

Otimização linear de portfólio de ações

Projeto para a UC de Otimização Linear - Unifesp 1/2020

Diego de Almeida Miranda - 133603

Felipe Hilário - 143417

Maio 2021

1 Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo que apresente soluções ótimas de investimento em ações no mercado financeiro através de modelagem matemática, analisando os custos fixos dos ativos, a taxa média de retorno no investimento e outras variáveis. Compreender o escopo e a dificuldade existente em obter métodos lineares adequados para a descrição destas variáveis e verificar se o modelo linear é realmente adequado para tratar desse assunto. Uma vez construído este modelo, podemos utilizar valores antigos de ativos para avaliar se o modelo obteve sucesso em seu propósito comparando-o com o real valor dos ativos após um período de tempo determinado.

2 Introdução

2.1 Motivação

Todo investidor se preocupa continuamente em como investir da melhor forma possível no mercado financeiro. Investir em ativos na bolsa de valores se mostra como uma atividade que tradicionalmente envolve o investimento de montantes maiores de capital que outras áreas do mercado, altos riscos de perda, altas taxas de retorno do capital investido ao longo de intervalos de longo, média e curto prazo. Nota-se, porém, que nesta área de investimento muitos fatores ambientais, externos às próprias variáveis do mercado, estão intimamente relacionados às quedas e subidas vertiginosas e inesperadas pelos acionistas. Assim, a predição do comportamento das ações costuma ser um trabalho para além das ciências exatas, sendo necessário que haja sempre análises sociopolíticas para um entendimento mais robusto do problema. É natural que os investidores construam um portfólio de ações de maneira que não dependam de um único ativo para garantir o sucesso no investimento, sendo essa a maneira mais segura de realizar os investimentos neste campo. Apesar disso, podemos simular cenários mais simples que possibilitam a otimização dado um determinado estado do mercado financeiro, o que nos ajuda a compreender melhor o comportamento das ações no mercado financeiro e, além disso, nos ajuda a compreender as limitações e possibilidades da utilização de modelos de otimização linear na descrição de um problema real.

2.2 Objetivos

Desconsiderando fatores externos, ou que são além do escopo deste trabalho, podemos selecionar atributos presentes no mercado financeiro que descrevem de forma simplificada as relações entre o investimento inicial e o retorno de capital. A busca pela seleção adequada de variáveis e a construção mais adequada do modelo se faz um problema desafiador, visto que pessoas ao redor de todo o mundo se debruçam diariamente sobre este tema sem que haja uma única maneira ótima de resolvê-lo. O objetivo principal é realizar a documentação e descrição do modelo desenvolvido para este problema, utilizando as ferramentas e argumentos aprendidos durante todo o curso.

3 Metodologia

3.1 Os ativos selecionados

A princípio foram escolhidas 15 ações atualmente disponíveis na bolsa de valores brasileira, conhecida como B3, para serem utilizadas na otimização do modelo. As ações são divididas em 5 principais setores, sendo eles de *Energia*, *Banco*, *Fundos Imobiliários*, *Saúde* e *Bens Industriais*, sendo 3 ações para cada um desses setores descritos. Os dados que descrevem cada um desses ativos, como preço atual, rendimento anual e variância diária, foram obtidos acessando o site *status invest*: statusinvest.com.br, sendo eles obtidos no dia 09/08/2021.

Um dos pontos principais a serem levados em consideração ao decidir se devemos ou não comprar determinado ativo é ter a consciência do risco de investir neste ativo. De forma genérica, quanto maior o risco, maior chance de grandes retornos financeiros e, de maneira análoga, quanto menor o risco, menores serão os retornos. A maneira mais clássica de definir o risco de uma ação é tomando a variância média(MV), portanto, quanto maior a variância no preço de uma ação ao longo do tempo, nos mostra uma empresa com grande volatilidade e grandes alterações de preço, então maior será o risco em investir neste ativo. A variância média foi calculada tomando a variância diária do valor do ativo nos últimos 30 dias. A fim de se obter uma normalização dos dados, foi feita uma normalização *minmax*, onde a maior variância dos nossos conjuntos de dados é definida como 1 e a menor variância é tomada como valor 0. Portanto, o ativo com menor variância média do ultimo mês é tomada como a ação mais segura a ser investida.

