מטלה מספר 1 – תורת המספרים

1. א.

נוכיח באינדוקציה חלשה:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{i}) = \mathrm{n}+1$$

נרצה להראות:

1. $1 \in S$
2. אם $k \in S$ אז גם $k+1 \in S$

<u>בסיס</u>: נוכיח עבור n=1

$$\prod_{i=1}^{1}(1+\frac{1}{1}) = 1+1 = 2$$

ולכן $1 \in S$

<u>צעד</u>: נניח שהטענה נכונה עבור $1 \leq k \in S$

$$\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{i}) = \mathrm{k}+1$$

ונראה כי $k+1 \in S$. כלומר, נראה כי (לכאן נרצה להגיע)

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+\frac{1}{i}) = (\mathrm{k}+1)+1 = k+2$$

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+\frac{1}{i}) = \prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{i})\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (\mathrm{k}+1)\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)+1$$

ואם כן קיבלנו:

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+\frac{1}{i}) = (\mathrm{k}+1)+1 = k+2$$

מ.ש.ל.

1. ב.

נוכיח באינדוקציה חלשה:

$2^n > n^2$ עבור כל $\mathbb{N} \ni n > 4$

נרצה להראות:

א. $5 \in S$

ב. אם $n \in S$ אז גם $n + 1 \in S$

<u>בסיס</u>: נוכיח עבור n=5

$$2^5 > 5^2$$
$$32 > 25$$

ולכן $5 \in S$

<u>צעד</u>: נניח שהטענה נכונה עבור $5 \leq n \in S$

$$2^n > n^2$$

ונראה כי $n + 1 \in S$. כלומר, נראה כי (לכאן נרצה להגיע)

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

$$2^{n+1} = 2 \cdot (2^n)$$

על פי ההנחה

$$2^n > n^2$$

ולכן

$$2^{n+1} > 2 \cdot (n^2)$$

נוכל להחליף באגף ימין את n^2 ב- $2n + 1$

מבלי לשנות את סדרי הגודל (אגף ימין>אגף שמאל)

הוכחה:

$$n^2 > 3n$$

/n = n > 3$(n^2 > 3n)$

ועבור כל n מתקיים $n > 3$ כיוון ש- $n > 4$

ובאותה מידה $3n > 2n + 1$

ולכן $n^2 > 3n > 2n + 1$

ואם כן קיבלנו:

$$2^{n+1} > n^2 + 2n + 1$$
$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

מ.ש.ל.

1. ג.

כמות התת קבוצות של קבוצה בת n איברים הוא 2^n

הוכחה:

נרצה להראות:

א. $1 \in S$

ב. אם $n \in S$ אז גם $n+1 \in S$

<u>בסיס</u>: נוכיח עבור n=1

$$2^1 = 2$$

וטענה זו נכונה כיוון שקבוצה החזקה של קבוצה עם איבר אחד תהיה עם 2 איברים (קבוצת האיבר, והקבוצה הריקה)

ולכן $1 \in S$

<u>צעד</u>: נניח שהטענה נכונה עבור $1 \leq n \in S$. כלומר, אם בקבוצה יש n איברים נקבל:

2^n איברים

ונראה כי $n+1 \in S$. כלומר, עבור קבוצה בת *n+1* איברים נקבל:

2^{n+1} איברים

הוכחה:

עבור קבוצת החזקה של קבוצה בת n איברים נקבל 2^n איברים ע"פ ההנחה, ומכיוון שאנחנו מוסיפים עבור הקבוצה בת ה- n איברים איבר נוסף, אזי עבור קבוצת החזקה בת ה- 2^n איברים נקבל בנוסף את אותם תתי הקבוצות כך שכל קבוצה כזו מכילה פעם אחת את האיבר שנוסף. כלומר, נקבל עוד 2^n איברים לקבוצת החזקה.

ואם כן קיבלנו:

$$2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

מ.ש.ל

2. א.

$$, g_2 = 2 , g_3 = 6 g_1 = 1$$

$$g_n = (n^3 - 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n) \cdot g_{n-3}$$

$$\forall\, n \geq 4$$

הוכחה שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $g_n = n!$

תהי $S \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת כל המספרים הטבעיים אשר מקיימים:

$$g_n = n!$$

בסיס: n = 4,5,6

$$g_4 = (4^3 - 3 \cdot (4)^2 + 2 \cdot (4)) \cdot g_{4-3} = 24 = 4!$$

$$g_5 = (5^3 - 3 \cdot (5)^2 + 2 \cdot (5)) \cdot g_{5-3} = 120 = 5!$$

$$g_6 = (6^3 - 3 \cdot (6)^2 + 2 \cdot (6)) \cdot g_{6-3} = 720 = 6!$$

לכן $4,5,6 \in S$

נגדיר קבוצה חדשה: תהי $T \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת כל המספרים הטבעיים אשר אינם מקיימים את $g_n = n!$. נניח בשלילה שאינה ריקה ומכיוון שT מוכלת בקבוצת הטבעיים אז לפי הגדרת W.O.P קיים בה מספר מינימלי. נסמן מספר זה ב-a.

