Adi Hoftman: https://github.com/adihoftman
Almog Jakov: https://github.com/AlmogJakov

הסתברות – דף נוסחאות

מרחב הסתברות:
$(\Omega,\mathbb{P})$:
- $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1$.
- $\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)=1-\sum_{\omega\in A^c}\mathbb{P}(\omega)$.
- $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.
- $\mathbb{P}(A\cup B)\le\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

מרחב הסתברות אחיד:
$$\mathbb{P}(\omega)=\frac{1}{|\Omega|},\ \mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

חוק ההסתברות השלמה:
$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A|C)\cdot\mathbb{P}(C)+\mathbb{P}(A|C^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)$$

הסתברות מותנית:
$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

נוסחאת בייס (Bayes):
$\mathbb{P}(A)>0,\mathbb{P}(B)>0$
מתקיים - $\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$.

מאורעות בלתי תלויים:
- $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)$
- A ו-B בת"ל אמ"מ $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A|B)$
- A ו-B בת"ל אמ"מ:
  - $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
  - $\mathbb{P}(A\cap B^c)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$
  - $\mathbb{P}(A^c\cap B)=\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$
  - $\mathbb{P}(A^c\cap B^c)=\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$
- עבור $n=3$:
  - $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
  - $\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$
  - $\mathbb{P}(C\cap B)=\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B)$
  - $\mathbb{P}(A\cap C\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B)$

משתנה מקרי -> $X:\Omega\to S$:
- $\mu(X)\neq 0$ יקרא התומך
- התפלגות של משתנה מקרי $\mu_x(X)=\mathbb{P}(X=x)$
- X ו-Y בעלי אותה התפלגות אם $\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(Y=x)$ לכל x
- תנאים להתפלגות:
  - $\mathbb{P}(X=x)\in[0,1]$
  - הקבוצה המקיימת $\mathbb{P}(X=x)\neq 0$ היא סופית או בת מניה
  - $\sum_{x\in S}\mu(x)=1$
- זוגות של משתנים מקריים $(x,y)_\omega=(X(\omega),Y(\omega))\in S^2$
- התפלגות משותפת של X ו-Y:
- $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(Y=y)\cdot\mathbb{P}(Y=y|X=x)$
- התפלגות שולית (חסר)

אי תלות: A,B בלתי תלויים אם מתקיים $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.

התפלגות משותפת
יהיו X,Y מ"מ אזי ההתפלגות המשותפת שלהם:
$P(X=k,Y=l)$ (חיתוך של שני המאורעות)

התפלגות אחידה:
- <u>התפלגות:</u> X ~ U(S) אם $\mathbb{P}(X=x)=\frac{1}{|S|}$ לכל $x\in S$
- <u>תוחלת:</u> אם $S=\{a,a+1,\dots,b\}$, אז $\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}$.

<u>הוכחה:</u>
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=a}^{b}k\cdot\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=a}^{b}\frac{k}{b-a+1}=\frac{1}{b-a+1}\cdot\sum_{k=a}^{b}k=\frac{1}{b-a+1}\cdot\frac{(b+a)\cdot(b-a+1)}{2}=\frac{a+b}{2}$$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.

התפלגות ברנולי:
- <u>התפלגות:</u> X ~ Ber(p) אם מתקיים $\mathbb{P}(X=1)=p,\ \mathbb{P}(X=0)=1-p$
(אינדיקטור, סכום משתנים).
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X)=p$.
<u>הוכחה:</u> $\mathbb{E}(X)=p\cdot1+(1-p)\cdot0=p$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X)=p(1-p)$.

התפלגות בינומית:
- <u>התפלגות:</u> X ~ Bin(n, p) אם לכל $0\le k\le n$,
$\sum_k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$
(n – נסיונות, p – הצלחות, סופר את מס' ההצלחות).
- <u>דוגמא:</u> מבצעים ניסוי n פעמים מה ההסתברות להצליח בדיוק k בא ניסויים בת"ל.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X)=np$.

<u>הוכחה:</u>
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)}=np\sum_{j=k-1}^{m=n-1}\binom{m}{j}p^j(1-p)^{m-j}=np$$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$.

