מגישים: אלמוג יעקב, ליאור עטיה

דחיסת נתונים - מטלה 2

שאלה 1

מספר הצמתים הפנימיים בעץ בינארי מלא בעל n עלים הינו $n-1$

נוכיח באמצעות אינדוקציה על מבנה העץ:

בסיס: עץ בעל עלה יחיד אין צמתים פנימיים

צעד: נניח שעבור כל העצים המלאים בעלי $n > k$ עלים יש $k-1$ צמתים פנימיים

ונוכיח עבור העצים המלאים בעלי n עלים:

יהי עץ מלא בעל n עלים ,מכיוון שהוא עץ מלא לכל צומת יש 2 בנים ובפרט לשורש.

נסתכל על הבנים של השורש, העץ הימני עץ מלא בעל m עלים ו- $m-1$ צמתים פנימיים,

העץ השמאלי הוא עץ מלא בעל $n-m$ עלים ו- $n-m-1$ צמתים פנימיים. ולכן בסה"כ הצמתים הפנימיים בעץ כולל השורש הוא: $m-1+n-m-1+1=n-1$

שאלה 2

נתונה התפלגות $\{p_1, \ldots, p_n\}$ ונניח כי $p_1 < p_2$ נראה כי מתקיים ש:

$$H(p_1-\epsilon, p_2+\epsilon, p_3, \ldots, p_n) > H(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$$

הוכחה

תחילה נשתמש במשפט הבא: נתונות $\{q_1, \ldots, q_n\}$ ו- $\{p_1, \ldots, p_n\}$

אז מתקיים ש: $-\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i$

נסמן: $H(p_1-\epsilon, p_2+\epsilon, p_3, \ldots, p_n) = H(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ו- $H(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n) = H(P)$

נשים לב שלאחר השימוש במשפט הנ"ל נותר ולהוכיח כי מתקיים:

$$-\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i < -\sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i = H(p_1-\epsilon, p_2+\epsilon, p_3, \ldots, p_n)$$

ע"פ הסימון שבחרנו השוני בין האגפים של האי שוויון הינו רק ב2 האיברים הראשונים ולכן נותר להוכיח:

$$-p_1 \log q_1 - p_2 \log q_2 < -q_1 \log q_1 - q_2 \log q_2$$

$$0 < p_1 \log q_1 + p_2 \log q_2 + -q_1 \log q_1 - q_2 \log q_2$$

$$0 < (p_1 - q_1) \log q_1 + (p_2 - q_2) \log q_2$$

$$0 < (p_1 - (p_1 - \epsilon)) \log q_1 + (p_2 - (p_2 + \epsilon)) \log q_2$$

$$0 < (\epsilon) \log q_1 + (-\epsilon) \log q_2$$

מגישים: אלמוג יעקב, ליאור עטיה

$$\epsilon \log q_2 < \epsilon \log q_1$$

ואכן הביטוי אמת מכיוון שע"פ בחירת האפסילון מתקיים:

$$q_1 = p_1 - \epsilon > p_2 + \epsilon = q_2$$

מכאן הראנו כי מתקיים:

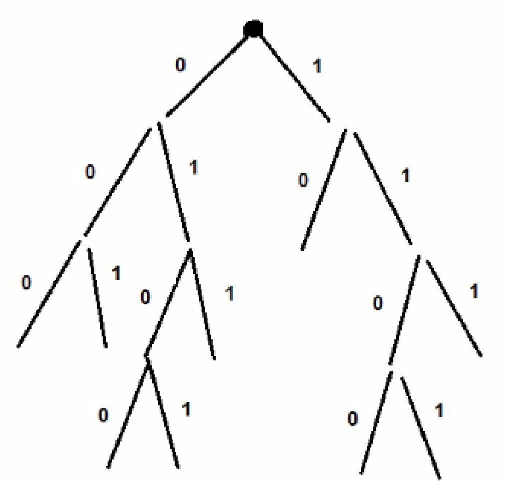
$$H(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \le -\sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i < -\sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i = H(p_1 - \epsilon, p_2 + \epsilon, p_3, \dots, p_n)$$

שאלה 3

א.

