1 Desarrollar a mano

1. Encuentre la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones usando Eliminación Gaussiana para inicialmente determinar la forma echelon, y posteriormente emplear sustitución hacia atrás (*back-sustitution*) para encontrar la solución:
   $$\begin{aligned} 6x - 3y + 2z &= 7 \\ x + 2y + 5z &= 0 \\ 2x - 8y - z &= -2. \end{aligned}$$
   Adicionalmente calcular el determinante de la matriz que transforma las variables x, y y z en $[-7,\ 0,\ -2]^\top$.

2. Encuentre la solución de mínimos cuadrados al problema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ usando la factorización QR, y resolviendo por medio de $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{b}$. Donde $\mathbf{Rx}$ se resuelve por sustitución hacia atrás.
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Se tiene una matriz de la forma
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}.$$
   Asuma que $\mathbf{A}_{11}$ es $p \times p$, $\mathbf{A}_{22}$ es $q \times q$, y $\mathbf{A}$ es invertible. Demostrar que
   $$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}.$$

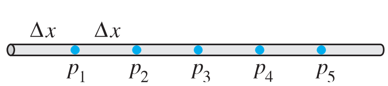
2 Computacional

1. Crear una función que realice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Y verifique que el problema 1.1 las columnas son linealmente independientes.

2. Realizar el problema 1.2 en el PC usando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt programado en el punto anterior. Adicionalmente encontrar la solución usando $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top\mathbf{b}$. Comparar si la matriz $(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top$ corresponde a la pseudo inversa, típicamente denotada como `pinv` en las librerías de algebra lineal.

3. Realizar el problema 1.3 en el PC. Generar las matrices $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$ y $\mathbf{A}_{22}$ de manera aleatoria, para $p = 3$ y $q = 5$. Verificar que se cumple la demostración.

4. La matriz de banda $\mathbf{A}$ mostrada abajo puede ser utilizada para estimar la conducción inestable de calor en una barra cuando la temperatura en los puntos $p_1, \ldots, p_5$ sobre la barra cambian con el tiempo.



La constante C en una matriz depende de la naturaleza física de la barra, la distancia Δx entre los puntos sobre la barra, y la longitud del tiempo Δt entre medidas sucesivas de temperaturas. Suponga que para $k = 0, 1, 2, \ldots$ un vector $\mathbf{t}_k \in \mathbb{R}^5$ contiene las temperaturas en el tiempo $k\Delta t$. Si los dos finales de la barra se mantienen en 0^{o}, entonces los vectores temperatura satisfacen la ecuación $\mathbf{A}\mathbf{t}_{k+1} = \mathbf{t}_k$ (con $k = 0, 1, \ldots$), donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1+2C) & -C & & & \\ -C & (1+2C) & -C & & \\ & -C & (1+2C) & -C & \\ & & -C & (1+2C) & -C \\ & & & -C & (1+2C) \end{bmatrix}$$

(a) Determine la factorización LU de $\mathbf{A}$ cuando $C = 1$. Una matriz como $\mathbf{A}$ con tres diagonales diferentes de cero es llamada matriz tri-diagonal. Los factores $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son matrices bi-diagonales. *Realizar la factorización a mano.*

(b) Suponga que $C = 1$ y $\mathbf{t}_0 = [10, 12, 12, 12, 10]^\top$. Usar la factorización LU de $\mathbf{A}$ para encontrar la distribución de temperaturas $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$, y $\mathbf{t}_4$.