Almog Jakov: https://github.com/AlmogJakov

הסתברות 2 – דף נוסחאות

מרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$:

- $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$.
- $\sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\omega) = 1 - \sum_{\omega\in A^c} \mathbb{P}(\omega)$.
- $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$.
- $\mathbb{P}(A\cup B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

מרחב הסתברות אחיד:

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

חוק ההסתברות השלמה:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|C)\cdot\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A|C^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)$$

הסתברות מותנית:

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

נוסחאת בייס (Bayes):

$\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$

מתקיים - $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$.

מאורעות בלתי תלויים:

- A,B בלתי תלויים אם מתקיים $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.
- A ו-B בת"ל אמ"מ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$
- A ו-B בת"ל אמ"מ $\mathbb{P}(A\cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$

משתנה מקרי -> $X: \Omega \to S$:

- $\mu(X) \neq 0$ יקרא התומך
- התפלגות של משתנה מקרי $\mu_x(X) = \mathbb{P}(X = x)$
- X ו-Y בעלי אותה התפלגות אם $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$ לכל x
- תנאים להתפלגות:
  - $\mathbb{P}(X = x) \in [0,1]$
  - הקבוצה המקיימת $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ היא סופית או בת מניה
  - $\sum_{x\in S} \mu(x) = 1$
- זוגות של משתנים מקריים $(x,y)_\omega = (X(\omega), Y(\omega)) \in S^2$
- התפלגות משותפת של X ו-Y:
- $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y)\cdot\mathbb{P}(Y = y|X = x)$
- התפלגות שולית (חסר)

התפלגות משותפת

יהיו X,Y מ"מ אזי ההתפלגות המשותפת שלהם:

$P(X = k, Y = l)$ (חיתוך של שני המאורעות)

התפלגות אחידה:

- <u>התפלגות:</u> X ~ U(S) אם $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|S|}$ לכל $x \in S$
- <u>תוחלת:</u> אם $S = \{a, a+1, \dots, b\}$, אז $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

התפלגות ברנולי:

- <u>התפלגות:</u> X ~ Ber(p) אם מתקיים
  $\mathbb{P}(X = 1) = p,\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$
  (אינדיקטור, סכום משתנים).
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X) = p$.
  <u>הוכחה:</u> $\mathbb{E}(X) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0 = p$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

התפלגות בינומית:

- <u>התפלגות:</u> X ~ Bin(n, p) אם לכל $0 \le k \le n$,
  $\sum_k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$
  (n – נסיונות, p – הצלחות, סופר את מס' ההצלחות).
- <u>דוגמא:</u> מבצעים ניסוי n פעמים מה ההסתברות להצליח בדיוק בk ניסויים בת"ל.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X) = np$.
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

התפלגות גיאומטרית:

- <u>התפלגות:</u> X ~ Geom(p) אם לכל $k\in\mathbb{N}^+$
  $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
  (מנסים עד שמצליחים, משתמשים בתנאי שהמשתנה סופר את כמות הניסויים).
- <u>דוגמא:</u> מבצעים k ניסויים מקבלים הצלחה לראשונה בפעם הk.
  p - הסתברות להצלחה בודדת.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

התפלגות היפר-גיאומטרית:

- <u>התפלגות:</u> X ~ Hyp(N,D,n) אם לכל $0 \le k \le n$ מתקיים:
  $$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
- <u>דוגמא:</u> נתונות N עוגות מתוכן בוחרים n עוגות ללא החזרה ומעוניינים בתת קבוצה מסוימת המכילה D עוגות. X - מה ההסתברות שנבחר X עוגות מתוך הD עוגות שהתעניינו בהם.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X) = n\cdot\frac{D}{N}$.
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X) = \frac{D\cdot n\cdot(N-D)\cdot(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}$

התפלגות בינומית שלילית:

- <u>התפלגות:</u> X ~ NB(r, p) אם לכל $n \ge r$
  $\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$
  (r – מס' ניסיונות עד להצלחה, p – הסתברות להצלחה).
- <u>דוגמא:</u> מבצעים סדרת ניסויים ועוצרים כשהגענו להצלחה אר.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$.
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

התפלגות פואסון:

- <u>התפלגות:</u> X ~ poi(λ) אם לכל $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$
  מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$
  מחשב הסתברות בהינתן ממוצע λ.
  לדוגמא: שחקן קולע בממוצע 6 זריקות בשעה, מה הסיכוי שיקלע 4 זריקות בשעה?. (כלומר, λ = 6. נציב k = 4).
- <u>דוגמא:</u> מתארת בכמה זמן בממוצע תופעה כלשהי תתקיים.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

תוחלת (הגדרה עבור משתנים מקריים אי שליליים):

$\mathbb{E}(x) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega)X(\omega)$.

