קורס תורת המספרים האלגוריתמית סמסטר ב' תש"פ
מתרגל אחראי: איבראהים שאהין
כללי ההגשה כמו במטלה 1. תאריך הגשה 17/5 בשעה 23:55

מטלה 2

שאלה ראשונה:
עקרון חשוב בקורס שלנו (שיתבטא בהמשך) הינו העקרון הבא.
עקרון שובך היונים: אם בשובך קיימים n תאים, ואנו מכניסים לתוכו לפחות n+1 יונים, הרי שבהכרח תהיינה לפחות שתי יונים באותו תא.
הנכונות של העיקרון לעיל, הינה כדלקמן: נניח בשלילה כי ניתן לשכן $n+1$ יונים ב n תאים כאשר בכל תא לכל היותר יונה אחת. אם כך כמות התאים מהווה חסם מלעיל על כמות היונים, דהיינו יש רק n יונים. וזו סתירה להנחה ששוכנו $n+1$ יונים.
בנספח המופיע בסוף המטלה תוכלו לקרוא עוד על עקרון שובך היונים ולראות דוגמאות לשימוש בו בפתרון שאלות מתימטיות.

שני הסעיפים של השאלה הבאה משלבים עיקרון זה עם הגדרות שפגשנו.

סעיף א:
יהי $n\epsilon\mathbb{N}$. הוכיחו שכל קבוצת מספרים שלמים בעלת $n+1$ איברים $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ המקיימים:

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} \le 2n$$

מכילה לפחות שני אברים כך שהאחד מחלק את האחר.

רמז: הציגו כל אחד מאברי הקבוצה בתור $a_i = 2^{k_i} \cdot b_i$ כאשר b_i אי זוגי (כלומר כמכפלת חזקה של 2 במספר אי זוגי) וחישבו על תאי השובך כעל אוסף המספרים האי זוגיים בטווח $\{1, \dots, 2n\}$.

סעיף ב:
יהי $n\epsilon\mathbb{N}$. הוכיחו שכל קבוצת מספרים שלמים בעלת $n+1$ איברים $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ המקיימים:

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} \le 2n$$

מכילה לפחות שני אברים זרים. (רמז: חישבו על זוגות של מספרים עוקבים.)

סעיף ג:
הוכיחו כי בכל בחירה של חמישה מספרים טבעיים שונים יש תמיד שלושה מתוכם שסכומם מתחלק ב-3.

להשכלה כללית: זהו מקרה פרטי של משפט **משפט ארדש גינזבורג-זיו** שאומר כי **בכל בחירה של 2n-1 מספרים טבעיים, יש n מתוכם שסכומם מתחלק ב-n.**

סעיף ד:
לכל $1 < n$ טבעי, הביאו דוגמה לקבוצה של $2n - 2$ מספרים טבעיים כך שסכום כל n מתוכם אינו מתחלק ב-n.

בס"ד

קורס תורת המספרים האלגוריתמית סמסטר ב' תש"פ
מתרגל אחראי: איבראהים שאהין
כללי ההגשה כמו במטלה 1. תאריך הגשה 17/5 בשעה 23:55

מטלה 2

שאלה שנייה:

סעיף א:

נגדיר את הקבוצה הבאה : $\mathcal{D}_a = \{n \in N : a \mid n\}$

כלומר, הקבוצה $\mathcal{D}_a$ מכילה את כל המספרים הטבעיים אשר מתחלקים ב a, או בניסוח שונה, כל המספרים הטבעיים אשר הינם כפולה של a.

יהיו a, b שני מספרים טבעיים. הוכיחו:

$$a = b \iff \mathcal{D}_a = \mathcal{D}_b$$

סעיף ב:

סעיף זה והסעיף הבא מיועדים ללאחר התירגול שבו יילמד הנושא של lcm של שני מספרים שלמים

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים שלמים, עבור $n \geq 2$ טבעי כלשהו. הוכיחו:

$$lcm(a_1, a_2, \dots, a_n) = lcm\,(lcm\,(a_1, a_2, \dots a_{n-1}), a_n)$$

סעיף ג:

אנו יודעים כי עבור זוג מספרים זרים a, b מתקיים: $lcm(a, b) = a \cdot b$.

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים טבעיים **זרים בזוגות** עבור $n \in N$. הוכיחו כי לכל $n \geq 2$:

$$lcm(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

רמז: היעזרו בסעיף הקודם.

