

Ecuaciones Diferenciales - Sistemas Discretos y Linealización

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

1 Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Z

3 Aproximación lineal de sistemas

- Linealización de ODEs
- Linealización de Espacio de Estados

Ecuaciones de diferencias finitas

Ejemplo de una ecuación de diferencias

$$x[n + 1] = 2x[n]$$

La variable que mide el tiempo (n) varía discretamente. Para los sistemas dinámicos

$$n = T, 2T, 3T, \dots,$$

donde T es el periodo de adquisición.

Ecuaciones de diferencias finitas

La solución de la ecuación de diferencias es una función $f[n]$ $n \in \mathbb{Z}$ que satisfaga la ecuación

$$x[n+1] = 2x[n]$$

son

$$f_1[n] = 2^n = 1, 2, 4, \dots \text{ ya que } f_1[n+1] = 2^{n+1} = 2f_1[n]$$

$$f_2[n] = 2(2^n) = 2, 4, 8, \dots \text{ ya que } f_2[n+1] = 2(2^{n+1}) = 2f_2[n]$$

$$f_3[n] = 3(2^n) = 3, 6, 12, \dots \text{ ya que } f_3[n+1] = 3(2^{n+1}) = 2f_3[n]$$

Para poder establecer una única solución de la ecuación, es preciso conocer unas condiciones auxiliares. Por ejemplo si, $f[0] = 1$, entonces la única solución válida es $f_1[n] = 2^n$.

Relación con las ecuaciones diferenciales

Recordemos el caso general de una ecuación diferencial ordinaria

$$a_n \frac{d^n y}{d x^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d y}{d x} + a_0 y = g(x).$$

Su análoga discreta es

$$a_n y[n+k] + a_{n-1} y[n+k-1] + \dots + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = g[n].$$

Contenido

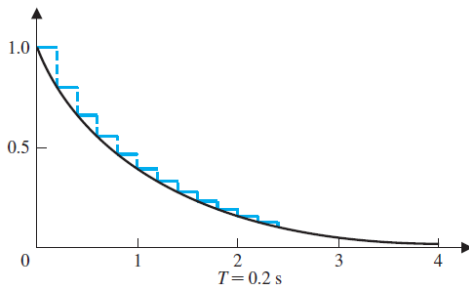
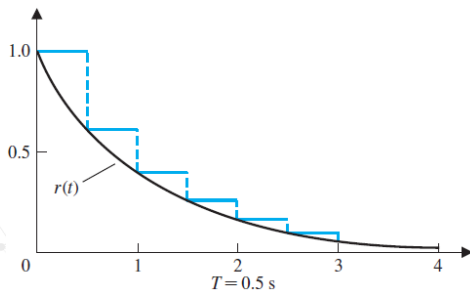
1 Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Z

3 Aproximación lineal de sistemas

- Linealización de ODEs
- Linealización de Espacio de Estados

Transformada Z



Transformada Z

La salida de un muestreador ideal $r^*(t)$ es una serie de impulsos con valor $r(nT)$, entonces

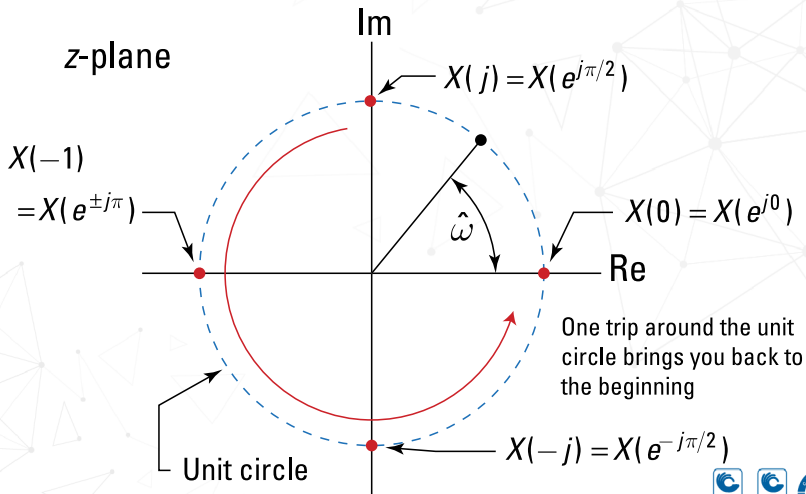
$$r^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)\delta(t - nT),$$