התפלגות גיאומטרית:
- <u>התפלגות:</u> X ~ Geom(p) אם לכל $k\in\mathbb{N}^+$
$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$
(מנסים עד שמצליחים, משתמשים בתנאי שהמשתנה סופר את כמות הניסויים).
- <u>דוגמא:</u> מבצעים k ניסויים מקבלים הצלחה לראשונה רק בפעם הk.
p - הסתברות להצלחה בודדת.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$.

<u>הוכחה:</u>
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p\cdot k=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p\cdot[(k-1)+1]=\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p\cdot(k-1)+\sum_{K=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p=\sum_{\substack{m=0\\(m=k-1)}}^{\infty}(1-p)^m\cdot p\cdot m+1=(1-p)\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(1-p)^{m-1}\cdot p\cdot m+1=(1-p)\cdot\mathbb{E}(X)+1,$$
ולכן:
$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X)-p\cdot\mathbb{E}(X)+1\to p\cdot\mathbb{E}(X)=1\to\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$

התפלגות היפר-גיאומטרית:
- <u>התפלגות:</u> X ~ Hyp(N,D,n) אם לכל $0\le k\le n$ מתקיים:
$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- <u>דוגמא:</u> נתונות N עוגות מתוכן בוחרים n עוגות ומעוניינים בתת קבוצה מסוימת המכילה D עוגות.
x הוא מספר העוגות שהתעניינו בהם.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X)=n\cdot\frac{D}{N}$.

<u>הוכחה:</u>
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}=n\cdot\frac{D}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{D-1}{k-1}\cdot\binom{N-1-(D-1)}{n-1-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}=n\cdot\frac{D}{N}\cdot\sum_{\substack{l=0\\(l=k-1)}}^{n-1}\frac{\binom{D-1}{l}\cdot\binom{N-1-(D-1)}{n-1-l}}{\binom{N-1}{n-1}}=n\cdot\frac{D}{N}\cdot1=n\cdot\frac{D}{N}$$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X)=\frac{D\cdot n\cdot(N-D)\cdot(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}$

התפלגות פואסון:
- <u>התפלגות:</u> X ~ poi(λ) אם לכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$
מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$
מחשב הסתברות בהינתן ממוצע λ.
לדוגמא: שחקן קולע בממוצע 6 זריקות בשעה, מה הסיכוי שיקלע 4 זריקות בשעה?. (כלומר, λ = 6. נציב k = 4).
- <u>דוגמא:</u> מתארת בכמה זמן בממוצע תופעה כלשהי תתקיים.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X)=\lambda$.

<u>הוכחה:</u>
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k\ge0}k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{k\ge1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot\sum_{\substack{j\ge0\\(j=k-1)}}\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X)=\lambda$.

התפלגות בינומית שלילית:
- <u>התפלגות:</u> X ~ NB(r, p) אם לכל $n\ge r$
$\mathbb{P}(X=n)=\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$
(r – מס' ניסיונות עד להצלחה, p – הסתברות להצלחה).
- <u>דוגמא:</u> מבצעים סדרת ניסויים ועוצרים כשהגענו להצלחה אר.
- <u>תוחלת:</u> $\mathbb{E}(X)=\frac{r}{p}$.

<u>הוכחה:</u>
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=r}^{\infty}n\cdot\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$$
$$=\frac{r}{p}\cdot\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}\cdot p^{r+1}\cdot(1-p)^{n-r}.\ \sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r}\cdot p^{r+1}\cdot(1-p)^{n-r}$$
$$=\sum_{m=r+1}^{\infty}\binom{m-1}{r}\cdot p^{r+1}\cdot(1-p)^{m-(r+1)}$$
$$=1\to\mathbb{E}(X)=\frac{r}{p}\cdot1=\frac{r}{p}$$
- <u>שונות:</u> $\mathrm{Var}(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$.

תוחלת (הגדרה עבור משתנים מקריים אי שליליים):
$\mathbb{E}(x)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)X(\omega)$.
- <u>יהיו X ו-Y משתנים מקריים ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי:</u>
  - הומוגניות: $\mathbb{E}(cX)=c\mathbb{E}(X)$.
  - לינאריות: $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.
  - $\mathbb{E}(c)=c$

