SCIENCE WORLD

Авторы статей:

А. Е. Бралинов
А. И. Серова

Корректор:

Н. Н. Буйлова

Верстальщик:

Е. Р. Маркус

СОДЕРЖАНИЕ


B

АЛГЕБРА

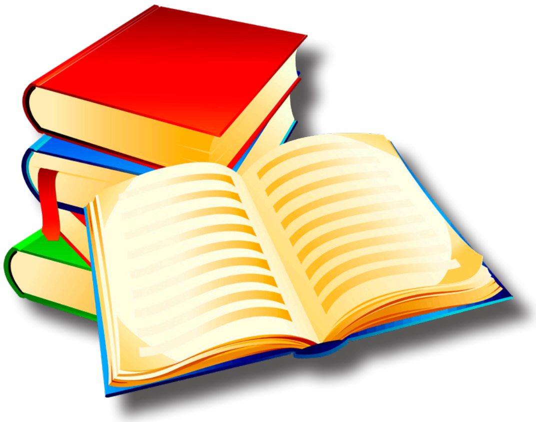
ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

В нашей повседневной жизни мы постоянно встречаемся с различными величинами, будь то цена на кофе, температура на улице или количество выходных в году. Причем величины могут быть как постоянными, так и непостоянными. Мы сталкиваемся с такими **постоянными** величинами, как, например, стоимость проезда в метро или ширина определенной дороги. Также есть величины, которые меняются из-за каких-то других факторов. Например, количество уроков, которые ученик посещает по субботам, меняется в зависимости от его настроения. От температуры на улице в некоторый день зависит количество одежды, которую надевают на себя пешеходы. Сама температура на улице так же изменчива. Эти величины называются **переменными.**

Предположим, вы читаете книгу. Несложно понять, что средняя скорость вашего чтения — постоянная величина. А вот количество прочитанных страниц — переменная. Ведь чем больше времени вы уделите чтению, тем больше страниц будут прочитаны. Еще одна переменная величина — время чтения книги. Все переменные величины можно разделить на **свободные** (независимые) и **зависимые**. В нашем примере время — независимая величина. Вы можете читать книгу 1 час, 1 день, или вообще не читать. В то время как количество прочитанных страниц — величина зависимая. Чем дольше вы читаете, тем больше страниц будет прочитано.

Среди разных зависимостей выделяются в особую группу такие, которые могут помочь однозначно определить значение искомой величины через остальные (независимые). Например, вы собираетесь добраться на машине из одного место в другое. Зная марку машины, можно узнать ее расход бензина на 1 километр. Если вы знаете пункт назначения, можно по карте узнать расстояние, которое вам предстоит преодолеть. Теперь вы однозначно можете определить, сколько бензина нужно вам для этой поездки. А если вы знаете стоимость бензина, также довольно просто посчитать, сколько денег вы потратите на такое путешествие. Такие зависимости называются **функциями** и являются важными для прогнозирования.

Пример с книгой тоже будет функцией, потому что, если вы знаете, сколько времени потрачено на чтение, вы можете точно назвать количество прочитанных страниц. Причем, мы можем читать 20 минут или 1 час, но не можем читать в течение -15 минут или 1 000 000 минут, ведь книга просто закончится. Пусть в нашей книге 200 страниц и вы читаете со скоростью 1 страница в минуту, тогда вы можете читать 0 минут, 5 минут или максимум 200 минут. Другими словами, независимая переменная величина t (время) может принимать любое значение от 0 до 200 минут. Это — **область определения функции** или все значения, которые может принимать независимая переменная так, чтобы функция имела смысл. При этом мы можем, например, прочитать 0, 15 или 200 страниц книги. Но не больше 200 и не меньше 0. Все значения зависимой переменной величины, которые мы можем получить, называются **областью значений функции.**



ОПРЕДЕЛЕНИЕ

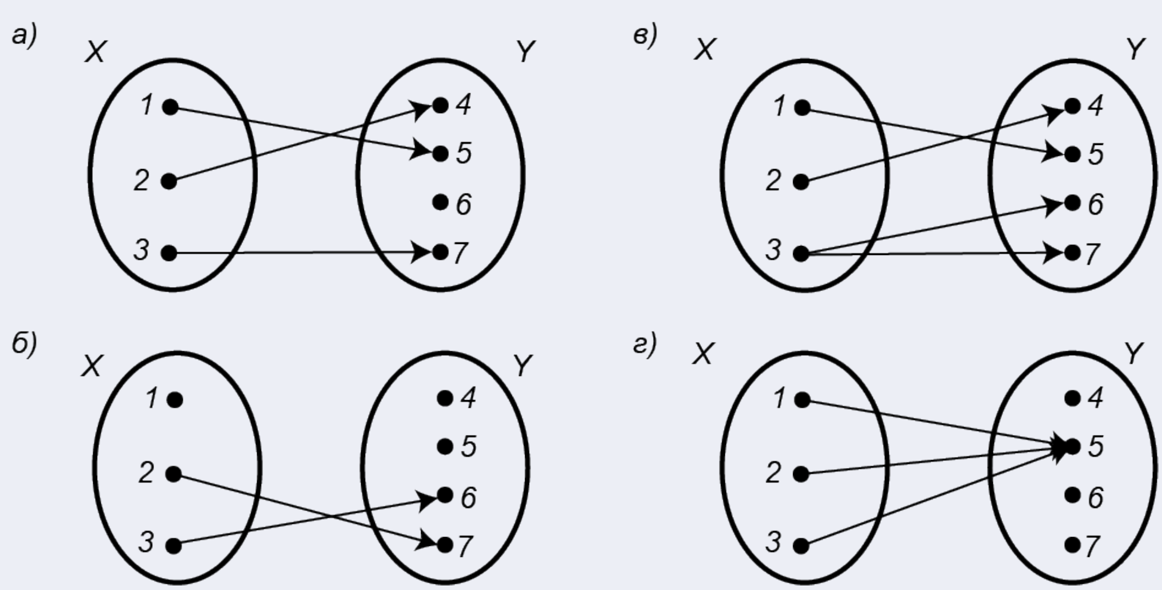
Функция — это правило, по которому каждому элементу *x* из множества *X* ставится в соответствие единственный элемент *y* множества *Y*.

Несложно понять, что в этом определении X — область определения функции, а Y — область значений.

Зависимость «номер дома» будет по определению являться функцией, потому что для каждого дома можно назвать единственное число — его номер. Область определения у такой функции — множество домов, а область значений — множество натуральных чисел.

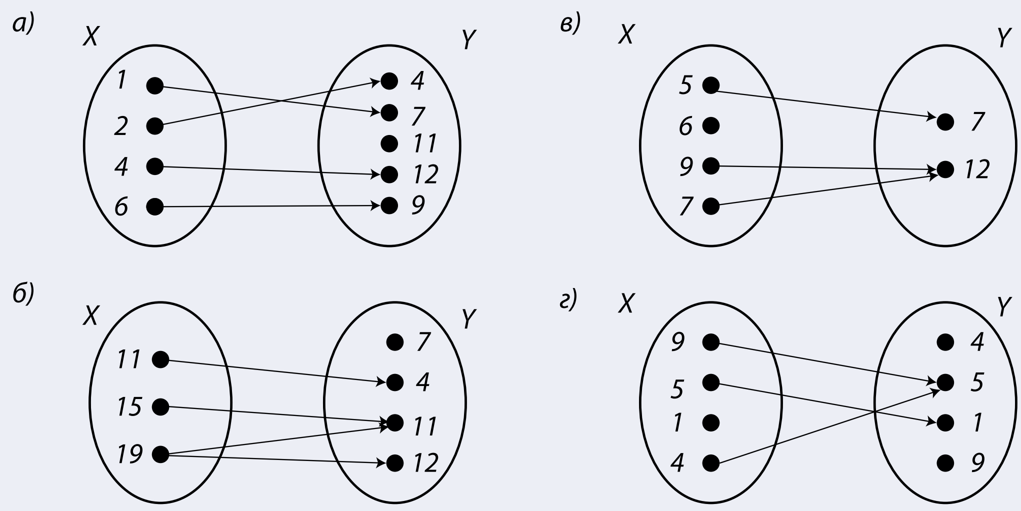
Другая зависимость «цвет обуви человека» имеет область определения — множество всех людей, и область значений — все цвета. Такая зависимость не будет функцией, потому что у человека могут быть, например, разноцветные ботинки — то есть в соответствие человеку будет поставлен не единственный цвет, а несколько сразу. Еще одно несоответствие: человек может быть в данный момент без обуви, а значит мы не сможем поставить ему в соответствие цвет.

На рисунках ниже представлены 4 примера зависимостей. Требуется определить, какие из них являются функциями, а какие – нет.



Обратившись вновь к определению функции, нам становится понятно, что на рисунках а) и г) изображены функции, потому что каждому элементу из *X* поставлен в соответствие ровно один элемент из *Y*. Противоречие определению на рисунке б) в том, что для элемента 3 из множества *X* не поставлен в соответствие ни один элемент из *Y*. Касательно же рисунка в), для элемента 3 из X выбрано два разных элемента из множества *Y*, что так же ведет к противоречию с определением функции.

На рисунках ниже представлены 4 примера зависимостей. Требуется определить, какие из них являются функциями, а какие – нет.



Таким образом, чтобы определить функцию, достаточно знать область определения и область значений функции, а также убедиться в том, что каждому элементу из области определения соответствует единственный элемент из области значений.

Функция обозначается просто:

$$y=f(x)$$

В этой записи *x* — независимая переменная, а *y* зависит от *x*.

Функция может быть задана несколькими способами. Самый простой из них — словесный. В нашем примере с чтением книги функция задавалась именно так. Однако такой способ сложен для понимания и дальнейшего исследования. По-другому задать функцию можно используя таблицу, в которой показано, какие значения принимает зависимая переменная при различных значениях свободной. Для того же примера с книгой мы бы составили таблицу так:

Табл.1

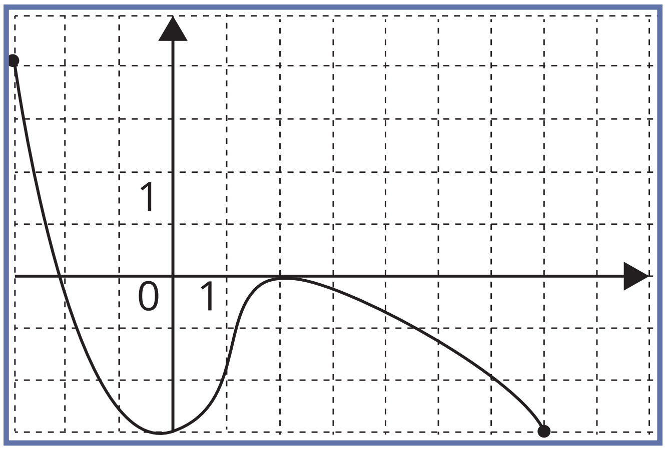
t (мин)	1	5	35	…	200
n (стр.)	1	5	35	…	200

Еще один способ задания — **аналитический**, или через формулу. Например:

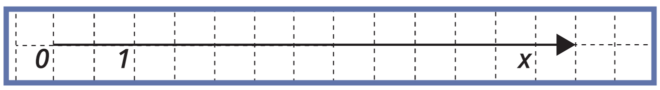
$$y = \frac{7}{x^2}$$

Если в такой записи ничего не сказано про область определения, то мы считаем областью определения все значения *x*, при которых функция имеет смысл (в нашем случае функция не существует только при *x=0*, так как нельзя делить на 0). Таким образом, названная функция имеет область определения: x. В нашем примере с книгой функция будет выглядеть вот так: $n=f(t)=1\times t$. По этой записи мы ничего не можем сказать об области определения функции, хотя в примере она имеет четкие границы. Поэтому необходимо также указать: $x \in [0;200]$. Такой способ задания функции удобен для выявления закономерностей и изучения зависимости.

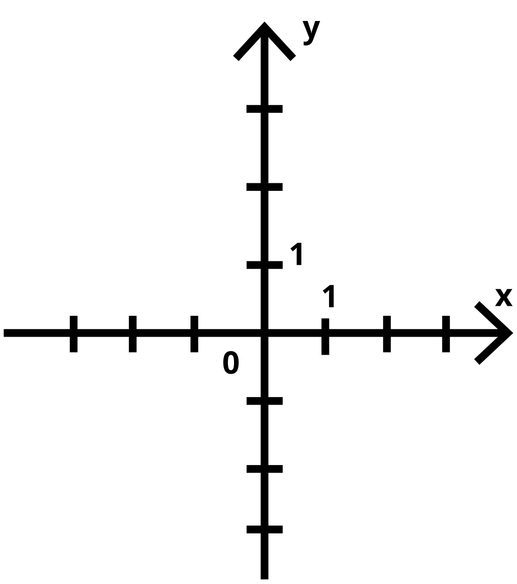
Интересный способ задания функции — **графический.** Если мы видим линию, описывающую функцию, то мы можем легко сделать выводы о многих ее особенностях, таких как возрастание, убывание, максимальные и минимальные значения.

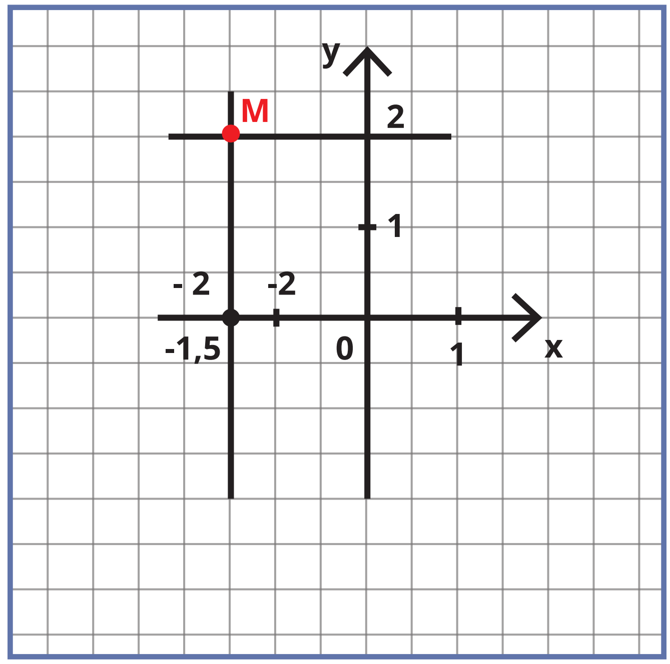


Как именно строятся графики различных функций — нужно разбираться отдельно. Важно ввести понятие **прямоугольной системы координат**.



Вспомним понятие координатной прямой. Это прямая, у которой задана точка начала отсчета, единичный отрезок и выбрано направление. На такой прямой каждой точке соответствует единственное число. Внимательный читатель может заметить сходство определения координатной прямой с определением функции. Две такие прямые, пересекающиеся под прямым углом в начале отсчета, и создают **декартову** (прямоугольную) систему координат. Горизонтальная ось носит название «ось абсцисс», а вертикальная — «ось ординат». Если на координатной прямой мы могли определить «место» любой точки на этой прямой, назвав число, соответствующее ей, то координатная плоскость может помочь определить «место» любой точки на плоскости. Для этого каждой точке на плоскости ставится в соответствие пара чисел: две ее координаты **(абсцисса и ордината)**.





Для нахождения абсциссы (ординаты) точки необходимо провести прямую параллельную оси ординат (оси абсцисс) и проходящую через эту точку. Значение, в котором эта прямая пересечет ось абсцисс (ось ординат) и будет искомым. Таким образом, абсцисса точки М на рисунке равна -1,5; ордината равна 2. Координаты точки М можем записать так:

M (-1,5; 2)

Теперь мы можем непосредственно перейти к понятию графика функции.

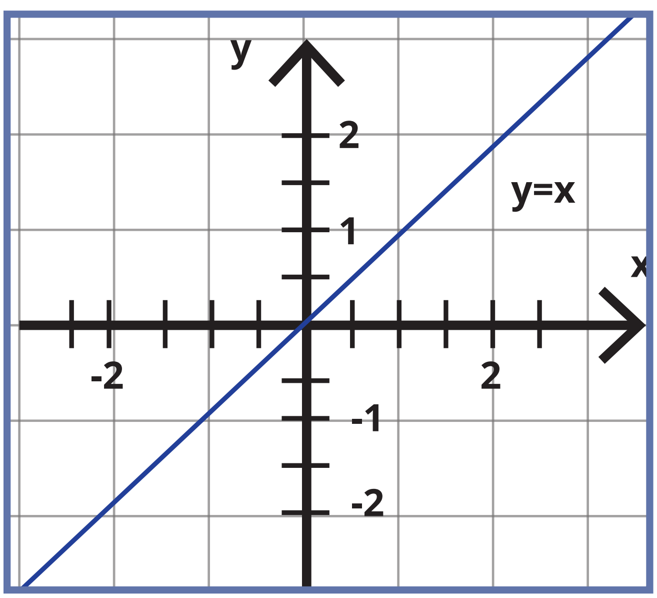
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

График функции — это множество всех точек на плоскости, абсциссы которых принимают значения x (независимой переменной), а ординаты — соответствующее значение y (зависимой переменной).

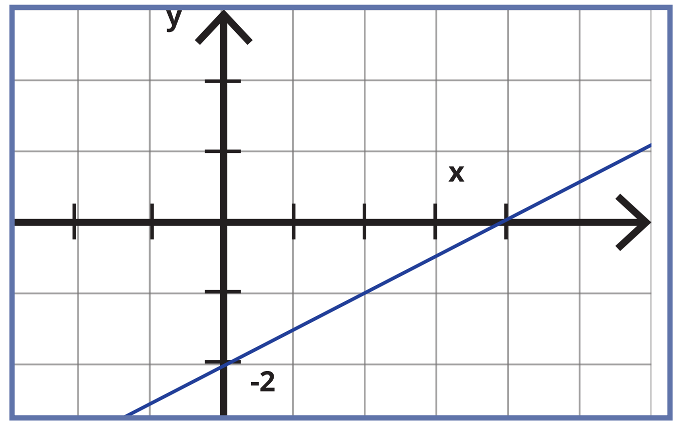
Самый простой способ построить график незнакомой или непонятной функции — взять несколько значений x. Найти соответствующие им значения y. Поставить эти точки на плоскости и соединить. При этом, чем больше точек будет изначально поставлено, тем точнее будет график. Но гораздо проще строить график знакомой функции, зная заранее, как он примерно выглядит.

Наш пример про чтение книги также задавал линейную функцию: ***n=1*t*** (k=1, b=0). Давайте вернемся к определению функции и вспомним, что мы еще должны о ней знать. Две важных характеристики функции: область определения и область значения. **Область определения** линейной функции: x, потому что при всех значениях x мы можем найти y. Если y=***kx+b***, то мы можем выразить x. Нужно перенести **b** в левую часть уравнения с противоположным знаком и разделить обе части уравнения на *k*: $x = \frac{y - b}{k}$. Заметим, что такое выражение не существует при k=0. То есть если коэффициент перед ***x*** в уравнении прямой не равен нулю, то **область значения** функции: y, иначе функция будет выглядеть так: ***y=b***. Область значения такой функции состоит из одного числа: $y \in \{b\}$.

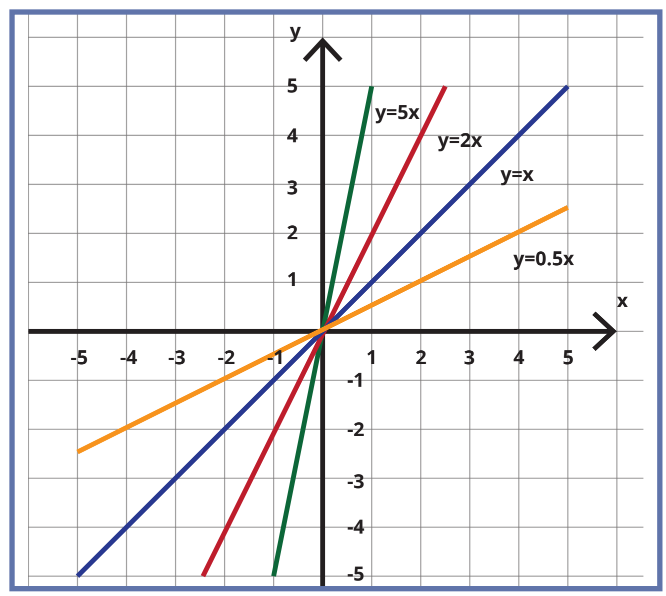
Попробуем построить график для функции из примера про книгу ***y=x*** (n=t). Для этого подставим несколько значений x, найдем соответствующие им значения y и отметим точки на координатной плоскости. Нетрудно заметить, что график — прямая. Более того, график любой линейной функции — прямая. Через 2 точки на плоскости проходит только одна прямая (аксиома), поэтому в дальнейшем достаточно будет подставить любые 2 значения x в уравнение, чтобы построить график.

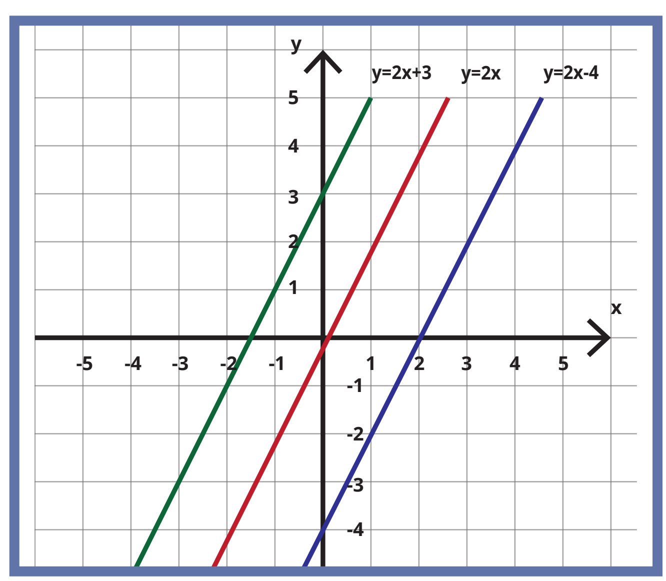


Заметим, что данная прямая проходит через начало координат — точку O(0;0). Если в уравнении линейной функции (y=***kx+b)*** значение ***b*** не будет равным 0, то точка с координатами (0;0) не подойдет (при подстановке x=0 и y=0 в уравнение прямой равенство не выполнится: мы получим ***b=0,*** что неверно), значит, прямая не будет проходить через начало координат. Несложно понять, что при построении графика функции y=***b*** (k=0) всем значениям x будет соответствовать одно и то же значение y, мы получим горизонтальную прямую.



