למידת מכונה - מטלה 2

מגישים: איתי רפיעי (208426106), אלמוג יעקב מעטוף (203201389)

פתרנו את כל המטלה בפגישות זום משותפות באופן שווה. תוך כדי שיתוף דרכי חשיבה והסקת מסקנות.

.1

א. מהו ממד ה-VC של מלבנים חד-כיווניים מיושרים (בציר) בנקודות D-ממדיות (בפנים אדום, מבחוץ כחול)?

תשובה:

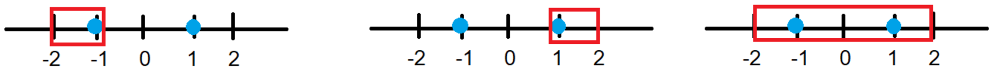
ממד ה-VC של מלבן ב-D ממדים הוא: 2D.

תחילה, נראה כי קיים סידור של 2D קודקודים על D ממדים שמלבן יכול לנפץ.

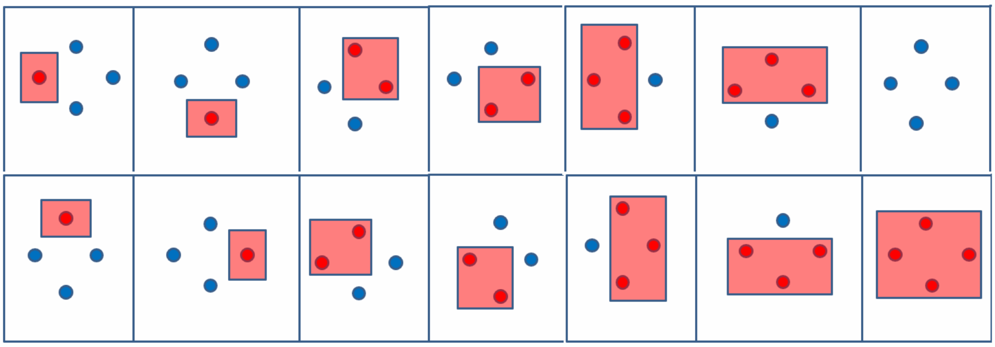
על כל ציר של ממד נשים קודקוד אחד ב1 ואחד ב -1 על הציר.

ניתן לראות כי אפשר לנפץ כל קבוצה של קודקודים בעזרת מלבן כאשר עבור כל קודקוד חיובי הגבול של אותו הממד של המלבן יהיה 2 ועבור כל קודקוד שלילי שבקבוצה הגבול של המלבן יהיה -2 .

ניתן לראות דוגמה עבור ממד אחד:



ניתן לראות דוגמה עבור שני ממדים כאשר על כל קודקוד בגודל 1 אנחנו נבחר גבול שגדול מ1 וקודקוד בגודל -1 נבחר גבול שקטן ממנו:



כעת, נוכיח כי לא קיים סידור של 2D+1 קודקודים ב-D ממדים אשר מלבן יכול לנפץ.

נניח בשלילה כי קיים סידור של 2D+1 קודקודים ב-D ממדים אשר מלבן יכול לנפץ. נבחר את הקבוצה של הקודקודים כך שניקח את קודקוד מקסימלי אחד וקודקוד מינימלי אחד בכל ממד, בהכרח נקבל שגודל קבוצה זו לכל היותר 2D (יכול להיות שעבור ממד מסוים קודקוד כלשהו מהווה גם מינימום וגם מקסימום)

מכאן, בהכרח קיים קודקוד אחד לפחות שאינו גדול מקודקודי הגבולות (מקסימום ומינימום) של אותו ממד.