- <u>יהיו X ו-Y משתנים מקריים ויהי $c \in \mathbb{R}$ אזי:</u>
  - הומוגניות: $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$.
  - ליניאריות: $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
  - $\mathbb{E}(c) = c$

* אם X, Y בלתי תלויים אז: $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

* אם $X_1, \dots, X_n$ מ"מ אזי גם סכומם הוא מ"מ ומתקיים:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

* תוחלת מכפלת משתנים <u>בלתי תלויים</u> מקיימת:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:

- <u>הגדרה:</u> $X: \Omega \to S$ משתנה מקרי ותהי $f: S \to \mathbb{R}$ פונק', אזי $f(X)$ הוא משתנה מקרי.
- אם $f(X)$ הינה חיובית $f: S \to [0,\infty)$ אזי:
  $$\mathbb{E}(f(x)) = \sum_x f(x)\cdot\mathbb{P}(X = x)$$

* אם f פונ' לינארית אזי: $\mathbb{E}(f(x)) = f(\mathbb{E}(x))$

תוחלת מותנה

כאשר משתנה מקרי אחד תלוי במשתנה מקרי אחר.

$$\mathbb{E}(Y|X = n) = \sum_k k\cdot P(Y = k|X = n)$$

הגדרת תוחלת מותנה בקבוצת מאורעות:

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\omega|A)$$

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_k k\cdot P(X = k|A)$$

הגדרה:

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|Y = Y(\omega))$$

נוסחת התוחלת השלמה: (X תלוי ב-Y)

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \sum_y \mathbb{E}(X|Y = y)\cdot P(Y = y)$$

שונות

$$Var(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

- ליניאריות:
  - $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ אם X, Y בת"ל
  - $Var(aX) = a^2 Var(X)$.
  - $Var(a) = 0$.
- תמיד אי שלילית: $Var(X) \ge 0$

שונות משותפת

- X ו-Y משתנים מקריים עם תוחלת סופית, השונות המשותפת שלהם מוגדרת כך:

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)\cdot\left(Y - \mathbb{E}(Y)\right)\right) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

הערה: $\mathbb{E}(XY) = \sum_a \sum_b ab\cdot P(X = a, Y = b)$

- בפרט $cov(X,X) = var(X)$
- אם X ו-Y משתנים בעלי שונות סופיות, אזי $\mathbb{E}(|XY|), \mathbb{E}((X-Y)^2), \mathbb{E}((X+Y)^2)$ סופיות.
- X ו-Y מתואמים חיובית אם $cox(X,Y) > 0$, מתואמים שלילית אם $cov(X,Y) < 0$
  ובלתי מתואמים אם $cov(X,Y) = 0$
- אם X ו-Y בת"ל $(\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\cdot\mathbb{P}(Y = y))$ אזי $cov(X,Y) = 0$. כלומר, הם בלתי מתואמים.
- **תכונות:**
  - $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
  - $cov(aX, bY) = a\cdot b\cdot cov(X,Y)$
  - $cov(X+Z, Y) = cov(X,Y) + cov(Z,Y)$
  - $var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y)$
  - $var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n var(X_i) + 2\sum_{1\le i\le j\le n} cov(X_i, X_j)$
  - מסקנה: אם $X_1, \dots, X_n$ בעלי שונות סופית ובלתי תלויים בזוגות, אזי מתקיים:

$$var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n var(X_i).$$

באופן כללי: (אם $X_1, \dots, X_n$ בעלי תוחלת סופית)

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\cdot\sum_{1\le i<j\le n} Cov(X_i, X_j)$$

