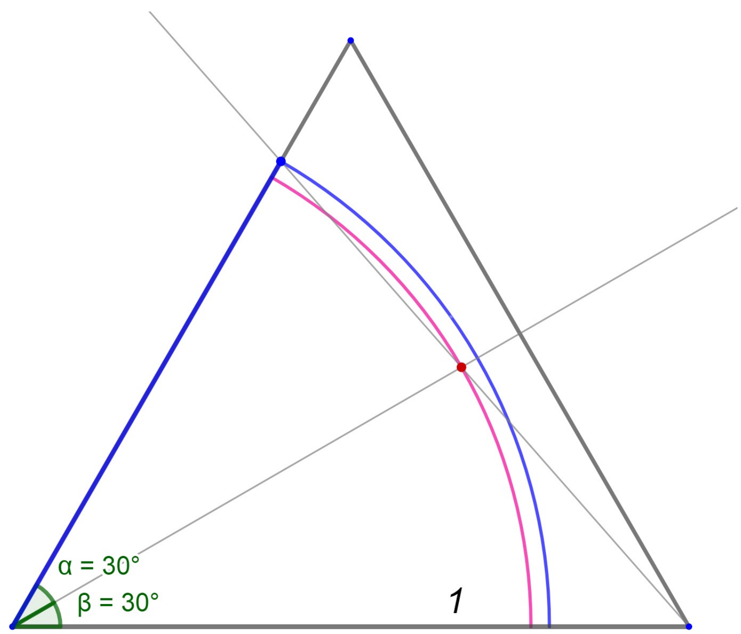
Удвоение куба

Взгляд на задачу под другим углом.