* אם X,Y בלתי תלויים אז: $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
* אם $X_1,\dots,X_n$ מ"מ אזי גם סכומם הוא מ"מ ומתקיים:
$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$
* תוחלת מכפלת משתנים <u>בלתי תלויים</u> מקיימת:
$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי:
- <u>הגדרה:</u> $X:\Omega\to S$ משתנה מקרי ותהי $f:S\to\mathbb{R}$ פונק', אזי $f(X)$ הוא משתנה מקרי.
- אם $f(X)$ הינה חיובית $f:S\to[0,\infty)$ אזי:
$$\mathbb{E}(f(x))=\sum_{x}f(x)\cdot\mathbb{P}(X=x)$$
* אם f פונ' לינארית אזי: $\mathbb{E}(f(x))=f(\mathbb{E}(x))$

תוחלת מותנה
כאשר משתנה מקרי אחד תלוי במשתנה מקרי אחר.
$$\mathbb{E}(Y|X=n)=\sum_{k}k\cdot P(Y=k|X=n)$$
הגדרת תוחלת מותנה בקבוצת מאורעות:
$$\mathbb{E}(X|A)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\cdot P(\omega|A)$$
$$\mathbb{E}(X|A)=\sum_{k}k\cdot P(X=k|A)$$

הגדרה:
$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega)=\mathbb{E}(X|Y=Y(\omega))$$

נוסחת התוחלת השלמה: (X תלוי ב-Y)
$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))=\sum_{y}\mathbb{E}(X|Y=y)\cdot P(Y=y)$$

שונות
$$Var(X)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2$$
- ליניאריות:
  - $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$ אם X,Y בת"ל
  - $Var(aX)=a^2Var(X)$.
  - $Var(a)=0$.
- תמיד אי שלילית: $Var(X)\ge0$

שונות משותפת
- X ו-Y משתנים מקריים עם תוחלת סופית, השונות המשותפת שלהם מוגדרת כך:
$$cov(X,Y)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)\cdot\left(Y-\mathbb{E}(Y)\right)\right)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
הערה: $\mathbb{E}(XY)=\sum_a\sum_b ab\cdot P(X=a,Y=b)$
בפרט $cov(X,X)=var(X)$
- אם X ו-Y משתנים בעלי שונות סופיות, אזי $\mathbb{E}(|XY|),\mathbb{E}((X-Y)^2),\mathbb{E}((X+Y)^2)$ סופיות.
- X ו-Y מתואמים חיובית אם $cox(X,Y)>0$, מתואמים שלילית אם $cov(X,Y)<0$ ובלתי מתואמים אם $cov(X,Y)=0$
- אם X ו-Y בת"ל $(\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y))$ אזי $cov(X,Y)=0$. כלומר, הם בלתי מתואמים.
- **תכונות:**
  - $cov(X,Y)=cov(Y,X)$
  - $cov(aX,bY)=a\cdot b\cdot cov(X,Y)$
  - $cov(X+Z,Y)=cov(X,Y)+cov(Z,Y)$
  - $var(X+Y)=var(X)+var(Y)+2cov(X,Y)$
  - $var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}var(X_i)+2\sum_{1\le i\le j\le n}cov(X_i,X_j)$
  - מסקנה: אם $X_1,\dots,X_n$ בעלי שונות סופית ובלתי תלויים בזוגות, אזי מתקיים: $var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}var(X_i)$.

באופן כללי: (אם $X_1,\dots,X_n$ בעלי תוחלת סופית)
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\cdot\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$$

הערה עבור הגדרת שונות לפי Cov:
כשנחשב שונות של משתנים שלא ידוע אם ב"ת נשתמש ב:
$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$
אחרת, (אם הם בוודאות ב"ת) ניתן לפצל אותם כך:
$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

הגדרה:
אם X מ"מ ומאורע A מקיים $P(A)>0$, אזי:
$$Var(X|A)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X|A)\right)^2\middle|A\right)=\mathbb{E}(X^2|A)-(\mathbb{E}(X|A))^2$$

הגדרה:
$Var(X|Y)(\omega)=Var(X|Y=Y(\omega))$.