Давайте попробуем понять, как влияет значение коэффициента ***k*** на график функции. Связаны ли они? Оказывается, если ***k*** не равен нулю, то от этого коэффициента зависит угол наклона прямой графика. Чем больше ***k***, тем «быстрее» растет ***y***, а значит прямая будет «быстрее взлетать» вверх, соответственно угол будет больше. Сравните следующие графики:





Если коэффициент ***k*** отрицательный, то прямая будет уходить вверх левее оси ординат.

Читателю оставляем возможность самостоятельно построить графики прямых с отрицательными коэффициентами перед x и посмотреть на результат.

А на что же тогда влияет ***b*** в графике линейной функции? Если график функции y=kx проходит через начало координат, то график функции y=kx+b уже будет проходить через точку с координатами (0; b). При этом если коэффициент x у данных двух прямых будет одинаковый, угол наклона к осям не изменится. Легко понять, что такие прямые будут параллельны. Таким образом, можно сделать вфывод, что значение b влияет на параллельный сдвиг (смещение) графика прямой вдоль оси ординат (вверх и вниз).

Пример: найдите уравнение прямой, параллельной графику функции y=3x-14 и проходящей через точку A (1;2).

Решение: для начала необходимо понять, что нам нужно найти и что у нас уже есть. Нам нужно найти уравнение некоторой прямой. С неизвестными пока коэффициентами оно выглядит так:

$$y=kx+b \quad {}^{1};$$

В такой записи нам нужно найти k и b.

Что же нам дано в условии? Во-первых, есть уравнение прямой, параллельной искомой [1]. Вспомним, что же значит параллельность прямых для их функций: если прямые параллельны, то их коэффициенты равны. То есть, одну из двух неизвестных мы уже знаем.

$$k=3;$$

Подставим в уравнение искомой прямой[1]:

$$y=3x+b \quad {}^{2};$$

Остался еще один факт из условия, который мы не использовали. Что значит утверждение «точка принадлежит прямой»? Прямая — это множество точек, описанных правилом (линейной функцией). Каждая точка подходит под это правило, и точка A тоже[2], потому что через нее проходит искомая прямая. Значит, мы можем подставить ее координаты в уравнение и получить верное равенство:

$$2=3\times1+b;$$

Далее легко найдем оставшуюся неизвестную:

$$b= 2-3 = -1;$$

Тогда уравнение искомой прямой найдем подстановкой найденных значений коэффициентов в уравнение прямой.

Ответ: y=3x-1.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Объясните, не строя графики функций, как будут расположены прямые, соответствующие следующим двум функциям: f1(x): y=4x+2 и f2(x): y=2x+4.

   Укажите точку пересечения, сравните скорость роста функций и смещение графиков вдоль оси OY

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения линейной функции y=0,5x+4 на отрезке x϶[0;6].

Важно не просто найти, но и объяснить – почему это значение наибольшее/наименьшее, и точно нет значений больше/меньше него

3. Не строя график функции, определите в каких четвертях (частях) координатной плоскости он будет расположен:

$$y=3x-2;$$
$$y=\frac{-2}{7}x+\frac{8}{3};$$
$$y=7,(3)x+\pi.$$

4. По графику $y=\frac{1}{2}x+4$ найдите значения x, при котором y=3.

Помните, что координаты всех точек данного графика при подстановке в уравнение образуют верное равенство, то есть подходят; поэтому достаточно подставить y и найти x)

Для функций ниже определите, при каких значениях x переменная y принимает указанные значения:

3x+y-5 = 0, y = -4, x-?
x+4y-2 = 2x, y = 2, x-?
y = 6x+15, y =3, x-?

5. Найдите k и b функции y=kx+b и постройте график этой функции, если функция проходит через точки A и B:

A(2,5) и B(-1;-1);
A(1,3) и B(-2,-6);
A(-3,5) и B(1,5);
A(4,-2) и B(-6,3).

Обратите внимание на предыдущий комментарий – достаточно подставить

6. Найдите k и b функции y=kx+b и постройте график этой функции, если функция проходит через точку A и параллельна прямой l:

A(-2,1) и l: y = -2x+2;
A(-3,2) и l: y = -4x;
A(2,1) и l: y = 3x-1

Вспомните особенное свойство коэффициентов параллельных прямых

7. В какой точке пересекаются данные прямые (назовите координаты этой точки):

y = 2x-2 и y = 10-2x;
y = 1-2x и y = x-5;
x+5y = 6 и 2x+3y = 5;
3x+7y = 16 и y = 4.

Если две прямые пересекаются в некоторой точке A, то ее координаты дают верное равенство при подстановке их и в первое уравнение прямой, и во второе

8*. Напишите уравнение вида y=kx+b для серединного перпендикуляра к отрезку с концами в точках A и B:

A(3,5) и B(-1;-1);
A(1,3) и B(-3,-9);
A(-3,5) и B(1,5).

9. Постройте графики следующих функций:

x-2y = 8;

$$y=\begin{cases}1-x, \text{при } x<2;\\ 2x-5, \text{при } x\geq 2;\end{cases}$$

Такие функции называются кусочно-заданными. Чтобы их построить нужно, построить отдельно каждый кусочек функции в той области, которая указана после запятой.

$$y=\begin{cases}x-2, \text{при } x\geq 2;\\ 4-2x, \text{при } x<2;\end{cases}$$

y=|x-2|+1;
y=|x+2|-1.

В функциях с модулем нужно вспомнить, когда и как раскрывается модуль. Для построения такого графика функции с модулем удобно самостоятельно рассмотреть 2 случая, в зависимости от знака модуля.

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧАХ

Представим ситуацию: в шкафу четыре полки, на первой полке лежат 17 книг по алгебре и 14 книг по физике, на второй – 12 книг по алгебре и 15 книг по физике, на третьей – 8 книг по алгебре и 18 книг по физике, а на четвертой – 9 книг по алгебре и 13 книг по физике. Если нам нужно узнать, сколько книг лежит на каждой полке, нам придется 4 раза повторять одно и то же действие сложения:

на первой полке: 17+14=31 книга;
на второй полке: 12+15=27 книги;
на третьей полке: 8+18=26 книг;
на четвертой полке: 9+13=22 книг.

Но гораздо проще записать это так: на полке лежат a книг по алгебре и b книг по геометрии, всего на полке есть a+b книг. Такая запись называется математической моделью реальной ситуации из жизни. Математическая модель задачи – как завод: вместо того, чтобы каждый раз изобретать решение заново, мы можем организовать «производство» ответов для похожих задач, используя уже знакомые нам формулы. В этой статье будет рассказано, как легко и правильно составлять математические модели задач.

Попробуем на этом же примере рассмотреть еще несколько простых математических моделей. Пусть для всех моделей в таблице: a – количество книг по алгебре, b – количество книг по геометрии.

Ситуация	Ее математическая модель
Книг по алгебре на 3 больше, чем книг по геометрии	$a=b+3$
Книг по алгебре на 5 меньше, чем книг по геометрии	$a=b+3$
Книг по алгебре в 3 раза больше, чем книг по геометрии	$a=b+3$
Книг по алгебре в 2 раза меньше, чем книг по геометрии	$a=\frac{b}{2}$
Если на полку поставить еще 4 книг по алгебре, то книг станет поровну	$a+4=b$
Если на полку поставить еще 2 книги по геометрии, то их будет втрое больше, чем книг по алгебре	$3a=b+2$

Часто после прочтения задачи совершенно непонятно что делать, на что обращать внимание и как решать. В таком случае удобно создать математическую модель задачи, а далее использовать можно все знакомые математические методы для решения модели. Это позволяет забыть про условие задачи до конца решения. Таким образом, математическая модель в задаче делает решение проще.

Попробуем разобрать алгоритм составления математической модели задачи на нескольких примерах.

В решениях задач таким знаком (!) будут помечены важные идеи.

Задачи на проценты и отношения

Пример 1. В двух бидонах находится 70 литров молока. Если из первого бидона перелить во второй 12,5% молока, находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

Решение: На первый взгляд у нас есть 4 неизвестных величины:

Было в первом бидоне (1)	Было во втором бидоне (2)
Стало в первом бидоне (3)	Стало во втором бидоне (4)

В данной задаче необходимо найти 2 величины. Пусть тогда в первом бидоне было x литров молока (1).

! После введения переменных, нужно читать условие задачи сначала и связывать переменные с остальными неизвестными величинами.

Читаем: «В двух бидонах находится 70 литров молока». Мы знаем, что в первом бидоне x литров молока. Тогда несложно понять, что во втором бидоне находится (70-x) литров молока (2). Таким образом мы уже выразили две из четырех неизвестных величин.

Читаем дальше: «Если из первого бидона перелить во второй 12,5% молока, находящегося в первом бидоне…»

Переливание происходит в 2 простых шага. Во-первых, из первого бидона забирают 12,5% молока, поэтому в первом бидфоне останется:

$$x-0{,}125x=0{,}875x; \quad (3)$$

Во-вторых, эти же 0,125x добавляют во второй бидон. Поэтому во втором бидоне станет:

$$(70-x)+0{,}125x=70-0{,}875x; \quad (4)$$

Читателю предоставляем возможность попробовать составить несколько простых математических моделей самостоятельно:

Ситуация	Ее математическая модель
Книг по геометрии на 7 больше, чем книг по алгебре	. . .
Книг по геометрии в 4 раза больше, чем книг по алгебре	. . .
Если на полку поставить еще 2 книги по алгебре и 5 по геометрии, то книг станет поровну	. . .

Дочитаем предложение: «…то в обоих бидонах будет поровну». Значит можем составить уравнение.

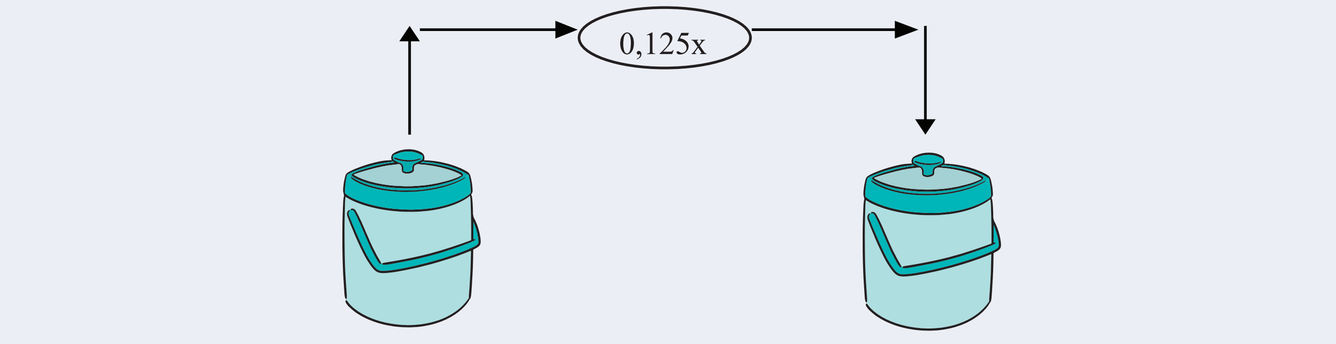
$$(3) = (4);$$

$$0{,}875x = 70-0{,}875x;$$

Решив это простое уравнение, получим ответ: x=40.

Тогда ответ задачи: в первом бидоне было 40 литров молока, а во втором 30 литров.

! Замечание: При решении задачи совсем не важно, какую из неизвестных мы возьмем за x. При любом выборе мы придем к правильному ответу! От выбора обозначений зависит длина решения. Обычно x-ом обозначают ту величину, которую нужно найти, реже – наиболее часто встречающуюся в условии величину.



Читателю предлагается отложить дальнейшее чтение и попробовать решить похожие задачи:

Двигайтесь по алгоритму:

- **как вы думаете, какое число удобно взятьза х?**
- **как через х выразить остальные два числа?**
- **как можно составить уравнение?**

Задача 1. Найдите три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему как 10:9, а сумма первого и третьего на 70 больше, чем второе число.

Задача 2. Заработки рабочего за октябрь и ноябрь относились как 3/2:4/3, а за ноябрь и декабрь как 2:8/3. За декабрь он получил на 45 000 больше, чем за октябрь, и за 3 месяца рабочему начислили премию в размере 20% от его заработка за эти три месяца. Каков размер премии?

Задачи на проценты и отношения

Пример 2. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч. Через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если парход пришел туда на 1,5 часа раньше лодки?

Решение: вполне логичным будет взять в качестве х – расстояние, но тогда при выражении остальных неизвестных (времени движения) неизбежно появятся дроби (вспомним формулу t=s/v). (!) Поэтому удобнее взять за х, например, время движения лодки.

Сейчас необходимо еще раз прочитать условие, обращая внимание на время. А выражать остальные неизвестные будем, (!) заполняя таблицу:

	Лодка	Пароход
s	?	?
v	12 (км/ч)	20 (км/ч)
t	х (ч)	?

Проанализировав все упоминания времени в условии отметим: пароход вышел из пристани на полчаса позже лодки, и пришел в город на 1,5 часа раньше. Значит, общее время движения парохода на 2 часа меньше, чем время движения лодки, или (х-2) часа.

Теперь, зная время и скорость для каждого объекта, легко посчитаем пройденный путь по формуле *s=vt.*

	Лодка	Пароход
s	?	?
v	12 (км/ч)	20 (км/ч)
t	х (ч)	?

Осталось лишь вспомнить, что лодка и пароход прошли одинаковые расстояния. Приравняем их и составим уравнение:

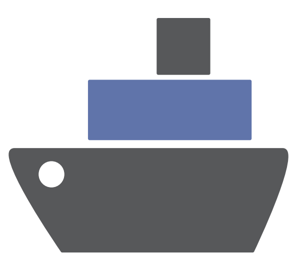
$$12x=20(x-2);$$

Несложно при решении уравнения получить х=5. Тогда расстояния от пристани до города можно посчитать, подставив х в любую из двух формул:

$$S=12x;\ S=20(x-2);$$

Получим: *S=60 (км).*

Ответ: расстояние от пристани до города составляет 60 км.



Еще раз стоит подчеркнуть важный момент в решении задач на движение: (!) Удобно использовать таблицу для выражения неизвестных величин через переменную.

И вновь читателю предлагается подборка похожих задач для самостоятельного решения:

Задача 3. Экспресс проходит путь от Москвы до Санкт-Петербурга на 3,5 часа быстрее пассажирского поезда, так как за 1 час он проходит на 35 км больше. Сколько километров в час проходит каждый из них, если расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга принять равным 650 км?

Задача 4. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 метров меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает на 2 часа больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость каждого из них.

Задачи на работу

Пример 3. Двое рабочих выполняют совместно некоторое задание за 8 часов. Первый из них, работая отдельно, может выполнить его на 12 часов быстрее, чем второй, если тот будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая порознь, сможет выполнить задание?

Решение: Опять необходимо найти 2 величины, тогда одну из них возьмем как переменную. Пусть, например, первый рабочий выполняет задание за x часов. А второму тогда на это же задание требуется *(x+12)* часов (см. предложение 2 в условии).

В задачах на работу, если ничего не сказано про ее объем, можно брать всю работу за 1 для удобства вычислений.

В таких задачах также удобно все записывать в таблицу *(A=vt)*.

Для решения задач на работу важно понимать, что при совместной работе производительности (скорости работы) отдельных рабочих складываются.

Для нашего случая это будет выглядеть так:

$$v1+v2=v(1+2).$$

Часто, используя это свойство, можно составить уравнение:

$$1x+1x+12=18;$$

Приведем к общему знаменателю и приравняем числитель к нулю. Получим уравнение:

$$x2\text{-}4x\text{-}96=0;$$

Данное уравнение имеет 2 корня: -8 (не подходит) и 12.

Ответ: первый рабочий может, работая в одиночку, выполнить задание за 12 часов, а второй – за 24 часа.

Замечание: почему же, все-таки, скорости работы складываются?

Представьте, сидят Вася и Коля и решают задачки. Вася решает по 3 задачи в час, а Коля по 4. Если они сядут вместе в кабинет и на двоих получат задание, но решать будут так же – сами по себе, то Коля за час решит 4 задачи, а Вася 3. Вместе они решат уже 7 задач в час.

$$VK+VB=VK+B;$$

$$3+4=7 \text{ (задач в час)}.$$

Важно отметить, что именно по этому свойству часто составляют уравнение в задачах на работу.

Задача 5. Две бригады, работая одновременно, обрабатывают участок земли за 12 часов. За какое время могла бы обработать этот участок каждая бригада по отдельности, если скорости работы бригад относятся как 3:2?

Задача 6. На уборке снега работают 2 снегоочистительные машины. Первая может убрать всю улицу за 1 час, а вторая – за 75% этого времени. Начав работу одновременно, они вместе проработали 20 минут, после чего первая машина прекратила работу. Сколько еще нужно времени, чтобы вторая машина закончила работу?

Задачи на смеси

Пример 4. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение: всего имеем 2 неизвестные величины – массы двух растворов. Пусть масса первого раствора – x г, тогда масса второго – (600-x) г.

! Важно помнить, что общая масса после смешивания растворов или сплавов равна сумме масс частей, которые смешивались.

В таких задачах удобно составлять такие таблицы:

	% Кислоты	% Кислоты	% Кислоты
1 р	30%	?	x г
2 р	10%	?	(600-x) г
1р+2р	15%	?	600 г

Масса кислоты в каждом растворе считается как процент от общей массы:

	% Кислоты	М (Кислоты)	М Общ.
1 р	30%	0,3x г	x г
2 р	10%	0,1(600-x) г	(600-x) г
1р+2р	15%	0,15*600 г	600 г

! Еще одним важным фактом в таких задах является то, что кислота при смешивании не пропадает и не появляется из воздуха. Если сложить массы кислоты из 1-ого и 2-ого растворов, то мы получим массу кислоты в смеси (*):

$$0{,}3x+0{,}1(600-x)=0{,}15*600;$$

Несложно решить линейное уравнение и получить x=150г.

Ответ: Массы 1-ого и 2-ого растворов соответственно равны 150г и 450 г.

Несколько похожих задач предлагаются для самостоятельного решения:

Задача 7. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы новый сплав содержал 60% меди?
Замечание: будем использовать свойство (*), причем второй сплав будет содержать 100% меди.

Задача 8. Сколько килограммов воды нужно выпарит из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?
Замечание: после выпаривания масса сухого вещества не изменится. Сухое вещество – все, кроме воды.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Несложно представить себе сумму нескольких слагаемых, каждое из которых является произведением чисел и переменных. Такая сумма называется **многочленом**, а каждое ее слагаемое – **одночленом**. Многочлены могут быть математическими моделями многих жизненных ситуаций. Например, покупку 3-ех ручек 4-ех карандашей и 10-и тетрадей в магазине можно описать таким многочленом:

$$3a+4b+10c;$$

В такой записи a – цена одной ручки, b – цена карандаша, c – цена тетради.

Чтобы разобраться, как и зачем нужно раскладывать многочлены на множители, представим: у нас есть произведение $(x-3)(x+2)$. Запишем его в виде многочлена, для этого раскроем скобки:

$$(x-3)(x+2) = x(x+2)-3(x+2) =$$
$$= x^2+2x-3x-6 = x^2-x-6 \ (*);$$

Решим уравнение: $x^2-x-6=0$. Зная, как раскладывается этот многочлен (*), запишем:

$$(x-3)(x+2)=0;$$

Теперь вспомним известный факт: произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Значит:

$$x=3 \text{ или } x=-2;$$

Если бы мы не знали разложения на множители исходного многочлена (*), то не смогли бы решить уравнение. **Умение раскладывать многочлен на множители** является важным во многих задачах. Далее будут предложены несколько разных способов для этого.

Замечание. Любой многочлен можно представить в виде бесконечного количества множителей. Для этого достаточно вынести любой числовой множитель за скобки:

$$4x-6 = 2(2x-3) = 4(x-1,5) = 0,5(8x-12) = \ldots$$

При решении задач такое разложение нам не поможет. Поэтому под «разложением на множители» будем понимать разложение на буквенные множители, каждый из которых содержит хотя бы одну переменную величину.

На самом деле, разложение на множители бывает не так просто сделать, и не все многочлены можно разложить на множители. Кроме того, для этого часто нужен творческий подход, в котором необходимо переосмыслить простые техники.

Рассмотрим способы разложения многочленов на множители и основные виды задач, в которых они применяются.

1. Вынесение общего множителя за скобки

Этот вид преобразования уже знаком читателю. Необходимо вынести за скобки (1) наибольший общий делитель (НОД) числовых множителей всех слагаемых многочлена. (2) Теперь посмотрим на каждую переменную отдельно и на степени, в которых она встречается в слагаемых многочлена, и вынесем за скобки минимальную.

Пример. Дан многочлен:

$$12ab^4-18a^2b^3c;$$

1. Найдем НОД числовых коэффициентов 12,18. НОД (12,18) = 6.
2. Переменная a встречается в слагаемых так: a, a^2 – вынесем a (мин. степень)

Переменная b встречается так: b^3, b^4 – вынесем b^3.

Переменная c встречается не во всех слагаемых – мы не можем ее вынести за скобки.