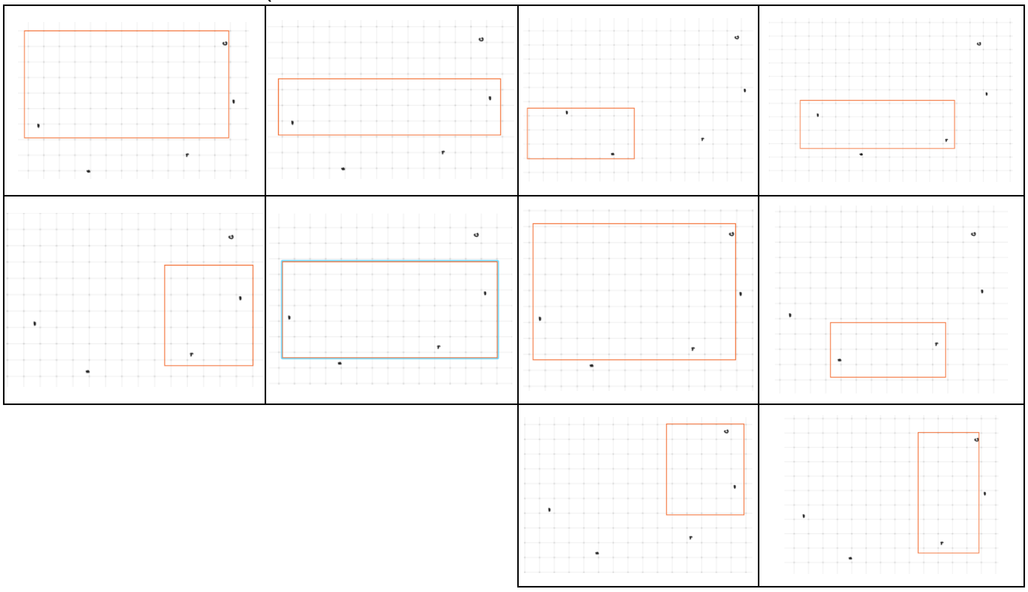
קל לראות שלא ניתן להשיג את התיוג של קבוצת כל הקודקודים **פרט** לקודקוד זה זאת בסתירה להנחה ולכן, נסיק כי ממד ה-VC של מלבן ב-D ממדים הוא: 2D.

ב. מהו ממד ה-VC של מלבנים **דו-כיווניים** מיושרים (בציר) במישור?

<u>תשובה:</u>

נוכיח כי ממד ה-VC של מלבן דו כיווני הוא 5.

תחילה נראה כי הוא יכול לנפץ חמישה קודקודים: (ניתן לראות בבירור כי הוא יכול לנפץ כל קודקוד בנפרד ואת כל הקודקודים ביחד לכן הוא יכול לנפץ גם 4 קודקודים כי הוא דו כיווני, נראה עבור זוגות וזה יוכיח עבור שלישיות בגלל שהוא דו כיווני)

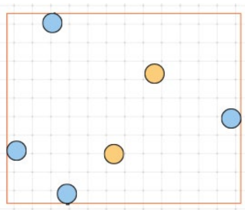


אכן מצאנו סידור של 5 קודקודים שמלבן דו כיווני מנפץ.

כעת נראה כי לא קיים סידור של 6 קודקודים שמלבן דו כיווני יכול לנפץ:

נניח כי קיים סידור של 6 קודקודים אשר מלבן יכול לנפץ אותם. נחסום אותם בעזרת מלבן בצורה מינימלית ונקבל ששני נקודות לפחות נמצאות בתוך המלבן,

לדוגמה:

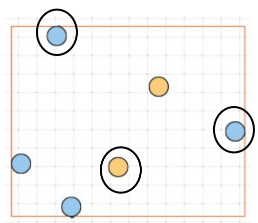


ניתן לראות בדוגמה כי 4 הכדורים הכחולים נחסמים על ידי מלבן מינימלי ונשארו 2 כדורים בפנים

בגלל שהנחנו כי ניתן לנפץ 6 קודקודים אזי ניתן גם לנפץ כל 3 קודקודים.

ניקח קודקוד מסוים A שנמצא בתוך הריבוע ונבחר את שני הקודקודים הקרובים יותר לקודקוד אחר B (שנמצא גם הוא בתוך הריבוע) מאשר לקודקוד A.