para $t > 0$. Usando la transformada de Laplace, tenemos

$$\mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} r(nT)e^{-nsT}.$$

De la expresión anterior se observa que, $z = e^{sT}$.

Transformada Z



Transformada Z

Así como la transformada de Laplace convierte las ecuaciones diferenciales en términos algebraicos con respecto a s , la transformada z convierte las ecuaciones de diferencia en términos algebraicos con respecto a z .

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-k}.$$

Recordar la transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Propiedades

- Linealidad: $\mathcal{Z}\{f_1[n] + f_2[n]\} = F_1(z) + F_2(z)$, y $\mathcal{Z}\{af[n]\} = aF(z)$.
- Diferencia positiva: $\mathcal{Z}\{f[n+1]\} = zF(z) - zf[0]$. $\mathcal{Z}\{f[n+k]\} = z^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} z^{k-i} f[i]$.
- Escalamiento en frecuencia: $\mathcal{Z}\{a^k f[n]\} = F(z/a)$.
- Multiplicación por n : $\mathcal{Z}\{n^k f[n]\} = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{n^{(k-1)} f[n]\}$.
- Teorema del valor final:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

- Convolución: $\mathcal{Z}\{f_1[n] \star f_2[n]\} = F_1(z)F_2(z)$ donde $f_1[n] \star f_2[n] = \sum_{h=0}^{\infty} f_1[h]f_2[n-h]$.

Transformada Z - Ejemplo

Ejemplo: Asumir que $y[n] = A$. Se puede considerar como una función escalón de amplitud A .

$$y[z] = \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} Az^{-k} = \frac{A}{1 - z^{-1}} = \frac{Az}{1 - z}$$

Ejemplo: La transformada z de la función escalón unitario.

$$\mathcal{Z}\{u(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

A partir de la serie geométrica $(1 - bx)^{-1} = 1 + bx + (bx)^2 + \dots$ entonces,

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Transformada Z - Tabla

Type	$X(z)$	$x[n]$
polynomial in z	$\sum_k c_k z^{-k}$	$\sum_k c_k \delta[n - k]$
single real pole	$\frac{1}{1 - pz^{-1}}$	$p^n u[n]$
double real pole	$\frac{pz^{-1}}{(1 - pz^{-1})^2}$	$np^n u[n]$
double real pole	$\frac{1}{(1 - pz^{-1})^2}$	$(n + 1)p^n u[n]$
triple real pole	$\frac{1}{(1 - pz^{-1})^3}$	$\frac{(n + 2)(n + 1)}{2} p^n u[n]$
complex conjugate pair	$\frac{az \sin \omega_0}{(z - a e^{j\omega_0})(z - a e^{-j\omega_0})}$	$a^n \sin(\omega_0 n) u[n]$
complex conjugate pair $p = p e^{j\omega_0}$	$\frac{r}{1 - pz^{-1}} + \frac{r^*}{1 - p^* z^{-1}}$	$2 r p ^n \cos(\omega_0 n + \angle r) u[n]$

Funciones de transferencia en z

Considerar el siguiente sistema discreto, y hallar la función de transferencia.

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_0 y[n-2] + b_1 u[n-1] + b_0 u[n-2].$$

Primero, tomamos la transformada z a ambos lados de la ecuación de diferencia.