Таким образом:

$$12ab^4-18a^2b^3c = 6ab^3(2b-3ac);$$

Замечание. Бесполезно выносить общий множитель только у одной части слагаемых – это не поможет разложить многочлен на множители.

$$5a^3b^2+5a^2b^3-4ac = 5a^2b^2(a+b)-4ac;$$

Лучше сделать так:

$$5a^3b^2+5a^2b^3-4ac = a(5a^2b^2+5ab^3-4c).$$

2. Способ группировки

Теперь представим, что у слагаемых многочлена нет общего буквенного множителя. Рассмотрим многочлен:

$$3ac+3bc-4ad-4bd;$$

Если посмотреть на 1-ое и 2-ое слагаемые, можно заметить – они похожи. Так же похожи 3-ее и 4-ое слагаемые. Бывает удобно разложить многочлен на множители по частям, перед этим разделив его слагаемые на группы так, чтобы у каждой группы был общий множитель. Такая группировка будет полезной, если получившаяся скобка после вынесения общего множителя во всех группах буде одинаковой. Например,

$$3ac+3bc-4ad-4bd = 3c(a+b)-4d(a+b) =$$
$$= (3c-4d)(a+b);$$

Иногда разложение не так очевидно. Может потребоваться записать одно слагаемое как сумма двух подобных. Например,

$$x^2+7xy+6y^2 = x^2+xy+6xy+6y^2 =$$
$$= x(x+y)+6y(x+y) = (x+6y)(x+y);$$

Иногда нужно **прибавить** и **отнять** одно и то же слагаемое для группировки. Например,

$$x^5-1 = x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x+x-1 =$$
$$= x^4(x-1)+x^3(x-1)+x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1);$$

3. Формулы сокращенного умножения (ФСУ)

В задачах мы обычно стремимся получить короткий и красивый ответ. Нам в этом помогают такие методы, как, например, таблица умножения. Одним из методов, упрощающих работу с многочленами, являются формулы сокращенного умножения.

В качестве примера посмотрим, как можно получить такую. Для начала возведем в квадрат несколько двучленов:

$$(2x+3y)^2 = (2x+3y)(2x+3y) = 4x^2+12xy+9y^2;$$
$$(x+5y)^2 = (x+5y)(x+5y) = x^2+10xy+25y^2.$$

Заметим, что каждый раз получается 3 слагаемых, 2 из которых – квадраты одночленов из условия, а еще один равен удвоенному их произведению. Гипотеза:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2;$$

Несложно проверить, что это верно. Умножим двучлен сам на себя, просто раскрыв скобки:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$$
$$= a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2;$$

Таким образом, гипотеза верна для любых одночленов a и b.

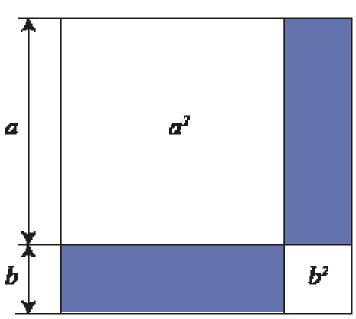
Таким же способом можем получить формулу:

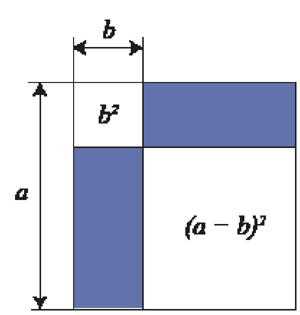
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2;$$

Или можно, к примеру, просто вместо b подставить (-b):

$$(a+(-b))^2 = a^2+2a(-b)+(-b)^2 =$$
$$= a^2-2ab+b^2;$$

Так же формулы квадрата суммы и квадрата разности можно изобразить геометрически:





Для левого квадрата запишем, что площадь большого квадрата $(a+b)^2$ – это сумма площадей всех его частей: $a^2+2ab+b^2$.

Для правого же запишем, что площадь левого нижнего квадрата $(a-b)^2$ получится, если из площади большого квадрата вычесть все остальное: $= a^2-(2(ab-b^2)+b^2)$

Эти и другие формулы сокращенного умножения (в правильности которых читатель может легко убедиться, просто раскрыв скобки):

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2;$$
$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3;$$
$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

Единственная сложность в применении ФСУ состоит в том, что формулу нужно заметить.

Посмотрим на примере применение формул для разложения на множители:

$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2 ;$$

Раскроем скобки, использую формулу квадрата суммы, и приведем подобные слагаемые:

$$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2 =$$
$$= (a^2c^2-2abcd+b^2d^2)+ (b^2c^2+2abcd+a^2d^2) =$$
$$= a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2;$$

Сгруппируем:

$$a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2 = c^2(a^2+b^2)+d^2(b^2+a^2) =$$
$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2);$$

4. Выделение квадрата

Для разложения многочлена бывает полезным выделить полный квадрат, обычно после этого применяют формулу разности квадратов. Например,

$$x^2+4x+3 = x^2+4x+4-1 = (x+2)^2-1^2 =$$
$$= (x+2-1)(x+2+1) = (x+1)(x+3);$$

Давайте разберемся, как правильно выделять квадрат на примере многочлена x^2+2x-8.

Сначала вспомним формулу квадрата суммы и сравним с нашим многочленом:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2;$$
$$x^2+2x-8.$$

Заметим, что наш многочлен не является полным квадратом. Тогда прибавим некоторое число, чтобы в нем (внутри) был полный квадрат. Важно, что подчеркнутые слагаемые не поменяются, когда мы добавим число, поэтому они должны подходить для формулы:

$$a^2 = x^2 \ (1);$$
$$2ab=2x \ (2);$$

Из первого равенства сделаем вывод, что $a=x$. Тогда, из второго равенства можем понять, что $b=1$ $(2x=2a=2ab)$.

Для квадрата не хватает слагаемого $b^2 = 1^2 = 1$. Добавим и вычтем его:

$$x^2+2x-8 = (x^2+2x+1)-1-8 =$$
$$= (x+1)^2-9 = (x+1)^2-3^2;$$

Применим формулу разности квадратов $a^2-b^2 =(a-b)(a+b)$:

$$(x+1)^2-3^2 = (x+1-3)(x+1+3) =$$
$$= (x-2)(x+4).$$

Замечание. При выделении не нужно менять слагаемое с переменной x, например, так:

$$x^2+10x+9 = x^2+6x+9+4x = (x^2+2*3x+3^2)+4x =$$
$$= (x+3)^2+4x;$$

При таком выделении квадрата разность квадратов применить не получится. Правильно здесь выделять так:

$$x^2+10x+9 = (x^2+10x+25)-16=$$
$$= (x+5)^2-16.$$

Читателю предлагается несколько примеров для выделения в них полных квадратов:

$$x^2+4x+3;$$
$$x^2+14x+45;$$
$$4x^2-12x-7.$$

Как уже упоминалось, разложение на множители – творческий процесс. Но далее представлена стратегия, которая поможет найти то, что нужно.

План действий:

Если все слагаемые многочлена имеют общий множитель – вынесите его.

Ищите в записи многочлена признаки формул сокращенного умножения: удвоенные произведения, разности квадратов, разности и суммы кубов.

Ищите похожие слагаемые, попробуйте их сгруппировать. Помните, что группировать можно по-разному.

Если для группировки или для применения формулы не хватает слагаемого, добавьте (не забудьте также его отнять, чтобы значение выражения не изменилось).

Если нужно разложить на множители многочлен вида ax^2+bx+c и нет удобной формулы – выделите квадрат.

Самое главное: не получилось так, получится по-другому. Пробуйте еще!

Пример 1. Разложите на множители:

$$x^4-x^8;$$

Решение: Можно вынести общий множитель – вынесем:

$$x^4-x^8 = x^4(1-x^4);$$

Можно заметить в скобках разность квадратов, применим ФСУ:

$$x^4(1-x^4) = x^4(1^2-(x^2)^2) =$$
$$= x^4(1-x^2)(1+x^2);$$

И снова разность квадратов:

$$x^4(1-x^2)(1+x^2) = x^4(1-x)(1+x)(1+x^2).$$

Ответ: $x^4(1-x)(1+x)(1+x^2)$.

Пример 2. Разложите на множители:

$$3xyz+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y;$$

Решение: Несложно заметить, что у слагаемых нет общего множителя, к тому же 7 – странное количество слагаемых для группировки. К тому же, единственный числовой коэффициент, не равный 1, это 3. Представим $3xyz$ как сумму трех слагаемых и сгруппируем:

$$xyz+xyz+xyz+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y =$$
$$= x(xy+yz+xz)+y(xy+yz+xz)+z(xy+yz+xz) =$$
$$= (x+y+z)(xy+yz+xz).$$

Ответ: $(x+y+z)(xy+yz+xz)$.

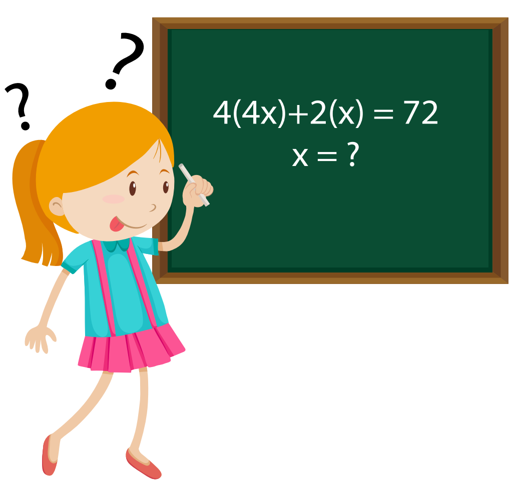
Пример 3. Сократите дробь: ;

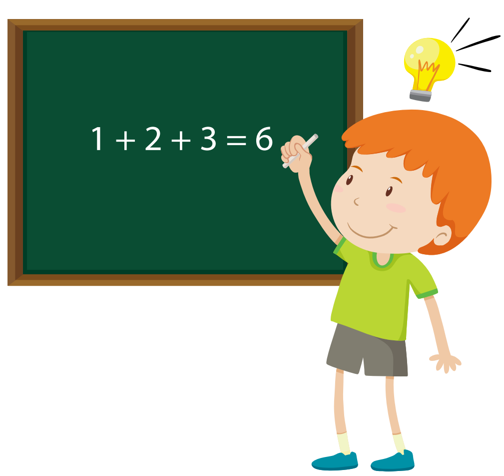
Решение: Можно заметить разность квадратов в числителе, причем, и далее будет возникать разность квадратов, раскроем все (пока только числитель):

$$x^8-y^8 = (x^4)^2-(y^4)^2 = (x^4-y^4)(x^4+y^4) =$$
$$= ((x^2)^2-(y^2)^2)(x^4+y^4)= (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4) =$$
$$= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4);$$

Тогда несложно разделить.

Ответ: $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$.





ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1) Разложите на множители:

1. $a^2-c^2+b^2+2ab;$
2. $x^4+4y^4;$
3. $68m+119n+36km+63kn;$
4. $x^6-y^6;$
5. $(a^3+b^3)+ab(a+b);$
6. $x^2+8x+7.$

2) Посчитайте:

1. *$1000{,}1^2$ (сумма квадратов);*
2. $99{,}9^2;$
3. $38{,}8^2+83\times 15{,}4-44{,}2^2.$

3) Докажите:

1. $(a-1)^3-4(a-1) = (a-1)(a+1)(a-3);$
2. $(x2+1)^2-4x^2 = (x-1)^2(x+1)^2;$
3. $(3x+y)^2-(3x-y)^2 = (3xy+1)^2-(3xy-1)^2;$
4. $(a-b)(a+b)+(b+c)(b-c)+(c-a)(c+a)=0.$

4) Вычислите:

1. $(27{,}3^3+16{,}7^3):(27{,}3^2-27{,}3*16{,}7+16{,}7^2);$
2. $\dfrac{71^3+49^3}{120}-71*49;$
3. $\dfrac{67^3+52^3}{119}-67*52;$
4. $\dfrac{109^2-2*109*61+61^2}{79^2+73^2-49^2-55^2};$
5. $\dfrac{53^2+22^2-47^2-16^2}{65^2-2*65*59+59^2};$
6. $\left(\dfrac{97^3+83^3}{180}-97*83\right):(35^2-28^2);$
7. $\left(\dfrac{84^3+66^3}{150}-84*66\right):(12^2-6^2).$

5(*) Упростите выражения:

1. $\dfrac{b^2-x^4}{x^3-b^2+x^2b-bx};$
2. $\dfrac{x^2-2x-3}{27-x^3};$
3. $\dfrac{2(x^4+4x^2-12)+x^4+11x^2+30}{x^2+6};$
4. $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10*\dfrac{ax-3x^2}{a^2-9x^2};$
5. $\left(x+\dfrac{3-x^3}{1+x^2}\right)*\dfrac{1+x^2}{x^2+6x+9};$
6. $\dfrac{2m}{m^2-4}-\dfrac{2}{m^2-4}:\left(\dfrac{m+1}{2m-2}-\dfrac{1}{m-1}\right);$
7. $\left(\left(\dfrac{x}{y-x}\right)^{-2}-\dfrac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2*\dfrac{x^4}{xy^2-y^4};$
8. $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{bc}\right):\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right);$
9. $\left(\left(\dfrac{x2}{y3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+yx^{-1}};$
10. $\left(\dfrac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}\right)-\left(\dfrac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+y^2}\right)+$
$+\left(\dfrac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\dfrac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right).$

ГЕОМЕТРИЯ

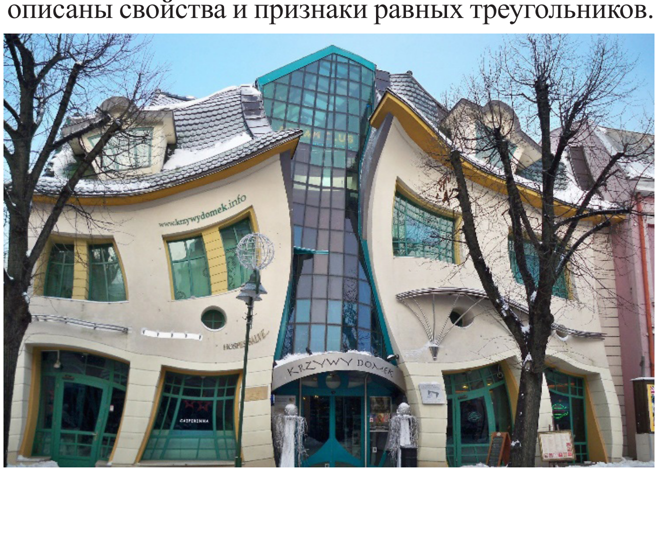
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК, ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЗНАКИ

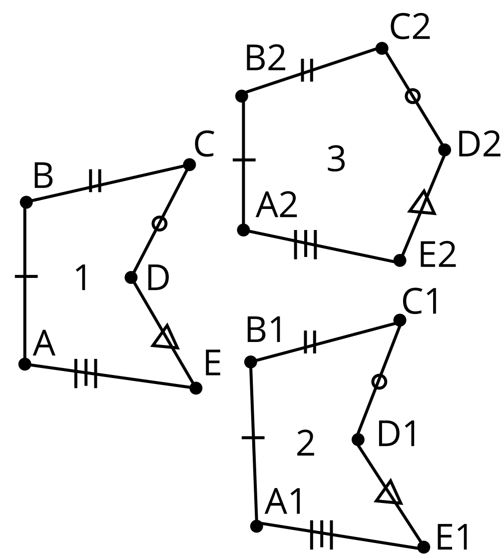
Все фигуры в геометрии состоят из ее основных элементов. Есть всего 3 базовых понятия, у которых нет определения. Но интересно, что все остальные определения будут основаны на этих понятиях. Эти элементы - точка, прямая и плоскость. **Точка** – это след от карандаша на бумаге или часть линии, длина которой равна нулю. **Прямая** – бесконечная ровная линия. **Плоскость** – это некоторая ровная бесконечная поверхность.

Посмотрим на несколько простых определений геометрических фигур. **Отрезок** – это геометрическая фигура, состоящая из всех точек части прямой, ограниченной с двух сторон точками (концами отрезка). **Луч** – это геометрическая фигура, состоящая из всех точек прямой, расположенных по одну сторону от данной точки (начала луча). **Треугольник** – это геометрическая фигура на плоскости, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, трех отрезков, попарно соединяющих эти точки, и части плоскости, ограниченной этими отрезками.

Интересным является понятие **равных** фигур в геометрии. В любой ситуации, когда необходимо создать несколько одинаковых объектов, нам пригодится знание свойств равных фигур. Например, знание геометрии и свойств равных фигур в частности, необходимо при проектировании зданий и моделей различных приборов и деталей. В этой статье будут описаны свойства и признаки равных треугольников.



Для начала давайте поймем, что же такое равные фигуры. Равные фигуры – это геометрические фигуры, все соответствующие элементы которых равны.

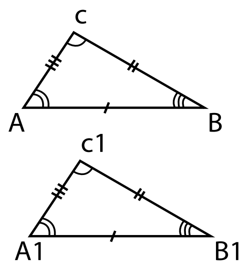


Например, на рисунке выше представлены три фигуры. Соответственные стороны этих пятиугольников равны, но не все три фигуры равны между собой. Еще один тип элементов, равенство которых нужно проверить, – это углы. В пятиугольниках 1 и 3 рассмотрим соответственные углы между двумя сторонами, отмеченными так: и ll . Это углы C и C2. Несложно заметить, что в первом пятиугольнике этот угол – острый, а в третьем – тупой. Они точно не равны, а значит, фигуры не равны между собой (хотя все соответственные стороны равны). А пятиугольники 1 и 2 могут быть равными при условии, что углы у них попарно равны.

Иными словами, две фигуры на плоскости равны между собой, если при наложении они совпадают. Утверждение верно, потому что, если мы накладываем одну фигуру на другую и при этом каждый элемент одной фигуры совпадет с таким же элементом другой фигуры, все элементы будут попарно равны. Этот факт мы будем использовать при доказательстве признаков равенства треугольников.

Итак, мы уже знаем, что такое треугольник и что такое равные фигуры. Нетрудно понять, что равные треугольники – это два треугольника с попарно равными сторонами и углами.

Но нужно ли нам проверять все 6 пар равных элементов каждый раз, чтобы проверить равенство двух треугольников? Оказывается, достаточно проверить только 3 элемента. Если три (но не любые три) элемента в двух треугольниках равны, то эти треугольники точно равные. Всего есть 3 способа такой «упрощенной проверки» двух треугольников на равенство.

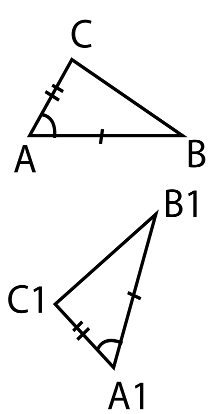


ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. **Два треугольника равны, если две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника.**
2. **Два треугольника равны, если сторона и два прилежащих угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника.**
3. **Два треугольника равны, если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника.**

Теперь рассмотрим каждый из них по-отдельности и докажем каждый из них.

Первый признак: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.



Доказательство: Мы уже говорили, что, если при наложении фигуры совпадают, они равны. Попробуем совместить 2 треугольника, представленные на рисунке выше. Так как по условию угол A равен углу A_1, наложим треугольники друг на друга так, чтобы точка A совпала с точкой A_1 и прямая AB совпала с прямой A_1B_1. Осталось понять, почему остальные элементы совпадут.

По условию, отрезок AB равен отрезку A_1B_1, поэтому точка B точно совпадет с точкой B_1 (по аксиоме об измерении отрезков: от данной точки на данной прямой можно отложить отрезок заданной длины, причем только один).

Так как по условию угол A равен углу A_1, то прямая AC совпадет с прямой A_1C_1 (по аксиоме об измерении углов: от данной прямой с вершиной в данной точке можно отложить угол заданной величины, причем только один).

И снова вершины треугольников C и C_1 точно совпадут, так как по условию длины отрезков AC и A_1C_1 – одинаковые (по аксиоме об измерении отрезков).

Так как вершины B и B_1, C и C_1 совпали, стороны треугольника BC и B_1C_1 тоже совпадут (по аксиоме о прямой: через две точки на плоскости можно провести прямую, причем только одну).

Таким образом, все вершины и стороны двух треугольников при наложении совпали. Это означает все элементы треугольников соответственно попарно равны. Поэтому треугольник равны по определению. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример: Даны 2 треугольника ABC и ACD (см. рис.). Угол 1 равен углу 2 и AD=BC. Доказать, что треугольники равны.

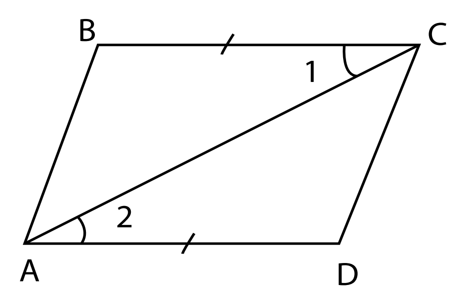
Доказательство:

AD=BC (по условию);

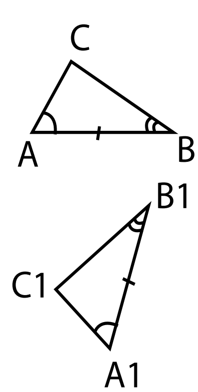
Угол 1 равен углу 2 (по условию);

Сторона AC – общая (по построению).

Из (1), (2) и (3) следует, что треугольники ABC и ADC равны по первому признаку. Что и требовалось доказать.



Второй признак: Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим углам другого, то эти треугольники равны.



Доказательство: Снова попробуем наложить один треугольник на другой. Сначала, сделаем так, чтобы прямая AB совпала с прямой A_1B_1 и точка A с точкой A_1.

По условию длины отрезков AB и A_1B_1 равны, поэтому точка B совпадает с точкой B_1 (по аксиоме об измерении отрезков: на данной прямой от данной точки можно отложить отрезок заданной длины, причем только один).

Угол A по условию равен углу A_1, поэтому прямые AC и A_1C_1 точно совпадут (по аксиоме об измерении углов: от данной прямой с вершиной в данной точке можно отложить угол заданной величины, причем только один).

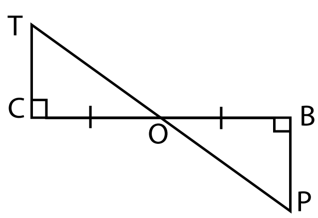
Точно так же по условию углы B и B_1 равны, поэтому прямые BC и B_1C_1 совпадут (по аксиоме об измерении углов).

C - точка пересечения прямых AC и BC (1); прямые AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 совпадают (2). Из (1) и (2) следует, что точка C так же является точкой пересечения прямых A_1C_1 и B_1C_1. А это и есть точка C_1. То есть, точки C и C_1 совпадают.

Мы доказали, что при наложении треугольники полностью совпадают, а значит, все соответственные элементы этих треугольников попарно равны. Поэтому **треугольники** ABC и $A_1B_1C_1$ **равны** по определению. Что и требовалось доказать.