שאלה שלישית:

א. הוכיחו כי עבור $a, b, n \in N$ מתקיים $(a^n, b^n) = (a, b)^n$

ב. הוכיחו כי עבור $a, b, n \in N$ מתקיים $lcm(a^n, b^n) = (lcm(a, b))^n$

סעיף זה מיועד ללאחר התירגול שבו יילמד הנושא של lcm של שני מספרים שלמים

שאלה רביעית:

א. מצאו x, y שלמים כך ש $2020x + 243y = 1$. פרטו את חישוביכם ונסחו במדוייק את המשפטים עליהם הסתמכתם.

ב. יהיו $a, b, c \in N$ כך ש $(a, b) = 1$ וכן $c|a + b$. הוכיחו כי $(c, b) = (c, a) = 1$

שאלה חמישית:

יהיו $1 \leq b \leq a \leq 2020$ טבעיים. מצאו חסם מלעיל טוב ככל הניתן על מספר האיטרציות של האלגוריתם של אוקלידס על הקלט (a, b).

מותר להיעזר בחומר שמופיע בסיכומי התרגולים (בין אם הוספק בתרגול ובין אם לא).

בס"ד

קורס תורת המספרים האלגוריתמית סמסטר ב' תש"פ
מתרגל אחראי: איבראהים שאהין
כללי ההגשה כמו במטלה 1. תאריך הגשה 17/5 בשעה 23:55

מטלה 2

נספח - עקרון שובך היונים

עקרון שובך היונים (הנקרא גם עקרון דיריכלה) הוא עקרון מתמטי פשוט להפליא אשר באופן מפתיע מהווה כלי עזר משמעותי בפתרון בעיות מתימטיות מגוונות. העיקרון קובע כי אם בשובך קיימים n תאים, ואנו מכניסים לתוכו לפחות n+1 יונים, הרי שבהכרח תהיינה לפחות שתי יונים באותו תא.

נתחיל בדוגמה מובנת מאליה:

בכתה א' יש 13 ילדות. הוכיחו כי יש שתי ילדות שחוגגות יום הולדת באותו חודש.

פתרון: בשאלה זו היונים הם הילדות, ותאי השובך הם חדשי השנה. "יונה" (כלומר ילדה) נכנסת ל"תא" (כלומר חודש) אם היא נולדה בחודש זה. מכיוון שיש 13 יונים ורק 12 תאים נובע מעקרון שובך היונים שיש שתי יונים באותו תא, כלומר שתי ילדות שנולדו באותו חודש.

כנראה שאת השאלה הקודמת לא היינו מתקשים לפתור גם בלי להכיר את עקרון שובך היונים... הבה נתבונן כעת בשאלה נוספת, שבה עצם הידיעה כי מומלץ להשתמש בעקרון שובך היונים מהווה חצי מהדרך אל הפתרון:

הוכיחו כי קיימות שתי חזקות של 2 (כלומר שני מספרים מהצורה 2^i ו-2^j) שהפרשן מתחלק ב-37.

פתרון: נגדיר קבוצת "יונים" בתור המספרים $\{2^1,2^2,\dots,2^{38}\}$. תאי השובך יהיו המספרים $\{0,1,\dots,36\}$ שהם כל השאריות האפשריות בחלוקה ב-37. נכניס "יונה" ל"תא" נתון אם השארית שלה בחלוקה ב-37 היא המספר המתאים לתא. מכיוון שיש 38 יונים ורק 37 תאים, נובע מעקרון שובך היונים שיש (לפחות) שתי יונים באותו תא. כלומר, מצאנו שתי חזקות של 2 שנותנות אותה שארית בחלוקה ב-37. לפיכך, הפרשן מתחלק ב-37.

לעיתים, נדרשת יותר יצירתיות בהגדרת תאי השובך והיונים. נתבונן למשל בשאלה הבאה:

הוכיחו כי אם בוחרים 7 מספרים שונים בין 1 ל-12, בהכרח יהיו שניים מתוכם שסכומם שווה ל-12.

פתרון: נגדיר את תאי השובך להיות 6 הקבוצות הבאות:

$$\{6\},\{5,7\},\{4,8\},\{3,9\},\{2,10\},\{1,11\}$$

היונים יהיו שבעת המספרים שבחרנו. מכיוון שיש 7 יונים ו-6 תאים, נובע מעקרון שובך היונים שיש שתי יונים באותו תא, כלומר שני מספרים מאותה קבוצה. סכומם של שני המספרים הללו הוא 12. (שימו לב כי נתון שהמספרים שבחרנו שונים זה מזה.)