חוק השונות השלמה
אם X,Y מ"מ בעלי תוחלת סופית, אזי:
$$Var(X)=\mathbb{E}(Var(X|Y))+Var(\mathbb{E}(X|Y))$$

בס"ד

Adi Hoftman: https://github.com/adihoftman
Almog Jakov: https://github.com/AlmogJakov

הסתברות – דף נוסחאות

מקדם המתאם

(נרמול ה-Cov)

ערך מספרי המכמת את המתאם, כלומר את הקשר הסטטיסטי, בין שני משתנים או יותר.
התאמה חזקה יותר כאשר המקדם מתקרב אל 1,
והתאמה חלשה יותר כאשר המקדם מתקרב אל 1-.

$$\rho(x,y)=\frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)\cdot Var(y)}}$$

תכונות מקדם המתאם:

1. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
2. $\rho(x+a,y)=\rho(x,y)$ לכל $a\in\mathbb{R}$.
3. $\rho(a\cdot x,y)=\frac{a}{|a|}\cdot\rho(x,y)$ לכל $0\neq a\in\mathbb{R}$.
4. $\rho(x,x)=1$.
5. $\rho(x,y)=0 \leftrightarrow Cov(x,y)=0$.

משפט 0.4:

1. $|\rho(y,x)|\leq 1$
2. $\rho(y,x)=1 \leftrightarrow$ בהסתברות 1 קיים ממשי b וגם $a>0$ כך שמתקיים $p(y=ax+b)=1$.
3. $\rho(y,x)=-1 \leftrightarrow$ בהסתברות 1 קיים ממשי b וגם $a<0$ כך שמתקיים $p(y=ax+b)=1$.

אי שוויון מרקוב

(חוסם את ההסתברות לכך שמשתנה מקרי אי שלילי יהיה גדול מקבוע)

יהי X משתנה מקרי $X\geq 0$. ויהי $a>0$ סקלר.

$$p(x\geq a)\leq\frac{E(x)}{a}$$

אי שוויון צ'בישב

(מאפשר להעריך את ההתפלגות של משתנה מקרי על ידי התוחלת שלו)

יהי X משתנה מקרי כלשהו. ויהי $t>0$ סקלר.

$$p(|x-E(x)|\geq t)\leq\frac{Var(x)}{t^2}$$

אם X מ"מ ומאורע A מקיים $P(A)>0$

* כשידוע לנו מהו $Var(x)$ נעדיף א"ש צ'בישב מא"ש מרקוב.

נוסחת הכלה והדחה:

$$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j=1}^{n}P\left(A_i\cap A_j\right)$$
$$+\sum_{i<j<k=1}^{n}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)-\cdots(-1)^{n+1}P(\cap_{i=1}^{n}A_i)$$

כמות האפשרויות ליצור מספר בעל n ספרות ללא נקודות שבת:

$$n!*\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

הבינום של ניוטון (הרגיל)

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

הבינום של ניוטון (השלילי)

$$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$$

סכום סדרה חשבונית

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k)=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

סכום סדרה הנדסית סופית

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k)=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

סכום סדרה הנדסית אינסופית

כאשר $|q|<1$

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k)=\frac{a_1}{1-q}$$

סכום ריבועי איברים

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

שוויוניים שימושיים:

- $\mathbb{P}(X\geq a,Y\geq b)=\sum_{x=a}^{\infty}\sum_{y=b}^{\infty}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$
- אם X,Y מ"מ בת"ל:
$$\mathbb{P}(X+Y=k)$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(X+Y=k|X=j)\cdot\mathbb{P}(X=j)$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(Y=k-j)\cdot\mathbb{P}(X=j)$$
- אם X מ"מ המקבל רק ערכים אי שליליים אזי:
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)$$
- $P(\cup_{i=1}^{n}A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

טורים ולימיטים שימושיים:

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}\ldots=e^x$
כאשר $-\infty<x<\infty$. (זהו טור מקלורן).
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1$
(זהו מקרה פרטי של הטור הקודם).
- $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$
- $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$
- $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i=\frac{1}{(1-x)^2}$ לכל $-1<x<1$.
- $\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot x^i=\frac{x}{(1-x)^2}$ לכל $-1<x<1$.
(ניתן להוכיח ע"י התפלגות גיאומטרית).

זהויות שימושיות:

- $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
- $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
- $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$
- $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$
- $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$
- $\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-1}=\binom{m+n}{k}$
- $\binom{2n}{n}=2\binom{n}{2}+n^2$
- $\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}$
- $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$
- $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$
- $\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$
- $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{k}=\binom{2n}{n-1}$
- $\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$
- $\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=n^2$
- $(n+1)\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n+1}{k+1}$
- $\sum_{k=0}^{n-m}\binom{m+k}{m}=\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$
- $\sum_{k=0}^{n}k\cdot k!=(n+1)!-1$
- $(k\leq n-1),\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}\leq\binom{n}{k}\binom{n}{k}$
- $\binom{n}{m+k}\leq\binom{n}{m}\binom{n-m}{k}$
- $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$

חישוב תוחלת ושונות של מ"מ ע"י שימוש באינדיקטורים

לדוגמא זורקים קובייה n פעמים. יהי X_i מ"מ המייצג את תוצאת זריקת i ויהי Y מ"מ הסופר את מספר הפעמים בו קיבלנו את אותה תוצאה בשתי זריקות סמוכות.

