

הוראות ההגשה כמו שנכתב במטלה 1. שימו לב כי מותר להגיש בזוגות, אבל אסור לעשות את המטלה בזוגות ולהגיש בבודדים. תאריך הגשה: 24.6 בשעה 23:55. (היום האחרון של הסמסטר)

## מטלה 4

### שאלה 1:

מהן 4 הספרות האחרונות במספר  $2^{2020}$ ?

### שאלה 2:

יהיו  $a, n \in \mathbb{N}$  שני שלמים זרים, ויהי  $m \in \mathbb{N}$

א. הוכיחו כי אם  $\varphi(n) | m$  אזי  $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ .

ב. הוכיחו כי אם  $(m, \varphi(n)) = 1$  וגם  $a^m \equiv 1 \pmod{n}$  אזי  $a \equiv 1 \pmod{n}$ . רמז: היעזרו במשפט בז'ור.

### שאלה 3:

יהי  $p$  ראשוני, ונניח שגם  $p + 2$  ראשוני. הוכיחו כי

$$4((p-1)! + 1) + p \equiv 0 \pmod{p(p+2)}$$

רמז: לפני שתתחילו לנסות לפתור את השאלה, היזכרו במסקנה 4 בהרצאה על משפט ווילסון. (ההפניה לפי הסיכומים המוקלדים בעברית שאפשר למצוא במודל ביחידת ההוראה של הנושא המתאים). כמו"כ מומלץ להיעזר בתרגול שקיליות חלק 3.

### שאלה 4:

חשבו את  $97! \pmod{101}$ .

### שאלה 5:

יהי  $n \in \mathbb{Z}^+$ . נגדיר את הקבוצה

$$D_n = \{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$$

ונגדיר פעולה  $\cdot$  באופן הבא:

$$\begin{aligned} r_i r_j &= r_{(i+j) \bmod n} & r_i s_j &= s_{(i+j) \bmod n} \\ s_i r_j &= s_{(i-j) \bmod n} & s_i s_j &= r_{(i-j) \bmod n} \end{aligned}$$

א. הוכיחו כי  $(D_n, \cdot)$  חבורה. (היא נקראת "החבורה הדיהדרלית").

ב. הוכיחו כי  $D_n$  קומוטטיבית אם ורק אם  $n \leq 2$ .

בהצלחה!