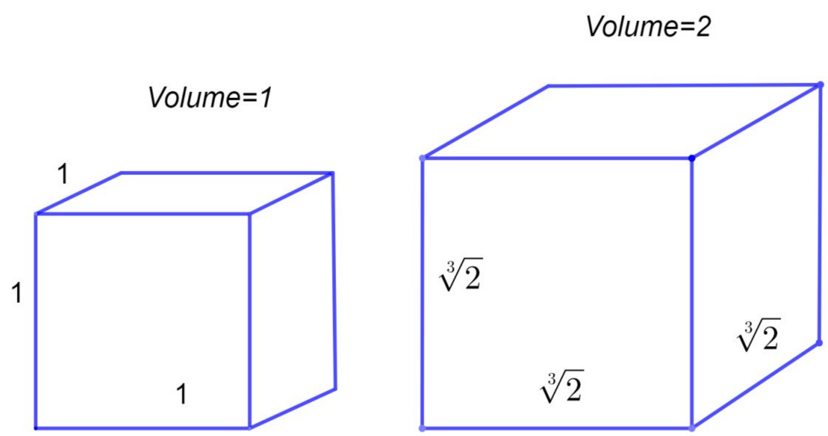


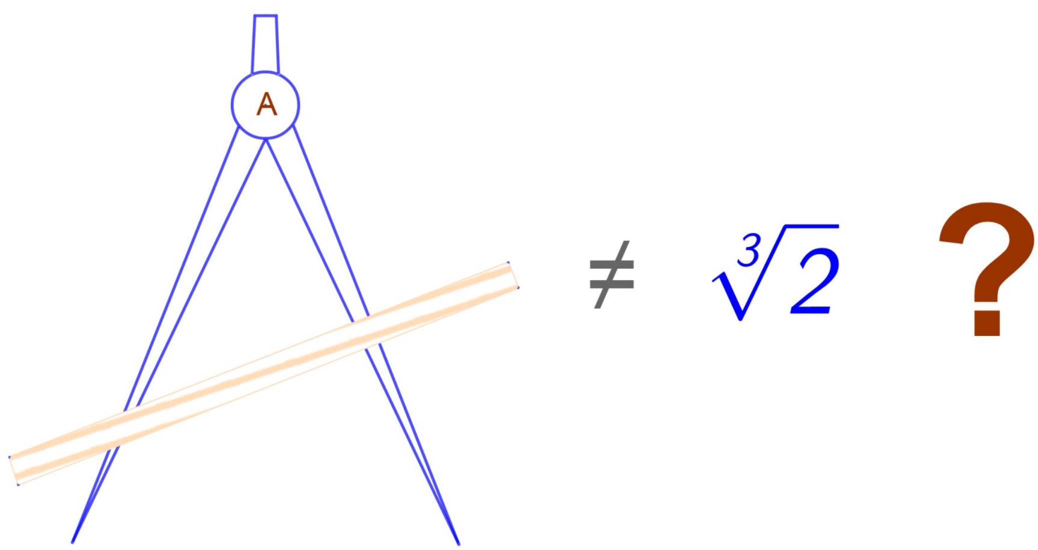
Аскарбеков Алмас Серикович

jobspace@yandex.com

Аннотация

Удвоение куба — классическая античная задача на построение циркулем и линейкой ребра куба, объём которого вдвое больше объёма заданного единичного куба.
Задача сводится к тому, что необходимо построить отрезок равный $\sqrt[3]{2}$ используя циркуль и неразмеченную линейку.
В 1837 году Пьер Ванцель доказал, что эта задача не может быть решена с помощью циркуля и линейки.





Оглавление

Глава 1

1.1 Построение

1. Построим базовые линии и окружности радиусом $r = 1$ как показано на рис 1.1.

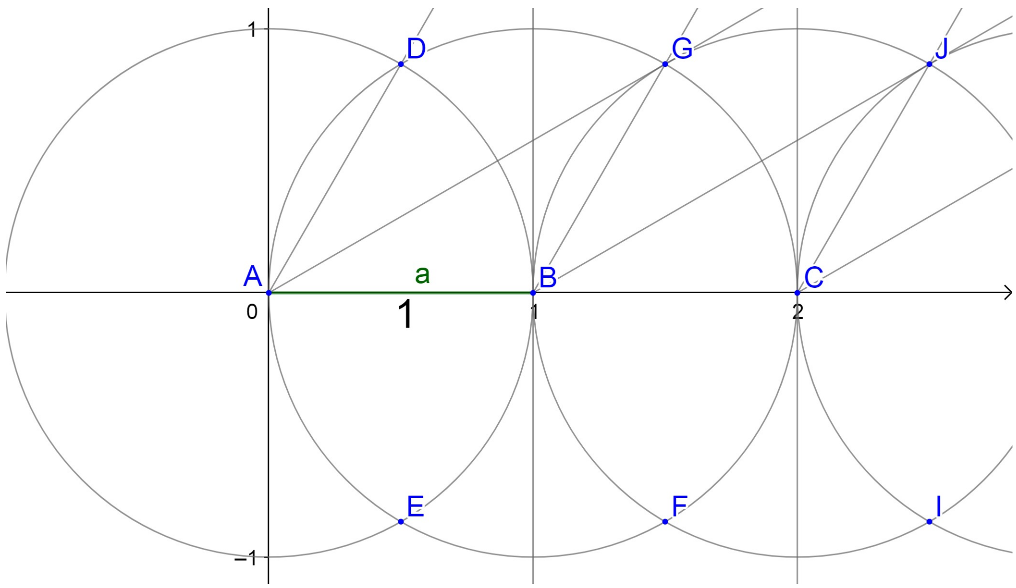


Рис. 1.1: Базовые окружности

2. Затем построим прямоугольный треугольник $\triangle ANB$ (Рис. 1.2) со стороной $t = 0.75$.

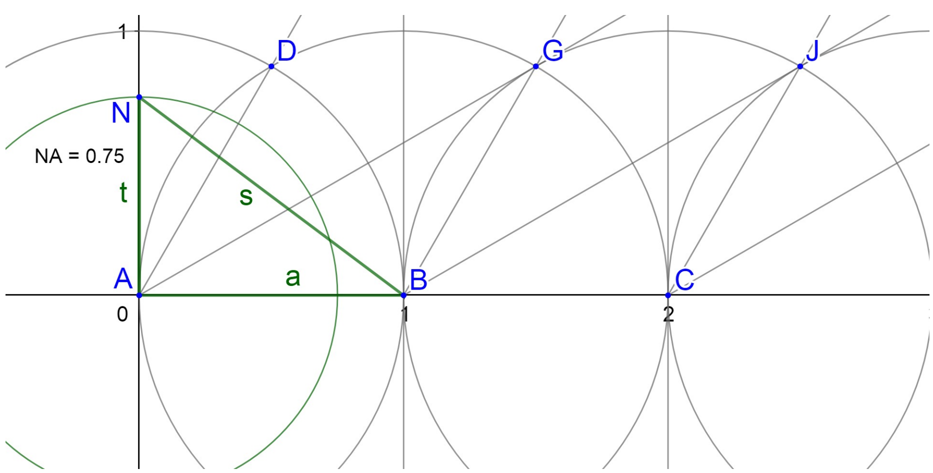


Рис. 1.2: Прямоугольный треугольник

Вычислим гипотенузу:

$$s = \overline{NB} = \sqrt{a^2 + t^2} = \sqrt{1^2 + 0.75^2} = 1.25 \tag{1.1}$$

3. Отсюда отношение катета к гипотенузе:

$$\frac{a}{s} = \cos \angle ABN = \frac{1}{1.25} = 0.8. \tag{1.2}$$

Что бы построить это отношение проведем линию через точки N и B. Мы получим точку O и точку P. (см. Рис. 1.3)

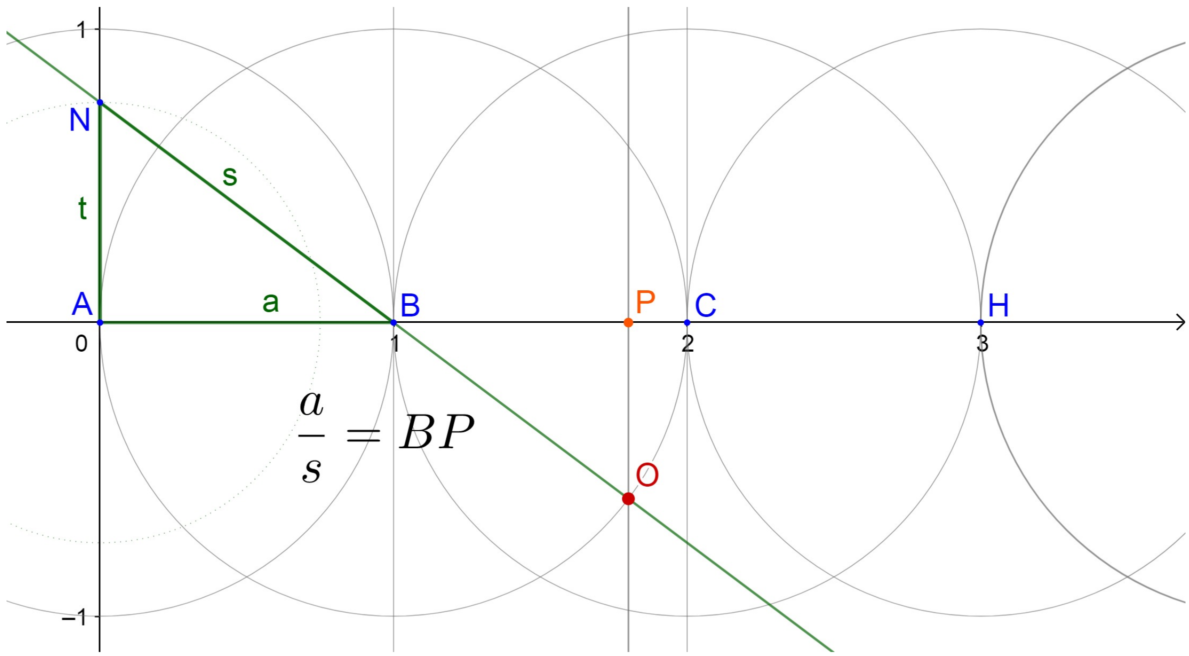


Рис. 1.3

4. Теперь построим окружность с центром B и радиусом $= BP$ (см. Рис 1.4)

