Técnicas de conteo: pruebas y particiones ordenadas

1. Pruebas ordenadas.

Muchos problemas del análisis combinatorio y, en particular, de probabilidad se relacionan con la escogencia de una bola tomada de una urna que contiene n bolas (o una carta de una baraja, o una persona de una población). Cuando escogemos una bola tras otra de una urna, r veces, definimos esta escogencia como una *prueba ordenada* de tamaño r. Se consideran dos casos:

(I) **Pruebas con sustitución.** En este caso cada bola escogida se regresa a la urna antes de tomar la siguiente. Puesto que hay n maneras diferentes para escoger cada bola, según el principio fundamental del conteo hay

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{r \text{ veces}} \;=\; n^r$$

pruebas ordenadas diferentes de tamaño r con sustitución.

(II) **Pruebas sin sustitución.** Aquí la bola no se devuelve a la urna antes de escoger la siguiente. Así no hay repeticiones en la prueba ordenada. Es decir, una prueba ordenada de tamaño r sin sustitución es simplemente una permutación de r objetos de la urna. Por consiguiente,

$$P(n,r) \;=\; n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \;=\; \frac{n!}{(n-r)!}$$

pruebas ordenadas diferentes de tamaño r sin sustitución tomadas de un grupo de n objetos.

2. Particiones ordenadas

Ejemplo

Supongamos que una urna A contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Calculemos el número de maneras como podemos sacar, primero 2 bolas de la urna, después 3 bolas y finalmente 2. En otras palabras, queremos calcular el número de *particiones ordenadas*

$$(A_1, A_2, A_3)$$

del conjunto de 7 bolas en células A_1 con 2 bolas, A_2 con 3 y A_3 con 2. Estas células las llamamos particiones ordenadas desde que distinguimos, por ejemplo, entre

$$(\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7\}) \quad \text{y} \quad (\{6,7\},\{3,4,5\},\{1,2\}),$$

cada una de las cuales produce la misma partición *no ordenada* de A, pero se consideran diferentes como particiones *ordenadas* al importar la posición (A_1, A_2, A_3).

Para contar:

- Hay $\binom{7}{2}$ maneras de escoger las 2 primeras bolas para A_1.
- Quedan 5 bolas; hay $\binom{5}{3}$ maneras de escoger 3 bolas para A_2.
- Finalmente quedan 2 bolas; hay $\binom{2}{2}$ manera(s) de formar A_3.

Por lo tanto, el número total de particiones ordenadas es

$$\binom{7}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2} = 210.$$

Fórmula general

Teorema 1 (Multinomial de particiones ordenadas)**.** *Sea A un conjunto de n elementos y sean $n_1, n_2, \dots, n_r$ enteros positivos tales que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Entonces existen exactamente*

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$$

particiones ordenadas diferentes de A de la forma $(A_1, A_2, \dots, A_r)$, donde A_1 consta de n_1 elementos, A_2 de n_2 elementos, ..., y A_r de n_r elementos.

Demostración (esbozo). Ordene primero los n elementos: hay $n!$ ordenaciones. Como dentro de cada bloque A_i el orden interno es irrelevante, dividimos por las permutaciones internas $n_i!$ de cada bloque. De ahí resulta el coeficiente multinomial $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} n_i!}$. $\square$

Observación. El ejemplo anterior corresponde al caso $n = 7$ y $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 2)$, que produce $\frac{7!}{2!\,3!\,2!} = 210$, en concordancia con el conteo paso a paso.

Ejercicios

1. Calcule el número de pruebas ordenadas de tamaño 4 con sustitución que pueden realizarse con una urna de 10 bolas.

2. Determine cuántas pruebas ordenadas de tamaño 3 sin sustitución se pueden formar con una urna de 12 bolas.

3. Una urna contiene 8 bolas. ¿Cuántas particiones ordenadas se pueden formar si se desea dividir las bolas en tres subconjuntos de tamaños 3, 3 y 2?

4. Verifique la fórmula multinomial para el caso $n = 6$ con particiones $(2, 2, 2)$ y calcule el número de particiones ordenadas resultantes.

5. Justifique por qué en el ejemplo con 7 bolas y particiones $(2, 3, 2)$ se obtiene el mismo resultado tanto con el producto de combinaciones sucesivas como con la fórmula general.

[1]

[1]Tomado de Seymour Lipshutz. Probabilidad. Serie Schaum.