בדוגמה שלנו נבחר כך:



כעת נרצה להקיף אותם במלבן אך שלושתם ביחד מכילים גם את הקודקוד השני B שנמצא בתוך הגבולות של המלבן המינימלי. מכיוון שזהו מלבן דו כיווני נרצה לבדוק אם הוא מכסה את 3 הקודקודים הנגדיים אך בדומה לשלישיה הקודמת שני הקודקודים שעל הגבולות של המלבן המינימלי ביחד עם הקודקוד הרחוק שנמצא בתוכו תמיד יכילו במלבן את הקודקוד האחר שנמצא בתוך הגבולות. וזו סתירה!

.2

א. מהו ממד ה-VC של כדורים חד-כיווניים בנקודות D-ממדיות (בפנים אדום, בחוץ כחול)?

<u>תשובה:</u>

ממד ה-VC של כדורים חד-כיווניים ב-D ממדים הוא: D+1.

תחילה, נראה כי קיים סידור של D+1 קודקודים על D ממדים שכדור יכול לנפץ.

על כל ציר של ממד נשים קודקוד אחד ב1 (על הציר) ובנוסף נשים קודקוד על ראשית הצירים. כעת, עבור כל קבוצה שנרצה לנפץ נבחר את מרכז הכדור להיות בנקודה של סכום כל הווקטורים של הנקודות בקבוצה.

נניח כי גודל הקבוצה הוא k ניתן לראות כי המרחק מהנקודה לנקודות שנמצאות בקבוצה חוץ מראשית הצירים הוא $\sqrt{k-1}$ והמרחק לראשית הצירים הוא $\sqrt{k}$ והמרחק לשאר הנקודות שלא נמצאות בקבוצה הוא $\sqrt{k+1}$ ולכן אם מרכז המעגל נמצא בקבוצה נבחר למעגל רדיוס של $\sqrt{k}$ ואם הוא לא נמצא נבחר $\sqrt{k-1}$.

בדרך זו ניתן לנפץ כל קבוצה של קודקודים בעזרת כדור.

כעת, נוכיח כי לא קיים סידור של D+2 קודקודים ב-D ממדים שכדור יכול לנפץ.

נניח בשלילה כי קיים סידור של D+2 קודקודים ב-D ממדים אשר כדור מנפץ אותם.

לכן, עבור כל חלוקה של הקודקודים לשתי קבוצות S_1, S_2 קיימים שני כדורים אשר מנפצים כל אחת מהקבוצות. שני כדורים אלו יכולים להיחתך אך הקמורים אינם נחתכים בגלל תכונת ההבדל הסימטרי של הכדורים כפי שלמדנו בהרצאה. לכן ניתן להעביר מישור-על אשר מפריד בין שתי קבוצות הקודקודים.

נזכיר כי על פי משפט רדון כל קבוצה של D+2 נקודות ב-D ממדים ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות אשר הקמור שלהן נחתך. אך הראנו כי הנחת הטענה גוררת שעבור **כל חלוקה** לשתי קבוצות הקמור שלהם **אינו** נחתך. בסתירה למשפט רדון.

ב. תן גבול עליון לממד ה-VC של עיגולים **דו-כיווניים** במישור.

<u>תשובה:</u>

נוכיח שהגבול העליון של ממד ה-VC של עיגולים דו-כיווניים במישור הוא 7.

נניח בשלילה שממד ה-VC גדול מ-7 ולכן בפרט יכול לנפץ לפחות סט נקודות מסוים P במישור בגודל 8.

תהי חלוקה כלשהי של P לשני קבוצות A, B כך שגודל כל קבוצה הוא 4 (נקודות).

אנו יודעים שעיגול חד כיווני אינו יכול לנפץ קבוצה בגודל 4. ולכן, קיים תיוג מסוים אותו עיגול חד כיווני אינו יכול להשיג ב-A. וגם קיים תיוג מסוים אותו עיגול חד כיווני אינו יכול להשיג ב-B.

