Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Построение множества достижимости»

Студент 315 группы
А. Т. Айтеев

Руководитель курсовой работы
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

Содержание

1 Формулировка задачи

Задано обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} - x + 2x^2 + 3\operatorname{arctg}\left(x^3\right) + 2\dot{x}^2 = u \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$. На возможные значения управляющего параметра u наложено ограничение: $u \in [-1, 1]$. Задан начальный момент времени $t_0 = 0$ и начальная позиция $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$. Необходимо построить множество достижимости $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$ (множество пар $(x(t), \dot{x}(t))$) в классе программных управлений в заданный момент времени $t \geq t_0$

1) Необходимо написать в среде MatLab функцию reachset (t), которая по заданному параметру $t \geq t_0$ рассчитывает приближенно множество $X(t, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0))$. На выходе функции - два массива X, Y с у порядоченными координатами точек многоу гольника, образующего границу искомого множества. Точки в этих массивах должны быть упоря дочены так, чтобы результаты работы функции без дополнительной обработки можно было подавать на вход функция м визуализации (например, plot). Предусмотреть такой режим работы функции, при котором она возврашает также коорди наты линий перекл ючения оптимального управлен ия (с возможностью их визуализации).

2) Необходимо реализовать функцию reachsetdyn(t1,t2, N, filename), которая, используя функцию reachset (t), строит множества достижимости для моментов времени $\tau_i = t_1 + \frac{(t_2-t_1)i}{N}, i = 0, 1, \ldots, N$. Здесь $t_2 \geq t_1 \geq t_0, N-$ натуральное число. Для каждого момента времени τ_i функция должна отобразить многоугольник, аппроксимирующий границу множества достижимости. Результат работы функции и должен быть сохранен в виде видео-файла filename.avi. Необходимо также предусмотреть вариант работы функции (при отсутствии параметра filename) без сохранения в файл, с выводом непосредственно на экран. Как частный случай, функция должна иметь возможность строить границу множества достижимости в один фиксированный момент времени (при $t_2 = t_1$).

3) В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе построения множества достижимости, описать схему алгоритма построения множества достижимости программой, привести примеры построенных множеств достижимости (с иллюстрациями). Все вспомогательные утверждения (за) исключением принципа максимума Понтрягина), указанные в отчете, должны быть доказаны,

2 Теоретические выкладки

2.1 Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим задачу быстродействия

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}=f(x(t),u(t))\\ u\in\mathcal{P},t\in[t_0;t_1]\\ x\left(t_0\right)=x^0,x\left(t_1\right)=x^1\\ t_1-t_0\rightarrow\min\end{array}\right. \tag{2}$$

где управления $u=u(\cdot)\in\mathbb{R}^m$ предполагаются кусочно-непрерывными функциями на $[t_0;t_1]\,,f(x,u)=\left(f^1(x,u),\ldots,f^n(x,u)\right)'\in\mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что $f^j(x,u)$, $f_x^j(x,u),j=\overline{1,n}$ непрерывны по совокупности аргументов $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.

Введем вспомогательные переменные $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_n)\in\mathbb{R}^n$ и определим функцию

$$H(x,u,\psi)=\langle\psi,f(x,u)\rangle \tag{3}$$

называемую функцией Гамильтона-Понтрягина. Обозначим

$$\sup_{u\in\mathcal{P}}H(x(t),u(t),\psi(t))=M(x(t),\psi(t)) \tag{4}$$

Паре $(u(t),x(t)),\quad t\in[t_0;t_1]$ поставим в соответствие следущую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t)=-\frac{\partial H(x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^i}=-\sum_{j=1}^n\psi_j(t)\frac{\partial f^j(x(t),u(t))}{\partial x^i},i=\overline{1,n} \tag{5}$$

Систему (4) называют сопряженной системой, соответствующей паре $(u(t),x(t)),t\in[t_0;t_1]$

Определение 2.1. *Множество достижимости $X\left(t,t_0,x^0\right)$ – множество концов траектории системы*

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))\\ u(t)\in U(t)\\ x\left(t_0\right)=x^0\end{array}\right.$$

при любом допустимом управлении.

