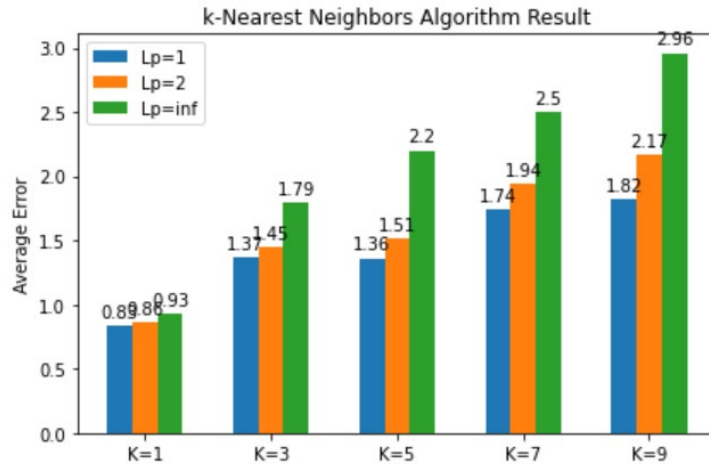


מטלה 4 – למידת מכונה

מגישים: איתי רפיעי (208426106), אלמוג יעקב מעטוף (203201389)
פתרנו את כל המטלה בפגישות זום משותפות באופן שווה. תוך כדי שיתוף דרכי חשיבה והסקת מסקנות.
(מצ"ב קבצי קוד עבור שאלה 1)

שאלה 1:

ממוצע של השגיאות עבור 100 ריצות kNN על הנתונים two_circle:



ניתן לראות כי התוצאות הכי טובות מתקבלות כאשר $k = 1$ ו- $l_p = 1$.
מכיוון שמסד הנתונים יחסית פשוט ואין בו רעש עדיף לקחת k ו- l_p יותר קטנים.

שאלה 2:

יהי:

$$(1 - \epsilon)\|v\| \leq \|f(v)\| \leq (1 + \epsilon)\|v\| \text{ for all } v \text{ in } S$$

$$(1 - \epsilon)\|v - w\| \leq \|f(v - w)\| \leq (1 + \epsilon)\|v - w\| \text{ for all } v, w \text{ in } S$$

בנוסף נתון כי: $\|f(v - w)\| = \|f(v) - f(w)\|$, $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2$,

$$v \cdot w - c\epsilon \leq f(v) \cdot f(w) \leq v \cdot w + c\epsilon \text{ צ"ל כי מתקיים:}$$

הוכחה:

הוכחנו בכיתה שמתקיים גם האי שיווין הבא:

$$(1 - \epsilon)\|v - w\|^2 \leq \|f(v - w)\|^2 \leq (1 + \epsilon)\|v - w\|^2$$

$$(1 - \epsilon)\|v\|^2 \leq \|f(v)\|^2 \leq (1 + \epsilon)\|v\|^2$$

נשים לב לאי שיווין הבא:

$$2 - 2\epsilon - 2f(v) \cdot f(w) = (1 - \epsilon)\|w\|^2 + (1 - \epsilon)\|v\|^2 - 2f(v) \cdot f(w)$$

$$\leq (\|f(v)\|^2 - 2f(v) \cdot f(w) + \|f(w)\|^2)$$

$$= \|f(v) - f(w)\|^2$$

$$= \|f(v - w)\|^2$$

$$\leq (1 + \epsilon)\|v - w\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2 + \epsilon(\|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2) \\
&= 2 - 2v \cdot w + 2\epsilon(1 - v \cdot w)
\end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
2 - 2\epsilon - 2f(v) \cdot f(w) &\leq 2 - 2v \cdot w + 2\epsilon - 2\epsilon v \cdot w \\
-2f(v) \cdot f(w) &\leq -2v \cdot w + 4\epsilon - 2\epsilon v \cdot w \\
f(v) \cdot f(w) &\geq v \cdot w - \epsilon(2 - v \cdot w)
\end{aligned}$$

וגם:

$$\begin{aligned}
2 + 2\epsilon - 2f(v) \cdot f(w) &= (1 + \epsilon)\|w\|^2 + (1 + \epsilon)\|v\|^2 - 2f(v) \cdot f(w) \\
&\geq (\|f(v)\|^2 - 2f(v) \cdot f(w) + \|f(w)\|^2) \\
&= \|f(v) - f(w)\|^2 \\
&= \|f(v - w)\|^2 \\
&\geq (1 - \epsilon)\|v - w\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2 - \epsilon(\|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2) \\
&= 2 - 2v \cdot w - 2\epsilon(1 - v \cdot w)
\end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
2 + 2\epsilon - 2f(v) \cdot f(w) &\geq 2 - 2v \cdot w - 2\epsilon + 2\epsilon v \cdot w \\
-2f(v) \cdot f(w) &\geq -2v \cdot w - 4\epsilon + 2\epsilon v \cdot w \\
f(v) \cdot f(w) &\leq v \cdot w + \epsilon(2 - v \cdot w)
\end{aligned}$$

כלומר מתקיים:

$$v \cdot w - \epsilon(2 - v \cdot w) \leq f(v) \cdot f(w) \leq v \cdot w + \epsilon(2 - v \cdot w)$$

מכפלה פנימית של $v \cdot w$ חייבת להיות בין 1 ל -1 מכיוון שהנורמה שלהם היא 1. לכן נקבל:

$$v \cdot w - 3\epsilon \leq f(v) \cdot f(w) \leq v \cdot w + 3\epsilon$$

הוכחנו כי אכן מתקיים האי שיווין עבור $c = 3$.