נביט בכל קבוצה **בנפרד** (תוך התעלמות מהקבוצה השנייה) ונסמן:

- Red_A: קבוצת הנקודות ב-A אותם עיגול חד-כיווני לא יכול להשיג (כאדומות).
  ומכאן, $Blue_A$ היא הקבוצה המשלימה של Red_A ב-A.
- Red_B: קבוצת הנקודות ב-B אותם עיגול חד-כיווני לא יכול להשיג (כאדומות).
  ומכאן, $Blue_B$ היא הקבוצה המשלימה של Red_B ב-B.

נשים לב כי מתקיים $Red_A \cup Blue_A \cup Red_B \cup Blue_B = P$ וחיתוך כל זוג ריק.

נגדיר את הקבוצות: $\boldsymbol{P_1} = Red_A \cup Blue_B,\ \ \boldsymbol{P_2} = Red_B \cup Blue_A$.

(כאמור, מתקיים $P_1 \cup P_2 = P$ וגם $P_1 \cap P_2 = \emptyset$).

ע"פ ההנחה, P ניתנת לניפוץ בעזרת עיגולים דו-כיוונים

וע"פ ההגדרה לעיל, $P_1,\ P_2$ מייצגות חלוקה מסוימת של P לשני קבוצות

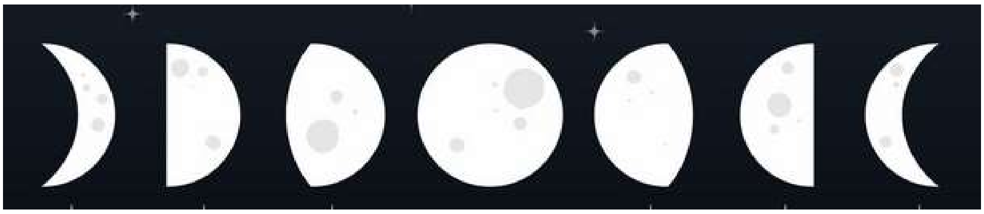
לכן, בפרט קיים עיגול דו-כיווני המשיג חלוקה זו. כלומר, בהכרח קיים עיגול **חד-כיווני** המשיג את קבוצה P_1 **או/וגם** קיים עיגול **חד-כיווני** המשיג את קבוצה P_2.

אם העיגול החד-כיווני משיג את קבוצה P_1 אזי הוא משיג את $Red_A \cup Blue_B$ ולכן אם נתעלם מהנקודות של קבוצה B נקבל שקבוצה Red_A ניתנת לניפוץ בA. סתירה.

אם העיגול החד-כיווני משיג את קבוצה P_2 אזי הוא משיג את $Red_B \cup Blue_A$ ולכן אם נתעלם מהנקודות של קבוצה A נקבל שקבוצה Red_B ניתנת לניפוץ בB. סתירה.

כלומר, ההנחה שממד ה-VC גדול מ-7 גוררת סתירה ולכן נובע שגבולו העליון 7.

3. הוכיחו גבול עליון לממד ה-VC של השלבים האינסופיים של הירח. כל שלב הוא הצטלבות של שני כדורים, אחד שבו הלבן בפנים, ואחד שבו הלבן בחוץ.



כלומר, כדור אחד שבתוכו לבן, וכדור שני שלבן מבחוץ. החיתוך שלהם (חיתוך אזורים הלבנים) הוא ירח לבן.
נשים לב כי ע"פ הגדרת החוקים הנ"ל - כל חוק כזה הוא הצטלבות של **שני** חוקים פשוטים מאוסף החוקים של עיגולים דו-כיווניים: עיגול אחד עם לבן בפנים ועיגול אחד עם לבן בחוץ (אוסף עיגולים דו-כווני הוא אוסף של כדורים, שכל כדור מופיע שם פעמיים, העתק אחד עם לבן בפנים ועוד העתק עם לבן בחוץ).
כפי שהוכחנו בסעיף 2.ב ממד ה-VC של אוסף זה הינו לכל היותר 7.
לכן, ע"פ תאוריית החיתוך:

$$H' = \{\bigcap_{i=1}^{s} h_{j_i}\} = \{\bigcap_{i=1}^{2} h_{j_i}\}$$

ובהכרח הסט H' מכיל את החוקים המוגדרים בשאלה (החוקים של השלבים האינסופיים של הירח) וניתן לחסום עם סט זה.
מתקיים שממד ה-VC המתקבל מהחוקים לעיל חסום מלמעלה ע"י:

$$(H') \le 2ds\log_2(3s) = 2\cdot 7\cdot 2\cdot \log_2(3\cdot 2) = 28\log_2(6)$$

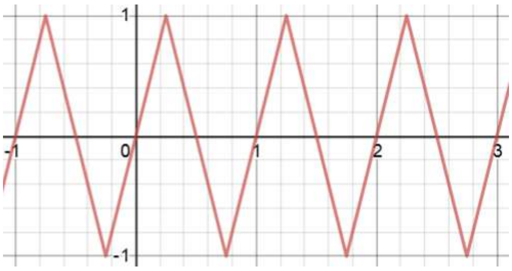
כלומר, ממד ה-VC חסום מלמעלה ע"י 72.378 ולכן הוא לכל היותר 72.

מ.ש.ל

4. מהו ממד ה-VC של הסט האינסופי של פונקציות גל משולש עם משרעת 1 ופרמטר מחזור p בנקודות על הישר? (ראה תמונה עבור p=1). הוכח את תשובתך.

$$\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{p}\right)\right)$$

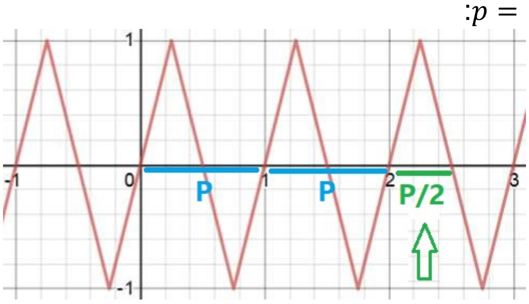
דוגמא עבור P=1:



<u>תשובה:</u> ממד ה-VC הוא אינסופי.
הסבר (לפני ההוכחה): נשים לב שתיוג נקודה בסט הנ"ל הינה כאשר הנקודה נמצאת בתוך המשולש עם הפיק העליון.
(ליעד הסביר על 2 היבטים שונים ולכן הסברנו ע"פ היבט זה).
נשים לב שמתכונת גל משולש נקודה x_i נמצאת בתוך משולש עם פיק עליון אם מתקיים:
(1)

$$np < x_i < np + \frac{p}{2}$$

עבור $n \in Z$.
כלומר, הנקודה נמצאת בתוך המשולש עם הפיק העליון אם הנקודה נמצאת ב**חצי** הראשון של גודל p עבור p כלשהו (הנקבע ע"י n [n צעדים בגודל p מראשית הצירים]).
דוגמא עבור $p = 1, n = 2$:



באופן דומה, מתכונת גל משולש, נקודה x_i **לא** נמצאת בתוך משולש עם פיק עליון אם מתקיים:
(2)

$$np + \frac{p}{2} < x_i < np + p$$

עבור $n \in Z$.
נשים לב לשקילות הבאה:
[עבור הביטוי הראשון (1) של נקודה **שכן** נמצאת במשולש עם פיק עליון]:

$$np < x_i < np + \frac{p}{2} \leftrightarrow$$

$$n < \frac{x_i}{p} < n + \frac{1}{2} \leftrightarrow$$

$$2\pi n < \frac{2\pi x_i}{p} < 2\pi n + \pi$$

(חלוקת כל אגף ב-P כאשר P מוגדר להלן, ואז הכפלה בביטוי 2π).