Os dados que descrevem cada ativo pode ser visualizado na tabela abaixo:

Ativo	Setor	Parâmetro	Preço atual	Rendimento anual	MV
TRPL4	Energia	x1	24,55	20%	0,1
EGIE3	Energia	x2	38,10	10%	0,3
TAEE3	Energia	x3	13,33	25%	0,1
ITUB3	Banco	x4	28,20	20%	0,3
BBAS3	Banco	x5	31,86	13%	0,2
BBDC3	Banco	x6	20,44	18%	0,2
BCFF11	FII	x7	75,14	8%	0,5
IRDM11	FII	x8	117,29	13%	1
HCTR11	FII	x9	123,10	19%	0,95
HYPE3	Saúde	x10	36,751	12%	0,35
FLRY3	Saúde	x11	23,09	9%	0,25
ODPV3	Saúde	x12	13,55	10%	0,1
EMBR3	Bens Industriais	x13	19,01	9%	0,25
GOLL4	Bens Industriais	x14	19,85	10%	0,3
WEG4	Bens Industriais	x15	36,34	10%	0,35

Tabela 1: Atributos de cada ativo utilizado no modelo.

3.2 A construção do modelo

Considere que possuímos n ações $S(i = 1, 2, \dots, n)$ disponíveis no mercado financeiro (simulado por nós). Podemos supor que tenhamos um montante M de dinheiro disponível para serem investidos nessas ações. É natural que analisemos as n ações e levemos em conta o rendimento anual de S_i que pode ser definido como $r_i(\%)$, e além disso também iremos considerar o risco de perda, a qual já foi definida como sendo o MV, representada por $q_i(\%)$. Por questão de simplificação, consideramos que não serão cobrados valores de transação na compra desses ativos. Por fim, considere $p_i(R\$)$ o valor da ação no momento da consulta.

A primeiro momento, imaginemos um cliente que quer maximizar o seu lucro, sem se importar com o risco de cada ação. Entretanto, para evitar grandes perdas, quer comprar no mínimo 5 ações de cada empresa da bolsa e também não quer alocar mais do que 25% de seu capital em um dos setores. O seu investimento será um aporte de R\$ 20.000 e o deixará parado por 5 anos. Podemos definir o seguinte modelo

Função Objetivo:

$$\max(F(\mathbf{x})) = \max\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i (1 + r_i)\right)$$

Condições de restrição:

Restrição para que a soma das ações não ultrapasse M:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$$

Restrições para garantir boa distribuição entre as ações:

$$\sum_{i=1}^3 p_i x_i \leq \frac{M}{5} = 5000 \text{ //Energia}$$

$$\sum_{i=4}^6 p_i x_i \leq \frac{M}{5} = 5000 \text{ //Banco}$$

$$\sum_{i=7}^9 p_i x_i \leq \frac{M}{5} = 5000 \text{ //FII}$$

$$\sum_{i=10}^{12} p_i x_i \leq \frac{M}{5} = 5000 \text{ //Saúde}$$

$$\sum_{i=13}^{15} p_i x_i \leq \frac{M}{5} = 5000 \text{ //Bens Industriais}$$

Utilizando Python3 e a biblioteca *Pulp*, podemos reproduzir o modelo da seguinte maneira:

```
1 #Investidor 1
2
3 prob = pulp.LpProblem('Escolha de investimentos', pulp.LpMaximize)
4
5 #variaveis
6
7 x1 = pulp.LpVariable('TRPL4', lowBound = 5, cat = 'Integer')
8 x2 = pulp.LpVariable('EGIE3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
9 x3 = pulp.LpVariable('TAEE3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
10 x4 = pulp.LpVariable('ITUB3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
11 x5 = pulp.LpVariable('BBAS3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
12 x6 = pulp.LpVariable('BDBC3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
13 x7 = pulp.LpVariable('BCFF11', lowBound = 5, cat = 'Integer')
14 x8 = pulp.LpVariable('IRDM11', lowBound = 5, cat = 'Integer')
15 x9 = pulp.LpVariable('HCTR11', lowBound = 5, cat = 'Integer')
16 x10 = pulp.LpVariable('HYPE3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
17 x11 = pulp.LpVariable('FLRY3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
18 x12 = pulp.LpVariable('ODPV3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
19 x13 = pulp.LpVariable('EMBR3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
20 x14 = pulp.LpVariable('GOLL4', lowBound = 5, cat = 'Integer')
21 x15 = pulp.LpVariable('WEG3', lowBound = 5, cat = 'Integer')
22
23 #funcao objetivo
24
25 F0 = 24.55*x1*((1+0.2)**5)+38.1*x2*((1+0.1)**5)+13.33*x3*((1+0.25)**5)+28.2*x4*((1+0.2)**5)
26     +31.86*x5*((1+0.13)**5)+20.44*x6*((1+0.18)**5)+75.14*x7*((1+0.08)**5)+117.29*x8*((1+0.13)
27     **5)+123.1*x9*((1+0.19)**5)+36.75*x10*((1+0.12)**5)+23.09*x11*((1+0.09)**5)+13.55*x12
28     *((1+0.1)**5)+19.01*x13*((1+0.09)**5)+19.85*x14*((1+0.1)**5)+36.34*x15*((1+0.1)**5)
29
30 prob += F0
31
32 #Restricoes
33
34 MaxRenda = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3+28.2*x4+31.86*x5+20.44*x6+75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
35     +36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12+19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
36 prob += (MaxRenda <= 20000)
37
38 QntEnergia = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3
39 prob += (QntEnergia <= 5000)
40
41 QntBanco = 28.2*x4+31.86*x5+20.44*x6
42 prob += (QntBanco <= 5000)
43
44 QntFI = 75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
45 prob += (QntFI <= 5000)
```

```

41 QntSaude = 36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12
42 prob += (QntSaude <= 5000)
43
44
45 QntIndus = 19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
46 prob += (QntIndus <= 5000)
47
48 optimization_result = prob.solve()
49
50 assert optimization_result == pulp.LpStatusOptimal

```

A partir da execução do código acima foi obtido o seguinte resultado:

Ativo	Nº ações
TRPL4	5.0
EGIE3	5.0
TAE3	351.0
ITUB3	168.0
BBAS3	5.0
BBDC3	5.0
BCFF11	5.0
IRDM11	5.0
HCTR11	32.0
HYPE3	123.0
FLRY3	5.0
ODPV3	7.0
EMBR3	5.0
GOLL4	5.0
WEG4	5.0

Tabela 2: Primeiro resultado.

E no final desses 5 anos a previsão, segundo as nossas análises é que ela tenha um montante final de R\$ 47.135,06.

Um investidor quer investir R\$ 10.000 em ações de forma a obter o maior lucro possível tendo 20% do capital em cada setor (imagine que você possa comprar frações de ações) e no final ele quer saber qual foi o risco que ele correu e também qual foi o total de dinheiro no final de 10 anos. Podemos definir as novas restrições da seguinte maneira:

Condições de restrição:

Restrição para que a soma das ações não ultrapasse M:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M = 10000$$

Restrições para garantir boa distribuição entre as ações:

$$\sum_{i=1}^3 p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Energia}$$

$$\sum_{i=4}^6 p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Banco}$$

$$\sum_{i=7}^9 p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //FII}$$

$$\sum_{i=10}^{12} p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Saúde}$$

$$\sum_{i=13}^{15} p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Bens Industriais}$$

