Ecuaciones Diferenciales - Filtro de Kalman

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

Filtro de Kalman

- El filtro de Kalman fue inventado en los años 50s por Rudolph Emil Kalman, como una técnica para el filtrado y predicción de sistemas lineales.
- Representa creencias por la representación de momentos: en el instante de tiempo k, la creencia se representa por la media $\mathbf{m}_k$ y la covarianza $\mathbf{P}_k$. Los posteriores son Gaussianos si se mantienen las siguientes tres propiedades, en adición a la propiedad Markoviana.

Filtro de Kalman - Aplicaciones

- Algoritmo de estimación optima.
- Sistemas de navegación y guía, visión por computador y procesamiento de señales.
- Se empleo para la computación de la navegación del Apollo.
- Se emplean en los dispositivos de navegación, en todos los smartphones, UAV, y en juegos de computador.

Filtro de Kalman - Probabilidad de Transición

La probabilidad del transición de estados $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_{k-1})$ debe ser una función lineal en sus argumentos con adición de un ruido Gaussiano.

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k.$$

La variable aleatoria $\mathbf{w}_k$ es un vector aleatorio Gaussiano que modela la aleatoriedad de la transición de estados.

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$$

Finalmente, la probabilidad de transición de estados esta dada

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{u}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{R}_k|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k)^\top \mathbf{R}_k^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{A}_k\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k)\right]$$

Filtro de Kalman - Probabilidad de Medida

La probabilidad del estado siguiente $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$ debe ser también lineal en sus argumentos con adición de un ruido Gaussiano.

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_k.$$

donde el vector $\mathbf{v}_k$ describe el ruido en la medición. La distribución

$$\mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{Q}_k\right)$$

La probabilidad de la medición es entonces dada por la siguiente distribución

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}|\mathbf{Q}_k|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{Q}_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{x}_k)\right]$$

Filtro de Kalman - Estimación de estados

Sistema estocástico:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k.$$

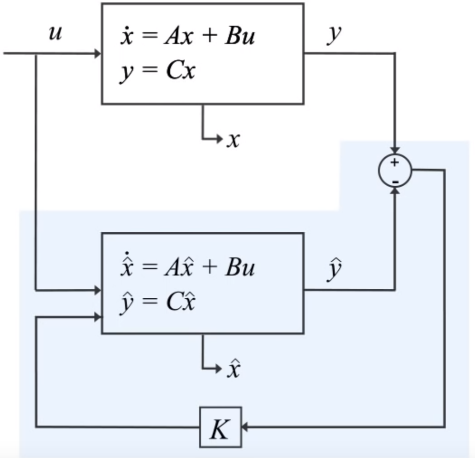
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

Estimador:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k,$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k.$$

Filtro de Kalman - Estimación de estados



Si

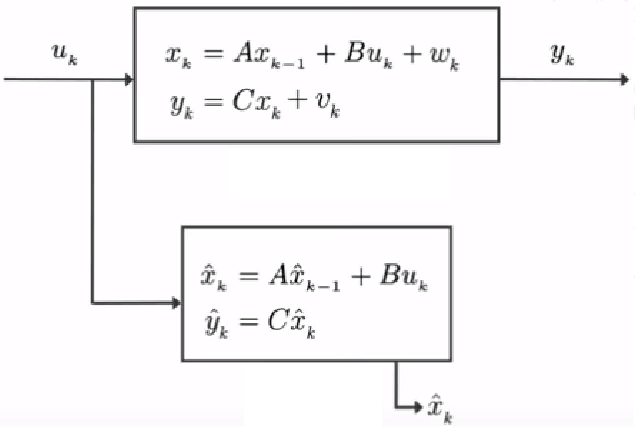
$$e_k = x_k - \hat{x}_k$$

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k, \quad \hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k + K(y_k - \hat{y}_k)$$

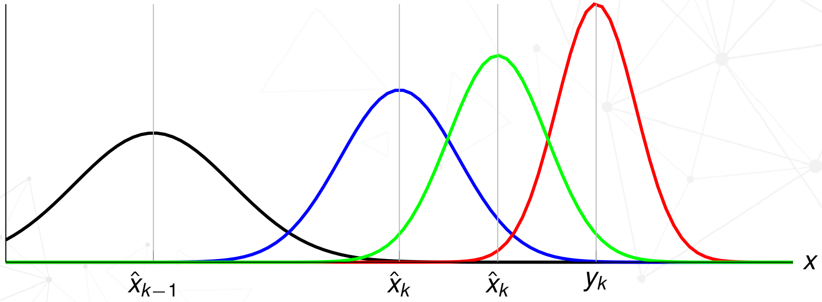
Ejercicio: Demostrar que

$$e_k = (A - KC)e_{k-1}, \quad y_k - \hat{y}_k = Ce_k$$

Filtro de Kalman - Estimación de estados



Definición del problema - Ejemplo



Filtro de Kalman - Estimación de estados

A partir del Filtro de Kalman

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k(A\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k)),$$

donde $\hat{x}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$ es la estimación a priori. Entonces

$$\underbrace{\hat{\mathbf{x}}_k}_{\text{A posteriori}} = \underbrace{\hat{x}_k^-}_{\text{Predicción}} + \underbrace{\mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\hat{x}_k^-)}_{\text{Actualización}},$$

Filtro de Kalman - algoritmo

Para un conjunto de datos $\mathbf{y}_{1:N}$

- Inicialización $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_0, \mathbf{P}_0)$.
- Predicción:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{m}_{k-1} + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^\top + \mathbf{Q}_{k-1} \end{aligned}$$

- Actualización:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k\mathbf{m}_k^- \\ \mathbf{S}_k &= \mathbf{H}_k\mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^-\mathbf{H}_k^\top\mathbf{S}_k^{-1} \\ \mathbf{m}_k &= \mathbf{m}_k^- + \mathbf{K}_k\mathbf{e}_k \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k\mathbf{S}_k\mathbf{K}_k^\top \end{aligned}$$