Пример: Даны два треугольника (см. рис.): COT и BOP. Углы C и B равны и составляют 90 градусов каждый. Стороны CO и BP равны. Доказать, что треугольники равны.

Доказательство:



CO=BO (по условию);

Углы C и B равны (по условию);

Углы COT и BOP равны как вертикальные (по построению);

Из (1), (2) и (3) следует, что треугольники COT и BOP равны по второму признаку. Что и требовалось доказать.

Для доказательства третьего признака равенства треугольников нам понадобится свойство равнобедренного треугольника. Поэтому нужно узнать больше о равнобедренном треугольнике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

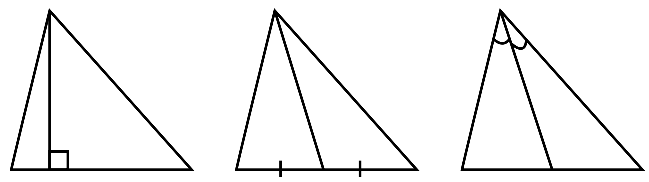
Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны. Эти стороны называют боковыми, а третья сторона — основанием. Частным случаем равнобедренного треугольника является равнфосторонний треугольник (у него все три стороны равны).

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Еще для описания свойств равнобедренного треугольника нам понадобятся три уже известных читателю понятия: медиана, биссектриса и высота.

Интересно, что определения этих понятий обычно трудно запоминаются.

ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА	МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА	БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА

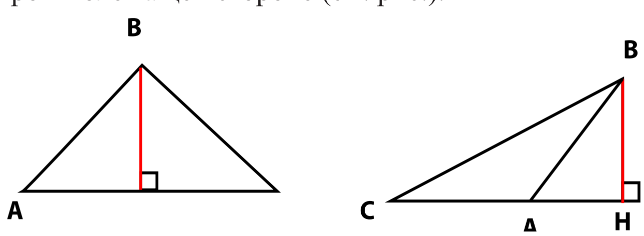


Медиана – это отрезок в треугольнике, соединяющий вершину с серединой противолежащей стороны.

Биссектриса угла – это луч, проходящий между сторон угла и делящий его пополам.

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны. (!) Это именно отрезок!

Высота – это отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины треугольника к прямой, содержащей противолежащую сторону. Интересно, что основание высоты (точка H) может не принадлежать противолежащей стороне (см. рис.).

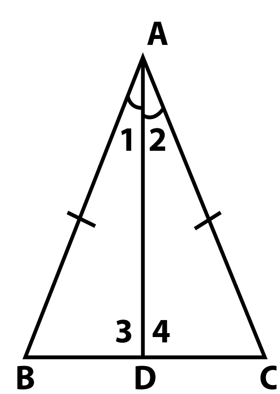


Теперь мы можем перейти к важным свойствам равнобедренного треугольника.

Теорема 1. Углы у основания равнобедренного треугольника равны.

Теорема 2. Биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является медианой и высотой.

Доказательство (докажем одновременно). Пусть дан равнобедренный треугольник ABC (AB=AC). Проведем биссектрису AD (углы 1 и 2 равны).



Рассмотрим треугольники ABD и ACD:

AB = AC (по условию, так как треугольник – равнобедренный);

Углы 1 и 2 равны (по построению);

AD – общая сторона.

Из (1), (2) и (3) следует, что треугольники равны по первому признаку. Значит, все стороны и углы в этих треугольниках попарно равны. То есть углы B и C равны (мы доказали теорему 1).

Кроме того, из равенства треугольников следует:

BD = CD, поэтому AD – медиана;

Углы 3 и 4 равны, поэтому AD – высота.

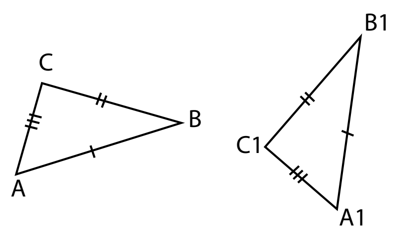
Из (1) и (2) следует, что теорема 2 верна. Что и требовалось доказать.

Теперь нам хватит знаний, чтобы доказать третий признак равенства треугольников.

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то треугольники равны.

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

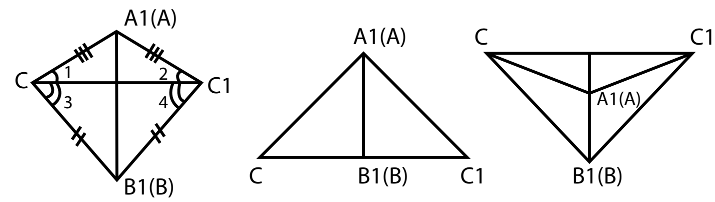
Доказательство. Приложим два треугольника так, чтобы сторона AB совпала с A_1B_1, а вершины C и C_1 лежали по разные стороны от прямой AB. Соединим C и C_1 отрезком. Всего может быть 3 разных расположения CC_1 (см. рис.). CC_1 может проходит внутри треугольников, может совпадать с некоторыми сторонами треугольников, и может проходить снаружи треугольников.



Рассмотрим только первый случай, так как остальные два доказываются похожим образом.

Посмотрим отдельно на треугольник ACC_1: по условию AC = A_1C_1, поэтому треугольник равнобедренный. По уже доказанному ранее свойству равнобедренного треугольника углы 1 и 2 равны (как углы при основании). (1)

Рассуждая так же, заметим, что CB = C_1B_1, поэтому треугольник CBC_1 – равнобедренный, углы 3 и 4 равны. (2)



Из (1) и (2) следует: весь угол C равен углу C_1, так как части угла C соответственно равны частям угла C_1(*). Теперь снова рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$:

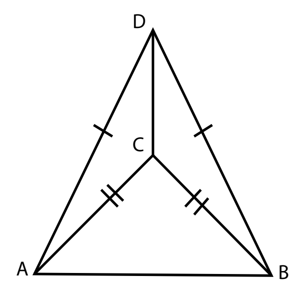
CA=C_1A_1 (по условию);

CB=C_1B_1 (по условию);

Углы C и C_1 равны (по доказанному);

Из (1), (2) и (3) следует, что треугольники равны по первому признаку.

Для второго случая следует рассмотреть только один равнобедренный треугольник ACC_1. Для третьего – те же треугольники, но угол C будет считаться как разность углов при основании.



Пример. Треугольники ABC и ABD – равнобедренные и имеют общее основание AB. Докажите, что треугольники ACD и BCD равны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники ACD и BCD:

AC=CB (по условию, так как ACB – равнобедренный треугольник);

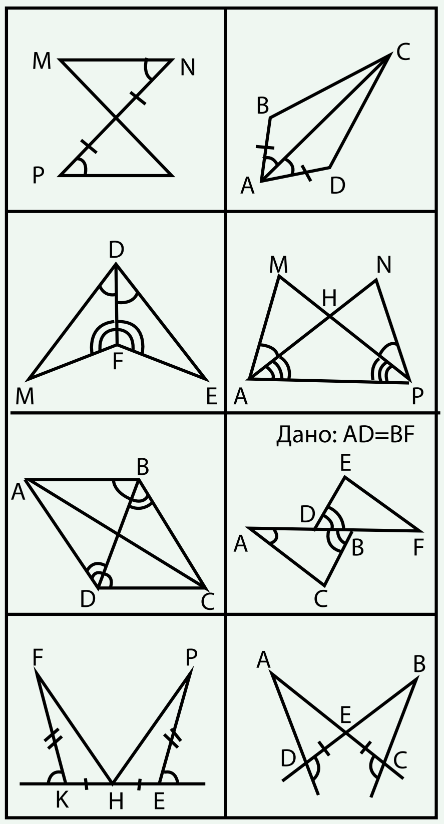
AD=BD (по условию, так как ADB – равнобедренный треугольник);

DC – общая сторона (по построению).

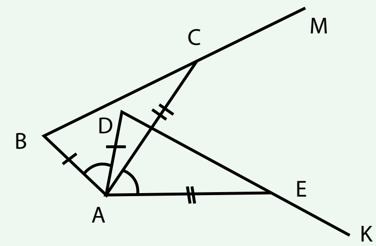
Значит, треугольники равны по третьему признаку. Что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

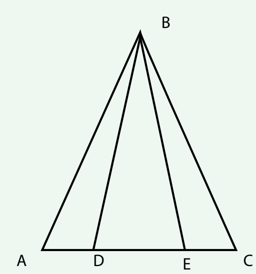
1. Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.



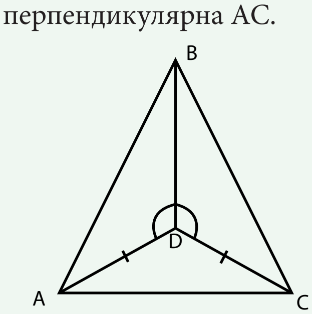
2. Докажите, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.
3. Докажите, что биссектрисы, проведенные из углов при основании равнобедренного треугольника, равны.
4. В треугольнике медиана является высотой. Докажите, что этот треугольник – равнобедренный.
5. В треугольнике биссектриса является высотой. Докажите, что этот треугольник – равнобедренный.
6. (*) В треугольнике медиана является биссектрисой. Докажите, что этот треугольник – равнобедренный.
7. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании образуют при пересечении угол 52 градуса. Найдите углы равнобедренного треугольника (используйте теорему о сумме углов треугольника).
8. На рисунке ниже углы BAD и DAE равны. Также AB=AD и AC=AE. Определите, равны ли отрезки BC и DE? А углы ACM и AEK?



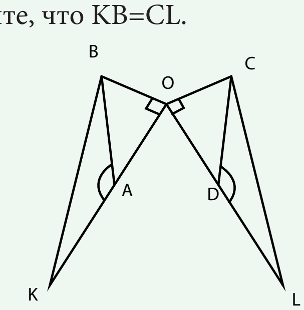
9. (*) На рисунке BD=BE и AD=CE. Найдите угол BAD, если угол BCA=40 градусов.



10. (*) В треугольнике на рисунке ниже отрезки AD и CD равны, углы ADB и CDB равны. Докажите, что BD перпендикулярна AC.



11. (*) Два прямоугольных треугольника KBO и COL имеют общую вершину O. Точка A лежит на отрезке KO, а точка D – на отрезке OL, причем углы KAB и LDC равны, OA=OD и DL=AK. Докажите, что KB=CL.



Признаки и свойства параллельных прямых

Читателю уже известно, что на плоскости две прямые могут располагаться по-разному. Они могут пересекаться, не пересекаться и совпадать. В случае, когда некоторые прямые пересекаются, мы получаем разные геометрические фигуры, с которыми читатель уже встречался. Это могут быть, например, многоугольники, ломаные, углы. Не интересен для изучения случай, когда прямые совпадают. Тогда мы просто можем считать их одной прямой. Если же прямые не пересекаются, как оказалось, они обладают очень интересными свойствами. Таким образом, наша задача при изучении параллельных прямых – выяснить, как можно определить, что прямые параллельны, и как мы можем использовать этот факт.

Нашу цель можно сформулировать короче: узнать **свойства** и **признаки** параллельных прямых. Очень часто путают понятия свойства и признаки. Давайте попробуем разобраться, что же это такое, на примере!

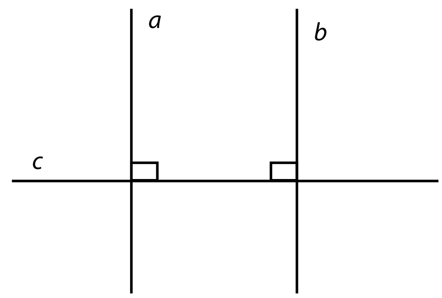
Допустим, в 7б классе учится девочка Маша. Ее свойства – это все что мы можем сказать о ней. Например, Маша любит биологию, у нее темные волосы, она играет на гитаре, живет на окраине города, не делает домашнее задание по химии, читает научную фантастику и имеет родинку на левой щеке. Есть много людей, которые обладают такими свойствами, но мы знаем точно, что Маша ими тоже обладает.

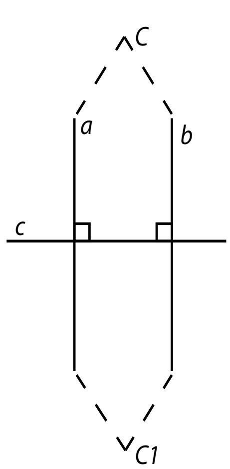
Что же такое признаки? Это несколько свойств, но, важно, что всеми этими свойствами обладает только Маша! То есть, если я скажу, что кто-то учится в школе №5 в городе Алматы, я говорю о всех учениках школы. Если я также добавлю, что это девочка, круг тех, о ком я говорю, уменьшился. Я могу так же сказать, что этот кто-то учится в 7 б классе, теперь я говорю только о девочках из класса Маши. Я могу добавить, что этот кто-то любит биологию, и круг снова уменьшился. Предположим, что в Классе Маши двум девочкам нравится биология – это Маша и Катя, но у Кати светлые волосы. Тогда остается добавить, что у кого-то, о ком я говорю темные волосы, тогда точно станет понятно, что я говорю о Маше.

Таким образом, признаки Маши: учится в школе №5 города Алматы, девочка, учится в 7б классе, любит биологию, имеет темные волосы. Признаки позволяют мне не называть ее по имени, но указать точно на нее!

Теперь мы можем прейти к **параллельности**. Мы уже знаем, что параллельные прямые – это те, которые не имеют общих точек на плоскости или просто не пересекаются. А теперь представьте: чтобы понять, что данные две прямые параллельны, мы должны взять одну прямую и проверить, что каждая ее точка не принадлежит второй прямой. Это невозможно хотя бы потому, что одна прямая состоит из бесконечного количества точек. Что же делать? Вспомним, что мы можем «не обращаться по имени», то есть использовать признаки параллельности прямых.

Теорема. Если данным двум прямым перпендикулярна третья, то эти две прямые параллельны.

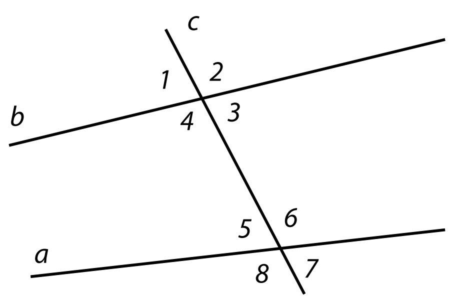




Доказательство. Предположим обратное. Пусть прямые a и b не параллельны и пересекаются в некоторой точке С (см. рис.).

Наложим части прямых ниже прямой с на части прямых выше с. Для этого представим, что данный рисунок у нас находится на листе бумаги, и согнем листок по прямой с. Тогда несложно понять, что прямая а совпадет сама с собой (так как с двух сторон угол между а и с – прямой). Точно так же прямая b совпадет сама с собой. Значит, картинки ниже прямой с и выше нее полностью совпадают. Поэтому ниже прямой с есть еще одна точка пересечения прямых a и b – C_1, и всего есть 2 общие точки у прямых a и b. Но по аксиоме, через 2 точки на плоскости можно провести прямую и только одну. Поэтому наше предположение нарушает аксиому. Мы предположили, что прямые пересекаются, что неверно. Следовательно, они не пересекаются, что и требовалось доказать.

Данная теорема поможет нам доказать первый признак параллельных прямых. Но сначала вспомним **виды углов**, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.

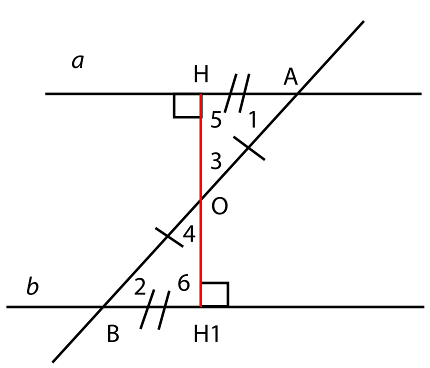


Внутренние накрест лежащие углы: 4-6, 3-5;
Внешние накрест лежащие углы: 1-7, 2-8;
Внутренние односторонние углы: 4-5, 3-6;
Внешние односторонние углы: 1-8, 2-7;
Соответственные углы: 1-5, 4-8, 2-6, 3-7.

! Все признаки и свойства будут формулироваться для внутренних углов. Но внешние углы соответственно равны внутренним (как вертикальные), поэтому для внешних все следующие утверждения будут так же верны.

Первый признак параллельности прямых

Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.



Доказательство. Пусть имеются 2 прямые a и b, и секущая AB. По условию также углы 1 и 2 равны (накрест лежащие). Необходимо доказать, что прямые a и b параллельны.

Отметим середину отрезка AB - точку O. Опустим из нее перпендикуляр OH на прямую a.

Комментарий. Мы предполагаем, что перпендикуляр не совпадает с секущей. Иначе накрест лежащие углы равны 90 градусов каждый. Этот случай уже доказан нами в предыдущей теореме.

Продлим OH до пересечения с прямой b, в пересечении пусть находится точка H_1.

Замечание. Мы не знаем, равен ли угол H_1 90 градусов. Мы пока просто продлили OH.

Рассмотрим получившиеся треугольники OHA и OH_1B:

1. OA=OB, так как точку O мы выбрали как середину отрезка AB;
2. Углы 1 и 2 равны по условию (накрест лежащие);
3. Углы 3 и 4 равны как вертикальные.

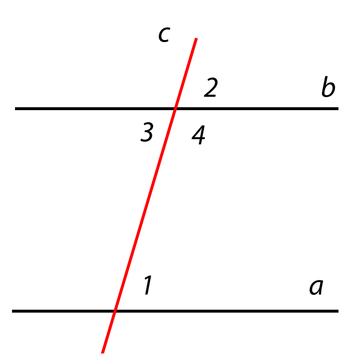
Из (1), (2) и (3) следует, что треугольники равны по второму признаку равенства треугольников. А значит все соответственные элементы (стороны и углы) в этих треугольниках тоже равны. В частности, равны углы 5 и 6. Теперь вспомним, что OH – перпендикуляр по нашему построению, то есть углы 5 и 6 равны 90 градусов каждый.

Таким образом, прямая HH_1 перпендикулярна и прямой a, и прямой b. По доказанной ранее теореме прямые a и b параллельны. Что и требовалось доказать.

Идея доказательства этого признака в том, что мы сводим непонятный случай с наклонной секущей к уже доказанному, с перпендикулярной секущей.

Еще два признака параллельности прямых будем доказывать через первый.

Второй признак параллельности прямых



Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180 градусов, то прямые параллельны.

Доказательство. Пусть даны прямые a и *b*, секущая c. Углы 1 и 4 в сумме дают 180 градусов. Необходимо доказать, что прямые a и *b* параллельны.

Воспользуемся идеей из предыдущего доказательства и попытаемся свести случай к равенству углов 1 и 3. Заметим, что углы 3 и 4 – смежные, и их сумма (по свойству) так же равна 180 градусов. Запишем два условия так:

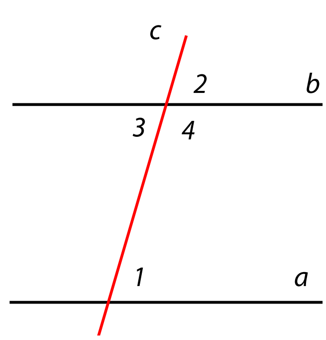
$\angle 1 + \angle 4 = 180^{\circ}$ (по условию);
$\angle 3 + \angle 4 = 180^{\circ}$ (по свойству смежных углов).

Можем вычесть из первого равенства второе и получить следующее:

$$\angle 1 + \angle 4 - \angle 3 - \angle 4 = 180^{\circ} - 180^{\circ};$$
$$\angle 1 - \angle 3 = 0;$$
$$\angle 1 = \angle 3.$$

То есть если сумма внутренних односторонних углов равна 180 градусов, то так же верно, что вертикальные углы равны. Значит, мы можем (используя доказанный первый признак параллельности прямых) сделать вывод, что прямые a и *b* параллельны. Что и требовалось доказать.

Третий признак параллельности прямых



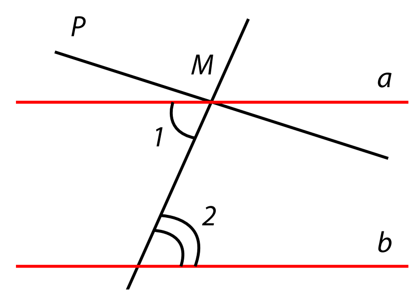
Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство. При пересечении прямых a и b секущей c получились равные соответственные углы 1 и 2.

Точно так же попытаемся рассмотреть не только пару соответственных углов 1 и 2, но и пару накрест лежащих углов 1 и 3.

Заметим:
$\angle 2 = \angle 3$ (по свойству вертикальных углов);
$\angle 2 = \angle 1$ (по условию, как соответственные).

Несложно сделать вывод, что углы 1 и 3 также равны. Они накрест лежащие. Вновь вспомним уже доказанный ранее первый признак параллельности прямых и сделаем вывод: прямые a и *b* параллельны. Что и требовалось доказать.



Таким образом, есть три простых способа проверить на параллельность 2 прямые. Но зачем нам нужно знать, что какие-то две прямые параллельны?

Свойства параллельных прямых

Теорема. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Мы уже использовали метод от противного при доказательстве. И здесь снова он нам пригодится.

Доказательство. Уже дано, что две прямые a и *b* параллельны. Нужно доказать, что углы 1 и 2 равны.

Предположим, что углы не равны. Тогда один точно больше другого. Скажем, например, что угол 2 больше (если не так, то перевернем картинку). Раз угол 1 меньше, чем угол 2, то нарисуем еще одну прямую PM, проходящую через точку M так. Чтобы угол PMN был равен углу 2. По доказанному ранее первому признаку параллельности прямых (так как накрест лежащие углы равны по построению) прямые PM и b параллельны. Имеем:

$$PM \parallel b;$$
$$a \parallel b;$$

Значит, через точку M проходит 2 прямые, параллельные прямой b, но это невозможно по аксиоме (через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и только одну).

То, что мы предположили, – неверно. Значит, накрест лежащие углы 1 и 2 равны. Что и требовалось доказать.

