תשובות מטלה 1 - קורס אלגוריתמי ניווט

עבור שאלות 1-4: נתונה לנו חפיסה בעלת 54 קלפים (המורכבת מ-4 חבילות של 13 קלפים ממוספרים + 2 קלפי "ג'וקר").

1. צריך לחשב את ההסתברות לשלוף מספר בטווח 2-5 (כולל). ישנם 4 קליפים בטווח 2-5 (כולל) בכל אחת מארבעת החבילות (של 13) ולכן ההסתברות הינה:
$$\frac{4\cdot 4}{54}=\frac{16}{54}=\frac{8}{27}=0.296..$$
2. שולפים קלף ומחזירים ואז מערבבים ושולפים שוב. צ"ל ההסתברות לשליפת 2 קלפי יהלום. ישנם 13 קלפי יהלום. מאחר ואנו מחזירים את הקלפים ומערבבים נניח אי תלות ולכן ההסתברות הינה:
$$\frac{13}{54}\cdot\frac{13}{54}=\frac{169}{2916}=0.057..$$
3. צ"ל את ההסתברות לשליפת 4 קלפים מצורות שונות. שולפים כל קלף מבלי להחזיר. בהתחלה ישנם 52 אפשרויות לשלוף קלף שאינו ג'וקר. לאחר מכן, ההסתברות לשלוף קלפים שאינם באותו צבע היא הכמות של שאר הקלפים שאינם בצבע שנבחר מתוך כלל הקלפים שנותרו ולכן:
$$\frac{52}{54}\cdot\frac{39}{53}\cdot\frac{26}{52}\cdot\frac{13}{51}=\frac{2197}{24327}=0.090..$$
4. צ"ל את ההסתברות לשליפת 3 קלפים שסכומם שווה או גדול מ4. נשים לב כי במקרה זה, רק אם נשלוף שלושה 1-ים נפסיד. לכן נחשב את ההסתברות המשלימה:
$$1-\frac{4}{54}\cdot\frac{3}{53}\cdot\frac{2}{52}=\frac{6200}{6201}0.999..$$
5. מקבלים עץ בהסתברות של 60%. צ"ל את ההסתברות לקבל 3 עץ או 3 פלי:
$$\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{7}{25}=0.28$$
6. ישנו מטבע שבשני צידו פלי וגם 3 מטבעות הוגנים. צ"ל את ההסתברות לקבל פלי. נשים לב כי נקבל פלי אם בחרנו במטבע האינו הוגן שבשני צדדיו פלי (בהכרח יצא תמיד פלי) או אם בחרנו באחד מהמטבעות ההוגנים אך גם קיבלנו פלי בהטלה. לכן:
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{5}{8}=0.625$$
7. מטילים 2 קוביות. צ"ל את ההסתברות לקבל סכום שווה או גדול מ9 בשני הקוביות. תחילה, נשים לב למספר המקרים בהם נקבל לכל הפחות סכום של 9 בשני הקוביות:
9: (6,3), (3,6), (5,4), (4,5),
10: (5,5), (6,4), (4,6),
11: (6,5), (5,6),
12: (6,6),
כלומר, 10 מקרים מתוך סך המקרים (36). לכן, ההסתברות הינה: $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}=0.277..$
8. מטילים 4 קוביות. כל קובייה בעלת 4 פאות. צ"ל את ההסתברות לקבל בכל קובייה תוצאה שונה. לכן ההסתברות הינה מכפלת ההסתברויות כך שכל קובייה מראה תוצאה אחרת מהקוביות הקודמות. לכן:
$$1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}=0.093..$$

9. <u>בוחרים לכרטיס אשראי קוד PIN בכל 4 ספרות (כל הקומבינציות מותרות). צ"ל את ההסתברות לקבל קוד PIN המתחלק ב5 וגם מכיל בתוכו את הרצף 45.</u>

נשים לב כי מספר שמתחלק ב5 מסתיים ב0 או ב5.

נסמן: X = כל מספר. Y = מספר שונה מ-4.

אם המספר מסתיים ב0 המספר מהצורה: X450 או 45X0 <= $2\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$

אחרת המספר מהצורה: XX45 <= $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$ (ספרנו גם את הרצף 4545)

או מהצורה: XXY5 <= X455 או 45Y5 <= $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$

תשובה: $0.0139=\frac{139}{10000}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot 2$

10. <u>ההסתברות של מכירת מחשב אחד (לפחות) ב8 שעות עבודה הינה 0.8. צריך לחשב את ההסתברות למכירת מחשב בתוך 2 שעות עבודה במהלך היום.</u>

נזכיר את הגדרת התפלגות פואסון:

X ~ poi(λ) אם לכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ (מחשב הסתברות בהינתן ממוצע λ).

במקרה שלנו:

$$0.8=\mathbb{P}(X\geq 1)=1-\mathbb{P}(X=0)=1-e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!}$$

כיוון שאנו מחסרים את המקרה בו $k=0$. כלומר, המקרה בו לא נמכר שום מחשב ב8 שעות עבודה.

מכאן נבודד את λ על מנת למצוא את ערך הממוצע.

$$0.8=1-e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!}=1-e^{-\lambda}\rightarrow 0.2=\ e^{-\lambda}\ \rightarrow\ \ln(0.2)=\ \ln\left(e^{-\lambda}\right)$$
$$\rightarrow\ -1.6\ =\ -\lambda\ \rightarrow\ \lambda=1.6$$

אבל הממוצע שקיבלנו הוא עבור 8 שעות. לכן, עבור 2 שעות הפרמטר הינו:

$$\frac{\lambda}{4}=\frac{1.6}{4}\approx 0.4$$

כעת, נציב בהתפלגות פואסון, ונקבל:

$$\mathbb{P}(X\geq 1)=1-\mathbb{P}(X=0)=1-e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^0}{0!}=1-e^{-\lambda}=1-e^{-0.4}=0.3$$