בס"ד

קורס תורת המספרים האלגוריתמית סמסטר א' תש"פ
מתרגל אחראי: איבראהים שאהין
כללי ההגשה כמו במטלה 1. תאריך הגשה 8/6 בשעה 23:55

מטלה 3

1. הראו כי אם $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ אזי n לא יכול להירשם כסכום של שני ריבועים שלמים, דהיינו: לא קיימים x, y שלמים כך ש- $n = x^2 + y^2$.

הדרכה: חלקו למקרים לפי השאריות השונות של x, y בחלוקה ב-4.

2. יהי p_i הראשוני ה– i ברשימת הראשוניים. כלומר $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ הוכיחו כי:

$$\forall \mathrm{i} \in \mathrm{N}: \mathrm{p_i} < 2^{2^{\mathrm{i}}}$$

הנחיה : השתמשו באינדוקציה, וברעיון של ההוכחה של אוקלידס לאינסופיות הראשוניים.

3. יהי p ראשוני כך ש: $\mathrm{p} + 4, \mathrm{p} + 2$ גם הם ראשוניים. הוכיחו כי $\mathrm{p} = 3$.

הנחיה: התבוננו בשארית החלוקה של p ב- 3 .

4. יהי $5 \leq$ p ראשוני . הראו כי

$$\mathrm{p}^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 24).$$

הדרכה: התבוננו בתירגול שקילויות חלק 3. (מופיע במודל)

5. הוכיחו כי אם a מספר טבעי וגם $\mathrm{n} \geq 2$ כך ש: $a^n - 1$ ראשוני, אזי $\mathrm{a} = 2$, n ראשוני.

כדאי להשתמש בזהות הבאה: $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} +,,,, + a + 1)$.

6. יהי n מספר טבעי המקיים $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$. לאילו ערכים יכול n להיות שקול מודולו 8? הוכיחו.