Veja a seguinte implementação em Python:

```
1 #Investidor 2
2
3 prob = pulp.LpProblem('Escolha de investimentos', pulp.LpMaximize)
4
5 #variaveis
6
7 x1 = pulp.LpVariable('Transmissao Paulista (TRPL4)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
8 x2 = pulp.LpVariable('Engie (EGIE3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
9 x3 = pulp.LpVariable('Taesa (TAEE3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
10 x4 = pulp.LpVariable('Itau (ITUB3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
11 x5 = pulp.LpVariable('Banco do Brasil (BBAS3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
12 x6 = pulp.LpVariable('Bradesco (BBDC3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
13 x7 = pulp.LpVariable('BCFF11', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
14 x8 = pulp.LpVariable('IRDM11', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
15 x9 = pulp.LpVariable('HCTR11', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
16 x10 = pulp.LpVariable('Hypera farma (HYPE3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
17 x11 = pulp.LpVariable('Fleury (FLRY3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
18 x12 = pulp.LpVariable('OdontoPrev (ODPV3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
19 x13 = pulp.LpVariable('Embraer (EMBR3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
20 x14 = pulp.LpVariable('Gol (GOLL4)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
21 x15 = pulp.LpVariable('Weg (WEG3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
22
23 #funcao objetivo
24
25 F0 = 24.55*x1*((1+0.2)**10)+38.1*x2*((1+0.1)**10)+13.33*x3*((1+0.25)**10)+28.2*x4*((1+0.2)
    **10)+31.86*x5*((1+0.13)**10)+20.44*x6*((1+0.18)**10)+75.14*x7*((1+0.08)**10)+117.29*x8
    *((1+0.13)**10)+123.1*x9*((1+0.19)**10)+36.75*x10*((1+0.12)**10)+23.09*x11*((1+0.09)**10)
    +13.55*x12*((1+0.1)**10)+19.01*x13*((1+0.09)**10)+19.85*x14*((1+0.1)**10)+36.34*x15
    *((1+0.1)**10)
26 prob += F0
27
28 #Restricoes
29
30 MaxRenda = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3+28.2*x4+31.86*x5+20.44*x6+75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
    +36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12+19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
31 prob += (MaxRenda <= 10000)
32
33 RiscoTotal = 0.1*x1+0.3*x2+0.1*x3+0.3*x4+0.2*x5+0.2*x6+0.5*x7+1*x8+0.95*x9+0.35*x10+0.25*x11
    +0.1*x12+0.25*x13+0.3*x14+0.35*x15
34
35 QntEnergia = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3
36 prob += (QntEnergia == 2000)
37
38 QntBanco = 28.2*x4+31.86*x5+20.44*x6
39 prob += (QntBanco == 2000)
40
41 QntFI = 75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
42 prob += (QntFI == 2000)
43
44 QntSaude = 36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12
45 prob += (QntSaude == 2000)
46
47 QntIndus = 19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
48 prob += (QntIndus == 2000)
49
50 #Resultado
51 print (prob)
52
53 optimization_result = prob.solve()
54
55 assert optimization_result == pulp.LpStatusOptimal
```

A partir da execução do código acima foi obtido o seguinte resultado:

Ativo	Nº ações
TRPL4	0.0
EGIE3	0.0
TAE3	150.037
ITUB3	70.922
BBAS3	0.0
BBDC3	0.0
BCFF11	0.0
IRDM11	0.0
HCTR11	16.247
HYPE3	54.422
FLRY3	0.0
ODPV3	0.0
EMBR3	0.0
GOLL4	100.756
WEG4	0.0

Tabela 3: Primeiro resultado.

No final desses 10 anos de investimentos a pessoa teria um montante final de R\$53.798,47, assumindo um risco total de 100,99 pontos na escala que utilizamos.