Теорема 2.1. *(Принцип максимума Понтрягина) Рассмотрим систему:*

$$\dot{x}=f(x,u)$$

которая задана в $\mathbb{R}^n$, где $f(x,u),\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)-$ непрерывные функции, определенные на $\mathbb{R}^{n+m}$. Пусть $U-$ множество допустимых управлений на интервале $0\leq t\leq T$, удовлетворяющих ограничению $u(t)\in\mathcal{P}\in\mathbb{R}^m$. Пусть некоторому допустимому управлению $u^*(t)\in U$ соответствует решение $x^*(t)$с концом $x^*(T)$, лежсащим на границе множества достижимости. Тогда существует ненулевое сопряженное решение $\psi^*(t)$ системы

$$\dot{\psi} = -\left\langle \psi, \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) \right\rangle$$

такое, что почти всюду выполняется приниип максимума:

$$H(\psi, u^*, x^*) = \sup_{u \in \mathcal{P}} H(\psi, u, x)$$

Если управление $u^*(t)$ ограничено, то:

$$\sup_{u \in \mathcal{P}} H(\psi, u, x) = \text{ const } \geq 0, \text{ для n.в. } t \in [0, T]$$

Для полученной системы функция Гамильтона-Понтрягина принимает следующий вид:

$$H(\psi, u, x) = \psi_1 x_2 + \psi_2(u + x_1 - 2x_1^2 - 3 \arctan x_1^3 - 2x_2^2)$$

Тогда запишем сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2(-1 + 4x_1 + 9x_1^2 * \frac{1}{1+x_1^6}) \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - 4\psi_2 x_2 \end{cases}$$

Поэтому, если точка принадлежит границе множества достижимости, то она удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Для построения границы множества достижимости построим все траектории, удовлетворяющие принципу максимума.

Из принципа максимума следует, что $u^*(t) = \operatorname{sign}(\psi_2(t))$, а переключения происходят в момент времени $\psi_2(t) = 0$. Сформулируем две теоремы о нулях $\psi_2(t)$:

Теорема 2.2. *(О конечном числе нулей) Пусть $u(t)-$ оптимальное управление для исходной системы, тогда $\psi_2(t)$ имеет конечное число нулей на отрезке $[0, T]$.*

Доказательство. Пусть на конечном интервале времени $\psi_2(t)$ имеет бесконечное число нулей, тогда (так как интервал времени конечен) существует такой момент времени t^* (точка "накопления"), в который $\psi_2(t^*) = 0$ и $\dot{\psi}_2(t^*) = 0$. Тогда $\dot{\psi}_1(t^*) = 0$ и $\psi_1(t^*) = 0$, что противоречит тому, что вектор $\psi(t)$ ненулевой. ■

Теорема 2.3. *(О чередовании нулей) Пусть $(x(\cdot), u(\cdot))-$ оптимальная пара с временем быстродействия $T, \psi(\cdot) = (\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot)) -$ решение сопряженной системы. Тогда $\forall \tau_1, \tau_2 :$ $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ справедливы следующие утверждения:*

1. Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) = 0$, тогда $x_2(\tau_2) = 0$

2. Если $\psi_2(\tau_1) = \psi_2(\tau_2) = 0$ и $x_2(\tau_1) \neq 0$, но $\exists \tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2] : x_2(\tilde{\tau}) = 0$

3. Если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, x_2(\tau) \neq 0, \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) = 0$, тогда$\psi_2(\tau_2) = 0$.

4. Если $x_2(\tau_1) = x_2(\tau_2) = 0, x_2(\tau) \neq 0, \forall \tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, тогда $\psi_2(\tau_2) \neq 0$, но $\exists \tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2] : \psi_2(\tilde{\tau}) = 0$

Доказательство. Докажем четыре утверждения:

1. Применим (7) для моментов времени τ_1, τ_2, получим $\psi_1(\tau_1) x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2) . x_2(\tau_1) = 0 \Rightarrow \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2) = 0, \psi_2(\tau_2)$ по условию равно 0, а так как вектор $\psi(\cdot)$ ненулевой, то $\psi_1(\tau_2) \neq 0 \Rightarrow x_2(\tau_2) = 0$

2. $\psi_1(\tau_1) x_2(\tau_1) = \psi_1(\tau_2) x_2(\tau_2)$. Так как $x_2(\tau_1) \neq 0, \psi_1(\tau_1) \psi_1(\tau_2) < 0$, то $x_2(\tau_1) x_2(\tau_2) < 0$ что значит, что $x_2(\tau)$ имеет единственный корень на $[\tau_1, \tau_2] - \tilde{\tau}$.

3. Из пункта 1 имеем, что $\psi_2(\tau) \neq 0, \tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Тогда:

$$\frac{d}{dt}\left(x_2\psi_1 + \dot{x}_2\dot{\psi}_2\right) = 0 = \dot{x}_2\psi_1 + x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}\psi_2 + \ddot{x}_2\psi_2 + \dot{x}_2\left(-\psi_1 + \psi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(\tau_1)\,\psi_2(\tau_1) = \dot{x}_2(\tau_2)\,\psi_2(\tau_2)$$

Так как $\psi_2(\tau_1) = 0$, а $x_2(\tau_2) \neq 0$ (иначе система имела бы только тривиальное решение). Поэтому $\psi(\tau_2) = 0$.