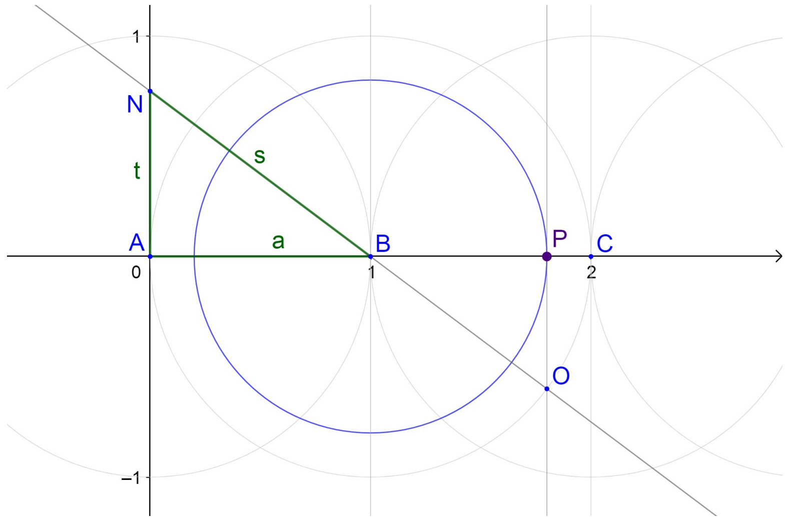


Рис. 1.4

5. Затем построим луч из точки $C(2,0)$ через точку Q которая является пересечением окружности и отрезка $\overline{BG}$. (см. Рис. 1.5).

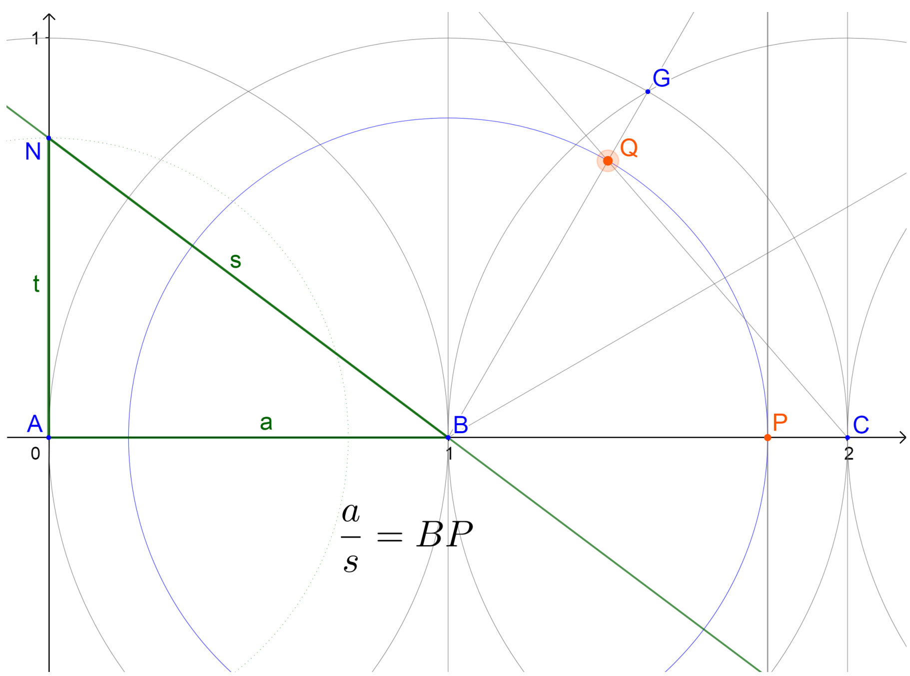


Рис. 1.5

6. Затем получим точку R как показано на рис. 1.6

   Отрезок BR это биссектриса $\triangle\ BQC$ (см. Рис. 1.7)

