Ecuaciones Diferenciales - Transformadas

Cristian Guarnizo-Lemus
cristianguarnizo@itm.edu.co

Maestria en Automatización y Control Industrial

Contenido

Contenido

Contenido

Señales continuas

Una señal continua en el tiempo es una función de la variable continua t y se denota como $x(t)$. Las señales se pueden clasificar de varios modos. Un modo es en términos de la energía y la potencia. La energía en una señal $x(t)$ es

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t.$$

Mientras que la potencia de una señal es

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}\, t.$$

Sistemas continuos

Para una señal de energía $x(t)$, la función autocorrelación es

$$r_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x(t)x^*(t-\tau)\, d\,\tau,$$

donde $x^*(\tau)$ es el conjugado complejo de $x(t)$. Observar que $E = r_x(0)$.
Para una señal de potencia, función de autocorrelación es

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x^*(t-\tau)\, d\,t.$$

Note que $P = \phi_x(0)$.

Sistemas continuos - Función impulso

La función impulse se define por la expresión integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\,\mathrm{d}\,t = x(0)$$

para cualquier señal x(t) que es continua en $t = 0$. La función impulso tiene las siguientes propiedades

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.
- $\delta(-t) = \delta(t)$
- Propiedad de desplazamiento:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} x(t_0), & t_1 \leq t_0 \leq t_2 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$.

Contenido

Sistemas Discretos

Una señal discreta en el tiempo es una función de la variable discreta n y se denota como $x[n]$. Las señales se pueden clasificar de varios modos. Un modo es en términos de la energía y la potencia. La energía en una señal $x(t)$ es

$$E = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Mientras que la potencia de una señal discreta es

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1} \int_{n=-N}^{N} |x[n]|^2.$$

Simulación de sistemas lineales

A pesar que existen una diversidad de herramientas para resolver ecuaciones diferenciales y simular sistemas dinámicos lineales, en este caso seleccionamos Python.

```
y = odeint(model, y0, t)
```

Ejemplo: $\frac{dy(t)}{dt} = -k\ y(t)$

```
def model(y,t):
    k = 0.3
    dydt = -k * y
    return dydt
```

Contenido

Transformada de Laplace

Dada una función $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, existe una función $\mathcal{L}$ denominada *transformada de Laplace* que toma como argumento $f(t)$ y produce una función $F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}\,t.$$

La transformada inversa se expresa como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{+st}ds$$

Transformada de Laplace

Ejemplo: Transformada de Laplace de una constante c

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^{\infty} c\, e^{-s\,t} dt = -\frac{c}{s} e^{-s\,t} \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{c}{s}\right) = \frac{c}{s}$$

Ejercicio: Cual es la transformada de $\delta(t)$

Contenido

Modelo de espacio de estados

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1m}u_m(t)\\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \cdots + b_{2m}u_m(t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t)
\end{aligned}
$$

Modelo de espacio de estados

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{n} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1m} \\ \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1m} \\ \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nm} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Modelo de espacio de estados - Primer orden

Para el caso de primer orden tenemos

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

Su transformada de Laplace es

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s)$$

Y aplicando la transformada inversa se tiene

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{+a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

Modelo de espacio de estados - orden superior

Para el caso de orden mayor a uno se requiere calcular

$$e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \cdots ,$$

Entonces la solución de la ecuación general de espacio de estados esta dada por

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-\tau)]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Modelo de espacio de estados - orden superior

Tomando la transformada de Laplace de lo solcuión anterior

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

donde $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \mathbf{\Phi}(s)$ es la transformada de Laplace de $\mathbf{\Phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$. Entonces la solción anterior se puede reescribir como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

donde ***Phi***(t) se conoce como la matriz de transición de estado.