

1 Nivel Básico

1. Determine en cada caso si los vectores son linealmente independientes:

a) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \end{bmatrix}.$

2. Encuentre la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones usando Eliminación Gaussiana para inicialmente determinar la forma escalon, y posteriormente emplear sustitución hacia atrás (*back-substitution*) para encontrar la solución:

a) $\begin{aligned} 6x - 3y + 2z &= 7 \\ x + 2y + 5z &= 0 \\ 2x - 8y - z &= -2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + y + u &= 1 \\ 5x + 2y + z &= 1 \\ x + 2y + u &= 2 \\ 3x + y + z + u &= 1 \end{aligned}$

3. Encuentre la solución de mínimos cuadrados al problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando la factorización QR, y resolviendo por medio de $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{b}$. Donde \mathbf{Rx} se resuelve por sustitución hacia atrás.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 Nivel Intermedio

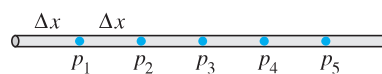
1. Se tiene una matriz de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Asuma que \mathbf{A}_{11} es $p \times p$, \mathbf{A}_{22} es $q \times q$, y \mathbf{A} es invertible. Demostrar que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

2. La matriz de banda \mathbf{A} mostrada abajo puede ser utilizada para estimar la conducción estable de calor en una barra cuando la temperatura en los puntos p_1, \dots, p_5 sobre la barra cambian con el tiempo.



La constante C en una matriz depende de la naturaleza física de la barra, la distancia Δx entre los puntos sobre la barra, y la longitud del tiempo Δt entre medidas sucesivas de temperaturas. Suponga que para $k = 0, 1, 2, \dots$ un vector $\mathbf{t}_k \in \mathbb{R}^5$ contiene las temperaturas

en el tiempo $k\Delta t$. Si los dos finales de la barra se mantienen en 0° , entonces los vectores temperatura satisfacen la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{t}_{k+1} = \mathbf{t}_k$ (con $k = 0, 1, \dots$), donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1+2C) & -C & & & \\ -C & (1+2C) & -C & & \\ & -C & (1+2C) & -C & \\ & & -C & (1+2C) & -C \\ & & & -C & (1+2C) \end{bmatrix}$$

- Determine la factorización LU de \mathbf{A} cuando $C = 1$. Una matriz como \mathbf{A} con tres diagonales diferentes de cero es llamada matriz tri-diagonal. Los factores \mathbf{L} y \mathbf{U} son matrices bi-diagonales. *Realizar la factorización a mano.*
- Suponga que $C = 1$ y $\mathbf{t}_0 = [10, 12, 12, 12, 10]^\top$. Usar la factorización LU de \mathbf{A} para encontrar la distribución de temperaturas \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{t}_3 , y \mathbf{t}_4 .

3 Computacional

- Crear una función que realice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.
- Realizar el problema 1.1 en el PC. Crear una matriz compuesta por los vectores columna, utilizar la función creada en el punto anterior y verificar el número de columnas linealmente independientes. Adicionalmente, verificar los resultados con la función `rank`.
- Realizar el problema 2.1 en el PC. Generar las matrices \mathbf{A}_{11} , \mathbf{A}_{12} y \mathbf{A}_{22} de manera aleatoria, para $p = 3$ y $q = 5$. Verificar que se cumple la demostración.
- Realizar el código para el problema 2.2 en el PC. Se puede emplear la factorización LU de las librerías.
- Realizar el problema 1.3 en el PC. Adicionalmente encontrar la solución usando $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$. Comparar si la matriz $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$ corresponde a la pseudo inversa, típicamente denotada como `pinv` en las librerías de álgebra lineal.