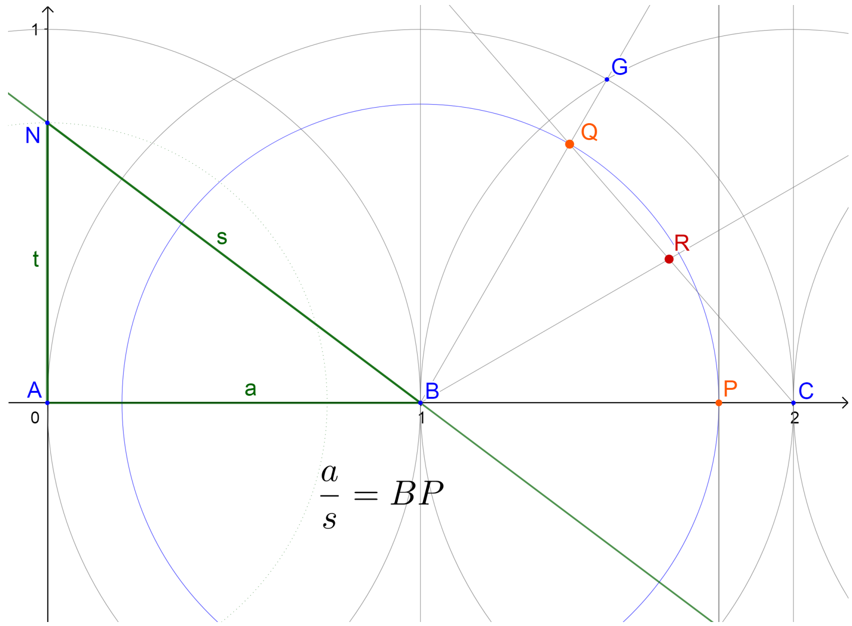


Рис. 1.6

Итак у нас есть треугольник $\triangle\ BQC$ где $BQ = BP = \frac{a}{s} = \cos\angle ABN$.

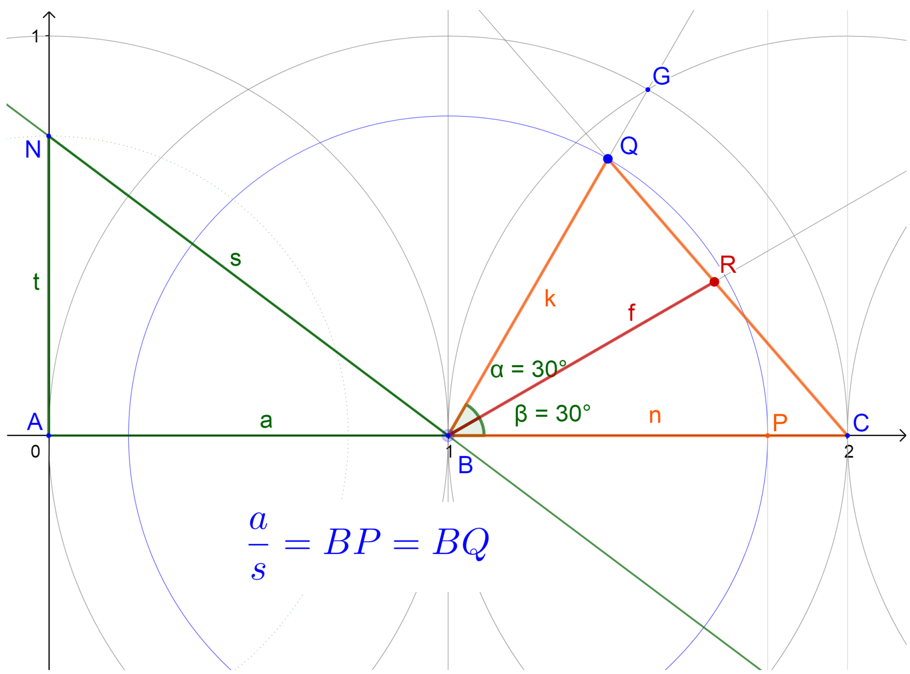


Рис. 1.7: Треугольник BQC

7. Вычислим биссектрису BR по формуле длины биссектрисы для угла в 60 градусов:

$$f = \frac{2nk}{k+n} \times \cos 60^\circ = \frac{2nk}{k+n} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1.3}$$

где: $k = BQ = 0.8$; $n = BC = 1$; следовательно:

$$f = \frac{2 \times 0.8}{1 + 0.8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.769800358919501 \tag{1.4}$$

8. Построим окружность с радиусом $= f$ и центром в точке $B(1,0)$ и получим точку D (см. Рис. 1.8)

