Lab6 质点弹簧系统仿真

By PB17111585 张永停

一、实验内容

- 在给定的网格框架上完成作业，实现
  - 质点弹簧仿真模型的欧拉隐式方法
  - 质点弹簧仿真模型的加速模拟方法

二、算法描述

（一）欧拉隐式方法

- $$\begin{gathered}\boldsymbol{x}_{n+1}=\boldsymbol{x}_n+h\boldsymbol{v}_{n+1},\\ \boldsymbol{v}_{n+1}=\boldsymbol{v}_n+h\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{f}_{int}(t_{n+1})+\boldsymbol{f}_{ext})\end{gathered}$$

记

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_n+h\boldsymbol{v}_n+h^2\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}_{ext}, \tag{*}$$

则原问题转化为求解关于$\boldsymbol{x}$的方程：

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x})=0,$$

利用牛顿法求解该方程,考虑到程序运行时间，至多迭代50次，若50次后还未收敛，直接计算下一帧

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-(\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}))^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)}).$$

迭代初值选为$\boldsymbol{x}^{(0)}=y$.

迭代得到位移x后更新速度$v_{n+1}=(x_{n+1}-x_n)/h$

- 关于$(\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)})$，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^{(k)})$可以看作n个3*3的矩阵对角排列，对每个点的梯度拼接即可

  设单个弹簧（端点为$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$），劲度系数为$\boldsymbol{k}$，原长为$\boldsymbol{l}$，有：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}_1\text{所受弹力：}\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=k(||\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2||-l)\frac{\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1}{||\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2||},\\ \boldsymbol{x}_2\text{所受弹力：}\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=-\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2),\end{gathered}$$

对

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=k(||\boldsymbol{x}||-l)\frac{-\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||},$$

求导有

$$\frac{d\boldsymbol{h}}{d\boldsymbol{x}}=k(\frac{l}{||\boldsymbol{x}||}-1)\boldsymbol{I}-kl||\boldsymbol{x}||^{-3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T.$$

带入弹力公式得：

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{\partial \boldsymbol{x}_1} = k(\frac{l}{||\boldsymbol{r}||} - 1)\boldsymbol{I} - kl||\boldsymbol{r}||^{-3}\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T, \text{其中} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{I}\text{为单位阵}$$

（二）加速方法

对于内力（为保守力）有：

$$\boldsymbol{f}_{int}(x) = -\nabla E(\boldsymbol{x})$$

故对方程(*)的求解可以转为为一个最小化问题：

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_x \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^T \boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + h^2 E(\boldsymbol{x})$$

同时对于弹簧的弹性势能可以描述为一个最小化问题：

$$\frac{1}{2}k(||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2|| - r)^2 = \frac{1}{2}k \min_{||\boldsymbol{d}||=r} ||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{d}||^2,$$

从而原问题转化为：

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \min_{x, \boldsymbol{d} \in \boldsymbol{U}} \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} - h^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}$$

其中

$$\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_s), \boldsymbol{d}_s \in R^3, ||\boldsymbol{d}_i|| = l_i\}(l_i\text{为第}\boldsymbol{i}\text{个弹簧原长}),$$

从而可以采用Global/Local对 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{d}$ 迭代优化求得该优化问题的解：

$$\boldsymbol{x}\text{优化：求解方程}(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{x} = h^2\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} + h^2\boldsymbol{f}_{ext}$$

$$\boldsymbol{d}\text{优化：}\boldsymbol{d}_i = l_i\frac{\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}}{||\boldsymbol{p}_{i_1} - \boldsymbol{p}_{i_2}||}\text{（这里}l_i\text{为第}\boldsymbol{i}\text{个弹簧原长，}\boldsymbol{p}_{i_1}\text{，}\boldsymbol{p}_{i_2}\text{为其两端点），}$$

由于$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{J}$与时间无关，故可以在初始化的时候进行计算与分解，以在迭代时候节省时间

（三）约束

- 外力约束本次实验只考虑重力，是个常量
- 考虑真正的坐标，降低维数

  将所有n个质点的坐标列为列向量 $x \in R^{3n}$，将所有 m 个自由质点坐标（无约束坐标）列为列向量 $x_f \in R^{3m}$,则两者关系：

$$\boldsymbol{x}_f = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{x}_f + \boldsymbol{b},$$

其中 $K \in R^{3m \times 3n}$ 为单位阵删去约束坐标序号对应行所得的稀疏矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为与约束位移有关的向量，计算为 $b = x - K^T Kx$, 若约束为固定质点则 b 为常量。由此我们将原本的关于 x 的优化问题转化为对 x_f 的优化问 题：欧拉隐式方法中求解方程为：

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) = K(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - h^2\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{x})) = 0,$$
$$\text{梯度：}\nabla_{x_f}\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_f) = K\nabla_x\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})K^T,$$

加速方法中优化问题中 x 迭代步骤转化为求解关于 x_f 的方程：

$$K(\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})K^T\boldsymbol{x}_f = K(h^2\boldsymbol{J}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{M} + h^2\boldsymbol{L})\boldsymbol{b})$$