Agora, imaginemos que esse mesmo investidor queira investir da mesma maneira, entretanto maximizando todos os riscos. Para isso, devemos definir uma nova função objetivo:

Função Objetivo:

$$\max(F(\mathbf{x})) = \max\left(\sum_{i=1}^n q_i x_i\right)$$

Condições de restrição:

Restrição para que a soma das ações não ultrapasse M:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M = 10000$$

Restrições para garantir boa distribuição entre as ações:

$$\sum_{i=1}^3 p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Energia}$$

$$\sum_{i=4}^6 p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Banco}$$

$$\sum_{i=7}^9 p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //FII}$$

$$\sum_{i=10}^{12} p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Saúde}$$

$$\sum_{i=13}^{15} p_i x_i = 0.2M = 2000 \text{ //Bens Industriais}$$

Abaixo segue a implementação utilizando a biblioteca Pulp:

```

1
2 #Investidor 3
3
4 prob = pulp.LpProblem('Escolha de investimentos', pulp.LpMaximize)
5
6 #variaveis
7
8 x1 = pulp.LpVariable('Transmissao Paulista (TRPL4)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
9 x2 = pulp.LpVariable('Engie (EGIE3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
10 x3 = pulp.LpVariable('Taesa (TAEE3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
11 x4 = pulp.LpVariable('Itau (ITUB3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
12 x5 = pulp.LpVariable('Banco do Brasil (BBAS3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
13 x6 = pulp.LpVariable('Bradesco (BBDC3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
14 x7 = pulp.LpVariable('BCFF11', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
15 x8 = pulp.LpVariable('IRDM11', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
16 x9 = pulp.LpVariable('HCTR11', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
17 x10 = pulp.LpVariable('Hypera farma (HYPE3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
18 x11 = pulp.LpVariable('Fleury (FLRY3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
19 x12 = pulp.LpVariable('OdontoPrev (ODPV3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
20 x13 = pulp.LpVariable('Embraer (EMBR3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
21 x14 = pulp.LpVariable('Gol (GOLL4)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
22 x15 = pulp.LpVariable('Weg (WEG3)', lowBound = 0, cat = 'Continuous')
23
24 #funcao objetivo
25
26 F0 = 0.1*x1+0.3*x2+0.1*x3+0.3*x4+0.2*x5+0.2*x6+0.5*x7+1*x8+0.95*x9+0.35*x10+0.25*x11+0.1*x12
    +0.25*x13+0.3*x14+0.35*x15
27 prob += F0
28
29 LucroTotal = 24.55*x1*((1+0.2)**10)+38.1*x2*((1+0.1)**10)+13.33*x3*((1+0.25)**10)+28.2*x4
    *((1+0.2)**10)+31.86*x5*((1+0.13)**10)+20.44*x6*((1+0.18)**10)+75.14*x7*((1+0.08)**10)
    +117.29*x8*((1+0.13)**10)+123.1*x9*((1+0.19)**10)+36.75*x10*((1+0.12)**10)+23.09*x11
    *((1+0.09)**10)+13.55*x12*((1+0.1)**10)+19.01*x13*((1+0.09)**10)+19.85*x14*((1+0.1)**10)
    +36.34*x15*((1+0.1)**10)
30
31 #Restricoes
32
33 MaxRenda = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3+28.2*x4+31.86*x5+20.44*x6+75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
    +36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12+19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
34 prob += (MaxRenda <= 10000)
35
36 QntEnergia = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3
37 prob += (QntEnergia == 2000)
38
39 QntBanco = 28.2*x4+31.86*x5+20.44*x6
40 prob += (QntBanco == 2000)
41
42 QntFI = 75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
43 prob += (QntFI == 2000)
44
45 QntSaude = 36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12
46 prob += (QntSaude == 2000)
47
48 QntIndus = 19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
49 prob += (QntIndus == 2000)
50
51 #Resultado
52 print (prob)
53
54 optimization_result = prob.solve()
55
56 assert optimization_result == pulp.LpStatusOptimal

```

A partir da execução do código acima foi obtido o seguinte resultado:

Ativo	Nº ações
TRPL4	0.0
EGIE3	52.493
TAEE3	0.0
ITUB3	70.922
BBAS3	0.0
BBDC3	0.0
BCFF11	0.0
IRDM11	17.052
HCTR11	0.0
HYPE3	0.0
FLRY3	86.618
ODPV3	0.0
EMBR3	0.0
GOLL4	100.756
WEG4	0.0

Tabela 4: Primeiro resultado.