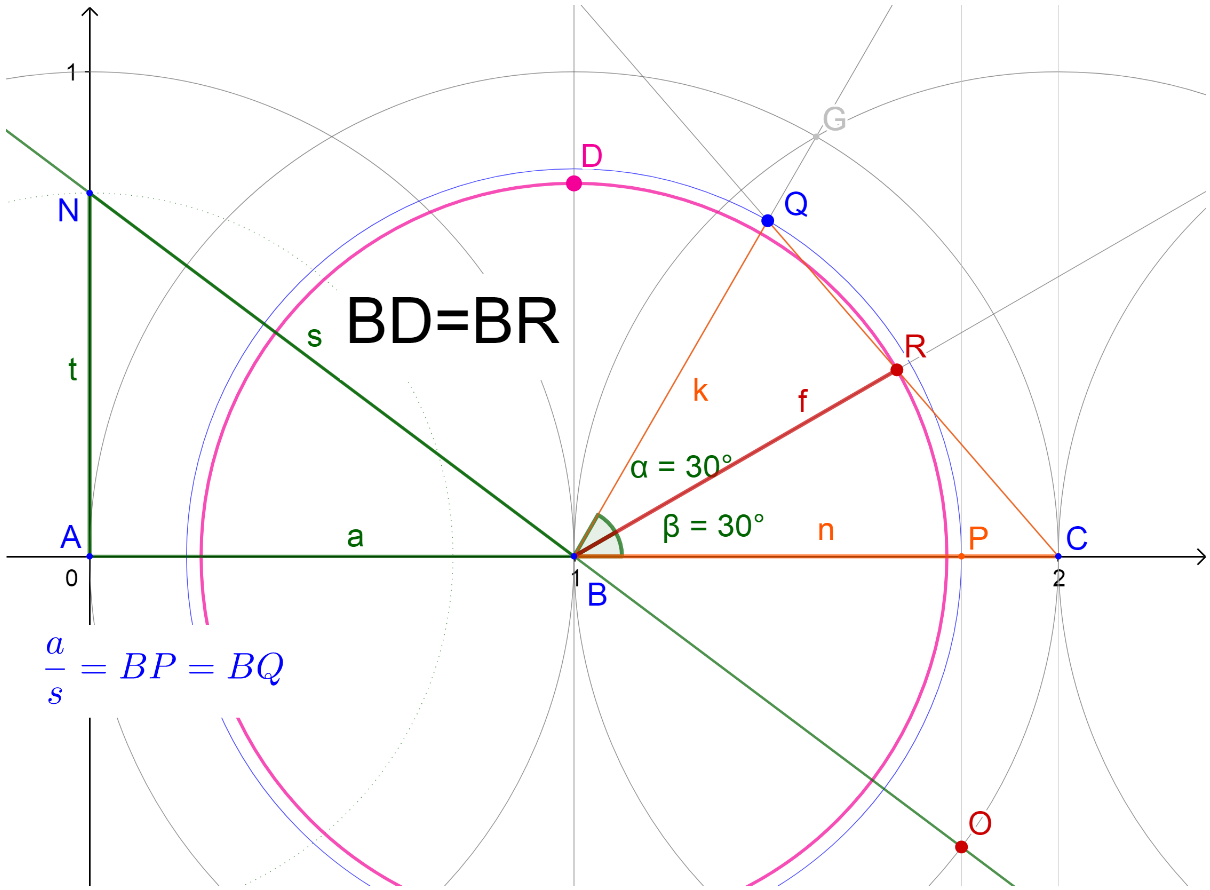


Рис. 1.8: Окружность где радиус = биссектриса BR

9. Затем снова построим прямоугольный треугольник $\triangle BDC$ как показано на рис. 1.9.

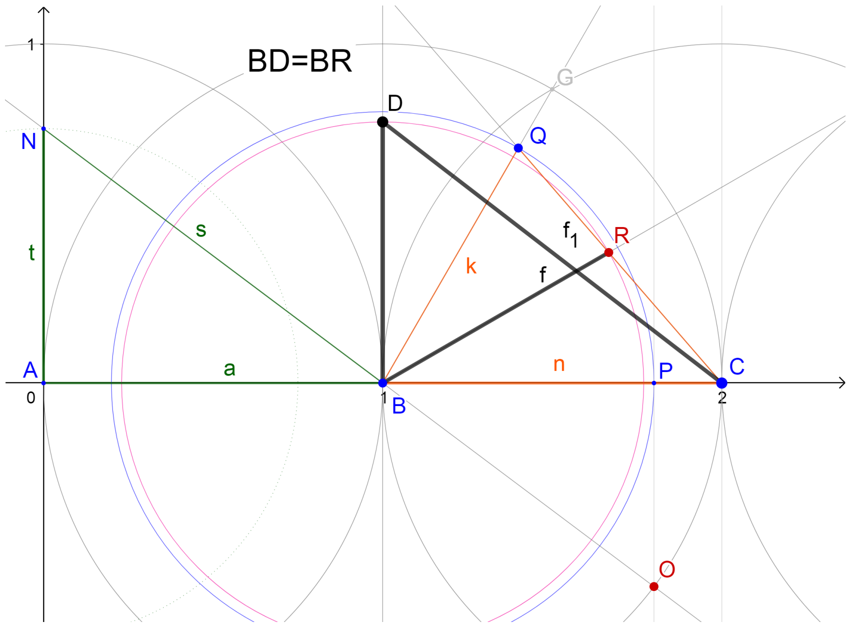


Рис. 1.9

Итак мы получили прямоугольный треугольник $\triangle BDC$. Соответсвенно дальше мы повторяем действия:

строим значение косинуса

строим треугольник с углом в 60 градусов

находим биссектрису

строим прямоугольный треугольник

и так снова и снова.

Повторяя эти построения, через n-ное построение мы получим $\sqrt[3]{2}$ как длину гипотенузы прямоугольного треугольника. Таким образом длина гипотенузы вычисляемая по приведенной последовательности стремится к $\sqrt[3]{2}$.

1.2 Определение

Из вышеприведенных действий получим рекуррентную последовательность:

$$(a_1 > 0, n \in \mathbb{N}) \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2a_n}{1+a_n}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \tag{1.5}$$

Которая следует из нижеследующего:

$$\sqrt[3]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+b_n^2} \tag{1.6}$$

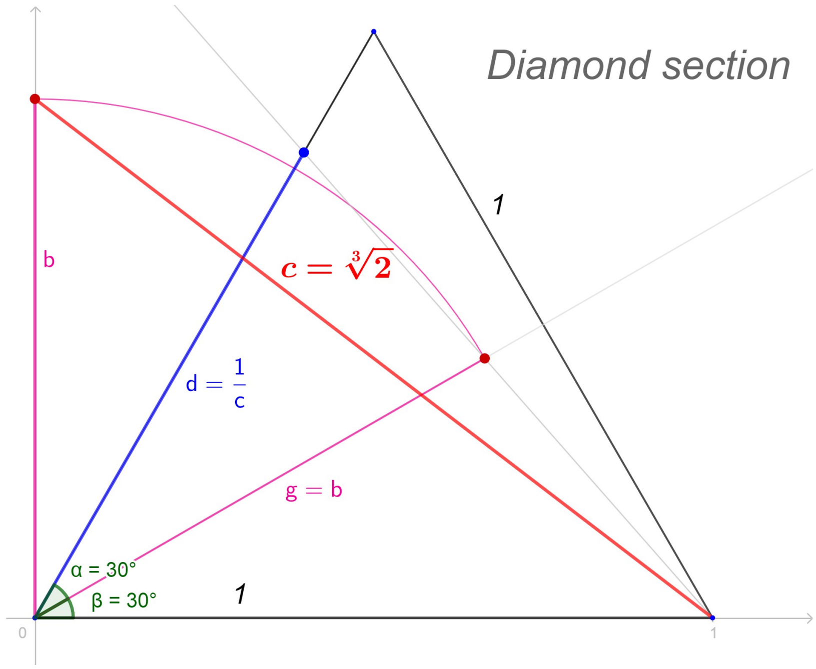
$$b_1 > 0, \ \ b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+b_n^2}}, \quad b_{n+2} = \frac{2\times b_{n+1}}{1+b_{n+1}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} ... \tag{1.7}$$

Где b_{n+1} косинус прямоугольного треугольника $\triangle CBD$ (см. рис 1.9), соответсвенно $b_{n+2} = \dfrac{2\times b_{n+1}}{1+b_{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ биссектриса $\overline{BR}$ треугольника $\triangle BQC$ с углом $\angle CBQ$ 60-градусов, где малый катет BQ это b_{n+1}

.

Таким образом применяя определенную последовательность действий, возможно получить $\sqrt[3]{2}$ с любой, какой угодно заданной точностью. При этом мы используем только циркуль и неразмеченную линейку.

Можно ли считать задачу решенной?
надо бы спросить у Дельфийского оракула...