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = \mathcal{Z}\{-a_1 y[n-1]\} - \mathcal{Z}\{a_0 y[n-2]\} + \mathcal{Z}\{b_1 u[n-1]\} + \mathcal{Z}\{b_0 u[n-2]\}.$$

$$Y[z] = -a_1 z^{-1} Y[z] - a_0 z^{-2} Y[z] + b_1 z^{-1} U[z] + b_0 z^{-2} U[z].$$

Funciones de transferencia en z

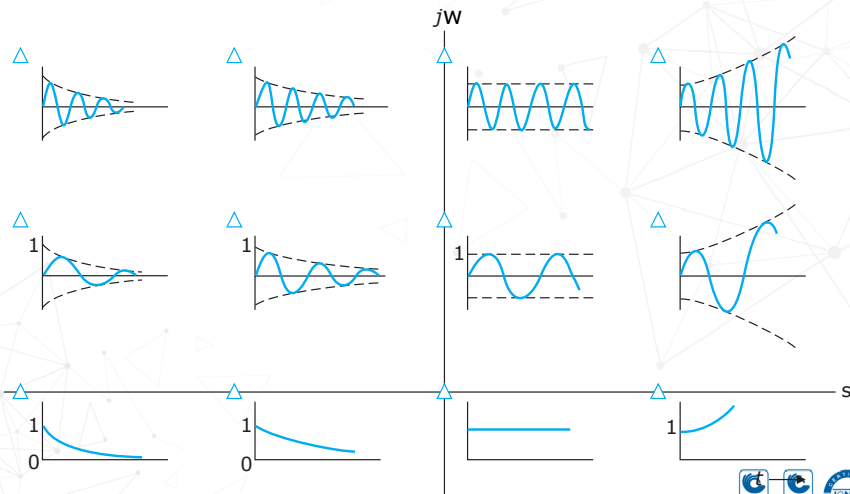
De esta expresión

$$Y[z] = -a_1 z^{-1} Y[z] - a_0 z^{-2} y(n-2) + b_1 z^{-1} U[z] + b_0 z^{-2} U[z].$$

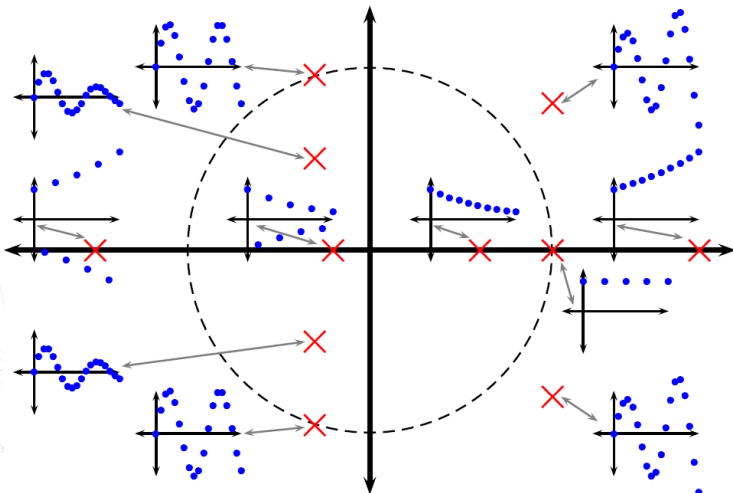
Se obtiene la función de transferencia

$$\frac{Y[z]}{U[z]} = H[z] = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$$

