6.4

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. $\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ is a basis

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$.

Using the Gram-Smitthn Process: let $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ be the orth. basis.

let $v_1 = w_1$

$w_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{\{w_1\}}(v_2)$

$= v_2 - (\operatorname{proj}_{w_1}(v_2)) = v_2 - \left(\frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} w_1\right)$

$= v_2 - \cancel{\left(\frac{2-3+1+2}{1+1+1+1+1}\, w_1\right)}\ \frac{2+3+1+1+2}{4}\ w_1$

$= \cancel{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}}$. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$w_3 = \cancel{w_3}\ v_3 - \operatorname{proj}_{\{w_1, w_3\}}(v_3) = v_3 - [\operatorname{proj}_{w_1}(v_3) + \operatorname{proj}_{w_2}(v_3)$

$= v_3 - \left(\frac{w_1 \cdot v_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_3} w_3\right) = v_3 - \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

$w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore W = \left\{\begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

10. $w_1 = v_1$.

$$w_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{\{w_1\}}(v_2)$$

$$w_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{\{w_1, w_2\}}(v_3).$$

$\Rightarrow$ $v_1 = w_1$

$$v_2 = w_2 + \mathrm{proj}_{\{w_1\}}(v_2)$$

$$v_3 = w_3 + \mathrm{proj}_{\{w_1, w_2\}}(v_3).$$

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 + \mathrm{proj}_{\{w_1\}}(v_2) & w_3 + \mathrm{proj}_{\{w_1, w_2\}}(v_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 + \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} w_1 & w_3 + \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_2} + \frac{w_1 \cdot v_3}{w_1 \cdot w_1} w_1 \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} & \frac{w_1 \cdot v_3}{w_1 \cdot w_1} \\ 0 & 1 & \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(By the Row vector Rule)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{w_1}{\|w_1\|} & \frac{w_2}{\|w_2\|} & \frac{w_3}{\|w_3\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|w_1\| & \|w_1\| \frac{w_1 \cdot v_2}{w_1 \cdot w_1} & \|w_1\| \frac{w_1 \cdot v_3}{w_1 \cdot w_1} \\ 0 & \|w_2\| \cdot 1 & \|w_2\| \frac{w_2 \cdot v_3}{w_2 \cdot w_2} \\ 0 & 0 & \|w_3\| \end{bmatrix}.$$

$$= \underset{Q}{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/\sqrt{3} & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/2 & 1/\sqrt{3} & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}} \underset{R}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

where Q is the normalized orthogonal matrix & R is an upper Δ matrix.