4. Так как $\psi_2(\tau_1) \neq 0$, то $\psi_2(\tau_2) \neq 0$. Если $\psi_2(\tau)$ не обращается в ноль на $[\tau_1, \tau_2]$, то $\dot{x}_2(\tau_1)\,\dot{x}_2(\tau_2) > 0$, что противоречит тому, что $\tau_1, \tau_2 -$ последовательные корни $x_2 \Rightarrow \exists\tilde{\tau} \in [\tau_1, \tau_2] : \psi_2(\tilde{\tau}) = 0$ ■

Из теоремы следует, что либо нули x_2 и ψ_2 совпадают, либо они чередуются. Разобьем систему (2) на две:

$$S_+ : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 1 + x_1 - 2x_1^2 - 3\arctan x_1^3 - 2x_2^2 \end{cases}$$

$$S_- : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -1 + x_1 - 2x_1^2 - 3\arctan x_1^3 - 2x_2^2 \end{cases}$$

Система S_+отвечает управлению 1, система $S_- - 1$. Пусть сначала управление равно 1, тогда решаем систему S_+и находим момент времени $t^* : x_2(t^*) = 0$. Построим траекторию, соответствующую системе S_+до момента времени t^*. Из теорем (3) мы знаем, что нули ψ_2 чередуются с нулями x_2. Организуем перебор по равномерной сетке на отрезке $[0; t^*]$ времени переключения $\hat{t}$. В момент переключения $\hat{t}$ управление станет равно -1. Тогда будем строить траекторию из точки $\left(x_1(\hat{t}), x_2(\hat{t})\right)$, соответствующую системе S_-до нового момента переключения, который находится из решения сопряженной системы с начальными условиями:

$$\begin{cases} \psi_1(\hat{t}) = 1 \\ \psi_2(\hat{t}) = 0 \end{cases}$$

Такой выбор начальных условий связан с нормировкой вектора ψ. Процесс продолжается $(u = \alpha)$ меняется на $(u = -\alpha)$ пока $t < T$. Для системы с начальным управлением $-\alpha$ процесс полностью аналогичен.

3 Алгоритм решения

1. Решить систему S_+, получить момент времени $t^* : x_2(t^*) = 0$.

2. Сделать перебор по времени переключения на отрезке $[0; t^*]$.

3. Решить сопряженную систему с начальными условиями (14) и систему S_-, найти момент времени $t : \psi_2(t) = 0$.

4. Если $t < T$ сделать переключение и решать систему S_+, а сопряженную систему с условиями $[-1; 0]$.

5. Повторять до $t \geq T$.

6. Аналогично поступить с системой S_-при начальном $u = -\alpha$.

7. Объединить полученную кривую в общее целое, которое и является границей множества достижимости.

8. При построении каждой траектории координаты точек переключения добавляются в специальный массив, а затем объединяются в кривую переключений.

