Probabilidad Condicional

Profesor: Diógenes Ramírez Ramírez
Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales

Probabilidad Condicional. Definición. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, si $A, B \in \Im$ con $P(A) > 0$, entonces se define la porbabilidad del evento B bajo la condición A de la siguiente manera:

$$P(B|A) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$$

Teorema. Medida de Probabilidad condicional. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \Im$ con $P(A) > 0$. Entonces:

1. $P(.|A)$ es una medida de probabilidad sobre Ω, que está concentrada en A, esto es $P(A|A) = 1$.
2. Si $A \bigcap B = \emptyset$ entonces $P(B|A) = 0$.
3. $P(B \bigcap C|A) = P(B|A \bigcap C)P(C|A)$, si $P(A \bigcap C) > 0$.
4. Si $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \Im$ con $P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_{n-1}) > 0$ entonces

$$\begin{aligned} P(A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \bigcap A_2) \cdots \\ P(A_n|A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_{n-1}). \end{aligned}$$

Dada la definición anterior se deben verificar las tres condiciones que caracterizan a una medida de probabilidad.

1. Es claro que $P(B|A) \geq 0$ para todo $B \in \Im$ ya que es la razón de dos cantidades una no negativa y la otra positiva.
2. $P(\Omega|A) = \frac{P(A \bigcap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$
3. Sean $A_1, A_2, \cdots$ elementos de $\Im$ disyuntos dos a dos. Entonces:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|A\right) &= \frac{P\left(A \bigcap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{P(A)} \\ &= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \bigcap A)\right)}{P(A)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bigcap A)}{P(A)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|A). \end{aligned}$$

Eventos Independientes. Dos eventos A y B son independientes, si y solo sí,

$$P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$$

En caso contrario son dependientes.

Familia independiente. Una familia $A_i : i \in I$ de eventos se dice independiente si:

$$P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \Pi_{i\in J} P(A_i)$$

para todo conjunto finito J de I.

Familia independiente dos a dos. Una familia $A_i : i \in I$ de eventos se dice independiente dos a dos si:

$$P(A_i \bigcap A_j) = P(A_i)P(A_j), \quad \text{para todo} \quad i \neq j.$$

La independencia dos a dos de una familia no implica la independencia de ésta.
Ejecicios:

1. Se lanzan un par de dados, si se sabe que uno de ellos resulta en un 4. ¿Cuál es la probabilidad de que
   - El otro caiga en 5?
   - El total de ambos sea mayor que 7?

2. En una cierta región del país se sabe por experiencia pasada que la probabilidad de seleccionar un adulto mayor de 40 años de edad con cáncer es de 0.02. Si la probabilidad de que un médico le diagnostique correctamente a una persona con cáncer que tiene la enfermedad es de 0.78 y la de que se equivoque, de 0.06, ¿cuál es la probabilidad de que a una persona se le diagnostique cáncer?
   ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le diagnostique cáncer, verdaderamente tenga la enfermedad?

3. Supóngase que usted le pide a un compañero de curso que lo inscriba en la asignatura «Matemáticas sin esfuerzo» que se ofrecerá el próximo semestre en su universidad. Si su compañero olvida hacer la inscripción en los plazos estipulados por el Departamento de Matemáticas, la probabilidad de que usted consiga cupo en dicha asignatura es de sólo el 2 %, en tanto que si su compañero hace la inscripción a tiempo, la probabilidad de que usted consiga cupo es del 80 %. Usted está seguro, en un 95 %, de que su compañero hará la inscripción a tiempo. Si usted no obtuvo cupo, ¿a qué es igual la probabilidad de que su compañero haya olvidado inscribirlo a tiempo?

Tomado de: Probabilidad. Liliana Blanco Castañeda. Universidad Nacional de Colombia.