No final desses 10 anos de investimentos a pessoa teria um montante final de R\$34.282,30, assumindo um risco total de 105,96 pontos na escala que utilizamos.

Em último caso, uma pessoa bem rica e mais conservadora quer investir de forma a minimizar os riscos, com algumas condições. Ele quer investir pelo menos 30% em empresas do setor de energia, 20% no setor industrial, 20% no setor de saúde e reservar entre 5% e 7% para os fundos imobiliários, além de que quer ter no mínimo 1 ação de cada empresa. Invista os seus R\$100.000 por 10 anos. Para isso, teremos as seguintes equações:

Função Objetivo:

$$\min(F(\mathbf{x})) = \min\left(\sum_{i=1}^n q_i x_i\right)$$

Condições de restrição:

Restrição para que a soma das ações não ultrapasse M:

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq M$$

Restrições para garantir boa distribuição entre as ações:

$$\sum_{i=1}^3 p_i x_i \geq 0.3M \text{ //Energia}$$

$$\sum_{i=10}^1 2p_i x_i \geq 0.2M \text{ //Saude}$$

$$\sum_{i=7}^9 p_i x_i \geq 0.05M \text{ //FII}$$

$$\sum_{i=7}^9 p_i x_i \leq 0.07M \text{ //FII}$$

$$\sum_{i=13}^{15} p_i x_i = 0.2M \text{ //Bens Industriais}$$

$$x_i \geq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$


```

1
2 #Investidor 4
3
4 prob = pulp.LpProblem('Escolha de investimentos', pulp.LpMinimize)
5
6 #variaveis
7
8 x1 = pulp.LpVariable('Transmissao Paulista (TRPL4)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
9 x2 = pulp.LpVariable('Engie (EGIE3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
10 x3 = pulp.LpVariable('Taesa (TAEE3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
11 x4 = pulp.LpVariable('Itau (ITUB3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
12 x5 = pulp.LpVariable('Banco do Brasil (BBAS3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
13 x6 = pulp.LpVariable('Bradesco (BBDC3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
14 x7 = pulp.LpVariable('BCFF11', lowBound = 1, cat = 'Integer')
15 x8 = pulp.LpVariable('IRDM11', lowBound = 1, cat = 'Integer')
16 x9 = pulp.LpVariable('HCTR11', lowBound = 1, cat = 'Integer')
17 x10 = pulp.LpVariable('Hypera farma (HYPE3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
18 x11 = pulp.LpVariable('Fleury (FLRY3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
19 x12 = pulp.LpVariable('OdontoPrev (ODPV3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
20 x13 = pulp.LpVariable('Embraer (EMBR3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
21 x14 = pulp.LpVariable('Gol (GOLL4)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
22 x15 = pulp.LpVariable('Weg (WEG3)', lowBound = 1, cat = 'Integer')
23
24 #funcao objetivo
25
26 F0 = 0.1*x1+0.3*x2+0.1*x3+0.3*x4+0.2*x5+0.2*x6+0.5*x7+1*x8+0.95*x9+0.35*x10+0.25*x11+0.1*x12
    +0.25*x13+0.3*x14+0.35*x15
27 prob += F0
28
29 LucroTotal = 24.55*x1*((1+0.2)**10)+38.1*x2*((1+0.1)**10)+13.33*x3*((1+0.25)**10)+28.2*x4
    *((1+0.2)**10)+31.86*x5*((1+0.13)**10)+20.44*x6*((1+0.18)**10)+75.14*x7*((1+0.08)**10)
    +117.29*x8*((1+0.13)**10)+123.1*x9*((1+0.19)**10)+36.75*x10*((1+0.12)**10)+23.09*x11
    *((1+0.09)**10)+13.55*x12*((1+0.1)**10)+19.01*x13*((1+0.09)**10)+19.85*x14*((1+0.1)**10)
    +36.34*x15*((1+0.1)**10)
30
31 #Restricoes
32
33 MaxRenda = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3+28.2*x4+31.86*x5+20.44*x6+75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
    +36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12+19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
34 prob += (MaxRenda >= 100000)
35
36 QntEnergia = 24.55*x1+38.1*x2+13.33*x3
37 prob += (QntEnergia >= 30000)
38
39 QntFI1 = 75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
40 prob += (QntFI1 >= 5000)
41
42 QntFI2 = 75.14*x7+117.29*x8+123.1*x9
43 prob += (QntFI2 <= 7000)
44
45 QntSaude = 36.75*x10+23.09*x11+13.55*x12
46 prob += (QntSaude >= 20000)
47
48 QntIndus = 19.01*x13+19.85*x14+36.34*x15
49 prob += (QntIndus >= 20000)
50
51 #Resultado
52 print (prob)
53
54 optimization_result = prob.solve()
55
56 assert optimization_result == pulp.LpStatusOptimal
57
58 print('Ser o comprados:')
59 for var in prob.variables():
60     print('{} acoes da empresa {}'.format(var.value(), var.name))
61 print('O Risco Total foi de {:.2f}'.format(F0.value()))
62 print('O lucro Total ser de R${:.2f}'.format(LucroTotal.value()))