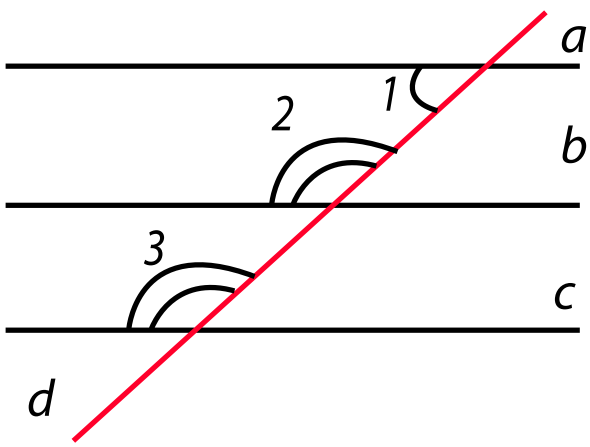
Еще два свойства параллельных прямых предлагаем доказать читателю самостоятельно (для этого можно использовать свойства смежных и вертикальных углов, а также только что доказанное свойство – из него все следует).

Свойство 2. Если 2 параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Свойство 3. Если 2 параллельные прямые пересечены секущей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180 градусов.

Рассмотрим несколько примеров решения классических задач по этой теме.

Пример. Определите, какие из прямых a, b, c параллельны, если угол 1 составляет 42 градуса, угол 2 – 142 градуса, угол 3 – 138 градусов.



Решение. Проверим прямые попарно, используя известные нам признаки параллельности.

(1) Прямые a и *b*, секущая *d*.

К данным прямым прилегают углы 1 и 2. Причем для данных прямых и секущей эти углы – внутренние односторонние. Сумма этих углов 142+42=184 градуса, что не равно 180 градусам, поэтому прямые не параллельны.

Достаточно проверить только один признак параллельности прямых – если он не работает, то остальные так же не сработают.

(2) Прямые *b* и c, секущая *d*.

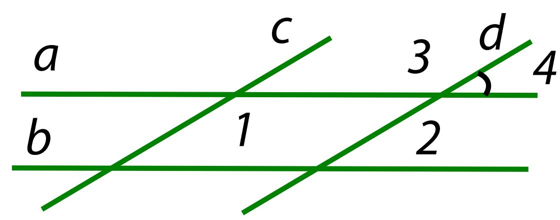
К данным прямым прилегают углы 2 и 3. Заметим, что данные углы – соответственные, но они равны 142 и 138 градусов, то есть не равны между собой. Значит (по доказанному ранее) прямые не параллельны.

(3) Прямые a и c, секущая *d*.

К прямым прилегают углы 1 и 3. Причем для данных прямых и секущей они внутренние односторонние. Заметим, что их сумма как раз составляет 138+42=180 градусов, поэтому (по доказанному) прямые *a* и *c* параллельны.

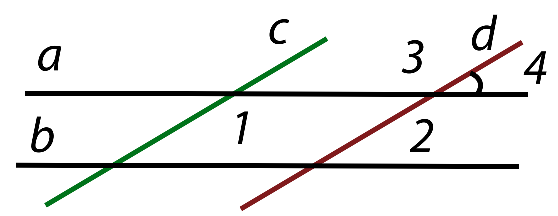
Ответ: a || c.

Пример 2. Дано, что a || b, c || d, и угол 4 равен 45 градусов. Нужно найти углы 1, 2 и 3.

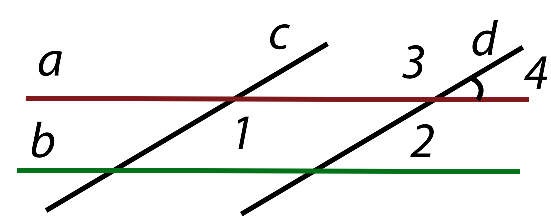


Решение. Мы уже знаем, что углы 3 и 4 – смежные, и их сумма равна 180 градусов. Тогда несложно найти угол 3 так: 180-45=**135** градусов.

Рассмотрим a || *b* и секущую *d.* Углы 2 и 4 – соответственные. По свойству параллельных прямых углы 2 и 4 равны, то есть угол 2 составляет **45 градусов.**



Теперь рассмотрим *c* || *d* и секущую *a.* Углы 1 и 3– накрест лежащие. По свойству параллельных прямых накрест лежащие углы равны, поэтому угол 1 составляет так же **135 градусов**.



Чтобы выбрать, какие прямые рассматривать в таких задачах, выберите 2 угла, прилегающие к общей прямой (это будет секущая). Один из углов - неизвестный.

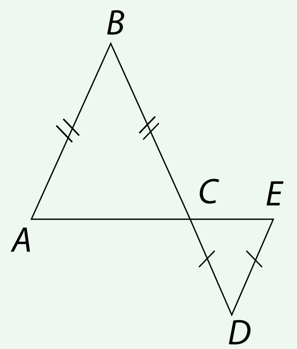
Другой способ – рассмотреть все пары параллельных прямых и возможные их секущие.

Помните! Поиск решения – творческий процесс. Если не получается – пробуйте еще!

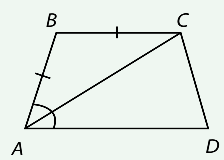
Ответ: ∟1 = ∟3 = 135º; ∟2 = 45º.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

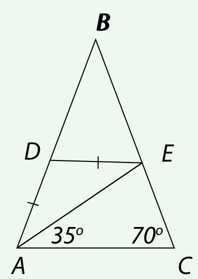
1. Докажите, что прямые AB и DE параллельны:



2. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.



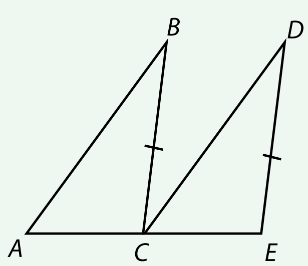
3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, AD = DE, угол C равен 70 градусов, а угол CAE равен 35 градусов. Докажите, что прямые AC и DE параллельны.



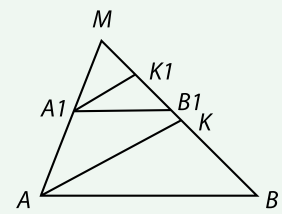
4. Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямой секущей равна 200 градусов. Найдите все углы, образовавшиеся при таком пересечении.

5. Угол ABC равен 70 градусов, а угол BCD равен 110 градусов. Могут ли прямые AB и CD быть параллельными? А могут пересекаться?

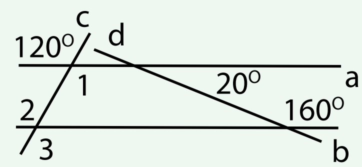
6. На рисунке треугольники ABC и CDE равны. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.



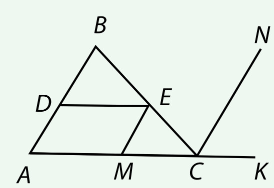
7. В треугольнике ABM прямые AB и A1B1 параллельны. AK – биссектриса угла MAB, а A1K1 – биссектриса угла MA1B1. Могут ли прямые AK и A1K1 пересекаться?



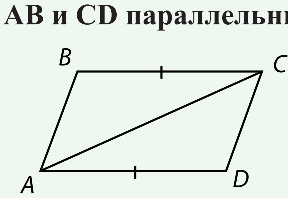
8. По данным рисунка ниже определите углы 1, 2 и 3.



9. Прямые DE и AC параллельны. EM – биссектриса угла DEC, CN – биссектриса угла ECK. Могут ли прямые EM и CN иметь общую точку? Докажите.



10. (*) В четырехугольнике ABCD стороны BC и AD равны и параллельны. Докажите, что треугольники ABC и ACD равны. Докажите, что AB и CD параллельны.



11. (*) Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что

а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны;

б) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

ОКРУЖНОСТЬ. ГМТ

Понятие геометрического места точек (ГМТ) тесно связано с признаками. Когда мы говорим «геометрическое место точек», из всего множества точек мы выделяем часть, в которой все точки обладают определенным свойством. Рассмотрим на примерах.

Биссектриса – это геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от сторон угла.

(!) Биссектриса состоит из всех точек с таким свойством. Используя ГМТ, мы выбираем все точки (не часть), обладающие свойством.

Комментарий. Из всех точек плоскости мы берем только те, расстояние от которых до сторон нашего угла одинаковое.

Серединный перпендикуляр – это геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от концов отрезка.

Комментарий. Из всех точек плоскости мы выбираем только те, которые находятся на одинаковом расстоянии от концов данного отрезка.

Определение окружности тоже дается с использованием ГМТ.

Окружность – это геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки. Данная точка называется **центром окружности**.

То есть, чтобы определить окружность, нам дается одна точка, которая является центром окружности, и какое-то расстояние. Мы откладывает от центра во все стороны одинаковые отрезки заданной длины. Все вторые концы таких всевозможных отрезков и образуют окружность.

Круг – это геометрическая фигура на плоскости, состоящая из окружности и части плоскости, ограниченной ею.

Необходимо различать понятия окружности и круга. Правильно говорить длина окружности, но площадь круга.

С окружностью связаны некоторые важные понятия, о которых пойдет речь далее.

Радиус (r) – отрезок, соединяющий центр окружности с любой ее точкой.

Хорда – отрезок, соединяющий любые 2 несовпадающие точки окружности.

Диаметр (d) – это хорда, проходящая через центр окружности.

Кроме того, есть 2 особых угла в окружности.

Вписанный угол – угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность (угол ABC).

Центральный угол – угол, вершина которого совпадает с центром окружности, а стороны пересекают окружность (угол AOB).

Позже будет приведено доказательство интересного свойства, связанного с этими углами.

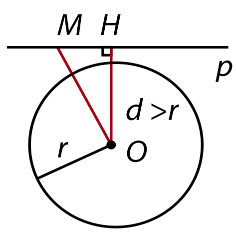
Еще один важный вопрос – вопрос взаимного расположения фигур. Читателю предлагается ответить на вопрос, сколько общих точек может иметь прямая с окружностью? Давайте попробуем разобраться.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Для понимания, как расположены прямая и окружность, введем обозначения:

r – радиус окружности;
d – расстояние от центра окружности до прямой.

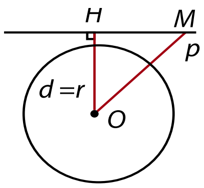
Вспомним. Расстоянием от точки до прямой называют длину перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.



1) Прямая и окружность **не пересекаются.**

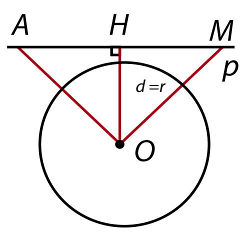
Это самый простой случай. Если прямая и окружность не пересекаются, то отрезок, соединяющий любую точку прямой с центром, «выходит» за пределы окружности. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой точно больше радиуса.

2) Прямая и окружность имеют **1 общую точку (касаются).**



В этом случае прямая называется касательная, а общая точка – точка касания. Кратчайшее расстояние от центра окружности до прямой – это радиус, проведенный в точку касания.

3) Прямая и окружность имеют **2 общие точки (пересекаются).**

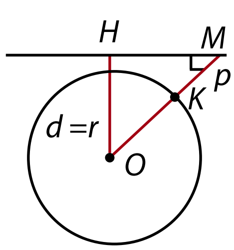


Такая прямая по отношению к окружности называется **секущая**. Расстояние от центра до прямой меньше радиуса.

Давайте вернемся ко второму случаю (касание) и сформулируем свойство касательной к окружности.

Теорема. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Доказательство. Нам уже знаком метод доказательства от противного. Предположим, что OH (отрезок, соединяющий центр окружности и точку касания) не перпендикулярен касательной. Тогда OH – наклонная и мы можем провести другой перпендикуляр (не совпадающий с OH). Пусть этот перпендикуляр – OM.



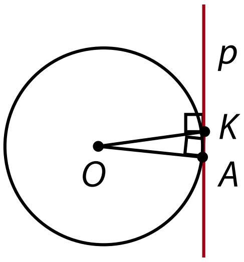
Читателю известны **соотношения в треугольнике** (против большего угла лежит большая сторона). Рассмотрим треугольник OHM. Угол M – прямой по построению, поэтому OH – гипотенуза в этом прямоугольном треугольнике. По названному соотношению гипотенуза всегда больше катетов (гипотенуза лежит против прямого угла, а катеты – против острых). Но в нашем треугольнике гипотенуза OH равна r. А катет OM равен сумме OK = r и KM, то есть катет больше радиуса. Из чего следует, что катет больше гипотенузы. Это невозможно!

Таким образом, мы предположили, что OH не перпендикуляр, и пришли к противоречию. Значит, OH – перпендикуляр, что и требовалось доказать.

Верна так же и обратная теорема.

Теорема. Прямая, проходящая через конец радиуса окружности и перпендикулярная ему, является касательной к этой окружности.

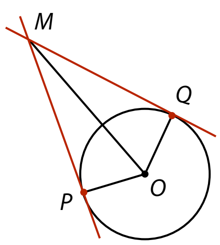
Доказательство. Пусть прямая p проходит через точку A, лежащую на окружности, и пусть угол между ней и радиусом OA равен 90 градусов. Она точно имеет хотя бы одну общую точку с окружностью – точку A. Значит, эта прямая либо касательная (больше общих точек с окружностью нет), либо секущая (есть еще одна общая точка). Необходимо доказать, что она касательная. **Предположим, что нет.** Тогда есть еще одна точка пересечения с окружностью: пусть это точка B.



Причем, треугольник OAB – равнобедренный (OA=OB как радиусы, по определению окружности). По свойству равнобедренного треугольника углы при основании равны, поэтому углы A и B равны по 90 градусов. Читатель, вероятно, знает, что сумма углов треугольника равна 180 градусов (это несложно доказывается с помощью свойств параллельных прямых). Поэтому в треугольнике не может быть два угла по 90 градусов каждый. Из чего следует, что мы пришли к противоречию. А значит, прямая p не может быть секущей, она – касательная. Что и требовалось доказать.

Необходимо рассмотреть еще одно важное свойство, связанное с касательной.

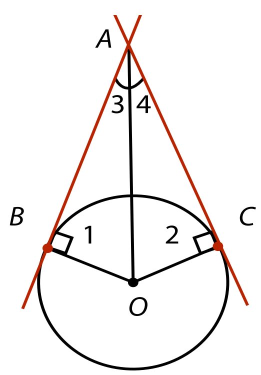
Теорема. Отрезки касательных, проведенных из данной точки к окружности, равны.



Замечание. Несложно понять, что из каждой точки вне окружности можно провести 2 касательные к ней. Отрезками касательных в этом случае называют отрезки, один конец которых – это данная точка (M), а второй – точка касания (P и Q). На рисунке это отрезки MP и MQ.

Доказательство. Рассмотрим касательные AB и AC к окружности на рисунке ниже. Проведем AO и радиусы в точки касания (внимательный читатель может заметить, что мы снова к незнакомому нам условию добавляем знакомые факты: например, проведя радиусы, мы получим углы по 90 градусов).

Рассмотрим получившиеся прямоугольные треугольники AOB и AOC.



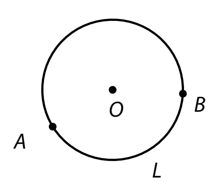
(1) OB=OC как радиусы;
(2) OA – общая сторона.

Таким образом, два прямоугольных треугольника равны по катету и гипотенузе. А значит, все соответственные элементы (углы и стороны) попарно равны. В частности, AB=AC. Что и требовалось доказать.

(!) Попутно заметим, что углы 3 и 4 равны, то есть AO – биссектриса угла BAC.

Теперь вернемся к окружности и связанным с ней определениям.

Дуга – это часть окружности, состоящая из всех ее точек, которые находятся между двумя данными точками.

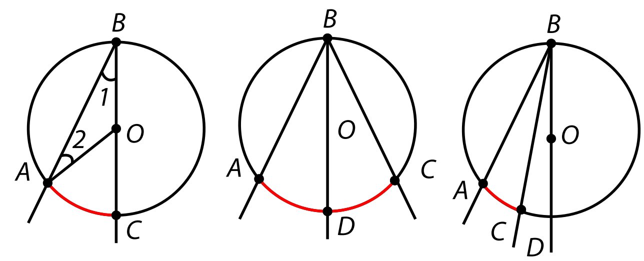


Вводится 2 способа измерения дуги. **Во-первых,** можно просто измерить длину части окружности (в сантиметрах, например), но это неудобно, так как это не прямая линия. **Во-вторых,** принято измерять дугу величиной центрального угла, который ее содержит. Тогда длина всей окружности составит полный угол 360 градусов.

Через градусную меру дуг доказывается интересное свойство вписанного угла (о нем уже говорилось ранее).

Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.

Доказательство. Рассмотрим вписанный угол ABC, проведем диаметр BD и рассмотрим 3 случая: когда диаметр совпадает с одной из сторон угла ABC (1), когда диаметр проходит между сторон угла (2) и когда угол лежит по одну сторону от диаметра (3).



(1) Диаметр совпадает со стороной.

Пусть диаметр совпадет со стороной BC (иначе можем просто поменять A и C местами). По определению градусной меры дуги угол AOC равен дуге AC. Пусть ее величина (в градусах) равна 2x. Тогда угол AOC так же равен 2x.

Заметим, что угол AOC – внешний для треугольника AOB.

Замечание. Внешний угол треугольника – это угол, смежный с внутренним.

По свойству внешнего угла (внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним) угол AOC равен сумме углов 1 и 2.

Несложно понять, что треугольник AOB равнобедренный (OA=OB как радиусы окружности). По свойству равнобедренного треугольника (углы при основании равны) углы 1 и 2 равны. Имеем:

$$\angle 1 + \angle 2 = 2x;$$
$$\angle 1 = \angle 2.$$

Тогда понятно, что каждый из углов 1 и 2 равен x. То есть, мы сказали, что дуга равна 2x, и получили, что вписанный угол, опирающийся на нее, равен x. По-другому, **вписанный угол равен половине дуги.** Для этого случая теорема верна.

(2) Диаметр BD делит угол ABC на два угла.

Угол ABD подходит под первый (уже доказанный нами) пункт. Потому угол ABD равен половине дуги AD. Точно так же, угол CBD равен половине дуги CD. Имеем:

$$\angle ABD = \smile AD;$$

$\angle CBD = \smile CD.$

Сложим эти равенства:

$$\angle ABD + \angle CBD = \smile AD + \smile CD;$$
$$\angle ABC = \smile AC.$$

Что и требовалось доказать.

(3) Диаметр лежит по одну сторону от угла.

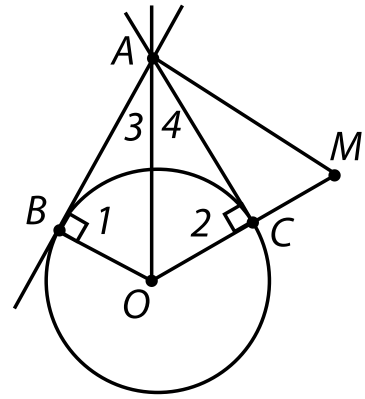
Данный случай предлагаем доказать читателю самостоятельно.

(!) Необходимо точно так же, как и во втором случая, рассмотреть углы ABD и CBD, написать для них равенства (по доказанному в первом пункте) и вычесть из одного другое.

Комментарий. Часто при доказательстве удобно разбивать условие на более простые случаи и рассматривать их по отдельности.

Попробуем использовать указанные выше факты и теоремы для решения задач.

Пример. Из точки A провели касательные к окружности AB и AC. Точка M выбрана так, что точка C является серединой отрезка OM. Докажите, что углы ABO, CBO и CAM равны.



. Так как OB и OC – радиусы, проведенные в точки касания, то углы 1 и 2 – прямые (по доказанной ранее теореме). Далее в теореме о равенстве отрезков касательных мы доказали равенство прямоугольных треугольников ABO и CAO (по катету и гипотенузе). Поэтому углы 3 и 4 равны как соответственные в равных треугольниках.

Теперь рассмотрим треугольник OAM.

(1) OC = CM по условию, значит AC - медиана;

(2) Угол C прямой по доказанному, значит AC – высота.

Из (1) и (2) следует, что (по признаку равнобедренного треугольника) треугольник OAM – равнобедренный, поэтому AC еще и биссектриса угла OAM. То есть, углы CAO и CAM равны.

Таким образом, $\angle BAO = \angle CAO = \angle CAM$. Что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. **Найдите вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности.**

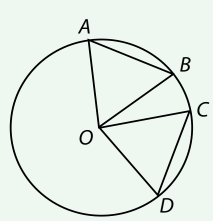
2. **Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите BC, если угол OAB равен 30 градусов, AB=5.**

3. **Точки A и B делят окружность на 2 дуги, меньшая из которых равна 140 градусов, а большая делится точкой M в отношении 6:5, считая от точки A. Найдите угол BAM.**

4. **Из точки на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.**
(сделайте рисунок, используйте свойство вписанного угла, вспомните свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов).

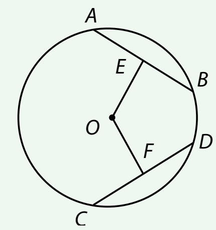
5. **(теорема) Докажите, что хорда, пересекающая радиус под углом 90 градусов, точкой пересечения делится пополам.**
(для решения задач 5 и 6 достаточно вспомнить свойства равнобедренного треугольника)

6. **(обратная теорема) Радиус окружности проходит через середину хорды. Докажите, что угол между ними равен 90 градусов.**
7. **Докажите, что углы AOB и COD равны.**
(докажите равенство треугольников)

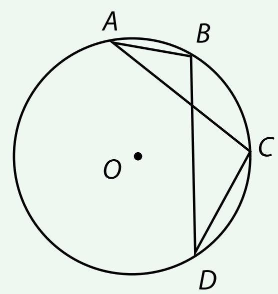


8. **(*) Докажите, что градусные меры дуг, заключенных между параллельными прямыми, равны.**

9. **В окружности хорды AB и CD равны. Точки E и F – середины этих хорд. Докажите, что отрезки OE и OF равны.**



10. **На рисунке ниже отрезки AB и CD равны. Докажите, что AC=BD.**
11. **Окружность, радиус которой равен 4, разделена точками A, B и C на три дуги, длины которых относятся, как 1:2:3. Найдите наи-**



меньшую и наибольшую стороны треугольника ABC.
12. **(*) Окружность построена на боковой стороне равнобедренного треугольника, как на диаметре. Докажите, что эта окружность проходит через середину основания.**

13. **(Важный факт) Две разные окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая, соединяющая центры этих окружностей, делит отрезок AB пополам и перпендикулярна ему.**
(вспомните определение серединного перпендикуляра и ГМТ)

14. **(*) Из точки M вне окружности провели две касательные MA и MB. Окружность при этом проходит через середину отрезка OM (O – центр окружности). В каком отношении отрезок OM делится отрезком AB?**
(попробуйте ввести переменную x вместо длины какого-нибудь отрезка и посчитать, как будут выражаться длины других отрезков)

ФИЗИКА

МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Механическое движение – самый простой и часто встречающийся вид движения. Посмотрите вокруг! Ходят люди, ездят автомобили, летают самолеты. Все эти процессы мы будем называть механическим движением. Автомобили, люди и самолеты движутся, то есть **изменяют свое положение в пространстве**. А вот здания и деревья не перемещаются. Будем говорить, что они **сохраняют состояние покоя**.

