Conceptos básicos sobre teoría de probabilidades.

Sigma álgebra. Sea $\Omega \neq \emptyset$. Una coleción $\Im$ de subconjuntos de Ω es una $\sigma-$álgebra sobre Ω, si:

- $\Omega \in \Im$
- Si $A \in \Im$ entonces $A^c \in \Im$
- Si $A_1, A_2, A_3, \cdots \in \Im$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$

Los elementos de $\Im$ se llaman eventos.

Ejemplo. Sea $\Omega \neq \emptyset$. Entonces $\Im_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ es $\sigma-$álgebra, se le llama $\sigma-$álgebra trivial; y $\wp(\Omega)$ recibe el nombre de $\sigma-$álgebra total.

Ejemplo. Sea $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Entonces $\Im = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ es una $\sigma-$álgebra sobre Ω, en tanto que $\Im_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$ no lo es.

Espacio medible. Sean $\Omega \neq \emptyset$ y $\Im$ una $\sigma-$álgebra sobre Ω. La pareja $(\Omega, \Im)$ se llama espacio medible.

Es claro que a partir de la definición, que Ω y $\emptyset$ pertenecn a cualquier $\sigma-$álgebra definida sobre Ω. Ω se llama evento seguro y $\emptyset$ se llama evento imposible. Un evento de la forma $\{\omega\}$ se llama evento elemental.
Decir que un evento A ocurre significa que el resultado obtenido, al realizar el experimento aleatorio cuyo espacio muestral es Ω, es un elemento de A. Por lo tanto si A y B son eventos, entonces:

1. $A \cup B$ es un evento que ocurre, si y sólo si, A o B o ambos ocurren.
2. $A \cap B$ es un evento que ocurre, si y sólo si, A y B ocurren.
3. A^c es un evento que ocurre, si y sólo si, A no ocurre.
4. $A - B$ es un evento que ocurre, si y sólo si, A ocurre pero no B.

Eventos mutamente excluyentes. Dos eventos A y B se dicen mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$.

Concepto de probabilidad. Muchas veces se quiere asignar a cada evento A un número real no negativo que indique el chance que tiene A de ocurrir. Supóngase que se raliza un experimento aleatorio n veces y que las condiciones en que éste es ejecutado se mantienen lo suficientemente constantes.
Se define la frecuencia relativa como sigue: para cada evento A, el número $f(A) = \frac{n(A)}{n}$ se llama frecuencia relativa de A, donde $n(A)$ indica el número de veces que ocurre el evento A.
Resulta que para cada A fijo, $f(A)$ no es constante ya que su valor depende de n, sin embargo, se ha observado que cuando un experimento aleatorio se realiza un número suficientemente grande de veces, bajo condiciones similares, la frecuencia relativa $f(A)$ se estabiliza alrededor de un valor específico entre 0 y 1.

Espacio de probabilidad. Sea $(\Omega, \Im)$ un espacio medible. Una función P definida sobre $\Im$ y de valor real que satisface las siguientes condiciones:

1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \Im$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_1, A_2, A_3, \cdots$ son elementos de $\Im$ mutuamente excluyentes, esto es, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

se llama medida de probabilidad sobre $(\Omega, \Im)$. La tripleta $(\Omega, \Im, P)$ se llama espacio de probabilidad. [1]

[1] Tomado del libro Probabilidad de la profesora Liliana Blanco Castañeda.