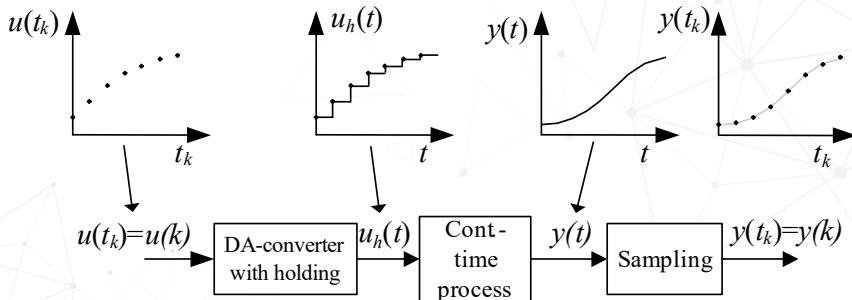
Respuesta y estabilidad - Plano s



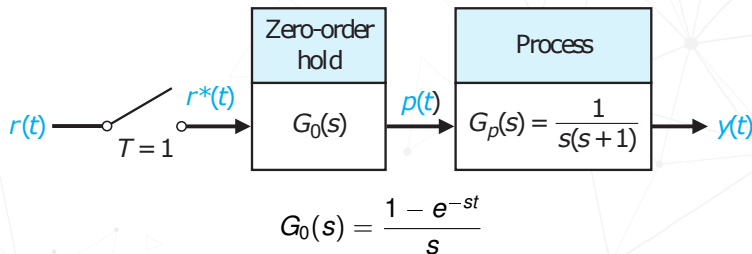
Respuesta y estabilidad - Plano z



Conversión de continuo a discreto



Ejemplo: Laplace a Z



Ejemplo: Laplace a Z

Entonces la funciones de transferencia $Y(s)/R^*(s)$ es

$$\frac{Y(s)}{R^*(s)} = G_0(s)G_p(s) = G(s) = \frac{1 - e^{-st}}{s^2(s+1)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$G(s) = (1 - e^{-st}) \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right)$$

y la transformada z es

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}$$

Ejemplo: Laplace a Z

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}$$

Usando las tablas se obtiene

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] \\ &= \frac{(ze^{-t} - z + Tz) + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

Cuando $T = 1$,

$$G(z) = \frac{ze^{-1} + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} = \frac{0.3678z + 0.2644}{z^2 - 1.3678z + 0.3678}$$

Contenido

1 Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Z

3 Aproximación lineal de sistemas

- Linealización de ODEs
- Linealización de Espacio de Estados

Contenido

1 Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Z

3 Aproximación lineal de sistemas

- Linealización de ODEs
- Linealización de Espacio de Estados

Linealización

La linealización es el proceso de tomar el gradiente de una función no lineal con respecto a todas las variables y obtener una representación lineal en un punto de operación (\bar{y}, \bar{u}) .

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u) \approx f(\bar{y}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{y}, \bar{u}} (y - \bar{y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{y}, \bar{u}} (u - \bar{u})$$

Si los valores \bar{y} y \bar{u} son seleccionados en el punto de estado estable (equilibrio) entonces $f(\bar{y}, \bar{u}) = 0$. Para simplificar la expresión de linealización, la desviación de las variables se definen como $\tilde{y} = y - \bar{y}$ y $\tilde{u} = u - \bar{u}$.

Linealización - Ejemplo ODE

Linealizar la siguiente ecuación diferencial con una entrada de valor $u(t) = 16$

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \sqrt{u}$$

Aplicando la serie de Taylor de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = f(x_{ss}, u_{ss}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{ss}, u_{ss}} (x - x_{ss}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_{ss}, u_{ss}} (u - u_{ss})$$

Linealización - Ejemplo Espacio de Estados

Un sistema de espacio de estados

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad y = g(x)$$

se puede linealizar como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial u_3} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial u_3} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} & \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} \\ \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} & \left. \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

Contenido

1 Ecuaciones de diferencias finitas

2 Transformada de Z

3 Aproximación lineal de sistemas

- Linealización de ODEs

- Linealización de Espacio de Estados

Linealización - Espacio de Estados

Ejercicio: Linealizar el siguiente sistema de espacio de estados.

$$2 \frac{d x_1}{d t} + x_1^2 + 3 x_2^2 = 16 u$$

$$3 \frac{d x_2}{d t} + 6 x_1^2 + 6 x_2^2 = 0$$

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_1$$

y

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$