

Técnicas de Conteo

Apuntes para un curso universitario de Probabilidad

1. Introducción

El análisis combinatorio o técnicas de conteo constituyen la base para calcular probabilidades en espacios muestrales finitos. Responden a la pregunta: **¿de cuántas formas puede ocurrir un evento?**

- Cuando el **orden importa**, hablamos de *permutaciones o variaciones*.
- Cuando el **orden no importa**, hablamos de *combinaciones*.
- Además, debemos distinguir si hay **repetición permitida** o no.

2. Principios básicos

2.1. Principio de la multiplicación

Si una tarea puede realizarse en m formas y otra en n formas, y son independientes, entonces existen $m \cdot n$ formas de realizar ambas.

Ejemplo 2.1. Una contraseña está formada por dos letras seguidas de dos dígitos. Hay $26 \times 26 \times 10 \times 10 = 67,600$ contraseñas posibles.

2.2. Principio de la suma

Si una tarea puede realizarse de m formas y otra, **mutuamente excluyente**, en n formas, entonces el total es $m + n$.

Ejemplo 2.2. En una cafetería hay 5 bebidas frías y 3 calientes. El número de opciones de pedir una bebida es $5 + 3 = 8$.

3. Permutaciones

3.1. Definición

Una **permutación** es un arreglo ordenado de r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos distintos.

Fórmula

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Ejemplo 3.1. En un concurso participan 10 estudiantes. El comité quiere asignar medallas de oro, plata y bronce. El número de formas es:

$$P(10, 3) = \frac{10!}{7!} = 720.$$

3.2. Permutaciones con repetición

Si hay objetos que se repiten, la fórmula se ajusta:

Fórmula

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Ejemplo 3.2. ¿Cuántas formas hay de ordenar las letras de la palabra MATEO? Son $5! = 120$ (todas distintas).

¿Y en MAMÁ? Aquí se repite la letra A dos veces y la M dos veces:

$$\frac{4!}{2! 2!} = 6.$$

4. Combinaciones

4.1. Definición

Una **combinación** es la selección de r objetos de un conjunto de n elementos, sin importar el orden.

Fórmula

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 4.1. De un grupo de 12 estudiantes se quiere formar un equipo de 5. El número de equipos posibles es:

$$\binom{12}{5} = 792.$$

4.2. Combinaciones con repetición

Cuando los elementos pueden repetirse:

Fórmula

$$C_{rep}(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

Ejemplo 4.2. Número de maneras de repartir 10 caramelos entre 4 niños:

$$\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10} = 286.$$

5. Aplicaciones en probabilidad

Ejemplo 5.1. En el póker, una mano son 5 cartas de una baraja de 52. Número de manos posibles:

$$\binom{52}{5} = 2,598,960.$$

Ejemplo 5.2. Una urna contiene 8 bolas rojas y 7 azules. Si se extraen 3 sin reemplazo, ¿de cuántas formas pueden obtenerse?

$$\binom{15}{3} = 455.$$

6. Resumen comparativo

	Orden importa	Orden no importa
Sin repetición	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	$C(n, r) = \binom{n}{r}$
Con repetición	n^r	$C_{rep}(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$

7. Ejercicios propuestos

Nivel básico

1. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 si no se repiten dígitos? *Pista: usar permutaciones.*
2. Una persona tiene 5 camisas y 4 pantalones. ¿Cuántas formas diferentes de vestirse tiene? *Solución parcial: principio de multiplicación.*

Nivel intermedio

1. En una biblioteca hay 6 novelas y 4 libros de poesía. ¿De cuántas formas puede elegir 3 libros en total? *Pista: combinar principio de la suma con combinaciones.*
2. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en una mesa circular? *Respuesta esperada: $(5 - 1)! = 24$.*

Nivel avanzado

1. En un grupo de 20 estudiantes se selecciona un comité de 4. ¿Cuál es la probabilidad de que cierto estudiante específico esté en el comité? *Pista: dividir casos favorables entre casos totales.*
2. Una contraseña tiene 4 caracteres: 2 letras (A–Z) y 2 dígitos (0–9). (a) ¿Cuántas contraseñas distintas existen? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que una contraseña al azar empiece con una vocal?