

# Factorización Matrices y Algoritmos

Cristian Guarnizo-Lemus, PhD

## Outline

- 1 Inversa de una matriz
- 2 Factorización LU
- 3 Factorización QR
- 4 Valores y vectores propios
- 5 Descomposición en valores singulares (SVD)

# Contenido

- 1 Inversa de una matriz
- 2 Factorización LU
- 3 Factorización QR
- 4 Valores y vectores propios
- 5 Descomposición en valores singulares (SVD)

## Inversa de una matriz

Una matriz  $\mathbf{A}$  es invertible si y solo si  $\mathbf{A}$  es equivalente en filas a  $\mathbf{I}$ , y en tal caso, cualquier secuencia de operaciones de fila elementales que reduce  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{I}$  también transforma  $\mathbf{I}$  en  $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{E}_1 \mathbf{A} \sim \mathbf{E}_2(\mathbf{E}_1 \mathbf{A}) \sim \dots \sim \mathbf{E}_p(\mathbf{E}_{p-1} \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) = \mathbf{I}.$$

Entonces,

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_p \dots \mathbf{E}_1.$$

## Algoritmo para encontrar $A^{-1}$

Una forma de determinar  $A^{-1}$  es realizar una reducción en filas de la matriz aumentada  $[A \ I]$ . Si  $A$  es equivalente en filas a  $I$ , entonces  $[A \ I]$  es equivalente en filas a  $[I \ A^{-1}]$ .

**Ejemplo:** Encontrar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

## Calculo numérico

En problemas prácticos, es poco comun calcular  $A^{-1}$ , a menos que se requieran los elementos de  $A^{-1}$ . Calcular  $A^{-1}$  y  $A^{-1}b$  toma 3 veces la cantidad de operaciones necesarias para resolver  $Ax = b$  por medio de reducción por filas, y reducción por filas puede ser más preciso.

# Contenido

- 1 Inversa de una matriz
- 2 Factorización LU
- 3 Factorización QR
- 4 Valores y vectores propios
- 5 Descomposición en valores singulares (SVD)

## Factorización LU

Se emplea en problemas de secuencia de ecuaciones, todas con la misma matriz de coeficientes:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}_p.$$

Cuando  $\mathbf{A}$  es invertible, se puede calcular  $\mathbf{A}^{-1}$  y luego calcular  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_2$ , y así sucesivamente. Sin embargo es más eficiente solucionar la primera ecuación con reducción de filas y obtener la factorización LU. Posteriormente emplear esta factorización sobre las siguientes ecuaciones.



## Algoritmo para LU

Suponga que  $\mathbf{A}$  puede ser reducida a una forma echelon  $\mathbf{U}$  usando solamente operaciones de fila elementales. Entonces existen matrices elementales triangulares inferiores  $\mathbf{E}_1 \dots \mathbf{E}_p$  tales que

$$\mathbf{E}_p \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Entonces

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_p \dots \mathbf{E}_1)^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

donde

$$\mathbf{L} = (\mathbf{E}_p \dots \mathbf{E}_1)^{-1}.$$

## Algoritmo para LU

- 1 Reducir  $A$  a una forma echelon  $U$  por una secuencia de operaciones de remplazo por fila.
- 2 Ubicar los elementos de  $L$  tal que la misma secuencia de operaciones fila reduzca  $L$  a  $I$ .

## Algoritmo para LU

**Ejemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Demostrar que su factorización en LU es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

## Algoritmo para LU

**Ejercicio:** Solucionar  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  usando la factorización LU

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Contenido

1 Inversa de una matriz

2 Factorización LU

3 Factorización QR

■ Aplicación: mínimos cuadrados

4 Valores y vectores propios

5 Descomposición en valores singulares (SVD)

## Factorización QR

Si  $A$  es una matriz  $m \times n$  con columnas linealmente independientes, entonces  $A$  puede ser factorizado como  $A = QR$ , donde  $Q$  es una matriz  $m \times n$  cuyos elementos forman una base ortonormal para las columnas de  $A$  y  $R$  es una matriz  $n \times n$  triangular superior invertible con elementos positivos en su diagonal.