הערה עבור הגדרת שונות לפי Cov:

כשנחשב שונות של משתנים שלא ידוע אם ב"ת נשתמש ב:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

אחרת, (אם הם בוודאות ב"ת) ניתן לפצל אותם כך:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

הגדרה:

אם X מ"מ ומאורע A מקיים $P(A) > 0$, אזי:

$$Var(X|A) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X|A)\right)^2 \middle| A\right) = \mathbb{E}(X^2|A) - (\mathbb{E}(X|A))^2$$

הגדרה:

$Var(X|Y)(\omega) = Var(X|Y = Y(\omega))$.

חוק השונות השלמה

אם X,Y מ"מ בעלי תוחלת סופית, אזי:

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y))$$

מקדם המתאם (נרמול ה-Cov)

ערך מספרי המכמת את המתאם, כלומר את הקשר הסטטיסטי, בין 2 משתנים או יותר. 1 היא התאמה הכי חזקה. 1- הכי חלשה.

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)\cdot Var(y)}}$$

תכונות מקדם המתאם:

1. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
2. $\rho(x+a, y) = \rho(x,y)$ לכל $a \in \mathbb{R}$.
3. $\rho(a\cdot x, y) = \frac{a}{|a|}\cdot\rho(x,y)$ לכל $0 \neq a \in \mathbb{R}$.
4. $\rho(x,x) = 1$.
5. $\rho(x,y) = 0 \leftrightarrow Cov(x,y) = 0$.

משפט 0.4:

1. $|\rho(y,x)| \le 1$
2. $\rho(y,x) = 1 \leftrightarrow$ בהסתברות 1 קיים ממשי b וגם $a > 0$ כך שמתקיים $p(y = ax + b) = 1$.
3. $\rho(y,x) = -1 \leftrightarrow$ בהסתברות 1 קיים ממשי b וגם $a < 0$ כך שמתקיים $p(y = ax + b) = 1$.

חישוב תוחלת ושונות של מ"מ ע"י שימוש באינדיקטורים

לדוגמא זורקים קובייה n פעמים. יהי X_i מ"מ המייצג את תוצאת זריקת i ויהי Y מ"מ הסופר את הפעמים בו קיבלנו אותה תוצאה ב2 זריקות סמוכות.

- חישוב התוחלת מתבצע ע"י שימוש באינדיקטורים על Y:

$$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i) = \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i)$$

ואז נחשב בנפרד:

$$E(Y_i) = P(Y_i = 1) = P(X_i = X_{i+1})$$

- חישוב השונות מתבצע ע"י שימוש באינדיקטורים על Y:

$$Var(Y) = Var(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i) = Cov(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i, \sum_{i=1}^{n-1} Y_i) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} Cov(Y_i, Y_j)$$

המשתנים תלויים רק אם הם מושפעים מהטלות חופפות ולכן:

מקרה 1: $i = j$. ולכן נחשב:

$$Cov(Y_i, Y_i) = Var(Y_i)$$

מקרה 2: $i = j + 1$ או $i = j - 1$. ולכן נחשב:

$$Cov(Y_i, Y_{i+1}) = Cov(Y_{i+1}, Y_i) = E(Y_i Y_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1})$$

כל שאר המקרים בת"ל ולכן ערכיהם הם 0 ע"פ הגדרת Cov. ובסה"כ:

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} Cov(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{n-1} Cov(Y_i, Y_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} Cov(Y_i, Y_{i+1})$$

הערה: אם מחשבים $Cov(X,Y)$ עם אינדיקטורים אזי עבור $i \neq j$ לא נשתמש ב-$2\,Cov(X_i, Y_j)$ כיוון שלא בהכרח $Cov(X_i, Y_j) = Cov(X_j, Y_i)$

<u>הסתברות 2</u>:

אי שוויון מרקוב

(חוסם את ההסתברות לכך שמ"מ אי שלילי יהיה גדול מקבוע)

יהי X משתנה מקרי אי-שלילי $X \ge 0$. ויהי $a > 0$ סקלר.

$$p(x \ge a) \le \frac{E(x)}{a}$$

אי שוויון צ'בישב

(מאפשר להעריך את ההתפלגות של מ"מ על ידי התוחלת שלו)

יהי X משתנה מקרי כלשהו עם שונות סופית. ויהי $t > 0$ סקלר.

$$p(|x - E(x)| \ge t) \le \frac{Var(x)}{t^2}$$

אם X מ"מ ומאורע A מקיים $P(A) > 0$

* כשידוע לנו מהו $Var(x)$ נעדיף א"ש צ'בישב מא"ש מרקוב.

