Teorema de Bayes

Supongamos que los que los eventos A_1, A_2, ... , A_n forman una partición de un espacio muestral Ω; esto es, que los eventos A_i son mutuamente excluyentes y su unión es Ω. Ahora sea B otro evento. Entonces:

$$\begin{aligned} B = \Omega \cap B &= (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) \cap B \\ &= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) \end{aligned}$$

donde los $A_i \cap B$ son mutuamente excluyentes. En consecuencia:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

luego por el teorema de la multiplicación,

$$P(B) = P(A_1) * P(B \mid A_1) + P(A_2) * P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n) * P(B \mid A_n)$$

por otra parte, para cualquier i, la probabilidad condicional de A_i dado B se define por

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

En esta ecuación reemplazamos P(B) y usamos $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B \mid A_i)$, obteniendo así el teorema de Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) * P(B \mid A_i)}{P(A_1) * P(B \mid A_1) + P(A_2) * P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_n) * P(B \mid A_n)}$$

Ejercicios.
Tres máquinas A,B,C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de defectuosos de producción de estas máquinas son 4%, 6% y 8%. Si se selecciona un artículo al azar y resulta ser defectuoso. Cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina B?.

En cierta facultad, 5% de los hombres y 1% de las mujeres tienen más de 1.70 m de altura. Además, el 60% de los estudiantes son mujeres. Si se selecciona un estudiante y mide más de 1.70 m, cuál es la probabilidad de que el estudiante sea mujer?.