Казалось бы, всегда можно определить, движется тело или находится в покое. Но рассмотрим пример: человек едет в поезде. Если он просто сидит на месте, то другим пассажиром понятно, что он не перемещается (покоится). Но ожидающим на перроне кажется, что все в поезде двигаются (как и поезд). Можно ли состояние пассажиров поезда назвать механическим движением или же они находятся в состоянии покоя?

Чтобы было понятно, что есть движение, а что нет, вводится понятие **относительность движения**. Само определение механического движения говорит нам об его относительности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Механическое движение — это изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Это значит, что для понимания, движется ли тело, нам нужно еще одно тело **(тело отсчета)**, которое мы будем условно считать неподвижным. Например, если в примере выше поезд считать неподвижным, то пассажиры поезда будут находиться в состоянии покоя. А относительно фонаря или зданий вдоль железной дороги пассажиры и поезд будут двигаться.

Немного сложнее разобраться в следующем примере. Пусть человек пробегает мимо здания. В обыденном понимании мы скажем, что человек движется, а здание – нет. Однако, если рассмотреть пробегающего человека как тело отсчета (неподвижное), то здание будет двигаться (причем так же быстро, как бежит человек, но в другую сторону).

Таким образом, чтобы как-то описывать механическое движенифе, кроме движущегося тела нужно еще одно тело, которое мы будем считать условно неподвижным.

Исследованием механического движения занимается такой раздел физики, **как механика**. **Цель механики** – уметь точно определить, в какой точке пространства будет находится движущееся тело в любой момент времени. Для изучения механического движение необходимы:

1) Точка отсчета (или тело отсчета), так как движение относительно;
2) Система координат – чтобы уметь находить расстояние и называть точку, в которой находится тело, по ее координатам;
3) Предмет для измерения времени (например, секундомер) – чтобы знать, сколько времени двигалось тело из начальной точки в конечную).

Введем важные определения и величины, которые будут нужны нам для описания движения.

Если представить, что на дороге после перемещения тела будет оставаться след, то такой след в виде линии (как, например, след от коньков на льду) можно назвать траекторией.

Траектория – это линия, вдоль которой движется тело.

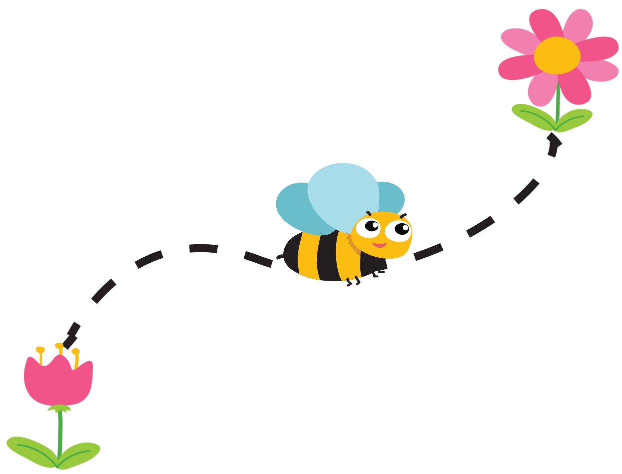
В зависимости от формы траектории можно выделить 2 вида движения: прямолинейное (когда траектория – прямая линия) и криволинейное (когда траектория не прямая).

Путь – длина траектории. По-другому, путь – это расстояние, пройденное телом при движении.

! **На траекторию движения влияет тело отсчета (или относительность движения). Например, если самолет в воздухе считать неподвижным, то человек, перейдя из одного конца самолета в**

другой, пройдет путь, равный длине самолета. Если же неподвижной (телом отсчета) считать Землю, то человек за время движения еще и пролетит вместе с самолетом некоторое расстояние, поэтому путь будет гораздо больше, а траектория – длиннее (а, может, и кривой, если самолет будет поворачивать).

Перемещение – это направленный отрезок, соединяющий начальную и конечную точки движения.



Например, при прямолинейном движении путь и перемещение совпадают, а при криволинейном – перемещение меньше, чем путь.

Введем понятие равномерного движения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Движение называется равномерным, если за любые равные промежутки времени тело проходит равные расстояния. Иначе оно называется неравномерным.

Например, пусть за первую секунду человек прошел 3 метра, за вторую еще 3 метра, за третью тоже 3, и так далее. Человек идет, при этом не ускоряется и не замедляется. Его движение можно назвать равномерным.

Может показаться, что движение секундной стрелки – равномерное, ведь за каждую секунду стрелка проходит ровно на 1/60 часть круга. Но стрелка движется скачками. Например, за первую половину секунды стрелка пройдет такое же расстояние, как и за целую секунду, а за вторую половину секунды стрелка не сдвинется. Значит, ее движение – неравномерное.

В курсе седьмого класса изучают равномерное прямолинейное движение для простоты исследования. Но позже читатель познакомится и с другими видами механического движения.

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

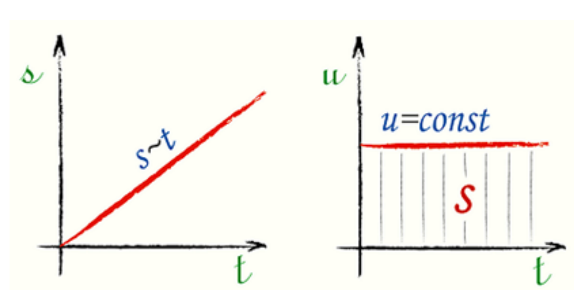
Главной характеристикой равномерного движения является скорость.

Скорость – это расстояние, которое проходит тело в единицу времени. При равномерном движении скорость не меняется. Обычно скорость измеряется в км/ч (километры в час) и м/с (метры в секунду).

Пусть тело тел проходит v фметров за 1 секунду и движется равномерно. За вторую секунду оно так же пройдет v метров. Тогда за 2 секунд тело пройдет $2v$ метров. Точно так же за 3 секунды тело пройдет $3v$ метров, за 4 – $4v$ метров и так далее. За время t тело пройдет $t*v$ метров. Таким образом, пройденный путь *(s)* при равномерном движении считается как произведение скорости и времени: $s=v*t$.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Часто для наглядности механическое движение описывают с помощью графиков **зависимости скорости от времени и пройденного пути от времени**.



Несложно понять, что график зависимости скорости от времени – горизонтальная прямая, потому что скорость при равномерном движении не меняется.

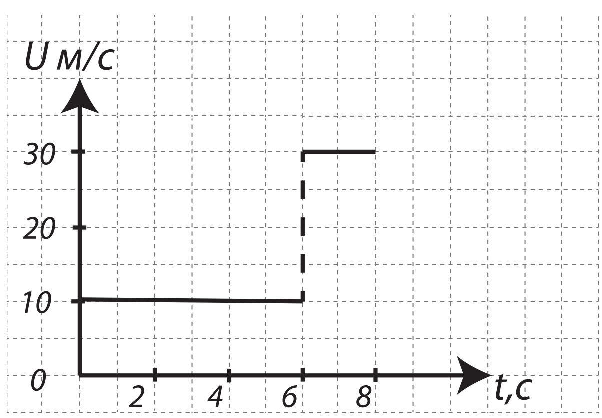
Важно научится строить график зависимости пути от времени. Его можно представить как уже известное читателю уравнение прямой пропорциональности *y=kx (S=vt),* где независимая переменна *x* – это время, постоянный коэффициент *k* – это скорость, а зависимая переменная *y* это, конечно же, путь. Тогда графиком будет прямая, проходящая через начало координат. Причем угол наклона прямой к оси времени зависит от скорости. Чем больше скорость, тем быстрее увеличивается пройденное расстояние и больше угол наклона.

Кроме того, уравнение может выглядеть вот так: $S=vt+S_0$. Слагаемое S_0 появляется, если движение началось раньше и тело уже сейчас находится на каком-то расстоянии от начальной точки. Графиком в таком случае тоже будет прямая, но она уже не будет **проходить через начало координат.**

КАК СТРОИТЬ ГРАФИКИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ?

1) Несложно построить график зависимости **скорости от времени**.

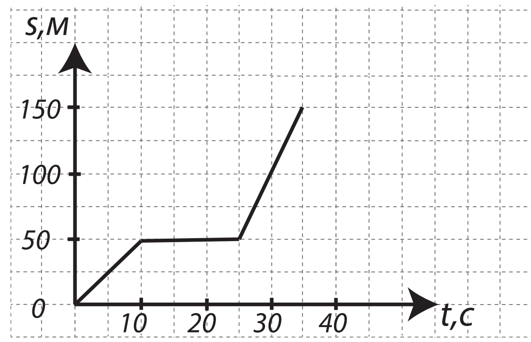
Для любого участка равномерного движения графиком такой зависимости будет горизонтальный отрезок, находящийся на высоте *v.*



Например, на рисунке выше графически описано движение, состоящее из двух участков, на каждом из которых тело двигалось равномерно (так как скорость не менялась). Первые шесть секунд тело двигалось со скоростью 10 метров в секунду, а после еще 2 секунды двигалось равномерно со скоростью 30 метров в секунду.

2) А из чего же состоит график зависимости пути от времени?

Точно так же каждый участок равномерного движения изображается как отрезок прямой *s=v*t.*



На графике выше читатель может видеть три отрезка равномерного движения:

Первый участок: тело двигалось в течение 10 секунд и прошло 50 метров. Тогда несложно найти скорость движения тела на этом участке.

$$v = \frac{S}{t} = \frac{50м}{10с} = 5\frac{м}{с}$$

Второй участок: в промежутке с 10-ой и до 25-ой секунды расстояние не увеличивалось (так как прямая горизонтальная), поэтому скорость равна нулю; тело остановилось на 15 секунд.

Третий участок: с 25-ой и до 35-ой секунды тело двигалось быстрее и прошло за 10 секунд 100 метров (150-50). Используя формулу для равномерного движения, найдем скорость:

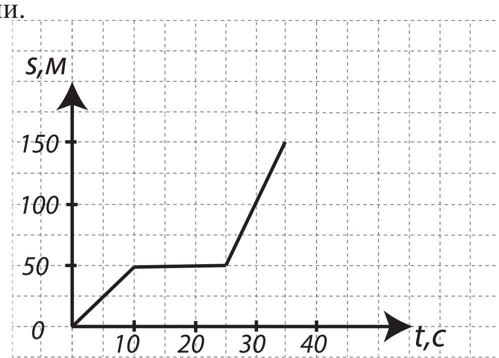
$$v = \frac{S}{t} = \frac{100м}{10с} = 10\frac{м}{с}$$

Таким образом, по графику очень удобно находить скорость, время и пройденный путь каждого участка движения.

Похожим образом, зная данные о движении некоторого тела, мы можем построить график движения, изображая по отдельности каждый отрезок.

Важно уметь по графику зависимости скорости от времени восстанавливать график зависимости пути от времени и наоборот.

Пример 1. Снова обратимся к графику зависимости пути от времени и попробуем построить для этого же движения график зависимости скорости от времени.

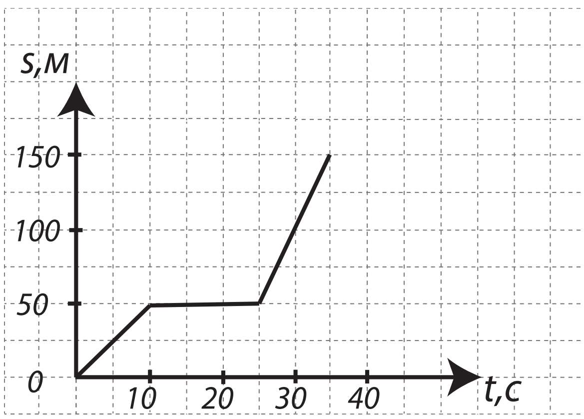


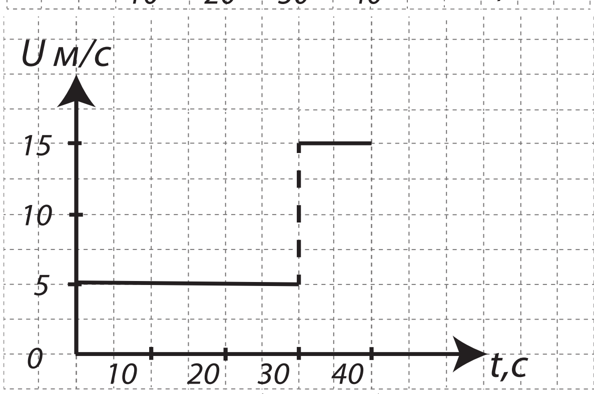
Все необходимые данные мы уже определили ранее.

Отрезок 1: t_1=10с, v_1=5м/с;
Отрезок 2: t_2=15с, v_2=0м/с;
Отрезок 3: t_3=10с, v_3=10м/с;

Теперь изобразим зависимость скорости от времени на каждом отрезке отдельно.

(!) Удобно изображать новый график под старым, чтобы отделять друг от друга вертикальными линиями разные отрезки движения.



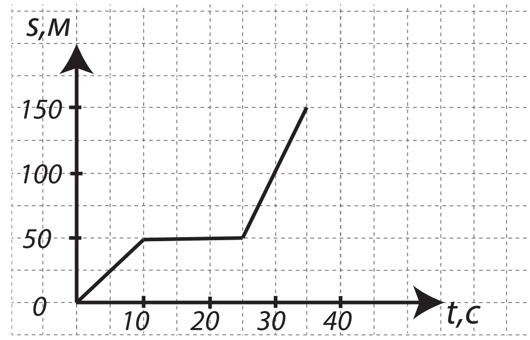


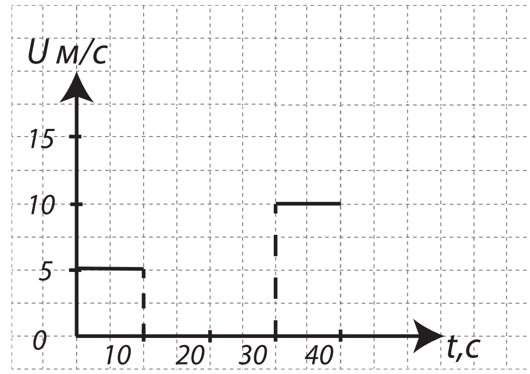
На полученном графике изображена скорость на трех промежутках движения согласно найденным данным. По графику зависимости скорости от пройденного пути можно наглядно видеть, на каком отрезке тело двигалось быстрее и на сколько.

Пример 2. Теперь пусть у нас есть график зависимости скорости от времени. Необходимо построить график зависимости пути от времени.

Точно так же под данным графиком будем строить нужный нам: проведем вертикальные линии вдоль границ отрезков движения и рассмотрим каждый отрезок движения отдельно.

! Если в условии ничего не сказано о начальном расстоянии, то будем считать, что расстояние на момент начала движение равно нулю. Поэтому, первая точка нашего первого отрезка – это (0; 0).





По графику скорости несложно понять, что первые 6 секунд тело двигалось со скоростью 10 метров в секунду и прошло 6*10=60 метров (по формуле $s=v*t$). Поэтому на втором графике на шестой секунде движения пройденный путь будет равен 60 метров. Вторая точка первого отрезка – **(6; 60).**

Так как достаточно двух точек для того, чтобы построить прямую, то первая часть графика уже готова. Причем мы нашли последнюю точку первого отрезка, которая и будет являться первой точкой второго отрезка движения.

! График пути не может прерываться, так как расстояние не может меняться в мгновенье (мы предполагаем, что телепортации не существует).

Поэтому первая точка второго отрезка (это последняя точка первого отрезка) – **(6; 60).**

Определим последнюю точку второго отрезка. Для этого посчитаем, какое расстояние тело прошло в течение второго этапа движения. Тело двигалось 2 секунды со скоростью 30 метров в секунду, значит, расстояние увеличилось на 2*30=60 метров.

Таким образом, пройденный путь за 8 секунд движения составит 60+60= 120 метров. Значит, последняя точка второго участка имеет координаты **(8; 120).**

Соединив точки последовательно прямыми линиями, мы получим искомый график.

В рассмотренных примерах на каждом отдельном отрезке тела двигались равномерно. Но, так как было несколько отрезков движения в каждом примере и в течение всего времени движения скорость менялась, то такое движение (как мы уже знаем) называется неравномерным.

Вернемся ко второму примеру. За все время движения, то есть за 8 секунд, тело прошло 120 метров. Тогда можно сказать, что средняя скорость движения равна 120/8=15 метров в секунду. Это не значит, что тело двигалось все это время с такой скоростью. Но, если бы тело двигалось тоже самое время (8 секунд) равномерно со скоростью 15 метров в секунду, то прошло бы то же самое расстояние (120 метров).

Для нахождения средней скорости нужно весь пройденный путь разделить на все время движения:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 +}{t_1 + t_2 + t_2 + ..}$$

Иногда бывает удобнее использовать упрощенный вариант этой формулы. Рассмотрим несколько частных случаев.

Случай 1. Автомобиль ехал по дороге 1 час со скоростью 50 км/ч равномерно, выехал на автомагистраль и следующий час ехал со скоростью 100 км/ч, далее съехал с автомагистрали и еще час ехал со скоростью 30 км/час. Найдите среднюю скорость движение автомобиля.

Решение: можем просто воспользоваться формулой средней скорости, для этого посчитаем пройденный путь на каждом участке пути ($S=v*t$):

S_1 =50*1= 50 (км);
S_2 =100*1= 100 (км);
S_1 =30*1= 30 (км);

Подставим: $v_{\text{ср.}} = \frac{50+100+30}{1+1+1} = \frac{180}{3} = 60\,км/ч$

Ответ: средняя скорость движения – *60 км/ч.*

Заметим, что в данной задаче три участка равномерного движения автомобиля не отличались по времени. Можно ли посчитать среднюю скорость в задачах такого типа проще? Оказывается, да.

Пусть в общем виде тело двигалось так:

t_1 времени со скоростью v_1;
t_2 времени со скоростью v_2;
t_3 времени со скоростью v_3;
Причем $t_1=t_2=t_3=t$.

Посчитаем S для каждого отдельного участка движения по формулы $S=v*t$ и подставим в формулу средней скорости:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1+S_2+S_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{v_1*t+v_2*t+v_3*t}{t+t+t} = \frac{t*(v_1+v_2+v_3)}{3t} = \\ = \frac{v_1+v_2+v_3}{3}$$

Теперь вынесем t за скобки в числители и сократим.

Таким образом, мы получили формулу для подсчета средней скорости, когда участки движения не отличаются по времени:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{v_1+v_2+v_3}{3}$$

Читателю предлагаем таким же образом вывести формулу для двух участков движения. А в результате должно получиться следующее правило:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{v_1+v_2}{2}$$

Замечание. Важно, что значение средней скорости в таких задачах не зависит от времени.

Случай 2. Пусть автомобиль проехал первые 90 км со скоростью 60 км/ч, потом сломался, после чего его буксировали со скоростью 20 км/ч еще 90 км. Какова средняя скорость движения автомобиля?

На этот раз для того, чтобы применить формулу нахождения средней скорости, нужно посчитать время движения автомобиля на каждом участке пути ($t=s/v$):

$$t_1 = \frac{90}{60} = 1{,}5 \quad (ч);$$
$$t_2 = \frac{90}{20} = 4{,}5 \quad (ч);$$

Теперь можем подставить и посчитать:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2} = \frac{90+90}{1{,}5+4{,}5} = \frac{180}{6} = 30\,км/ч$$

Ответ: средняя скорость равна 30 км/ч.

Заметим, что эта задача тоже имеет особенность – участки движения не отличаются по пройденному расстоянию. И в таком случае можно вывести формулу проще.

Рассмотрим в общем виде такую задачу для двух участков:

путь S_1 тело прошло со скоростью v_1;
путь S_2 тело прошло со скоростью v_2;
Причем $S_1 = S_2 = S$.

Для применения формулы средней скорости не хватает времени. Вычислим его по формуле $t=S/v$ и подставим:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S}{t} = \frac{S_1+S_2}{t_1+t_2} = \frac{S+S}{\frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_2}} = \frac{2S}{\frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_2}}$$

Вынесем S за скобки в знаменатели и сократим. Далее попробуем привести дроби в знаменателе к общему знаменателю:

$$v_{ср.} = \frac{2S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}} = \frac{2S}{S\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{v_1 + v_2}{v_1 * v_2}}$$

Умножим числитель и знаменатель всей дроби на выражение ($v_1 * v_2$), чтобы избавиться от дроби в знаменателе:

$$v_{ср.} = \frac{2}{\frac{v_1 + v_2}{v_1 * v_2}} = \frac{2v_1 * v_2}{v_1 + v_2}$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления средней скорости для задач, в которых участки равномерного движения тела равны по расстоянию.

$$\boldsymbol{v}_{ср.} = \frac{2v_1 * v_2}{v_1 + v_2}$$

Читателю предлагается самостоятельно вывести формулу средней скорости, если участков движения будет не 2, а 3. Выглядит она так:

$$\boldsymbol{v}_{ср.} = \frac{2v_1 * v_2}{v_1 + v_2}$$

Заметим, что средняя скорость в таких задачах не зависит от расстояния.

Важный комментарий. Знание последних двух формул безусловно упрощает и ускоряет решения задач по теме средняя скорость.