- חישוב התוחלת מתבצע ע"י שימוש באינדיקטורים על Y:
$$E(Y)=E(\sum_{i=1}^{n-1}Y_i)=\sum_{i=1}^{n-1}E(Y_i)$$
ואז נחשב בנפרד:
$$E(Y_i)=P(Y_i=1)=P(X_i=X_{i+1})$$
- חישוב השונות מתבצע ע"י שימוש באינדיקטורים על Y:
$$Var(Y)=Var(\sum_{i=1}^{n-1}Y_i)=Cov(\sum_{i=1}^{n-1}Y_i,\sum_{i=1}^{n-1}Y_i)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}Cov(Y_i,Y_j)$$
המשתנים תלויים רק אם הם מושפעים מהטלות חופפות ולכן:
מקרה 1: $i=j$. ולכן נחשב:
$$Cov(Y_i,Y_i)=Var(Y_i)$$
מקרה 2: $i=j+1$ או $i=j-1$. ולכן נחשב:
$$Cov(Y_i,Y_{i+1})=Cov(Y_{i+1},Y_i)=E(Y_iY_{i+1})-E(Y_i)E(Y_{i+1})$$
כל שאר המקרים בת"ל ולכן הערכים עבורם הינם 0 ע"פ הגדרת Cov.
ובסה"כ:
$$Var(Y)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}Cov(Y_i,Y_j)=\sum_{i=1}^{n-1}Cov(Y_i,Y_i)+2\sum_{i=1}^{n-1}Cov(Y_i,Y_{i+1})$$
הערה: אם מחשבים $Cov(X,Y)$ עם אינדיקטורים אזי עבור $i\neq j$ לא נשתמש ב- $2\,Cov(X_i,Y_j)$ כיוון שלא בהכרח מתקיים: $Cov(X_i,Y_j)=Cov(X_j,Y_i)$

מטילים קוביה הוגנת (כלומר הסתברות $1/6$ לכל תוצאה אפשרית) עד הפעם הראשונה שמתקבלת התוצאה 6, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. יהי X מספר ההטלות הכולל ויהי Y סכום תוצאות כל ההטלות.

ב. (8 נקודות) חשבו את $Var(Y|X=10)$.
ג. (12 נקודות) חשבו את התוחלת של Y.

(b) For every positive integer i, let Y_i denote the outcome of the ith die roll. Since all die rolls are mutually independent, it follows that

$$Var(Y|X=10)=\sum_{i=1}^{10}Var(Y_i|X=10).$$

Note that $(Y_{10}|X=10)=6$ and thus $Var(Y_{10}|X=10)=0$. Moreover, $(Y_i|X=10)\sim U(1,5)$ for every $1\leq i\leq 9$ (since the die is fair and its outcome cannot be 6). Therefore $Var(Y_i|X=10)=\frac{(5-1+1)^2-1}{12}=2$ for every $1\leq i\leq 9$. We conclude that

$$Var(Y|X=10)=9\cdot 2+0=18.$$

(c) Similarly to Part (b) of this exercise, for every positive integer k, it holds that $(Y_k|X=k)=6$ and thus $\mathbb{E}(Y_k|X=k)=6$. Moreover, for every $1\leq i\leq k-1$, it holds that $(Y_i|X=k)\sim U(1,5)$. In particular $\mathbb{E}(Y_i|X=k)=\frac{1+5}{2}=3$ for every such k and i. It then follows by the linearity of expectation that

$$\mathbb{E}(Y|X=k)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}(Y_i|X=k)=\sum_{i=1}^{k-1}3+6=3(k+1)$$

holds for every positive integer k.
Finally, it follows by the law of total expectation that

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}(Y|X=k)\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}3(k+1)\cdot 1/6\cdot(5/6)^{k-1}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot(5/6)^k-1\right]=\frac{3}{5}\left[\frac{1}{(1-5/6)^2}-1\right]=21,$$

where the penultimate equality holds by the formula $\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i=\frac{1}{(1-x)^2}$ that was given in the exam.

