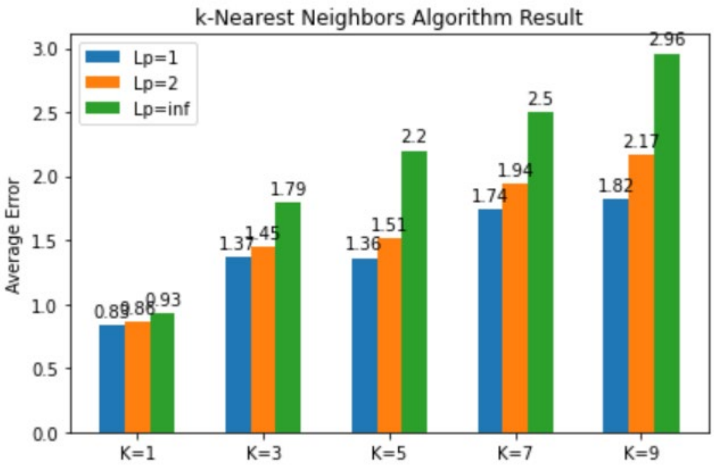
מטלה 4 – למידת מכונה

מגישים: איתי רפיעי, אלמוג יעקב מעטוף
(מצ"ב קבצי קוד עבור שאלה 1)

שאלה 1:

ממוצע של השגיאות עבור 100 ריצות kNN על הנתונים two_circle:



ניתן לראות כי התוצאות הכי טובות מתקבלות כאשר $k = 1$ ו-$l_p = 1$.

מכיוון שמסד הנתונים יחסית פשוט ואין בו רעש עדיף לקחת k ו-l_p יותר קטנים.

שאלה 2:

יהי:

$$(1-\epsilon)\|v\| \leq \|f(v)\| \leq (1+\epsilon)\|v\| \; for\ all\ \boldsymbol{v}\ in\ \boldsymbol{S}$$

$$(1-\epsilon)\|v-w\| \leq \|f(v-w)\| \leq (1+\epsilon)\|v-w\| \; for\ all\ \boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\ in\ \boldsymbol{S}$$

בנוסף נתון כי: $\|f(v-w)\| = \|f(v)-f(w)\|$, $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2v\cdot w + \|w\|^2$

צ"ל כי מתקיים: $v\cdot w - c\epsilon \leq f(v)\cdot f(w) \leq v\cdot w + c\epsilon$

הוכחה:

הוכחנו בכיתה שמתקיים גם האי שיוון הבא:

$$(1-\epsilon)\|v-w\|^2 \leq \|f(v-w)\|^2 \leq (1+\epsilon)\|v-w\|^2$$

$$(1-\epsilon)\|v\|^2 \leq \|f(v)\|^2 \leq (1+\epsilon)\|v\|^2$$

נשים לב לאי שיוון הבא:

$$\begin{aligned}
2-2\epsilon-2f(v)\cdot f(w) &= (1-\epsilon)\|w\|^2 + (1-\epsilon)\|v\|^2 - 2f(v)\cdot f(w) \\
&\leq (\|f(v)\|^2 - 2f(v)\cdot f(w) + \|f(w)\|^2) \\
&= \|f(v)-f(w)\|^2 \\
&= \|f(v-w)\|^2 \\
&\leq (1+\epsilon)\|v-w\|^2
\end{aligned}$$

$$= \|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2 + \epsilon(\|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2)$$
$$= 2 - 2v \cdot w + 2\epsilon(1 - v \cdot w)$$

כלומר:

$$2 - 2\epsilon - 2f(v) \cdot f(w) \leq 2 - 2v \cdot w + 2\epsilon - 2\epsilon v \cdot w$$
$$-2f(v) \cdot f(w) \leq -2v \cdot w + 4\epsilon - 2\epsilon v \cdot w$$
$$f(v) \cdot f(w) \geq v \cdot w - \epsilon(2 - v \cdot w)$$

וגם:

$$2 + 2\epsilon - 2f(v) \cdot f(w) = (1 + \epsilon)\|w\|^2 + (1 + \epsilon)\|v\|^2 - 2f(v) \cdot f(w)$$
$$\geq (\|f(v)\|^2 - 2f(v) \cdot f(w) + \|f(w)\|^2)$$
$$= \|f(v) - f(w)\|^2$$
$$= \|f(v - w)\|^2$$
$$\geq (1 - \epsilon)\|v - w\|^2$$
$$= \|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2 - \epsilon(\|v\|^2 - 2v \cdot w + \|w\|^2)$$
$$= 2 - 2v \cdot w - 2\epsilon(1 - v \cdot w)$$

כלומר:

$$2 + 2\epsilon - 2f(v) \cdot f(w) \geq 2 - 2v \cdot w - 2\epsilon + 2\epsilon v \cdot w$$
$$-2f(v) \cdot f(w) \geq -2v \cdot w - 4\epsilon + 2\epsilon v \cdot w$$
$$f(v) \cdot f(w) \leq v \cdot w + \epsilon(2 - v \cdot w)$$

כלומר מתקיים:

$$v \cdot w - \epsilon(2 - v \cdot w) \leq f(v) \cdot f(w) \leq v \cdot w + \epsilon(2 - v \cdot w)$$

מכפלה פנימית של $v \cdot w$ חייבת להיות בין 1 ל 1- מכיוון שהנורמה שלהם היא 1. לכן נקבל:

$$v \cdot w - 3\epsilon \leq f(v) \cdot f(w) \leq v \cdot w + 3\epsilon$$

הוכחנו כי אכן מתקיים האי שיוויון עבור $c = 3$.

■