ולכן על מנת שהנקודה תהיה במשולש עם פיק עליון נוכל לדרוש שיתקיים:

$$2\pi n < \frac{2\pi x_i}{p} < 2\pi n + \pi$$

ומכיוון שאנו מציבים את הביטוי בפונקציית סינוס: $\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\mathbf{sin}\left(\frac{\mathbf{2\pi x}}{\mathbf{p}}\right)\right)$

וביטוי מהצורה $2\pi * k$ (כאשר $k \in N$) שקול ל-0 ממחזוריות הפונקציה, אז מספיק לדרוש:

$$0 < \frac{2\pi x_i}{p} < \pi$$

באופן זהה אם נבצע את אותם פעולות מתמטיות על המשוואה השנייה לעיל (2) נקבל שמתקיים שנקודה **לא** תהיה במשולש עם פיק עליון אם מתקיים:

$$\pi < \frac{2\pi x_i}{p} < 2\pi$$

כעת, נוכיח את נכונות הטענה:

עבור כל מספר m של נקודות ניקח את סט הנקודות $(x_1, \dots, x_m)$ הממוקמים ע"י $\{2^{-m} | m \in N\}$ בהתאמה. וכאשר התגים השרירותיים שלהם הינם $(y_1, \dots, y_m) \in (1, -1)^m$ בהתאמה.

(ערך תג 1 מייצג נקודה אדומה וערך תג *-1* מייצג נקודה כחולה).

נבחר את p כך:

$$p = \frac{2}{\left(1 + \sum_{i=1}^{m} 2^i \bar{y}_i\right)}$$

כאשר: $\bar{y}_i = \frac{1 - y_i}{2}$

עבור j כלשהו נקבל:

$$\frac{2\pi x_j}{p} = \frac{2\pi 2^{-j}}{p} = 2^{-j} \cdot \pi\left(1 + \sum_{i=1}^{m} 2^i \bar{y}_i\right) = \pi\left(2^{-j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{2^i}{2^j} \bar{y}_i\right)$$

$$= \pi\left(2^{-j} + \sum_{i=1}^{m} 2^{i-j} \bar{y}_i\right) = \pi\left(2^{-j} + \sum_{i=1}^{j-1} 2^{i-j} \bar{y}_i + \bar{y}_j + \sum_{i=1}^{m-j} 2^i \bar{y}_i\right)$$

אבל נוכל להתעלם מהביטוי האחרון כיוון שהוא מבטא כפולות של 2π שהוא מחזורי עבור פונקציית סינוס כפי שהסברנו לעיל.

ולכן נותר לנו למצוא חסם עליון ותחתון לביטוי:

$$\pi\left(2^{-j} + \sum_{i=1}^{j-1} 2^{i-j} \bar{y}_i + \bar{y}_j\right)$$

חסם עליון ותחתון:

$$\boldsymbol{\pi \cdot \bar{y}_j} < \pi\left(2^{-j} + \sum_{i=1}^{j-1} 2^{i-j} \bar{y}_i + \bar{y}_j\right) \le \pi\left(\sum_{i=1}^{j} 2^{-i} + \bar{y}_j\right) < \boldsymbol{\pi\left(1 + \bar{y}_j\right)}$$

כאשר האי-שוויון השני נובע מכך שערך $\bar{y}_j$ לכל היותר 1.

לכן, אם $y_j = 1$ אז נקבל $\bar{y}_j = 0$ ואז מתקיים: $0 < \frac{2\pi x_j}{p} < \pi$. כלומר, הנקודה נבחרה.

ואם $y_j = -1$ אז נקבל $\bar{y}_j = 1$ ואז מתקיים: $\pi < \frac{2\pi x_j}{p} < 2\pi$. כלומר, הנקודה לא נבחרה.

ומכיוון שהראנו שהטענה מתקיימת עבור כל מספר m של נקודות,

אזי, נסיק כי ממד ה-VC הוא אינסופי.

מ.ש.ל