הפקולטה להנדסת אוירונוטיקה וחלל **הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל**

שיטות נומריות בהנדסה אוירונוטית- סמסטר אביב תשפ"ה

גליון 3

שאלה 1

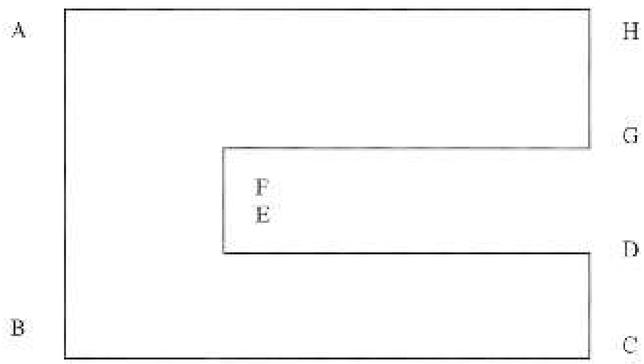
זורם נע בתעלה בעלת חתך המוראה בציור דלהלן (הסקלה אינה מדויקת). המשוואה המתארת את המהירות, φ , של הזורם במצב מתמיד הינה

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{c}{\mu}$$

כאשר c=הערך המוחלט של גרדיאנט הלחץ בכוון הזרימה (מניחים שזה קבוע בחתך) ו-μ= צמיגות הזורם. ערכי c ו-μ הינם $0.0002\ lb/in^2/in.$ ו- $0.25x10^{-5}\ lb\,sec/in^2$ בהתאמה.

מהם תנאי השפה של בעיה זו?

יש למצוא את פילוג המהירות בתעלה.



חתך התעלה: $ABCDEFGH$ - $AB = BC = AH = 12ins.$, $CD = 2ins,\ DG = 6ins,\ HG = 4ins,\ DE = FG = 6ins.$

יש להגיש דו"ח על שאלה זו בהתאם להנחיות המופיעות באתר המקצוע.

שאלה 2

במאמר משנת 1977 מציג המחבר שיטה נומרית חדשה לפתרון הנומרי של המשוואה הפרבולית $\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ כאשר $\alpha > 0$ וקבוע. הוא מציע לקחת כקירוב למשוואה הזאת:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{kG} = \alpha\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right) \qquad (*)$$

כאשר $u_{i,j} = u(ih, jk)$, k ו- h האינקרמנטים בזמן ובמרחב, בהתאמה, והפונקציה G (שהוא מכנה פונקצית דעיכה) מוגדרת לפי : $G = \left(1 - e^{-2C}\right)/2C$ כאשר $C = \alpha k/h^2$.

לדברי המחבר השימוש בפונקצית הדעיכה ב-(*) כדלעיל

"..provides better finite difference approximations and reduces truncation errors." לעומת המצב של שיטה מפורשת רגילה. האם טענתו נכונה? יש לבדוק:
(א) היציבות של השיטה, ו-(ב) שגיאת הקיטוע של השיטה, ולחוות את דעתך בנידון.

<u>שאלה 3</u>

עבור הפתרון הנומרי של המשוואה הדיפרנציאלית החלקית $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ (כאשר U נתון ב-x=0,1) מוצעת שיטת ההפרשים הסופיים הבאה:

$$u_{i,j+1}=u_{i,j}+R\left[u_{i-1,j}-u_{i,j}-u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}\right]$$

כאשר $u_{i,j}=u\left(ih,j\Delta t\right)$ ו-$R=\frac{\Delta t}{h^2}$.

(השיטה הזאת הופיעה בגיליון 2).

בעזרת הגישה של וון נוימן יש לנתח יציבותה של השיטה .

<u>שאלה 4</u>

נניח שמשתמשים בשיטת קרנק-ניקולסון כדי לפתור את הבעיה הבאה:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \alpha>0\quad constant,\ 0<x<1$$

עם תנאי שפה והתחלה: $\partial U\left(0,t\right)/\partial x=U\left(1,t\right)=0,\ U\left(x,0\right)=U_0\left(x\right)$.

השיטה הנומרית שתתקבל תהיה:

$$u_{i,j+1}=\frac{R}{2}\left(u_{i-1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}\right)+b_i,\ i=0,1,2,3.......\quad (I)$$

כאשר $u_{i,j}=u\left(ih,jk\right)$, $R=\alpha k/h^2$, ו- $b_i=u_{i,j}+\frac{R}{2}\left(u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}\right)$

כעת ננסה לפתור את מערכת המשוואות האלגבריות (I) לפי התהליך האיטרטיבי הבאה:

$$u_{i,j+1}^{(n+1)}=\frac{R}{2}\left(u_{i+1,j+1}^{(n)}-2u_{i,j+1}^{(n)}+u_{i-1,j+1}^{(n)}\right)+b_i,\ i=0,1,2,3...N,\quad n=0,1,2,3...$$

כאשר n מסמן מספר האיטרציה.

יש להראות כי שיטה איטרטיבית זו מתכנסת רק אם $0<R\le P$.ויש למצוא את P.

בהצלחה!