Algebra Lineal: Matrices

Cristian Guarnizo-Lemus, PhD

Outline

Outline

Matriz

Una matriz $\mathbf{A}$ de dimensiones $n \times m$, se describe como el siguiente arreglo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$$

donde $\mathbf{a}_i$ para $i = 1, \ldots, m$, son las columnas de las matriz $\mathbf{A}$.

Matriz transpuesta

Si se tiene una matriz $\mathbf{A}$ de dimensiones $n \times m$, entonces su transpuesta se escribe $\mathbf{A}^\top$ de dimensiones $m \times n$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$$

si y sólo si $b_{ij} = a_{ji}$.

Matriz simétrica

La matriz $\mathbf{A}$ es **simétrica**, si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

es decir, $a_{ij} = a_{ji}$.

Matriz diagonal

Una matriz es diagonal si todos los elementos por fuera de la diagonal son cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Matriz identidad

Es una matriz diagonal con todos los elementos de su diagonal iguales a 1.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz ortogonal

Una matriz es es ortogonal si

$$\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}, \quad \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 \text{ para } & i \neq j \\ 1 \text{ para } & i = j \end{cases}$$

Entonces,

1. $\mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q}^{-1}$.
2. $|\mathbf{Q}| = 1$ ó -1.

producto escalar-matriz

El producto $\alpha\mathbf{A}$ es otra matriz con todos sus componentes ponderados por α, es decir

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Suma de matrices

- La suma de dos matrices está definida si y sólo si ambas matrices tienen el mismo tamaño.
- Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de tamaño $n \times m$.
- $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, entonces $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Inversa de una matriz I

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es invertible si existe otra matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

Inversa de una matriz II

La inversa de una matriz se puede calcular como,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\left(\mathbf{A}\right)}{\left|\mathbf{A}\right|},$$

donde $\mathrm{adj}\left(\mathbf{A}\right)$ es la matriz adjunta. Si $\mathbf{A}$ no es cuadrada es posible usar la *pseudo-inversa* la cual está dada por,

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \left[\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{A}^{\top}.$$

La *pseudo-inversa* asegura que $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Otras propiedades matriciales

- $\left(\mathbf{A}^{\top}\right)^{\top} = \mathbf{A}$.
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\top} = \mathbf{A}^{\top} + \mathbf{B}^{\top}$.
- $(\mathbf{AB})^{\top} = \mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{\top}$.
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Outline

Norma de una matriz

La norma de una matriz $m \times n$ $\mathbf{A}$, denotada como $\|\mathbf{A}\|$, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus entradas (celdas)

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2}.$$

- $\|\mathbf{A}\| / \sqrt{mn}$ (Norma en RMS).
- $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{A}\|$.
- $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}^\top\|$.
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$.
- $\|\mathbf{A}\|^2 = \|\mathbf{a}_1\|^2 + \ldots + \|\mathbf{a}_n\|^2$.

Determinante de una matriz

El determinante de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, denotado como $|\mathbf{A}|$, [1] y se calcula para una matriz de 2×2 como

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

[1] El determinante posee información importante. Por ejemplo: si los vectores columna de una matriz son linealmente dependientes, entonces el determinante de la matriz es cero.

Propiedades de los determinates

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$,

- $|\alpha \mathbf{A}| = \alpha^n |\mathbf{A}|$
- $|\mathbf{I}| = 1$
- $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$
- $\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$
- $|\mathbf{A}| = \left|\mathbf{A}^\top\right|$

Traza de una matriz

La traza de la matriz $\mathbf{A}$ es la suma de los elementos de su diagonal,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propiedades:

- $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top)$.
- $\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$.
- $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$.
- $\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{A})$.

