = \underline{6\ \text{mu}}$$

$$\sigma = \alpha\beta^2 = (2)(9) = \underline{18}$$

$$\mu \pm 2\sigma = 6 \pm \sqrt{2}\,18$$

$$\underline{-2{,}485 \text{ y } 14.485}$$

6.44 En cierta ciudad el consumo diario de energía eléctrica, en millones de kilowatts-hora, es una variable aleatoria X que tiene una distribución gamma con media $\mu = 6$ y varianza $\sigma^2 = 12$.

a) Calcule los valores de α y β.

b) Calcule la probabilidad de que en cualquier día dado el consumo diario de energía exceda los 12 millones de kilowatts-hora.

a) $\mu = (2)(3) = 6$

$\sigma = 12$

$\underline{\beta = 2}$ $\underline{\alpha = 3}$

b) $$P(x>12) = \frac{1}{16}\int_{12}^{\infty} x^2 e^{-x/2}\,dx$$

$$\frac{1}{16}\; -2x^2e^{-x^2} - 8xe^{-x/2} - 16e^{-x/2}\Big|_{12}^{\infty} = \underline{25e^{-6}}$$

6.45 El tiempo necesario para que un individuo sea atendido en una cafetería es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con una media de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida en menos de 3 minutos en al menos 4 de los siguientes 6 días?

$P(x<3) = \frac{1}{4}\int_0^3 e^{-x/4}\,dx = -e^{-x/4}\Big|_0^3 = 1-e^{-3/4} = 0.5$

(60) Si la proporción de una marca de televisores que requiere servicio durante el primer año de operación es una variable aleatoria que tiene una distribución beta con $\alpha = 3$ y $\beta = 2$, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 80% de los nuevos modelos de esta marca que se vendieron este año requieran servicio durante su primer año de operación?

$F(x) = 12x^2(1-x)$;

$P(x>0.8) = 12\int_{0.8}^{1} x^2(1-x)$

$= 0.1808$

(63) En una investigación biomédica se determinó que el tiempo de supervivencia, en semanas, de un animal cuando se le somete a cierta exposición de radiación gamma tiene una distribución gamma con $\alpha = 5$ y $\beta = 10$.

a) ¿Cuál es el tiempo medio de supervivencia de un animal seleccionado al azar del tipo que se utilizó en el experimento?

b) ¿Cuál es la desviación estándar del tiempo de supervivencia?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un animal sobreviva más de 30 semanas?

$\alpha = 5$

$\beta = 10$

a) $\alpha\beta = 50$

b) $\sigma = (5)(10)^2 = \sqrt{500} = 22.36$

c) $= 1-\int_0^3 \frac{y^4 e^{-y}}{5} = 1-0.185 = 0.815$

6.55 El tiempo de respuesta de una computadora es una aplicación importante de las distribuciones gamma y exponencial. Suponga que un estudio de cierto sistema de cómputo revela que el tiempo de respuesta, en segundos, tiene una distribución exponencial con una media de 3 segundos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 5 segundos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta exceda 10 segundos?

$\mu = 3.$

$F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-x/3}.$

a) $= P(x>5) = \int_5^{\infty} \frac{1}{3} e^{-x/3} dx = (1/3) \cdot -e^{-x/3}\Big|_5^{\infty} = e^{-5/3}$

$= 0.1889$

b) $P(x>10) = e^{-10/3} = 0.0357$

6.56 Los datos de frecuencia a menudo tienen una distribución logarítmica normal. Se estudia el uso promedio de potencia (dB por hora) para una empresa específica y se sabe que tiene una distribución logarítmica normal con parámetros $\mu = 4$ y $\sigma = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa utilice más de 270 dB durante cualquier hora particular?

$P(x>270) = 1 - \frac{\ln 270 - 4}{2} = 1 - (0.7992) = 0.2119$

6.62 La distribución exponencial se aplica con frecuencia a los tiempos de espera entre éxitos en un proceso de Poisson. Si el número de llamadas que se reciben por hora en un servicio de respuesta telefónica es una variable aleatoria de Poisson con el parámetro $\lambda = 6$, sabemos que el tiempo, en horas, entre llamadas sucesivas tiene una distribución exponencial con el parámetro $\beta = 1/6$. ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 15 minutos entre cualesquiera 2 llamadas sucesivas?

$P(x>1/4) = \int_{1/4}^{\infty} 6e^{-6x} dx = -e^{-6x}\Big|_{1/4}^{\infty} = e^{-1.5} = 0.223$

6.64 Un fabricante de cierto tipo de máquina grande desea comprar remaches de uno de dos fabricantes. Es importante que la resistencia a la rotura de cada remache exceda 10,000 psi. Dos fabricantes (A y B) ofrecen este tipo de remache y ambos tienen remaches cuya resistencia a la rotura está distribuida de forma normal. Las resistencias promedio a la rotura para los fabricantes A y B son 14,000 psi y 13,000 psi, respectivamente. Las desviaciones estándar son 2000 psi y 1000 psi, respectivamente. ¿Cuál fabricante producirá, en promedio, el menor número de remaches defectuosos?

$Z = \frac{10000 - 14000}{2000} = -2 =$ area 0.9772

$Z = \frac{10000 - 13000}{1000} = -3$ area $= 0.9987$

6.76 En el ejercicio 6.54 de la página 206 se supone que la vida de un transistor tiene una distribución gamma con una media de 10 semanas y una desviación estándar de $\sqrt{50}$ semanas. Suponga que la distribución gamma es incorrecta y que se trata de una distribución normal.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor dure a lo sumo 50 semanas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor no sobreviva las primeras 10 semanas?

c) Comente acerca de la diferencia entre los resultados que obtuvo aquí y los que se obtuvieron en el ejercicio 6.54 de la página 206.

$\mu = 10$

$\sigma = \sqrt{50}$

a) $P(x \leq 50) = P(z \leq 5.66) \approx 1$

b) $P(x \leq 10) = 0.5$

c) si se evalúa en 50 y en 10, la normal se populariza a aumentar las probabilidad.

6.77 La distribución beta tiene muchas aplicaciones en problemas de confiabilidad, donde la variable aleatoria básica es una proporción, como sucede en el contexto práctico que se ilustra en el ejercicio 6.50 de la página 206. En este apartado considere el ejercicio de repaso 3.73 de la página 108. Las impurezas en el lote del producto de un proceso químico reflejan un problema grave. Se sabe que la proporción de impurezas Y en un lote tiene la siguiente función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} 10(1-y)^9, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Verifique que la anterior sea una función de densidad válida.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote se considere no aceptable (es decir, $Y > 0.6$)?

c) ¿Cuáles son los parámetros α y β de la distribución beta que se ilustra aquí?

d) La media de la distribución beta es $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ¿Cuál es la proporción media de impurezas en el lote?

e) La varianza de una variable aleatoria beta distribuida es

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

¿Cuál es la varianza de Y en este problema?

a) $\int_0^1 10(1-y)^9 = -(1-y)^{10}\Big|_0^1 = 1$

b) $P(y > 0.6) = -(1-y)^{10}\Big|_{0.6}^{1} = 0.0001$

c) $\alpha = 1$ $\beta = 10$

d) $\mu = \frac{1}{1+10} = 0.0909$

e) $\sigma = \frac{(1)(10)}{(1+10)^2(1+10+1)} = 0.0068$