נבנה קוד שלם שהוא גם אפיקסי בעל 9 מילות קוד באורך משתנה:

$$\{10, 000, 011, 001, 111, 0100, 0101, 1100, 1101\}$$



העץ אינו פרפיקסי מכיוון שהמילים הינם בעלים.

ניתן לראות שהעץ גם אינו ספיקסי (ניתן להסיק זאת גם מהסעיף הבא כיוון שזהו מקרה פרטי).

ב.

טענת עזר: עבור עץ שלם X בגובה x כל תת-עץ שניקח מצד ימין של העץ יופיע גם בתחתית של צד שמאל של העץ. באופן אינטואיטיבי - נניח שלקחנו תת עץ G בגובה g בצד ימין של העץ. מכיוון שהעץ הינו שלם אזי בצד שמאל של העץ ברמה x-g ישנו תת עץ שלם בגובה g אשר בפרט מכיל בתוכו את התת עץ הנ"ל.

כעת, נראה בניה של עץ אפיקסי **כלשהו** בגובה n (2^n מילות קוד) ומכך נסיק שישנם אינסוף עצים אפיקסים.

נניח עץ שלם בגובה n. נראה כי אם נשנה את אורכי המילים יווצר עץ אפיקסי **ללא הקטנת מספר מילות הקוד**. ומכך ינבע שלא קיים חסם תחתון.

מכיוון שמילות הקוד נמצאות בעלים אזי נותר להוכיח שהעץ ספיקסי.

נמחק את מילות הקוד $10^{n-2}1$,$10^{n-2}0$ (אחד בהתחלה וכל השאר אפסים עד לרמה הלפני אחרונה).

מכאן נקבל את מילת הקוד 10^{n-2}. כלומר, מחקנו מילת קוד אחת.

עבור כל מילת קוד שמסתיימת ב- 10^{n-2} נוסיף 2 בנים (ע"פ טענת העזר קיימת בהכרח מילת קוד כזאת לפחות בצד השמאלי של העץ כך שהוספנו לפחות מילת קוד אחד [ומכאן לא הקטנו את מספר מילות הקוד]).

נשים לב שמילות הקוד שהארכנו הינן כעת באורך n+1 ומהצורה של $Y10^{n-2}0, Y10^{n-2}1$.

נזכיר כי כל מילת קוד אינה יכולה להיות פרפיקסית/אפיקסית של מילת קוד באותו גובה

לכן, נותר להוכיח 2 מקרים:

א. מילת הקוד 10^{n-2} אינה ספיקסית של כל שאר מילות הקוד.
ב. מילות הקוד באורך n אינן ספיקסיות של המילים באורך n+1.

הוכחה:

א. נובע מהבניה – מכיוון שהוספנו לכל מילת קוד שמסתיימת ב- 10^{n-2} שני עלים (0 ו-1) אזי קיבלנו מילה חדשה מהצורה $Y10^{n-2}0$ או מהצורה $Y10^{n-2}1$.
מכאן, במילת הקוד הקצרה מופיע 1 ברמה n-1 מלמטה. אך במילת הקוד הארוכה מופיע 0 ברמה n-1 מלמטה ולכן המילה הקצרה אינה יכולה להיות ספיקסית עבור שאר המילים שהיו פוטנציאליות.
ב. נניח בשלילה שקיימת מילה z באורך n שהינה ספיקסית של מילה באורך n+1.
מכאן, מכיוון שצורת המילים באורך n+1 הינן $Y10^{n-2}0, Y10^{n-2}1$ וע"פ הגדרת ספיקס, המילה z הינה מהצורה $10^{n-2}1$ או $10^{n-2}0$. אך זה לא יתכן כיוון שע"פ הבניה מחקנו את מילות הקוד הללו.
זאת בסתירה להנחה ולכן נסיק שלא קיימת מילת ספיקסית כזו.

מ.ש.ל.