Forma cuadrática

Se conoce como forma cuadrática a la siguiente relación

$$y = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Ejemplo:

$$c_1x_1^2 + c_2x_1x_2 + c_3x_3^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & \frac{c_2}{2} \\ \frac{c_2}{2} & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Outline

Sistema de ecuaciones lineales

Todo sistema de ecuaciones lineales se puede expresar como,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Es decir,

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

esto representa una combinacional lineal de las columnas de $\mathbf{A}$. El **número de vectores** columna que sean **linealmente independientes**, establece el **rango** de $\mathbf{A}$.

Rotación

Podemos realizar transformaciones geométricas sobre $\mathbf{x}$ a partir de $\mathbf{A}\mathbf{x}$. Por ejemplo si tenemos

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Composición - Shear + Rotación

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Outline

Producto entre matrices I

El producto entre una matriz $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times m$ por otra matriz $\mathbf{B}$ de dimensión $m \times p$ está dado por,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_{n\times m}\mathbf{B}_{m\times p}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

donde, la componente c_{ij} de $\mathbf{C}$ está dada por,

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } \mathbf{A})\,(\text{columna } j \text{ de } \mathbf{B})$$

Producto entre matrices II

El productos entre matrices se puede interpretar como,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_{n\times m}\mathbf{B}_{m\times p} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{A}\mathbf{b}_p \end{array}\right],$$

donde $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{b}_j$ son vectores columna. A partir de lo anterior, se puede observar que el producto entre matrices se puede interpretar como combinaciones lineales de las columnas de $\mathbf{B}$.

Propiedades del producto matricial

- El producto matricial no es conmutativo.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

- Puede ser asociativo

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC})$$

- Puede ser distributivo

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

Forma echelon

Una matriz esta en la forma echelon (o forma echelon fila) si tiene las siguientes propiedades

1. Todas las filas diferentes de cero están encima de las filas que son ceros.
2. Cada entrada principal de una fila esta en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila encima de ella.
3. Todas las entradas en una columna debajo de una entrada principal son ceros.

Forma echelon - 2

Si una matriz en forma echelon satisface lo siguiente, entonces se conoce como forma echelon reducida.

1. La entrada principal en cada fila diferente de cero es 1.
2. Cada 1 principal es la única entrada diferente de cero en su columna.

Forma echelon - 3

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & \star & \star & \star \\ 0 & \blacksquare & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \star \end{bmatrix}$$

Algoritmo reducción de filas

Consiste en llevar una matriz a su forma echelon. Esto se logra realizando la técnica de eliminación Gaussiana.

Outline

Descomposición de Cholesky

Podemos representar una matriz cuadrada simétrica que es positiva definida como

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{\top}\mathbf{L}$$

donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular superior.

Ortogonalización de Gram-Schmidt

Este algoritmo convierte un conjunto de vectores linealmente independientes $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, en un conjunto de vectores $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ ortonornales.

- Ortogonalizar. $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{a}_i - (\mathbf{q}_1^\top \mathbf{a}_i)\mathbf{q}_1 - \ldots - (\mathbf{q}_{i-1}^\top \mathbf{a}_i)\mathbf{q}_{i-1}$.
- Test para independencia lineal. Si $\tilde{\mathbf{q}}_i = 0$, salir.
- Normalizar. $\mathbf{q}_i = \tilde{\mathbf{q}}_i / \|\tilde{\mathbf{q}}_i\|$.

Valores Propios y Vectores Propios

Dada una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$, decimos que λ es una valor propio de $\mathbf{A}$ y que $\mathbf{v}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ asociado a λ si y sólo si,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Una forma de calcular los valores y vectores propios es resolviendo el polinomio característico ($|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$). Finalmente, es posible observar que la traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios, y el determinante de una matriz es igual al producto de ellos.

Factorización de matrices

Las ideas principales de análisis matricial están perfectamente expresadas en

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{QR}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{Q\Lambda Q}^{\top}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{X\Lambda Y}^{\top}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\top}$$

La descomposición $\mathbf{LU}$ emplea la eliminación Gaussiana, mientras que $\mathbf{QR}$ emplea la ortogonalización de Gram-Schmidt.