יהיו $X\sim Bin\left(n,\frac{1}{n+1}\right)$ ו-$Y\sim Poi(1)$ משתנים מקריים בלתי תלויים.

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\mathbb{P}(X=i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{n+1}\right)^i\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-i}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{1}{n+1}\right)^i\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-i}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{i+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-i}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{i+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)-(i+1)}$$

יהיו $X_1\sim Bin\left(2,\frac{1}{2}\right),X_2\sim U(1,2,3)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. נגדיר $Z:=\max\{X_1,X_2\}$ ו-$Y:=\min\{X_1,X_2\}$.

א. (12 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של Y ו- Z.

(a) It readily follows from the definitions of X_1,X_2,Y and Z that the support of Y is $\{0,1,2\}$ and that the support of Z is $\{1,2,3\}$. For every $0\leq i\leq 2$ and $1\leq j\leq 3$, the table below shows the value of $P(Y=i,Z=j)$. We explain two of these calculations in greater detail:

$$P(Y=0,Z=2)=P(X_1=0,X_2=2)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=2)$$
$$=\binom{2}{0}(1/2)^2\cdot 1/3=1/12,$$

where the first equality holds since $P(X_2=0)=0$ and the second equality holds since X_1 and X_2 are independent.

$$P(Y=1,Z=2)=P(X_1=1,X_2=2)+P(X_1=2,X_2=1)$$
$$=P(X_1=1)\cdot P(X_2=2)+P(X_1=2)\cdot P(X_2=1)$$
$$=\binom{2}{1}(1/2)^2\cdot 1/3+\binom{2}{2}(1/2)^2\cdot 1/3=1/6+1/12=1/4.$$

נתונות שתי קוביות הוגנות, אחת אדומה ואחת כחולה. על כל אחת מהן מופיע המספר 1 על שתי פאות, המספר 2 על שתי פאות והמספר 3 על שתי פאות. מטילים את שתי הקוביות שוב ושוב עד הפעם הראשונה שתוצאת הקוביה האדומה זהה לתוצאת הקוביה הכחולה. יהי X מספר הפעמים שמטילים את זוג הקוביות ויהי Y סכום שתי הקוביות בהטלה הראשונה.

ב. (18 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו-Y.

(b) If $X=1$, then $Y\in\{2,4,6\}$ and each such value is obtained with probability $1/3$. That is $(Y|X=1)\sim U(\{2,4,6\})$. Hence, for every $k\in\{2,4,6\}$ we have

$$Pr(X=1,Y=k)=Pr(X=1)\cdot Pr(Y=k|X=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

For every other value of k, we have $Pr(X=1,Y=k)=0$.
Next, for every integer $t>1$ we have that if $X=t$, then $Y\in\{3,4,5\}$. Moreover

$$Pr(Y=3|X=t)=\frac{|\{(2,1),(1,2)\}|}{|\{(2,1),(1,2),(3,1),(1,3),(3,2),(2,3)\}|}=\frac{1}{3}.$$

where (x,y) indicates that the result of the red die was x and the result of the blue die was y.
Similarly, $Pr(Y=4|X=t)=Pr(Y=5|X=t)=1/3$, that is, $(Y|X=t)\sim U(\{3,4,5\})$. Hence, for every $k\in\{3,4,5\}$ we have

$$Pr(X=t,Y=k)=Pr(X=t)\cdot Pr(Y=k|X=t)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{t-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^t.$$

For every other value of k, we have $Pr(X=t,Y=k)=0$.

נתונים $n\geq 3$ זוגות נשואים (לצורך השאלה כל זוג מורכב מאשה אחת וגבר אחד). כל הגברים והנשים מתיישבים באופן מקרי אחיד (כלומר כל שני סידורים אפשריים הם שווי הסתברות) על ספסל ארוך בעל $2n$ מושבים הממוספרים מ-1 עד $2n$ משמאל לימין. יהי X מספר הזוגות הנשואים היושבים אחד ליד השני ויהי Y מספר האינדקסים $1\leq i\leq 2n-2$ כך שבמקומות ה-i, ה-$i+1$ וה-$i+2$ יושבים גברים.