אי שוויון צ'רנוף

אם $X_1, \dots, X_n$ מ"מ ב"ת המחזירים ערכים בטווח $[0,1]$ ואם $X = \sum X_i$ אז:

- לכל $t > 0$ מתקיים:
  $P(X \ge E(X) + t) \le e^{-2t^2/n}$ וגם:
  $P(X \le E(X) - t) \le e^{-2t^2/n}$.
  לחלופין: $P(|X - E(X)| \ge t) \le 2e^{-2t^2/n}$.
- לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:
  $P(X \le (1-\varepsilon)E(X)) \le e^{-\varepsilon^2 E(X)/2}$.
- אם $\varepsilon \le 3/2$ (בנוסף למקודם) אז:
  $P(X \ge (1+\varepsilon)E(X)) \le e^{-\varepsilon^2 E(X)/3}$.

אי שוויון צ'רנוף הופדינג

אם $X_1, \dots, X_n$ מ"מ ב"ת כך שמתקיים:

$X = \sum X_i$ וגם $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

אז לכל $t > 0$ מתקיים:

$P(X \ge t) \le e^{-t^2/2n}$ <u>וגם</u> $P(X \le -t) \le e^{-t^2/2n}$.

- נרמול משתנה מקרי על מנת שיחזיר ערכים 1,-1: (דוג')
  עבור מ"מ X_i המחזיר ערכים 1-,11 נגדיר מ"מ Y_i כך:

$$Y_i = \frac{2\cdot(X_i - max)}{(max - min)} + 1 = \frac{X_i - 11}{6} + 1 = \frac{X_i - 5}{6}$$

Almog Jakov: https://github.com/AlmogJakov

הסתברות 2 – דף נוסחאות

החוק החלש של המספרים הגדולים:

נתונה סדרת מ"מ $\{X_n\}$ ב"ת אחד בשני על אותו מרחב עם תוחלת סופית μ לכל אחד. אזי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

אינטואיציה: ממוצע התוצאה של הטלת קוביה הוא 3.5. ככל שנטיל יותר קוביות (יותר משתנים מקריים, בנוסחא כל X_i הוא תוצאת הטלת קוביה) הממוצע (חישוב הסכום וחלוקה במספר הקוביות) יתקרב ל 3.5 יותר ויותר עד שההסתברות לחרוג מהממוצע אפילו בקצת שואפת אל 0.

החוק החזק של המספרים הגדולים:

נתונה סדרת מ"מ $\{X_n\}$ ב"ת אחד בשני על אותו מרחב עם תוחלת סופית μ לכל אחד ושונות סופית. אזי מתקיים:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \mu\right) = 1.$$

בהוכחה הגבלנו לשונות סופית כדי להשתמש בצ'בישב.

מושגים המכלילים את החוקים לעיל:

סדרת מ"מ $\{X_n\}$ מתכנסת בהסתברות למ"מ X אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|\geq\varepsilon\}) = 0.$$

כלומר, מתקיים אם: $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

סדרת מ"מ $\{X_n\}$ מתכנסת כמעט בוודאות למ"מ X אם מתקיים:

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega: \lim_{n\to\infty}X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

כלומר, מתקיים אם: $\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}(X_n = X \; for \; every \; n\geq m) = 1$

[התכנסות כמעט בוודאות גוררת התכנסות בהסתברות (כיוון אחד)]

בעיית מספר רמזי

$R(k,l)$ = מהו הגרף עם מס' הקודקודים n המינימלי כך שיש בו בוודאות קליק בגודל k או קבוצה בת"ל בגודל l.

טענה: אם $\binom{n}{t}2^{1-\binom{t}{2}} < 1$ אז $R(t,t) > n$.