Но, если вы не помните формулу или случаи, в которых она применяется, это не проблема. Любую задачу на среднюю скорость можно решить, используя главную формулу равномерного движения:

$$\boldsymbol{S = v * t}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Относительность движения:

1. Из населенного пункта одновременно выехали грузовик со скоростью 40 км/ч и легковой автомобиль со скоростью 60 км/ч. Какова скорость автомобиля относительно грузовика, если они едут

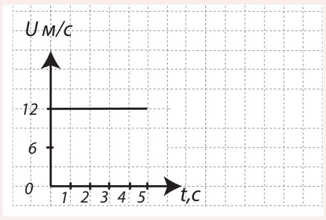
а) в одном направлении;
б) в противоположных направлениях?

2. Человек идет по вагону со скоростью 4 м/с. В это время вагон поезда едет со скоростью 25 м/с. Какова скорость человека относительно дерева, стоящего неподвижно возле железной дороги? Какой путь пройдет человек относительно земли за 10 секунд? А относительно поезда? Рассмотрите возможные варианты.

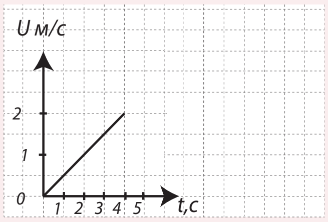
3. Поезд длиной 240м, двигаясь равномерно, прошел мост за 2 мин. Какова скорость поезда, если длина моста 360 м?

II. Равномерное прямолинейное движение:

1. По графику определите путь, пройденный телом за 4 секунды. Постройте график зависимости пути от времени для этого движения.

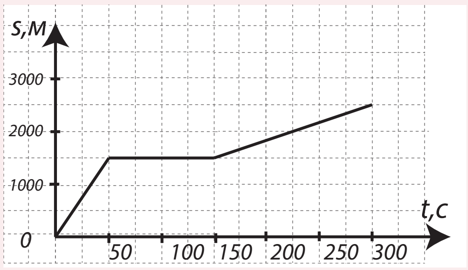


2. По графику определите скорость тела и постройте график зависимости скорости от времени для данного движения.

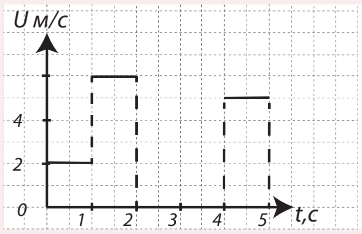


3. Один велосипедист двигался в течение 12 секунд со скоростью 6 м/с, а второй проехал этот же путь за 9 секунд. Какова была его скорость?

4. На графике представлена зависимость пути от времени для полета птицы. Определите расстояние, которое пролетела птица. Постройте график зависимости скорости от времени для этого движения.



5. Для данного графика зависимости скорости от времени постройте соответствующий график зависимости пути от времени.



III. Средняя скорость при неравномерном движении:

1. Автомобиль проехал за первый час 50 км, а за следующие два часа он проехал 160 км. Какова его средняя скорость на всем участке пути?

2. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 74 км/ч, а вторую половину – 66 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

3. Велосипедист 1 час ехал со скоростью 50 км/ч, после этого 2 часа со скоростью 20 км/ч и еще 3 часа со скоростью 30 км/ч. Какова средняя скорость его движения?

4. Первый автомобиль проехал расстояние между двумя городами за 3 часа, а второй проехал то же самое расстояние за 4 часа, так как сделал остановку. Во сколько раз больше средняя скорость первого больше, чем средняя скорость второго?

5. Человек полпути проехал на велосипеде со скоростью 25 км/ч, а остаток пути прошел со скоростью 5 км/ч. Сколько времени он ехал, если весь путь занял 3 ч?

РАБОТА. ЭНЕРГИЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. ПРОСТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

Вспомним, что **силу** принято называть мерой взаимодействия тел. То есть значение силы показывает нам, как сильно одно тело действует на другое. Когда за счет действия силы удается изменить поло-фжение тела (сила – причина движения), вводится понятие работы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Механическая работа (А) – произведение модуля силы на пройденный этим телом путь (за счет действия силы).

$$A=F*l;$$

Работа измеряется в Джоулях (Дж). Работа 1 Дж – это работа, при которой под действием силы 1 Ньютон тело переместилось на 1 метр.

Например, лошадь тянет телегу, действуя на нее с некоторой силой, и телега едет. Тогда, используя формулу выше, мы можем посчитать работу.

Заметим, что работа **прямо пропорционально зависит** от **силы** и **расстояния**. Чем дальше лошадь везет телегу, тем больше устает, так как совершает больше работы. И точно так же, чем тяжелее телега, тем быстрее устанет лошадь, так как совершит большую работу.

Рассмотрим еще один **пример**. Если человек поднимает тело массой 2 кг (соответственно, прикладывая силу, равную силе тяжести – 20Н), на высоту 1 метр, то он совершает работу

$$A=F*l=20Н*1м=20\ Дж.$$

Замечание. Если пройденный путь равен нулю, то независимо от силы работа равна нулю.

Принято говорить, что если тело может совершить работу, то оно обладает **энергией**. Причем чем больше энергия, тем больше работы может совершить тело.

Мощность (N) – это отношение работы, совершенной за какое-то время, к этому времени. Единица измерения мощности – ватт (Вт).

$$A=N*t;$$

$$1\ Вт = \frac{1\ Дж}{1с};$$

Энергия (Е) – это физическая величина, характеризующая способность тела совершать работу. Энергия, как и работа, измеряется в Джоулях. Поэтому, если тело обладает энергией 20 Дж, то оно может совершить работу 20 Дж. Условно запишем это так: $A=E$.

Например, сжатая пружина обладает энергией, так как может толкнуть некоторое тело, которое вследствие этого начнет движение (например, пружинный пистолет, из которого вылетают пульки). Энергией может обладать и движущийся автомобиль, так как он может сбить что-нибудь, то есть привести другие тела в движение.

Читателю предлагается подумать, какие еще тела могут обладать энергией и совершать работу?

Выделяют 2 вида энергии: потенциальную и кинетическую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Потенциальная энергия – это энергия тел, поднятых на высоту, а также сжатых пружин и газов.

К примеру, поднятое на высоту тело может упасть и совершить работу (образовать яму в земле, разбить что-нибудь). Сила, которая действует на тело, поднятое над поверхностью земли, – это сила тяжести. Этот вид сил уже знаком читателю. Сила тяжести вблизи поверхности считается так:

$$F_{тяж.} = mg;$$

В указанной формуле m – масса тела, g – ускорение свободного падения, g = 9,8…Н/кг.

Используя формулу работы A=F*l и условное равенство A=E, можем посчитать потенциальную энергию:

$$E_п = A = F_{тяж.}h = mgh;$$

Пройденный путь l заменим на высоту h, так как потенциальная энергия – энергия тел на высоте. Такими простыми подстановками получим формулу для потенциальной энергии:

$$E_п = mgh.$$

Давайте разберемся, от чего зависит потенциальная энергия тела. Нужно вновь обратиться к формуле. Первая буква в формуле потенциальной энергии – это **масса**. Несложно понять, что чем больше масса тела, тем больше его потенциальная энергия. Например, с третьего этажа на машину, припаркованную возле дома, может упасть лист бумаги – машине ничего не будет. А может упасть кирпич, и последствия будут довольно неприятные.

Ускорение свободного падения (g) вблизи поверхности Земли мы считаем постоянной величиной. Тогда кроме массы на потенциальную энергию тела влияет **высота**. Телефон может упасть со стула, скорее всего на нем не появятся трещины, но если его подкинуть и не поймать, то, вероятно, телефон разобьется. Следовательно, чем выше мы поднимаем тело, тем больше его энергия и больше работа, которую оно может совершить.

! Для определения высоты нужно выбрать нулевой уровень – уровень, на котором мы считаем высоту равной нулю. Например, если эксперимент проводится за столом, удобно считать, что на поверхности стола высота равна нулю. Но, находясь на пятом этаже, может быть удобно выбрать за нулевой уровень поверхность пола на этом этаже.

От выбранного нулевого уровня зависит потенциальная энергия тела, а значит, она не постоянна.

Кроме того, потенциальная энергия – это **энергия** сжатой пружины. Формула для ее подсчета (эта формула выводится из определения работы и закона Гука):

$$E = \frac{kx^2}{2}$$

В этой записи k – коэффициент жесткости пружины, x – изменение длины пружины.

Теперь мы можем перейти к определению второго вида механической энергии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Кинетическая энергия — энергия движущегося тела.

Например, уже упоминалось, что движущийся автомобиль обладает энергией (так как может совершить работу).

Также, к примеру, если бросить мяч – он может разбить окно (совершить работу), поэтому он обладает энергией.

Кинетическая энергия считается по формуле:

$$E_к = \frac{mv^2}{2}$$

Давайте разберемся, от каких факторов зависит кинетическая энергия тела и почему. Во-первых, это снова **масса** тела. Чем больше масса, тем больше энергия.

Например, если с горки катятся пустые санки, то их легко можно поймать, просто вытянув руку. Санки не весят много, а значит, их кинетическая энергия небольшая. Если же на санках с горки летит человек, то не стоит пытаться поймать санки – они тяжелые, обладают большой энергией и могут снести любого на своем пути.

Во-вторых, кинетическая энергия зависит от **скорости**. Вспомним пример с автомобилем. Если автомобиль будет ехать медленно, то во что бы он не врезался, повреждения будут небольшими. Но если он летит с большой скоростью и врезается во что-либо, последствия значительны. Именно поэтому в населенных пунктах ограничивают максимальную скорость движения – чтобы избежать страшных последствий аварий.

! В формуле кинетической энергии скорость измеряется обязательно в м/с.

Полной энергией тела называется сумма его потенциальной и кинетической энергии.

К примеру, некоторое тело подбросили. В некоторой точке полета мысленно остановим его. В этот момент у тела есть потенциальная (так как тело летит на какой-то высоте) и кинетическая энергия (так как тело летит с какой-то скоростью). Мы можем посчитать его полную энергию: для этого посчитаем отдельно потенциальную и кинетическую энергию, а потом сложим их.

Для понимания закона сохранения энергии нам понадобится определение замкнутой системы.

Замкнутой системой будем называть несколько тел, которые с какими-то силами действуют друг на друга, а ничто извне не действует на тела этой системы. Например, если мы рассматриваем замкнутую систему из Земли и человека, то человек действует на Землю с силой тяжести, Земля действует на человека с силой реакции опоры. Все остальные силы (притяжение Луны, давление воздуха, …) мы не учитываем.

Читателю предлагается подумать, существуют ли замкнутые системы в реальном мире?

Теперь мы можем перейти к закону сохранения энергии.

Закон сохранения энергии: полная энергия всех тел в замкнутой системе постоянна.

Проще говоря, энергия без внешнего воздействия никуда не исчезает и ниоткуда не появляется. Она может лишь переходить из одного вида в другой и передаваться между телами системы.

Посмотрим на примере:

Пусть имеется замкнутая система мяч – Земля.

1. **Первоначально мяч поднят на высоту h и не двигается.**

В этой точке кинетическая энергия тела равна нулю, так как оно еще не двигается. Полная энергия тела состоит из его потенциальной энергии:

$$E=E_{П1};$$

2. Мяч отпустили, и он стал падать.

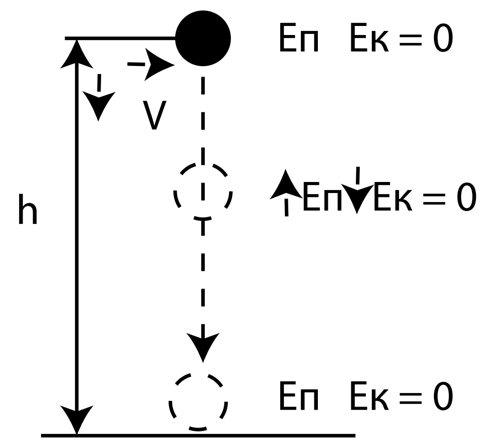
Потенциальная энергия мяча будет при этом уменьшаться, потому что уменьшается высота. Кинетическая энергия будет расти, так как мяч разгоняется под действием силы притяжения. Полная энергия на протяжении полета мяча будет считаться как сумма потенциальной и кинетической энергии мяча, то есть:

$$E=E_{П2}+E_{К2};$$

1. Энергия мяча у поверхности.

Рассмотрим полную энергию мяча за мгновенье до его столкновения с поверхностью Земли. Потенциальная энергия в этой точке равна нулю (так как высота равна нулю). Кинетическая энергия максимальна в этом положении, потому что до этого момента мяч ускорялся, а дальше не будет (земля мешает). Полная энергия считается так:

$$E=E_{К3}.$$



Таким образом, мы рассмотрели преобразования энергии в системе. Кроме того, по закону сохранения энергии можно сказать, что полная энергия системы всегда одинаковая:

$$E_{П1} = E_{П2} + E_{К2} = E_{К3}.$$

Что это значит? Очень часто закон сохранения энергии применяется в решении задач.

- ✓ Мы фиксируем любые 2 точки движения тела.
- ✓ Считаем (выражаем через неизвестные в том числе) полную энергию для каждой точки.
- ✓ Приравниваем их.

Пример. Тело падает с высоты 20 метров. Найдите его скорость вблизи поверхности. (Ускорение свободного падения принять g=10 Н/кг)

! Обычно не так сложно определить 2 точки, в которых мы будем считать полную энергию. Одна из них – в вопросе, а о второй часто что-то сказано в условии задачи.

По условию дана общая высота, так что логично за одну точку взять начало движения.

Заметим сразу, что в начале потенциальная энергия максимальна, а кинетическая равна нулю. Полная энергия:

$$E=E_{П1}=mgh \text{ (h=20 метров по условию);}$$

Необходимо найти скорость вблизи поверхности, поэтому второй раз будем считать полную энергию тела за мгновенье до столкновения с землей. Потенциальная энергия равна нулю (высота = 0 м). Полная энергия состоит только из кинетической:

$$E=E_{к3} \text{ (v нужно найти);}$$

По закону сохранения энергии можем приравнять полные энергии тела в любых двух точках, что мы и сделаем:

Разделим на m с двух сторон, останется одна неизвестная – v, остается лишь найти ее:

; $v^2=2gh$; v=; <u>v= 20м/с.</u>

Ответ: v = 20 м/с.

Закон сохранения энергии часто является только частью решения задачи.

ПРОСТЫЕ МЕХАНИЗМЫ

В физике выделяют простые механизмы, которые упрощают нашу работу: рычаг, наклонная плоскость и блок. Давайте рассмотрим их по отдельности и поймем, чем они удобны.

Рычаг – твердое тело, которое можно вращать вокруг неподвижной точки. Неподвижную точку называют точкой опоры.

Например, детские качели на рисунке ниже по принципу действия являются рычагом.

Если вы пытались когда-нибудь, качаясь на таких качелях, остановиться и продержаться некоторое время, не касаясь земли, то вы пытались добиться **равновесия.**

Далее приведем правило, которое объясняет, когда рычаг находится в равновесии. Но перед этим нужно ввести важные понятия:

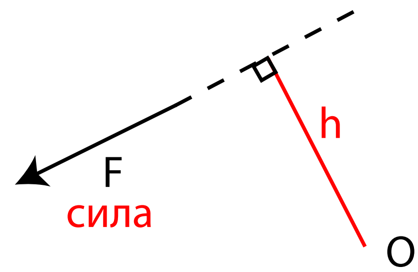
Плечо силы *(l)* – это длина перпендикуляра, опущенная из точки опоры на линию действия силы.

Важно! На рисунке ниже плечом силы F_1 будет отрезок AB, а не AC.

Замечание. На рисунке выше изображен рычаг, потому что это твердое тело, которое может свободно вращаться вокруг неподвижной точки А.

Момент силы (*M*) – это произведение силы на ее плечо:

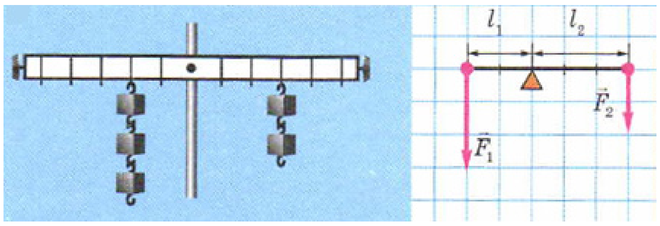
$$M=F*l;$$



Правило моментов: если сумма моментов сил, вращающих рычаг по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, вращающих рычаг против часовой стрелки, то рычаг не вращается (находится в состоянии равновесия).

Это же правило называют **условием отсутствия вращательного движения.**

Пример. На рисунке ниже на рычаг подвешены грузы: слева на расстоянии 2x от точки опоры подвешен груз массой 3m. Справа на расстоянии 3x от точки опоры подвешен груз массой 2m. Определим, находится ли рычаг в состоянии равновесия.



Решение.

Если в условии ничего не говорится про массу рычага, то в задаче мы считаем его массу равной нулю.

Посчитаем моменты сил, действующих на рычаг. По часовой стрелке рычаг может вращать сила тяжести груза справа $F_2 = (2m)*g$. Ее плечо $l_2=3x$. Тогда несложно посчитать момент силы F_2:

$$M_2=F_2*l_2=2mg*3x=6mgx;$$

Точно так же посчитаем момент силы F_1, которая может вращать рычаг против часовой стрелки:

$$M_1=F_1*l_1=3mg*2x=6mgx;$$

Заметим, что условие правила моментов выполняется (M_1=M_2), поэтому рычаг находится в равновесии.

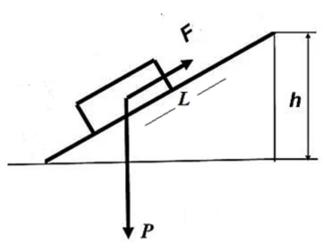
Ответ: Рычаг находится в равновесии.

Еще один простой механизм – **наклонная плоскость.**

Лошадь может долго тянуть телегу, идя по дороге, немного поднимающейся в верх, но по резкому склону горы - нет. Наклонная плоскость нужна, чтобы поднимать тела на некоторую высоту и прикладывать меньшую силу. Но путь по наклонной плоскости будет длиннее. Оказывается, верно следующее отношение:

$$\frac{F}{P}=\frac{h}{L}$$

В данной формуле F – сила, с которой мы тянем тело по наклонной плоскости, P – вес тела, h – высота, на которую мы можем поднять тело по этой наклонной плоскости (высота наклонной плоскости), L – длина наклонной плоскости (путь, пройденный телом, по ней).



То есть чем меньше угол наклонной плоскости, тем меньшая сила нужна, чтобы поднять тело на данную высоту, и тем больший путь придется пройти.

Третий вид простых механизмов – это **блок**.

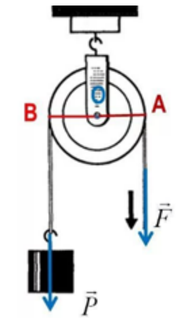
Блок представляет собой колесо с углублением по краю, через которое пропускают веревку:

По типу крепления выделяют 2 типа блоков: неподвижный и подвижный.

Неподвижный блок – блок, ось которого неподвижно закреплена.

Неподвижный блок не дает выигрыша в силе и проигрыша в расстоянии.

Все потому, что он действует точно так же, как рычаг. O – точка опоры (неподвижна), B – точка приложения веса тела (эта сила вращает блок против часовой стрелки), A – точка приложения силы, с которой мы тянем веревку (наша сила вращает блок по часовой стрелке). Плечи двух сил OA и OB равны (так как это радиусы окружности). Раз плечи сил равны и моменты равны (по правилу моментов), то и **силы равны**.



Блок необходим для изменения направления прикладываемой силы. Например, если на крышу высоко здания нужно поднять тяжелый груз, то можно просто привязать к грузу веревку и, стоя на крыше, тянуть веревку вверх, но это неудобно и опасно. А можно закрепить неподвижный блок на крыше, перекинуть через него веревку и тянуть ее вниз, стоя возле здания. Такой способ будет удобнее и безопаснее.

Подвижный блок дает выигрыш в силе в 2 раза и проигрыш в расстоянии тоже в 2 раза. Давайте поймем, почему так происходит.

На этот раз блок тоже будет перемещаться, когда мы будем перемещать груз. Значит, ось блока уже не будет неподвижной. Можно заметить, что в каждый момент подъема блок вращается вокруг точки O. Будем считать ее неподвижной. Теперь будем рассматривать блок как рычаг, вращающийся вокруг неподвижной точки. Вес груза действует на рычаг и может вращать его по часовой стрелке; плечо веса груза – это отрезок OA, равный радиусу окружности. Кроме того, на рычаг действует сила, с которой мы тянем веревку вверх. Плечо этой силы F – это отрезок OB, равный диаметру окружности.

Так как плечо нашей силы в 2 раза больше, а моменты сил должны быть равны, то имеем следующее:

$$M_1=M_2;$$
$$P*r=F*2r;$$
$$\frac{F}{P}=\frac{1}{2}$$

То есть, нам необходимо тянуть веревку вверх с силой, равной половине веса груза, чтобы поднимать его. Но, при этом, если мы хотим поднять груз на 10 метров, то веревку нужно протянуть вверх на 20 метров. Подвижный блок дает проигрыш в расстоянии в 2 раза.

Кроме неподвижного и подвижного блоков, иногда используют их комбинации.

В заключение помните важный закон!

Золотое правило механики: При использовании простых механизмов во сколько раз мы выигрываем в силе, во столько же раз проигрываем в расстоянии. Нельзя получить выигрыш в работе (A=F*l)!

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

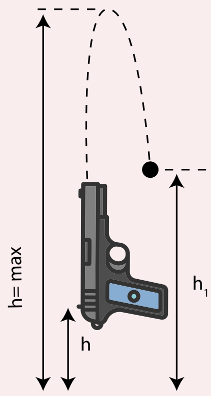
I. Энергия. Закон сохранения энергии

1. Камень падает с высоты 10 метров. На какой высоте его кинетическая энергия равна потенциальной, если считать потенциальную энергию на поверхности Земли равной нулю?

2. Тело массой 2 кг летит со скоростью 10 м/с на высоте 3 метра над поверхностью Земли. Определите полную энергию тела.

3. **(*)** Из пружинного пистолета производят выстрел вертикально вверх. Во время выстрела пистолет находится на уровне 2 метров над землёй. Масса снаряда 200 г, жесткость пружины 15 кН/м, до выстрела она была сжата на 4 см. Определите а) максимальную высоту подъема снаряда; б) высоту, на которой кинетическая энергия снаряда равна потенциальной энергии над поверхностью Земли.