三、代码框架

（一）隐式方法

```
private:
        double g;
        std::vector<double> force_ext;
        std::vector<double> force_int;
        std::vector<double> mass;
        std::vector<double> l;              //弹簧原长

        std::vector<double> xk;             //迭代过程中的$x^{n}$
        std::vector<double> x;
        std::vector<double> xk_1;           //迭代过程中的$x^{n+1}$
        std::vector<double> b;              //约束里的b
        std::vector<double> gx;             //g(xk)

        Eigen::MatrixXd gx_m;               //矩阵形式的g(xk)
        Eigen::MatrixXd K;                  //约束矩阵K
        Eigen::MatrixXd inverG;             //$\nabla g(x)$的逆
        Eigen::SparseMatrix<double> diff;   // \nable g(x)
        std::set<int> fix;                  //固定的点


public:
        void SetInitG();                    //重力初始化
        void CacForce();                    //内力（即弹力）计算
        void GetSet();                      //从fixed_id转化到fix
        void CacX();                        //牛顿迭代计算坐标
        void CacGX();                       //计算g(xk)
        void CacK();                        //计算转换矩阵
        void CacGxM();
        void CacDiff();                     //计算\nabla g(x)
        bool isconv();                      //牛顿迭代收敛判断
        void CacV();                        //计算速度
        void UpdateX();                     //将xf转化成x
        void UpdatePos();                   //更新坐标
        void SetFix();                      //固定点
```

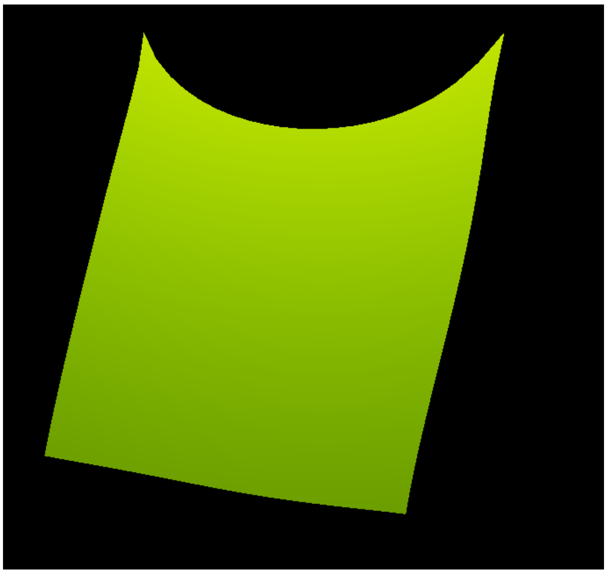
（二）加速方法

```
private:
        int iter;                           //迭代次数
        std::vector<double> d;
        std::vector<double> y_;
        std::vector<double> xx;             //存储x_{k-1}
        Eigen::MatrixXd J;
        Eigen::MatrixXd L;
        Eigen::MatrixXd M;

        Eigen::SparseMatrix<double> A;      //求解的方程的左端
        Eigen::SimplicialLLT<Eigen::SparseMatrix<double> > LLT_;

        bool isfast;                        //是否采用fast的方法

public:
```

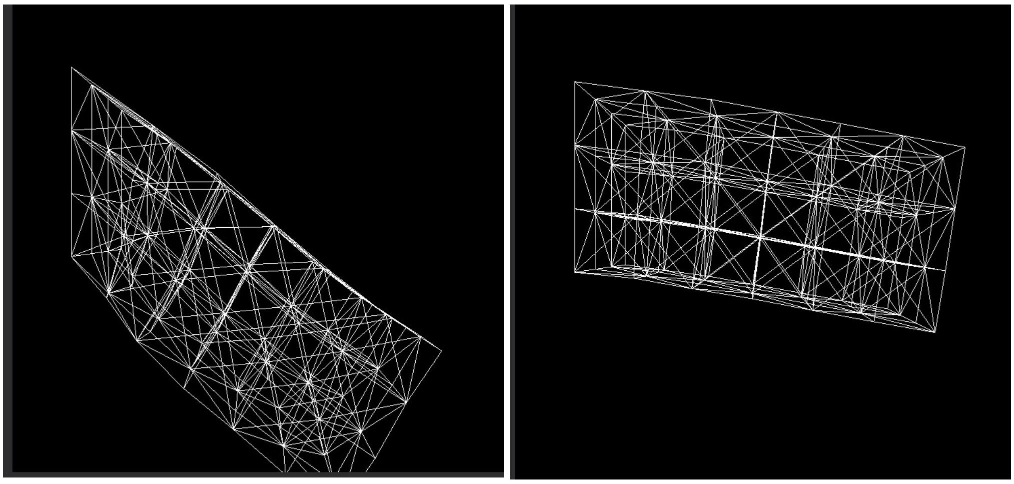
```
        void CacJ();
        void CacL();
        void CacA();
        void Global_CacX();
        void Local_CacD();

        void  SetFast();                    //使用fast的方法
```

四、实验结果

- 布料



- 长方体



左: k=1e3　　　　　　　　　　　　　*右:k=1e4*

- 具体见视频，视频命名 $物体\_模拟方法(euler/fast)\_stiff$

五、实验总结

- 本次实验的一些细节
  - 在求$(\nabla g(x))^{-1}$，相当于求$\nabla g(x)\ A = I_n$，从而调用Eigen的LU解方程得到逆
  - 提前分解加速计算
  - Release真的比debug快很多，刚开始用debug不动以为是自己代码有问题调了好久
  - 牛顿迭代可能会不收敛，故应该控制迭代次数避免一直循环

- 对弹力求导的时候是用的$\boldsymbol{F} = k(||\boldsymbol{x}|| - l)\frac{-\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$来求导的，不是$\boldsymbol{F} = k_s(\frac{||\boldsymbol{x}||}{l} - 1)\frac{-\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||}$，这里应和前面计算内力的时候对应
    - 部分类似代码复制的时候记得改变量。。。比如CacJ,CacL，相似的过程，我最开始复制的时候忘了改最后的变量，导致J是0，找了好久
    - 如果需要调用$SetLeftFix()$，请注释掉$SetFix()$的内容（SetFix()主要是固定正方形的两个顶点的）
- 本次实验debug花了超级多的时间，其中隐式的调试过程持续了整整两天，主要是当时写的时候觉得不难，代码写的太乱了，犯了好多低级错误,下次争取白天写代码以及把代码写规范点(