בשיטה ההסתברותית יש את הכלים הבסיסיים של הסתברות (מה שראינו ברמזי) ויש את המומנט הראשון והשני.

מומנט ראשון

(חסם חלש וליניארי - מרקוב)

נדבר בדר"כ על מספרים שלמים חיוביים ולכן: $P(X>0) = P(X\geq 1)$

ואז לפי מרקוב: $P(X>0) = P(X\geq 1) \leq \frac{E(X)}{1} = E(X)$.

ולכן פשוט נוכל לחשב תוחלת ובאמצעותה לדעת האם $E(X)$ חיובי או לא בנוסף נשתמש בשיטה זו כדי לחשב גבולות. אם ככל ש n גדל, התוחלת שואפת אל 0 זה אומר ש: $\lim_{n\to\infty}P(X=0) = 1$

כי הקיום תלוי בתוחלת ואם התוחלת שואפת אל 0 אז הקיום שואף אל 0 ולכן ערכו של X יהיה 0 בהסתברות השואפת אל 1.

מומנט שני

(חסם חזק וריבועי - צ'בישב) כשהתוחלת שואפת אל 1 ומעלה ולא נותנת שום חסם.

$$P(X=0) = P(X-E(X) = -E(X)).$$

$$\leq P(|X-E(X)| = E(X)) \leq P(|X-E(X)|\geq E(X)) \leq \frac{Var(X)}{E(X)^2}$$

כאן המטרה להראות ש: $P(X=0)\leq\ldots\to 0$ ולכן: $P(X=0)\to 0$.

גרפים אקראיים

1. $G(n,m)$ - מרחב הסתברות של כל הגרפים עם n קודקודים, m צלעות. זו התפלגות אחידה $P(G\in G(n,m)) = \frac{1}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$.
2. $G(n,p)$ - מרחב הסתברות של כל הגרפים עם n קודקודים כאשר כל צלע אפשרית בגרף נמצאת בהסתברות p. כאן זו לא התפלגות אחידה. כי: $P(G\in G(n,p)) = p^{|E|}(1-p)^{\frac{n}{2}-|E|}$.

תכונה מונוטונית עולה/יורדת

תכונה מונוטונית עולה: אם הוספה של צלעות יכולה לקיים אותה או לשמר את הקיום אך לא לגרום לתכונה לא להתקיים.

תכונה מונוטונית יורדת: ככל שמוסיפים צלעות הסיכוי לקיום התכונה יורד

הגדרת סף

פונקציה $p(n)$ היא סף אם:

$p = \omega(p(n))$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 1$.

$p = o(p(n))$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 0$.

סף חד: p_0 ייקרא סף חד של תכונה Q מונוטונית עולה אם:

$p\geq(1+\varepsilon)p_o$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 1$.

$p\leq(1-\varepsilon)p_0$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 0$.

אלגוריתמים אקראיים

לאס וגאס - אלגוריתם שתמיד צודק בתשובה. זמן הריצה שלו תלוי במ"מ

מונטה קרלו - אלגוריתם שטועה בהסתברות (בדרך כלל נמוכה):

- טעות חד צדדית: לדוגמה, כשצריך להחזיר true תמיד צודק. כשצריך להחזיר false יכול להחזיר true בהסתברות נמוכה.
- טעות דו צדדית: בכל צד יש טעות בהסתברות (בדר"כ נמוכה)

בדר"כ הם יהיו אלגוריתמים פשוטים. לעומת זאת הניתוח ההסתברותי יהיה בדר"כ יותר מסובך. כמעט תמיד נשתמש באינדיקטורים.

שיטות:

1. בדרך כלל מדובר בבחירה אקראית מתוך קבוצה של איברים.
2. חזרה על התהליך מס' פעמים מקטינה את ההסתברות לטעות.