Комментарий. Действуйте по алгоритму, описанному ранее. Обратите внимание на энергию, которой обладает снаряд в самом начале. Используйте закон сохранения энергии.



II. Простые механизмы.

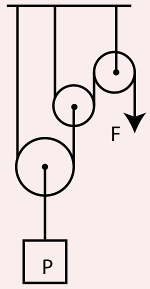
1. Плечи рычага равны 15 см и 25 см. Меньшая из сил, приложенных к концам рычага, равна 15 Н. Определите вторую силу.

2. При помощи подвижного блока рабочий поднимает груз весом 600 Н на высоту 4 метра. Какую силу он прикладывает? Какой длины конец веревки он при этом вытянет?

3. Длина наклонной плоскости в 3 раза больше ее высоты. С какой силой нужно тянуть тело по наклонной плоскости, если его вес составляет 120 Н?

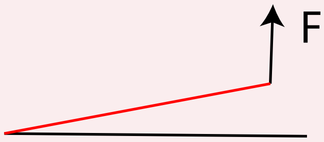
4. К концам рычага приложены силы 6Н и 18 Н. Длина рычага равна 80 см. Определите длину каждого плеча.ф

5. С какой силой нужно тянуть веревку (см. рис.), чтобы поднять груз весом 120 Н?



6. **(*)** С какой силой нужно тянуть вверх за один из концов твердого стержня массой 20 кг, чтобы приподнять его за этот конец?

III. Работа. Мощность.



1. Определите работу, совершаемую при подъеме тела массой 4 кг на 250 см.
2. Какую мощность развивает человек, поднимающий ведро с водой массой 12 кг из колодца глубиной 30 метров за 15 секунд?
3. Лошадь тянет телегу, прилагая силу 350 Н. За 1 минуту она совершает работу 42 кДж. С какой скоростью движется лошадь?

4. Автомобиль едет с постоянной скоростью 20 м/с. При этом двигатель развивает мощность 10 кВт. Какова сила тяги автомобиля?

ДАВЛЕНИЕ. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. СООБЩАЮЩИЕСЯ СОСУДЫ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЕСС. СИЛА АРХИМЕДА

Читателю известно понятие силы. Вспомним, что **сила** – мера взаимодействия тел. Но как понять, насколько большое значение играет сила во взаимодействия? Например, человек стоит на снегу. Если человек в лыжах, то он не проваливается. Но если он будет стоять в ботинках, то провалится. Значит ли это, что человек в двух случаях действует на снег разной силой? Нет, вес человека не меняется, а значит, сила действия на снег в двух случаях одинаковая. Так в чем же дело? Чтобы разобраться в этом, введем понятие давления.

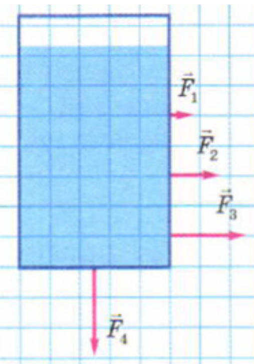
Давление (P) – это отношение некоторой силы, действующей на площадь S к этой площади. Давление измеряется в паскалях (Па). 1 паскаль – это давление, которое оказывает сила 1 Н, действуя на площадь 1 м^2.

То есть давление – это величина, которая показывает, какая сила действует на единицу площади, как действие силы распределяется. На действие силы мы можем влиять. Чтобы увеличить давление, можно увеличить силу или уменьшить площадь. Мы можем резать острым ножом, потому что площадь нашего действия маленькая – лезвие. Точно так же мы шьем иглой - ее площадь маленькая и с помощью нее можно оказывать большое давление. Теперь мы можем вернуться к вопросу о лыжах. У лыж, в отличии от подошв ботинок, большая площадь, значит сила распределяется. Давление на снег, оказываемое человеком, меньше, когда человек в лыжах. Поэтому он не проваливается.

Интересно. Девушка на шпильках оказывает большее давление на асфальт, чем асфальтовый каток.

Жидкости и газы тоже могут оказывать давление. Но их давление немного другое. Читателю известно, что твердое тело имеет жесткую кристаллическую структуру. Все атомы в **твердом теле** связаны и редко меняются местами. Поэтому давление твердых тел передается по прямой линии – по цепочке, каждый атом «толкает» следующий.

В **жидкостях** и **газах** атомы могут свободно перемещаться. Представьте бильярд. В аккуратно построенный из шаров треугольник летит еще один шарик. Что произойдет? Все шарики, конечно же, разлетаются во все стороны, сталкиваются друг с другом и со стенками стола. Точно так же ведут себя атомы жидкостей и газов. Их движение обычно называют хаотичным (от слова «хаос» - беспорядок, отсутствие порядка). Поэтому давление в жидкостях и газах передается во все стороны, потому что это многочисленные удары атомов и молекул о стенки сосуда (комнаты).



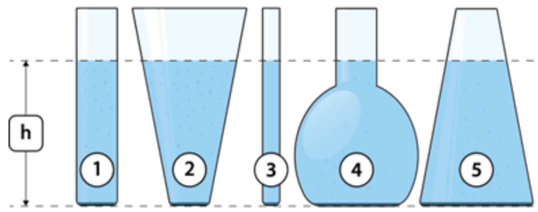
Впервые о передаче давления в жидкостях и газах заговорил **Блез Паскаль**. Он провел опыт для проверки этого факта. Паскаль взял цилиндр с поршнем внутри (шприц), на конце которого был шар с отверстиями с разных сторон. В цилиндр он поместил жидкость и сжал ее поршнем. После этого Паскаль заметил, что жидкость выливается из всех отверстий, причем примерно с одинаковой силой (немного меньше выливалось сверху из-за силы притяжения). Точна такой же опыт Паскаль провел и для газов (он использовал дым). **Вывод:** давления в жидкостях и газах передается во все точки жидкости и газа без изменений **(закон Паскаля).**

Для вывода формулы давления в жидкостях воспользуемся определением:

$$\mathrm{P} = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{pVg}{S} = \frac{pShg}{s} = pgh;$$

Комментарий. Для вывода формулы мы записали определение давления, заменили силу на силу тяжести (так как она – причина давления), записали массу как произведение плотности и объема (это верно по определению плотности), записали объем как произведение площади основания на высоту (для простоты формулы будем считать, что сосуд с жидкостью имеет форму цилиндра) и сократили площадь.

Заметим, давление жидкостей зависит только от **высоты** и **вида** жидкости. Площадь поверхности не уменьшает и не увеличивает давление в этом случае! Например, во всех сосудах ниже давление воды на дно будет одинаковым, так как высота воды одинакова!



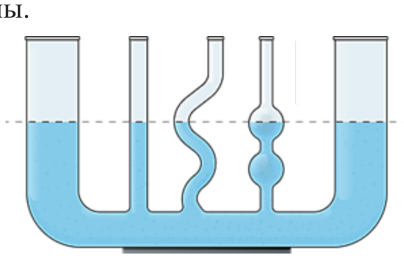
Теперь мы можем ввести понятие сообщающихся сосудов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Сообщающиеся сосуды – это сосуды, соединенные друг с другом так, чтобы жидкость могла свободно перетекать между ними.

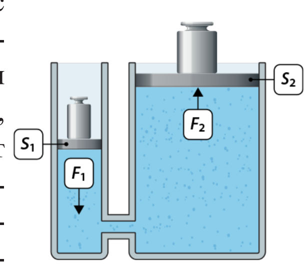
Несложно понять, что жидкость перестанет перетекать между сосудами только тогда, когда давление в них будут одинаковыми. Вспомним, что давление жидкости зависит от высоты и вида жидкости. Поэтому. Если жидкость одна, то ее уровень в каждом из сообщающихся сосудов будет **одинаковым**.

В задачах на сообщающиеся сосуды нужно просто посчитать давление в любом из них — все они будут равны.



Одним из применений сообщающихся сосудов является **гидравлический пресс**.

Гидравлический пресс состоит из двух цилиндрических сообщающихся сосудов и двух поршней, которые свободно могут двигаться внутри этих сосудов. Внутри гидравлического пресса между сосудами может перемещаться жидкость.



Принцип действия: по закону Паскаля давление в каждой точке жидкости внутри гидравлического пресса одинаково, а значит и давление на каждый из поршней тоже одинаково. Запишем это, используя определение давления:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Теперь умножим обе части уравнения на $\frac{S_1}{S_2}$:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

Таким образом, во сколько раз больше площадь второго поршня, во столько же раз больше сила действия второго поршня.

Важно. Формулу выше используйте при решении задач про гидравлический пресс.

Гидравлический пресс – это механизм для многократного увеличения силы. Он, например, используется при изготовлении сливочного масла и многих деталей в машинном производстве.

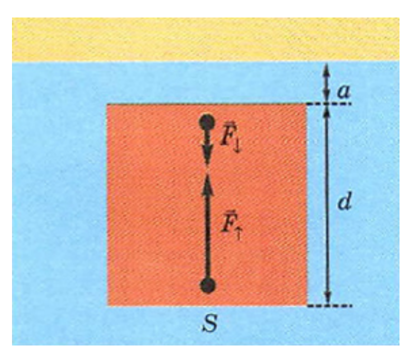
Еще одна важная тема, которая напрямую следует из давления жидкости, это сила Архимеда. Для того, чтобы понять, что это за сила, давайте **рассмотрим пример**.

Многие тела всплывают, если их погрузить в воду. Из знакомых ним сил на них действует только сила тяжести, но она же «тянет» все тела к Земле. Давайте разберемся, что же еще действует на тела в жидкости.

Пусть для простоты у нас есть кубик, погруженный в жидкость. Значит, на этот кубик давит вода. Читатель уже знает, что давление воды будет зависеть от глубины (P=pgh). Боковые грани кубика находятся на одинаковой глубине, поэтому давление на них одинаковое. И давление на эти грани действует в разные стороны. Поэтому равнодействующая этих сил будет равна нулю (потому что, по сути, наш кубик с боковых сторон с равной силой сжимает вода).

Вспомним. Равнодействующая сила – это сумма нескольких сил.

Остались верхняя и нижняя грани. Давление на верхнюю грань посчитаем по формуле давления в жидкостях:



$$P_в = pga$$

Точно так же посчитаем давление воды на нижнюю грань кубика и сразу раскроем скобки:

$$P_н = pg(a+d)=pga+pgd;$$

Теперь несложно понять, что давление на нижнюю грань кубика больше, чем на верхнюю. Сложим эти давления как вектора, результирующее давление будет действовать на кубик и «толкать» его вверх:

$$P_р= (pga+pgd)-pga=pgd;$$

Далее вспомним формулу давления и то, что посчитанное нами результирующее давление действует на площадь S грани кубика:

$$\frac{F}{S} = pgd$$

$$F = pgdS$$

Если посмотреть внимательно на рисунок, то можно понять, что произведение S и d – это произведение основания кубика на его высоту, то есть его объем. Таким образом, мы получили итоговую формулу для **выталкивающей силы (или силы Архимеда):**

$$F=pgV$$

Замечание 1. В этой формуле **p** – это не плотность тела, а плотность жидкости.

Замечание 2. Сила Архимеда действует только на погруженную в жидкость часть тела, поэтому если тело погружено не полностью, то в формуле будет использоваться не объем всего тела, а объем его погруженной части.

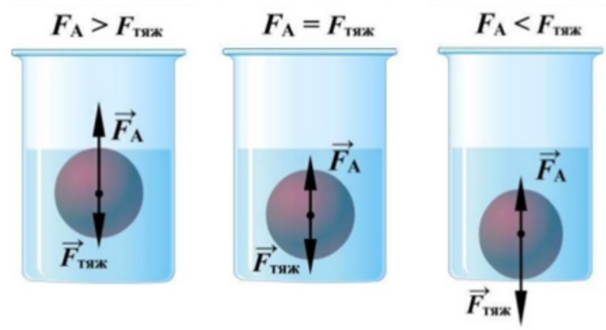
Замечание 3. В газах тоже действует сила Архимеда (именно поэтому летают гелиевые воздушные шары, и не только). Но в задачах о силе Архимеда в жидкостях мы **не будем учитывать** силу Архимеда в газах, так как она очень маленькая по сравнению с выталкивающей силой жидкостей.

Так происходит из-за того, что плотности газов обычно в тысячи раз меньше, чем плотности жидкостей.

Сила Архимеда (по сравнению с силой тяжести) может принимать самые разные значения. С этим связано то, всплывает тело или тонет.

УСЛОВИЯ ПЛАВАНИЯ ТЕЛ

На погруженное в жидкость тело действуют сила тяжести и сила Архимеда.



Если сила тяжести больше, чем сила Архимеда, то тело будет тонуть (так как вниз его «тянет» сильнее, чем «толкает» вверх). При этом через неравенство сил тяжести и Архимеда мы можем получить неравенство для плотности тела и плотности жидкости в этом случае:

$$F_A < F_{тяж};$$
$$p_ж gV < mg;$$
$$p_ж gV < p_т gV;$$
$$\mathbf{p_ж < p_т.}$$

Если же сила тяжести меньше силы Архимеда, то несложно понять, что тело будет всплывать. Для плотностей получим такое неравенство:

$$F_A > F_{тяж};$$
$$p_ж gV > mg;$$
$$p_ж gV > p_т gV;$$
$$\mathbf{p_ж > p_т.}$$

Если сила Архимеда и сила тяжести равны (уравновешивают друг друга), то равнодействующая сила равна нулю (тело просто сжимают сверху и снизу с равной силой). Поэтому тело не будет всплывать или тонуть. Оно просто «зависнет» в жидкости и будет плавать внутри нее.

$$F_A = F_{тяж};$$
$$p_ж gV = mg;$$
$$p_ж gV = p_т gV;$$
$$\mathbf{p_ж = p_т.}$$

Таким образом, состояние тела в жидкости (всплывает, тонет или плавает) зависит только плотностей тела и жидкости.

Теперь мы можем перейти к использованию теории при решении задач.

Пример. Цистерна, наполненная нефтью (p=800кг/м^3) имеет глубину 4 метра. Каково давление на ее дно?

Решение. Используем формулу для подсчета давления в жидкости и подставим значения из условия:

$P = pgh$=800 кг/м^3 *10 Н/кг*4м=32000Па=3,2*10^4 Па

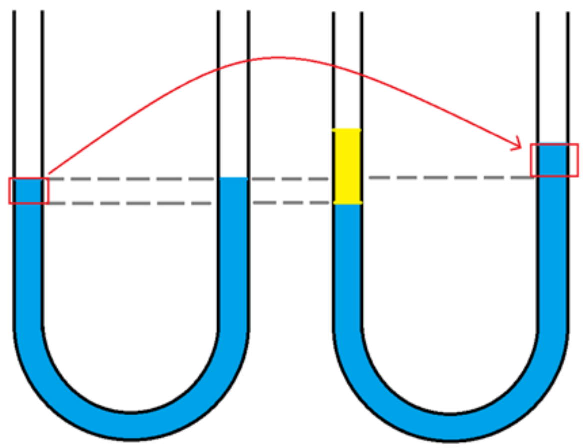
Ответ: давление на дно равно 3,2*10^4 Па.

Пример. В левое колено U-образной трубки с водой долили h = 20 см керосина. На сколько поднимется уровень воды в правом колене? ($p_в$=1000кг/м^3; $p_к$=800кг/м^3)

Решение. Уже упоминалось, что давление в сообщающихся сосудах одинаковое. А правое и левое колена U-образной трубки и есть сообщающиеся сосуды. Давайте поймем, что произойдет.

Когда мы в левое колено (сверху) доливаем керосин, давление в этом колене увеличивается. Раз давления в сообщающихся сосудах не равны, то часть жидкости должно перетечь из левого колена в правое. Она будет течь до тех пор, пока давления снова не сравняются.

Замечание. Так как после добавления керосина в сообщающихся сосудах жидкости стали не одинаковыми, то и высота жидкостей не должна быть одинаковая.



Пусть из левого колена в правое перетекла вода, столбик которой имеет высоту h_1.

Пусть первоначально в двух частях U-образной трубки давления были равны P.

После доливания керосина из левого колена утекла часть воды, давление которой $p_вgh_1$, и добавился керосин, давление которого $p_кgh$. Тогда новое давление в левом колене будет считаться так:

$$P_1 = P-p_вgh_1+p_кgh;$$

В правое колено перетекла вода, поэтому новое давление там считается так:

$$P_2 = P+p_вgh_1;$$

Так как сосуды сообщающиеся, то:

$$P_1 = P_2;$$

$$\underline{P}-p_вgh_1+p_кgh = \underline{P}+p_вgh_1$$

Приведем подобные слагаемые, сократим общий множитель в них и выразим неизвестную:

$$p_кgh = 2p_вgh_1;$$
$$p_кh = 2p_вh_1;$$
$$h_1 = \ = 0,08\ (м);$$

Ответ: в правом колене уровень воды поднялся на 8 см.

Пример. Цинковый (p = 7200 кг/м^3) шар весит в воздухе 3,6Н, а в воде – 2,8Н. Сплошной это шар или он имеет полость? Если не сплошной, то определите объем полости.

Решение. Что такое вес в воде? Если тело в жидкости имеет вес, значит, оно там тонет. Но вес будет меньше, чем в воздухе, за счет действия выталкивающей силы. Поэтому вес в воде считается так:

$$P_2=P_1-F_A;$$

Значит, мы можем найти силу Архимеда:

$$F_A = P_1-P_2 = 3{,}6Н-2{,}8Н = 0{,}8Н;$$

Вспомним формулу силы Архимеда: $F=p_жgV$

Несложно понять, что в этой формуле нам неизвестен только объем цинкового шара. Найдем его:

$$Vш = \frac{F_A}{gp_ж} = \frac{0.8}{10*1000} = 8*10^{-5}(м^3)$$

Мы получили **объем всего шара.**

Мы можем посчитать объем привычным способом $(\frac{m}{p} = \frac{P}{g*p})$, но давайте поймем, что это будет другой объем. Если в шаре есть пустое место, то оно ничего не весит. А значит, если мы будем делить вес шара на плотность цинка, то мы найдем только объем цинка (объем шара – объем полости).

$$V_ц = \frac{P}{gp_ж} = \frac{3.6}{10*7200} = 5*10^{-5}\ (м^3)$$

Раз объемы твердой части и всего шара – разные, то шар имеет полость, причем ее объем:

$$V_п = V_ш - V_ц = 3*10^{-5}\ (м^3)$$

Ответ: шар имеет полость, объем которой составляет

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Давление

1. Какое давление оказывает на снег лыжник, масса которого 80 кг, если ширина каждой лыжи 10 см, и длина – 2 метра.

2. Воздух внутри надутого резинового мяча на каждый $см^2$ действует силой 15 Н. Каково давление воздуха внутри мяча?

3. Спортсмен массой 80 кг скользит на коньках. Определите ширину лезвия коньков, если их длина 40 см и давление, которое оказывает спортсмен на лед равно 200 000 Па.

4. На сколько увеличится давление на дно мензурки, если в нее долить 60 грамм воды? Дно мензурки имеет площадь 12 $см^2$.

5. Факир решил закалять свою волю и спать на гвоздях (остриями вверх). Оцените, из скольких гвоздей должно состоять ложе, если масса факира 70 кг, площадь острия каждого гвоздя – 0,1 $мм^2$, а человеческая кожа может выдержать давление 3 МПа.

II. Гидравлический пресс

1. Площадь большего поршня гидравлического пресса равна 0,2 м2, а площадь меньшего составляет 200 см2. Какой выигрыш в силе (во сколько раз) можно получить с помощью этого гидравлического пресса?

2. Площади поршней гидравлического пресса относятся как 1:7. На малый поршень действует сила 700 Н. Какую силу может оказывать при этом больший поршень?

3. Малый поршень гидравлического пресса площадью 2 см2 под действием некоторой силы опустился на 16 см. Площадь большего поршня – 8 см2. Определите вес груза, поднятого поршнем, если на малый поршень действовала сила 200 Н. На какую высоту был поднят груз? (не забудьте, что жидкость не меняет своего объема – используйте это)

III. Сила Архимеда. Условия плавания тел

1. Сосуд заполнен тремя слоями несмешивающихся жидкостей: керосин (800 кг/м3), ртуть (13 600 кг/м3) и вода. В каком порядке они расположены, считая с низу вверх? Какое давление на дно они оказывают, если толщина каждого слоя 2 см?

2. На сплошное тело массой 1 кг, погруженное в воду действует сила Архимеда, величиной 8 Н. Какова плотность тела?

3. Груз объемом 500 $см^3$ подвешен к динамометру, который показывает 35 Н. Что покажет динамометр, если груз опустить в керосин?

4. Можно ли считать, что корона сделана из чистого золота, если ее вес в воздухе составляет 20 Н, а вес в воде – 18,7 Н?
5. Человек, массой 60 кг стоит на плоской льдине. Какова минимальная масса льдины, если она не полностью погружена в воду

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова Математика 7 класс Часть 3. “Ювента”, 2011.
2. А. Г. Мордкович Алгебра 7 класс Часть 1. 17 изд. Москва: “Мнемозина”, 2013.
3. Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова Математика 7 класс Часть 2. “Ювента”, 2011.
4. А. Г. Мордкович Алгебра 7 класс Часть 1. 17 изд. Москва: “Мнемозина”, 2013.
5. М.И.Сканави Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы (с решениями). Кн. 1. Алгебра. 6 изд. 1992.
6. А.Г.Мордкович Алгебра 7 класс. 17 изд. Москва: Мнемозина, 2013.
7. Геометрия. 7-9 классы. / Атанасян, Бутузов, Кадомцев, Позняк, Юдина, Под ред. А.Н. Тихонова. 20-е изд. Москва: Просвещение, 2010.
8. Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы. 2 изд. Москва: Просвещение, 2014.
9. Кирик Л. А. Физика. Разноуровневые самостоятельные и контрольные работы. 7 класс. Москва: Илекса, 2014.
10. Генденштейн Л. Э., Кайдалов А. Б. Физика. 7 класс. 3 изд. Москва: Мнемозина, 2012.
11. Волков В. А., Полянский С. Е. Универсальные поурочные разработки по физике. 2 изд. Москва: ВАКО, 2010.


x+y=z