א. (7 נקודות) חשבו את תוחלת X.
ב. (10 נקודות) חשבו את תוחלת Y.

(a) For every $1\leq i\leq n$, let X_i be the indicator random variable for the event "the members of married couple i sit next to each other". By viewing the members of married couple i as one element we see that

$$\mathbb{E}(X_i)=Pr(X_i=1)=\frac{2\cdot(2n-1)!}{(2n)!}=\frac{1}{n}.$$

Therefore

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=n\cdot 1/n=1.$$

(b) For every $1\leq i\leq 2n-2$, let Y_i be the indicator random variable for the event "seats $i,i+1$ and $i+2$ are occupied by men". A direct calculation then shows that

$$\mathbb{E}(Y_i)=Pr(Y_i=1)=\frac{\binom{n}{3}\cdot 3!\cdot(2n-3)!}{(2n)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{2n(2n-1)(2n-2)}=\frac{n-2}{4(2n-1)}.$$

Therefore

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{2n-2}Y_i\right)=\sum_{i=1}^{2n-2}\mathbb{E}(Y_i)=(2n-2)\cdot\frac{n-2}{4(2n-1)}=\frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}.$$

לכל $1\leq i\leq 20$ מטילים מטבע הוגן (כלומר הסתברות ½ לעץ והסתברות ½ לפלי) כאשר כל הטלות המטבע בלתי תלויות. תהי A קבוצת כל השלמים בין 1 ל-20 שתוצאת המטבע שהוטל עבורם הייתה עץ. יהי $X=\sum_{i\in A}i$.

א. (6 נקודות) חשבו את $\Pr(X\leq 3)$.
ב. (9 נקודות) חשבו את התוחלת של X.
ג. (11 נקודות) חשבו את השונות של X.

(a) $X\leq 3$ in exactly five cases, namely, when $A=\emptyset$, $A=\{1\}$, $A=\{2\}$, $A=\{3\}$, or $A=\{1,2\}$. Since the coin is fair and the coin flips are mutually independent, the probability of each such event is $(1/2)^{20}$. Hence $Pr(X\leq 3)=5(1/2)^{20}$.

(b) For every $1\leq i\leq 20$, let $X_i=1$ if $i\in A$ and $X_i=0$ otherwise. Then $\mathbb{E}(X_i)=Pr(X_i=1)=1/2$ for every $1\leq i\leq 20$ and $X=\sum_{i=1}^{20}iX_i$. By linearity of expectation we then have

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{20}iX_i\right)=\sum_{i=1}^{20}\mathbb{E}(iX_i)=\sum_{i=1}^{20}i\mathbb{E}(X_i)=1/2\sum_{i=1}^{20}i=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot 21}{2}=105.$$

(c) For every $1\leq i\leq 20$ we have

$$Var(iX_i)=i^2Var(X_i)=i^2\left(\mathbb{E}(X_i^2)-(\mathbb{E}(X_i))^2\right)=i^2(1/2-1/4)=i^2/4.$$

Moreover, since X_i and X_j are independent for every $1\leq i<j\leq 20$, it follows that

$$Cov(iX_i,jX_j)=ijCov(X_i,X_j)=0.$$

We conclude that

$$Var(X)=\sum_{i=1}^{20}i^2Var(X_i)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{20}i^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}=\frac{35\cdot 41}{2}$$

where the penultimate equality holds by the formula which was stated in the question.

Fix some positive integer n. It follows by part (a) of this question and by the linearity of expectation that

$$\mathbb{E}(X-Y)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)=n/2-n/3=n/6.$$

It then follows by Chebyshev's inequality that

$$P(X\leq Y)=P(X-Y-n/6\leq -n/6)\leq P(|(X-Y)-\mathbb{E}(X-Y)|\geq n/6)$$
$$\leq\frac{Var(X-Y)}{n^2/36}=\frac{17n/36}{n^2/36}=\frac{17}{n},$$

where the first inequality holds since $X-Y-n/6\leq -n/6 \implies |(X-Y)-\mathbb{E}(X-Y)|\geq n/6$, and the second equality holds by part (b) of this question. We conclude that

$$1\geq\lim_{n\to\infty}P(X>Y)=1-\lim_{n\to\infty}P(X\leq Y)\geq 1-\lim_{n\to\infty}\frac{17}{n}=1$$

implying that $\lim_{n\to\infty}P(X>Y)=1$ as claimed.