מרחבי הסתברות רציפים

מרחב הסתברות רציף מקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

חישוב תוחלת (בדומה למרחבי הסתברות בדידים):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)dx$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f_X(x)dx$$

התפלגות אחידה רציפה:

- התפלגות PDF: $X\sim U([a,b])$ אם מתקיים:

$$f_X(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a} & if\ a\leq x\leq b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- התפלגות CDF: $X\sim U([a,b])$ אם מתקיים:

$$F_X(x) = \begin{cases}0 & if\ x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & if\ a\leq x\leq b\\ 1 & if\ x>b\end{cases}$$

- תוחלת: $\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2}$. הוכחה:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b+a}{2}$$

- שונות: $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. הוכחה:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

התפלגות אקספוננציאלית רציפה:

(מקבלת פרמטר λ)

- התפלגות PDF: אם מתקיים:

$$f_X(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & if\ x\geq 0\\ 0 & if\ x<0\end{cases}$$

- התפלגות CDF: אם מתקיים:

$$F_X(x) = \begin{cases}0 & if\ x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & if\ x\geq 0\end{cases}$$

- תוחלת: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. הוכחה (עם אינטגרציה בחלקים):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x}dx = \frac{b+a}{2}$$

- שונות: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

הגדרה: מ"מ אי-שלילי X נקרא חסר זכרון אם מתקיים:

$$\mathbb{P}(X>s+t|X>t) = \mathbb{P}(X>s)$$

יהי מ"מ אי-שלילי רציף X. מתקיים:

X הוא חסר זכרון אמ"מ X מתפלג אקספוננציאלית.

התפלגות נורמלית רציפה:

(מקבלת פרמטרים μ=תוחלת, σ^2=שונות)

- התפלגות PDF: אם מתקיים:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

- תוחלת: $\mathbb{E}(X) = \mu$. הוכחה (לאחר יצירת מ"מ סטנדרטי Y):

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sigma Y+\mu) = \sigma\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(\mu) = \mu$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

- שונות: $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. הוכחה (לאחר יצירת מ"מ סטנדרטי Y):

$$\mathrm{Var}(X) = Var(\sigma Y+\mu) = \sigma^2 Var(Y) = \sigma^2$$

אם X מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 וגם $Y = aX+b$.
אז Y מתפלג נורמאלית עם ממוצע $a\mu+b$ ושונות: $a^2\sigma^2$.

מסקנה: יצירת מ"מ נורמלי סטנדרטי Y ממ"מ נורמלי X: $Y = (X-\mu)/\sigma$

התפלגות נורמלית סטנדרטית:

- התפלגות PDF: אם מתקיים:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

- התפלגות CDF: אם מתקיים: (החישוב מתבצע עם טבלה מיוחדת)

$$\Phi_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$$

- תוחלת: $\mathbb{E}(Y) = 0$. הוכחה:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}dx$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

- שונות: $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1 - 0 = 1$.
- תכונות התפלגות נורמלית סטנדרטית:
  - $\mathbb{E}(g'(Y)) = \mathbb{E}(Y\cdot g(Y))$
  - $\mathbb{E}(Y^{n+1}) = n\mathbb{E}(Y^{n-1})$

משפט הגבול המרכזי:

אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של אינסוף משתנים מקריים ב"ת אחד בשני בעלי התפלגות זהה עם תוחלת זהה μ ושונות זהה σ^2 (לכולם) כאשר $\sigma>0$.
אם נסמן לכל $n\in N$: $Y_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. כך ש- F_n היא פונקציית הצפיפות המצטברת של Y_n. אז: $\lim_{n\to\infty}F_n(x) = \Phi(x)$.

נזכיר כי מתקיים: $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$

המשפט הופך כל סדרת משתנים (כדלעיל) למשתנה נורמאלי סטנדרטי)
המשפט עוזר כאשר לא ידועה ההתפלגות אלא רק הממוצע וסטיית התקן או שידועה ההתפלגות שקשה לחישוב ואנו רוצים חסם על הסתברות.
אם אין אינסוף משתנים אז המשפט נותן הערכה ולא משהו מדוייק אבל צריך כמות גדולה של משתנים וניתן יהיה להשתמש ב Y_n עבור n גדול.

