

שיטות נומריות בהנדסה אוירונוטית- סמסטר אביב תשפ"ה

גליון 2

שאלה 1

במחקר מסוים של קשר מאמץ-עיבור ותכונות החומר של גליל החשוף לחימום וקירור לסירוגין נעשה שימוש במשוואת החום הבאה יחד עם תנאי שפה/התחלה:

$$\frac{1}{4K} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, t > 0$$

כאשר $T = T(r, t)$ הינו הטמפרטורה, r המרחק הרדיאלי ממרכז הגליל, t הזמן ו- K מקדם הדיפוזיביות. תנאי ההתחלה והשפה:

$$T\left(\frac{1}{2}, t\right) = t, \quad T(1, t) = 100 + 40t, \quad 0 \leq t \leq 10$$

$$T(r, 0) = 200\left(r - \frac{1}{2}\right), \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1$$

(א) יש לפתור בעיה זו בעזרת הפרשים סופיים ולהציג את הטמפרטורה $T(r, 10)$ בגליל בעל רדיוס חיצוני 1. יש לקחת $K=0.1$.

(ב) בעזרת פילוג הטמפרטורה שחישבת בסעיף (א) יש לחשב נומרית את העיבור I לפי הנוסחה:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \alpha T(r, t) r dr$$

כאשר $\alpha = 10.7$ ו- $t = 10$.

לשים לב: יש להגיש דו"ח על שאלה זו בהתאם להנחיות המופיעות באתר המקצוע.

שאלה 2

(א) יש להוכיח כי $\delta^2 = \Delta - \nabla$, כאשר δ הינו האופרטור של הפרשים מרכזיים, Δ האופרטור של הפרשים קדמיים ו- ∇ האופרטור של הפרשים אחוריים.

(ב) עבור הפתרון הנומרי של המשוואה הדיפרנציאלית החלקית $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (כאשר U נתון ב- $x=0,1$) מוצעת שיטת ההפרשים הסופיים הבאה:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + R[u_{i-1,j} - u_{i,j} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}]$$

כאשר $R = \frac{\Delta t}{h^2}$ ו- $u_{i,j} = u(ih, j\Delta t)$.

אף על פי ששיטה זו נראית סתומה (IMPLICIT) כי האינדקס $(j+1)$ מופיע בשני האגפים יש להסביר כיצד ניתן להפעילו באופן מפורש (EXPLICITLY) על ידי שימוש מתאים של אינדקס המרחב i .

(ג) על ידי שימוש בפתרון הפורמלי של המשוואה הדיפרנציאלית החלקית דלעיל והקשר שהוכחת בסעיף (א) יש לפתח את שיטת ההפרשים הסופיים המוצעת.

שאלה 3

(א) עבור משוואת החום הדו-ממדית $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ יש לפתח פתרון פורמלי הדומה לזה שפותח

$$\text{בהרצאה ל-} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(ב) בעזרת פתרון פורמלי זה יש לפתח השיטה המפורשת לפתרון משוואת החום הדו-ממדית דלעיל.

שאלה 4

נניח שרוצים לפתור נומרית את הבעיה הבאה בעזרת השיטה הסתומה לחלוטין:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

עם תנאי שפה והתחלה:

$$U(0,t) = 0, \quad \frac{\partial U(1,t)}{\partial x} = M, \quad U(x,0) = U_0(x)$$

כאשר M הוא קבוע. יש לרשום בפרוטרוט את המערכת האלגברית התלת-אלכסונית שתצטרך לפתור בכל רמת זמן. כלומר מהם האלמנטים של המטריצה התלת-אלכסונית ושל וקטור אגף ימין?

בהצלחה!!!!