Diamond section
1
b
$c = \sqrt[3]{2}$
$d = \frac{1}{c}$
$g = b$
α = 30°
β = 30°
1
0
1

1.3 Приложение

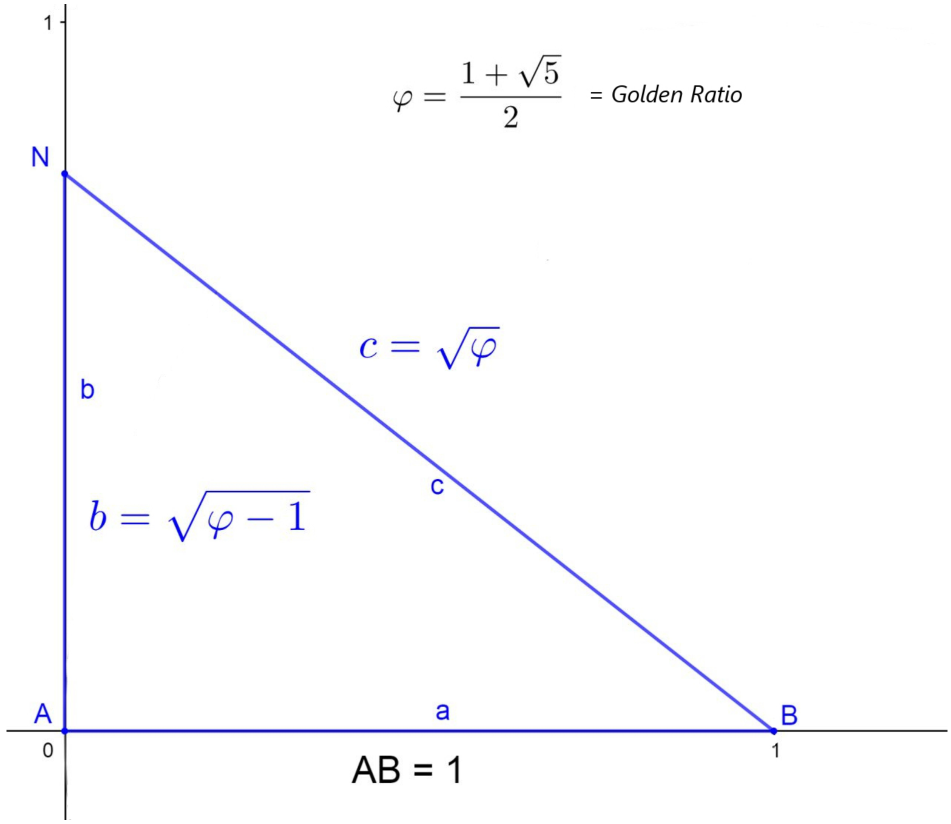


Рис. 1.10: Интересный треугольник

Возьмем **произвольную** сторону b для прямоугольного треугольника $a = 1$, и рекурсивно выполним следующие действия: найдем гипотенузу по формуле с $=\sqrt{a^2 + b^2}$, затем получим b_1 как значение равное обратной к гипотенузе c

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{c} = b_1; \tag{1.8}$$

Теперь возьмем b_1 в качестве малого катета прямоугольного треугольника где $a = 1$ и будем повторять вышеописанные действия по формуле:

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b_1; \ \frac{1}{\sqrt{a^2 + b_1^2}} = b_2; \ \frac{1}{\sqrt{a^2 + b_2^2}} = b_3; \ ... \frac{1}{\sqrt{a^2 + b_{n-1}^2}} = b_n \tag{1.9}$$

После n-ного количества итераций мы получим следующие значения:

$$a = 1; \quad b = \sqrt{\varphi - 1}; \quad c = \sqrt{\varphi}; \tag{1.10}$$

Таким образом значение произвольно выбранной стороны b в пределе рекурсивной последовательности 1.9 стремится к $\sqrt{\varphi - 1}$ а гипотенуза с стремится к $\sqrt{\varphi}$, где $\varphi \approx 1.6180339887$ (см. Рис. 1.10)

1.4 Ссылки

website: `http://diamondsection.com`
e-mail: jobspace@yandex.com
github: `https://github.com/AlmasAskarbekov`

1.5 Благодарность

`https://geogebra.org`

Keywords: Удвоение куба, античные задачи, Geometric problems of Antiquity, geometry, doubling the cube, the delians problem

Литература

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Doubling_the_cube

[2] https://oeis.org/A002580

@miscDiamondSection2018, author = Almas Askarbekov, title = Удвоение куба. Исследование, year = 2018, howpublished = https://github.com/DiamondSection/Doubling-the-cube-Solution-Latex, note = commit dbgsxxx