משפט: (Berry-Esseen)

אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של אינסוף משתנים מקריים ב"ת אחד בשני בעלי התפלגות זהה עם תוחלת 0 ושונות σ^2 (לכל אחד מהם אותה תוחלת ושונות) כאשר $\sigma>0$. בנוסף: $E(|X_i|^3) = \rho$ אם נסמן לכל $n\in N$:
$Y_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{\sigma\sqrt{n}}$. כך ש F_n היא פונקציית הצפיפות המצטברת של Y_n.
אז: $|F_n(x)-\Phi(x)| \leq \frac{\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$. המשפט מבטיח, בהינתן התנאים הנוספים את הקצב שבו מתקרבים להתפלגות הנורמאלית הסטנדרטית.

אינטגרלים

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x))$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}$$

$$\int e^{mx+n}dx = \frac{1}{m}\cdot e^{mx+n}$$

$$\int\frac{1}{x}dx = \ln(x)$$

החלפת משתנה באינטגרציה (דוג'):

יהי משתנה x אז אם $y = (x-\mu)/\sigma$ אזי $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sigma}$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int g'f = fg - \int f'g$$

נוסחת הכלה והדחה:

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j=1}^n P(A_i\cap A_j) + \sum_{i<j<k=1}^n P(A_i\cap A_j\cap A_k) - \cdots(-1)^{n+1}P(\cap_{i=1}^n A_i)$$

כמות האפשרויות ליצור מספר בעל n ספרות ללא נקודות שבת:

$$n! * \sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}$$

הבינום של ניוטון (הרגיל)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

הבינום של ניוטון (השלילי)

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

סכום סדרה חשבונית

$$s_n = \sum_{k=1}^n(a_k) = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

סכום סדרה הנדסית סופית

$$s_n = \sum_{k=1}^n(a_k) = a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

סכום סדרה הנדסית אינסופית

כאשר $|q|<1$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k) = \frac{a_1}{1-q}$$

סכום ריבועי איברים

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

שוויוניים שימושיים:

- $\mathbb{P}(X\geq a, Y\geq b) = \sum_{x=a}^{\infty}\sum_{y=b}^{\infty}\mathbb{P}(X=x, Y=y)$
- אם X,Y מ"מ בת"ל:

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{j=1}^k\mathbb{P}(X+Y=k|X=j)\cdot\mathbb{P}(X=j)$$

$$= \sum_{j=1}^k\mathbb{P}(Y=k-j)\cdot\mathbb{P}(X=j)$$

- אם X מ"מ המקבל רק ערכים אי שליליים אזי:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)$$

- $P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$

טורים ולימיטים שימושיים:

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = e-1$
- $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
- $\sum_{n=1}^k\frac{1}{n} \leq (lnk)+1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{1-x} = 1$
- $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{e^n})^n = 1$
- $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$
- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}\ldots = e^x$ כאשר $-\infty<x<\infty$. (זהו טור מקלורן).
(זהו מקרה פרטי של הטור הקודם).
- $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$
- $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i = \frac{1}{(1-x)^2}$ לכל $-1<x<1$.
- $\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ לכל $-1<x<1$.
(ניתן להוכיח ע"י התפלגות גיאומטרית).
- $1-x \leq e^{-x} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$
- $\binom{n}{c}\leq n^c$ כאשר c קבוע. לדוגמה $\binom{n}{2}\leq n^2$
- איך להפוך x למעריכי: $x = e^{\ln(x)}$

זהויות שימושיות:

- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
- $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k} = 2^n$
- $\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k} = 0$
- $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
- $\binom{2n}{n} = 2\binom{n}{2} + n^2$
- $\sum_{k=0}^n\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$
- $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{k} = \binom{2n}{n-1}$
- $\sum_{k=0}^n 2^k\binom{n}{k} = 3^n$
- $\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2} = n^2$
- $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$
- $\sum_{i=0}^k\binom{m}{i}\binom{n}{k-1} = \binom{m+n}{k}$
- $\sum_{i=0}^n\binom{k+i}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$
- $\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$
- $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$
- $\sum_{k=0}^{n-m}\binom{m+k}{m} = \sum_{k=m}^n\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
- $\sum_{k=0}^n k\cdot k! = (n+1)!-1$
- $(k\leq n-1), \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} \leq \binom{n}{k}\binom{n}{k}$
- $\binom{n}{m+k} \leq \binom{n}{m}\binom{n-m}{k}$
- $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$