בגלל ש- $4,5,6 \in S$ אז a > 7 ולכן $a - 1, a - 2, a - 3 \in \mathbb{N}$.

היות ו$a \in \mathbb{N}$ ומינימלי בT וגם $4,5,6 \in S$ נובע כי: $a - 1, a - 2, a - 3 \in S$.

משום ש$a - 1 \in S$, מתקיים: $g_{(a-1)} = (a - 1)!$.

משום ש$a - 2 \in S$, מתקיים: $g_{(a-2)} = (a - 2)!$.

משום ש$a - 3 \in S$, מתקיים: $g_{(a-3)} = (a - 3)!$.

נוכיח בשלילה. היות ו$a \in T$, מתקיים: $g_a \neq a!$.

נבודד את a ונקבל:

$$g_a = ((a)^3 - 3 \cdot (a)^2 + 2 \cdot (a)) \cdot g_{a-3}$$

$$g_a = a((a)^2 - 3 \cdot (a)^1 + 2) \cdot g_{a-3}$$

$$g_a = a(a - 1)(a - 2) \cdot g_{a-3}$$

משום ש- $a - 3 \in S$, מתקיים: $g_{(a-3)} = (a - 3)!$.

ולכן נקבל:

$$g_a = a \cdot (a - 1) \cdot (a - 2) \cdot (a - 3)!$$

$$g_a = a!$$

וזו סתירה. נובע כי $g_n = n!$ נכון עבור כל n טבעי.

2. ב.

הוכחה שלכל $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים $3|4^n + 5$

תהי $S \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת כל המספרים הטבעיים אשר מקיימים:

$$3|4^n + 5$$

בסיס: n=1

$$3|4^1 + 5 = 3|9$$

לכן $1 \in S$

נגדיר קבוצה חדשה: תהי $T \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת כל המספרים הטבעיים אשר אינם מקיימים את $3|4^n + 5$. נניח בשלילה שאינה ריקה ומכיוון שT מוכלת בקבוצת הטבעיים אז לפי הגדרת W.O.P קיים בה מספר מינימלי. נסמן מספר זה ב-a.

בגלל ש$1 \in S$ אז $a > 1$ ולכן $a - 1 \in \mathbb{N}$. היות ו$a \in \mathbb{N}$ ומינימלי בT נובע כי $a - 1 \in S$.

משום ש$a - 1 \in S$ מתקיים $3|4^{(a-1)} + 5$.

היות ו$a \in T$ מתקיים $3 \nmid 4^a + 5$.

$$3|4^a + 5 \quad = \quad 3|4 \cdot 4^{(a-1)} + 5 \quad = \quad 3|4^{(a-1)} + 3 \cdot 4^{(a-1)} + 5$$

3 מחלק בהכרח את $3 \cdot 4^{(a-1)}$.

ו3 מחלק גם את $4^{(a-1)} + 5$ ע"פ ההנחה.

וא"כ 3 בהכרח מחלק את הביטוי:

$$3|4^{(a-1)} + 3 \cdot 4^{(a-1)} + 5 \quad = \quad 3|4 \cdot 4^{(a-1)} + 5 \quad = \quad 3|4^a + 5$$

וזו סתירה. נובע כי $3|4^n + 5$ נכון עבור כל n טבעי.

.3

אם $n \nmid 2$ וגם $3|n$ אזי $24|n^2+15$

הוכחה:

ע"פ משפט החלוקה כיוון שn מתחלק ב3 ניתן לייצגו ע"י $3 \cdot k$.

k הוא אי זוגי משום ש$n \nmid 2$ ובאותה מידה $3 \cdot k \nmid 2$.

משום שk הוא מספר אי זוגי כלשהו ניתן לייצגו ע"י (2x+1) כך ש- $x \in \mathbb{Z}$.

כלומר, נקבל:

$$24|(3 \cdot (2x+1))^2 + 15$$

נפתח סוגריים:

$$24|9 \cdot (2x+1)^2 + 15$$
$$24|9(4x^2+4x+1) + 15$$
$$24|36x^2+36x+9+15$$
$$24|36x^2+36x+24$$
$$24|12 \cdot (3x^2+3x+2)$$
$$24|12 \cdot (x(x+1)+2(x^2+x+1))$$

הביטוי $2(x^2+x+1)$ בהכרח מתחלק ב2.

הביטוי $x(x+1)$ גם הוא מתחלק ב2 - לשם כך נשקול 2 מקרים:

1. במידה ו-X הוא זוגי נקבל על פי משפט החלוקה:
$$2y(2y+1)$$
ואז בהכרח $x(x+1)$ זוגי.
2. במידה ו-X הוא אי זוגי נקבל על פי משפט החלוקה:
$$(2y+1)\big((2y+1)+1\big) = (2y+1)(y+1)2$$
ואז בהכרח גם כאן $x(x+1)$ זוגי.

ואם כן כל הביטוי: $x(x+1)+2(x^2+x+1)$ בהכרח מתחלק ב2.

כלומר, נתן לייצגו כ- $2 \cdot P$.

א"כ קיבלנו:

$$24|12 \cdot (2P)$$
$$24|24P$$

מ.ש.ל