```

A partir da execução do código acima foi obtido o seguinte resultado:

No final desses 10 anos de investimentos a pessoa teria um montante final de R\$455.200, assumindo um risco total de 599.10 pontos na escala que utilizamos.

Ativo	Nº ações
TRPL4	2232.0
EGIE3	1.0
TAEE3	1.0
ITUB3	1.0
BBAS3	1.0
BBDC3	1.0
BCFF11	64
IRDM11	1.0
HCTR11	1.0
HYPE3	1.0
FLRY3	1.0
ODPV3	1473.0
EMBR3	2.0
GOLL4	1.0
WEG4	549.0

Tabela 5: Primeiro resultado.

4 Conclusões

O problema de otimização de portfólio se apresenta como sendo de difícil abordagem, sendo necessário observar diversas abordagens não lineares para compreender o quão limitado - ou não - pode ser a construção de um modelo linear para este problema. Uma vez apresentadas estas informações iniciais sobre o problema, podemos passar a analisar cautelosamente o processo de resolução deste problema através do estudo das variáveis que são estabelecidas no mercado financeiro e também através do estudo de ferramentas computacionais adequadas para sua análise e resolução. Quando falamos de investimentos, quanto maiores os riscos mais os investimentos devem retornar para se compensar. Entretanto nos testes 2 e 3 pudemos perceber que quando maximizamos os riscos o retorno dos investimentos foram menores, o que não faz sentido, pois porque iríamos assumir mais risco sendo que investimentos com menos riscos trazem retornos maiores? Logo, podemos concluir que talvez as análises que utilizamos não foram as mais eficientes e corretas. O que nos indica que essas análises mais simples e lineares não são as melhores análises, até porque se fossem todos ganhariam fácil dinheiro na bolsa de valores.

Referências

- [1] Sukandar AR, Im Manik N, Purnomo F. Development of Stock Portfolio Optimization Application Program Using Fuzzy Linear Programming. Applied Mathematical Sciences. 2014;8(86):4249-59.
- [2] Konno H, Yamazaki H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science. 1991 May;37(5):519-31.
- [3] Papahristodoulou C, Dotzauer E. Optimal portfolios using linear programming models. Journal of the Operational research Society. 2004 Nov 1;55(11):1169-77.
- [4] Lobo MS, Fazel M, Boyd S. Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. Annals of Operations Research. 2007 Jul;152(1):341-65.
- [5] Yin D. Mathematical Model of Financial Investment Risk. Journal of Mathematical Finance. 2018 Jan 18;8(1):127-36.