## Factorización QR

**Ejemplo:** Demostrar que la factorización QR de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

esta dada por

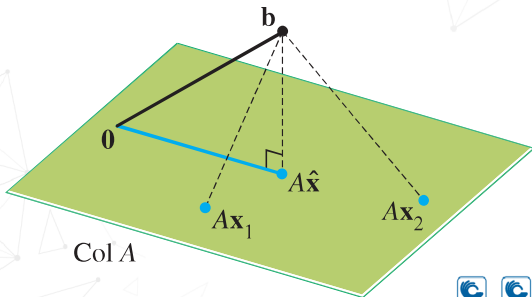
$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/\sqrt{12} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

## Aplicación: mínimos cuadrados

Si  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , una solución de mínimos cuadrados (*least-squares*) de  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  es un  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|,$$

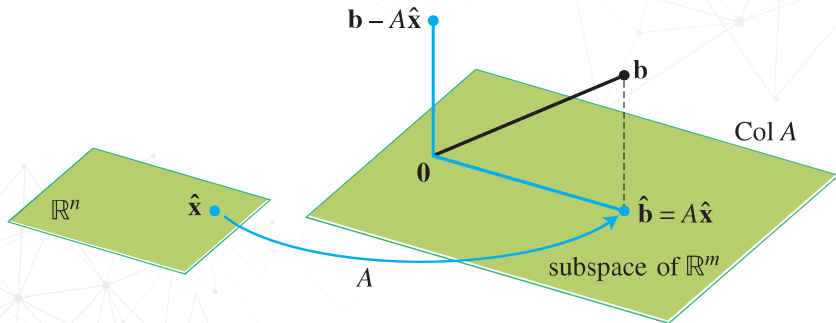
para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .





## Aplicación: mínimos cuadrados

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b} \quad (1)$$



## Aplicación: mínimos cuadrados

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$$

en Julia:

- `xhat = inv(A' * A) * (A' * b)`
- `xhat = pinv(A) * b`
- `Q, R = qr(A); xhat = inv(R) * (Q' * b)`

## Aplicación: mínimos cuadrados

**Ejercicio:** Encuentre la solución de mínimos-cuadrados de sistema  $Ax = b$  para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix},$$

usando la factorización QR, o sea  $Rx = Q^T b$ .

## Aplicación: mínimos cuadrados

### Ejercicio:

Demostrar que la solución de mínimos cuadrados del sistema inconsistente  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (2)$$

es

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Contenido

- 1 Inversa de una matriz
- 2 Factorización LU
- 3 Factorización QR
- 4 Valores y vectores propios**
- 5 Descomposición en valores singulares (SVD)

# Eigenvectores y eigenvalores

Un **vector propio** de una matriz  $A$  es un vector diferente de cero tal que  $Ax = \lambda x$  para algún escalar  $\lambda$ . Un escalar  $\lambda$  es llamado un **valor propio** de  $A$  si existe una solución no trivial para  $x$  de  $Ax = \lambda x$ , tal  $x$  es llamado **vector propio** correspondiente a  $\lambda$ .

# Eigenvector y eigenvalores

**Ejemplo:** Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Son  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  vectores propios de  $\mathbf{A}$ ?

# Eigenvector y eigenvalores

**Ejercicio:** Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Demostrar que 7 es un valor propio de  $\mathbf{A}$ .



# Eigenvector y eigenvalores

## Propiedades:

- Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.
- Si  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  son vectores propios que corresponden a distintos valores  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  de una matriz  $\mathbf{A}$ , entonces el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$  es linealmente independiente.

## La ecuación característica

Los valores propios se pueden encontrar al hacer

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

que corresponde a encontrar los valores de  $\lambda$  tal que  $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  no es invertible. Se encuentran a partir de

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0.$$

# La ecuación característica

**Ejemplo:**  
Encontrar los valores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

# Contenido

- 1 Inversa de una matriz
- 2 Factorización LU
- 3 Factorización QR
- 4 Valores y vectores propios
- 5 Descomposición en valores singulares (SVD)

## Descomposición en valores singulares

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $m \times n$  con rango  $r$ . Entonces existe una matriz  $\Sigma$  de  $m \times n$  para la cual los elementos de la diagonal  $\mathbf{D}$  son los primeros  $r$  valores singulares de  $\mathbf{A}$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , y existe una matriz ortogonal  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y una matriz  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T.$$

Con

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$