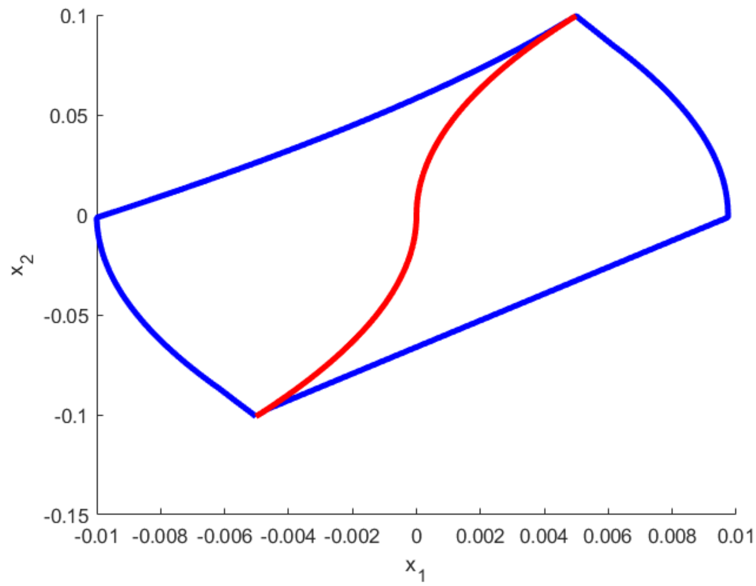

Рис. 1: Аппроксимация множества достижимости при t = 0.1

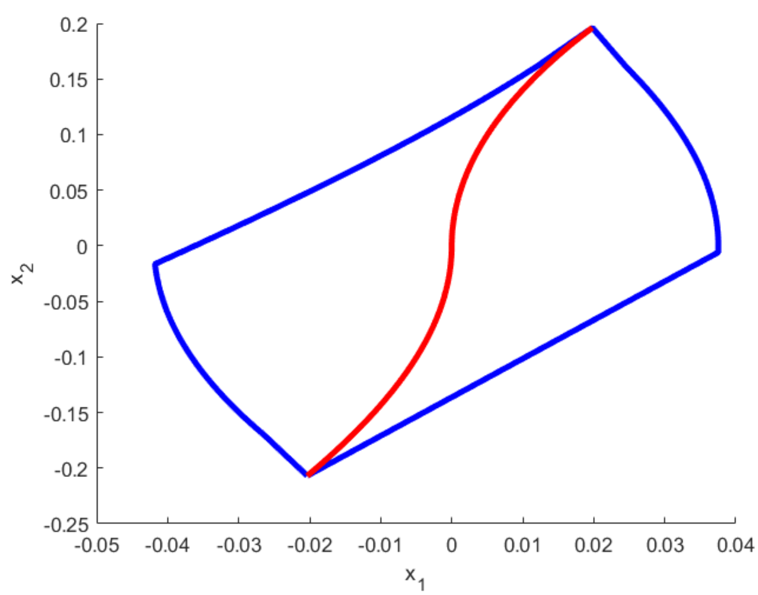

Рис. 2: Аппроксимация множества достижимости при t = 0.2

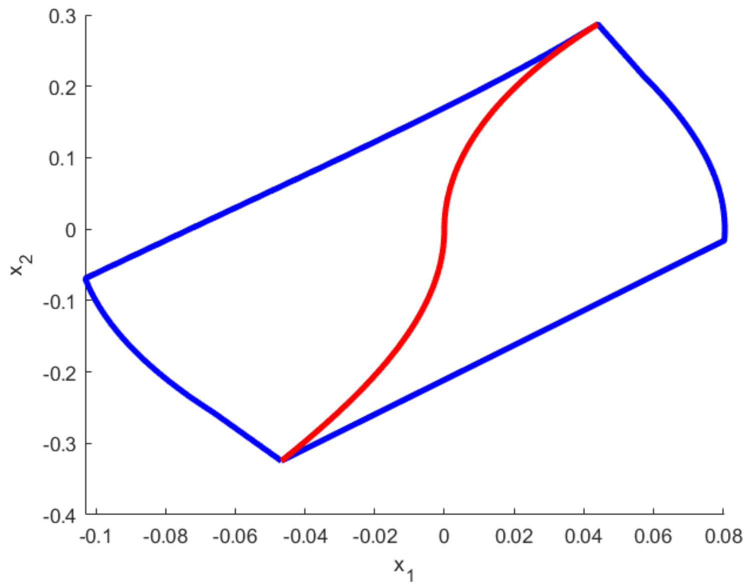

Рис. 3: Аппроксимация множества достижимости при t = 0.3

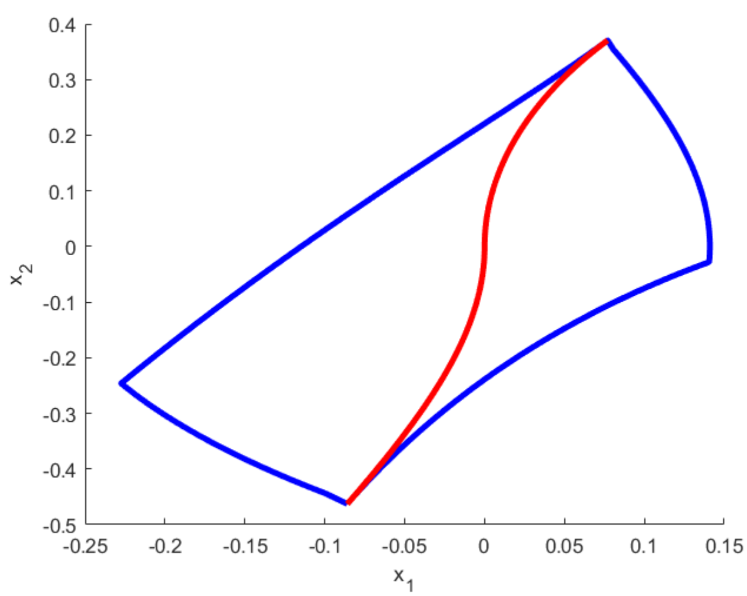

Рис. 4: Аппроксимация множества достижимости при t = 0.4

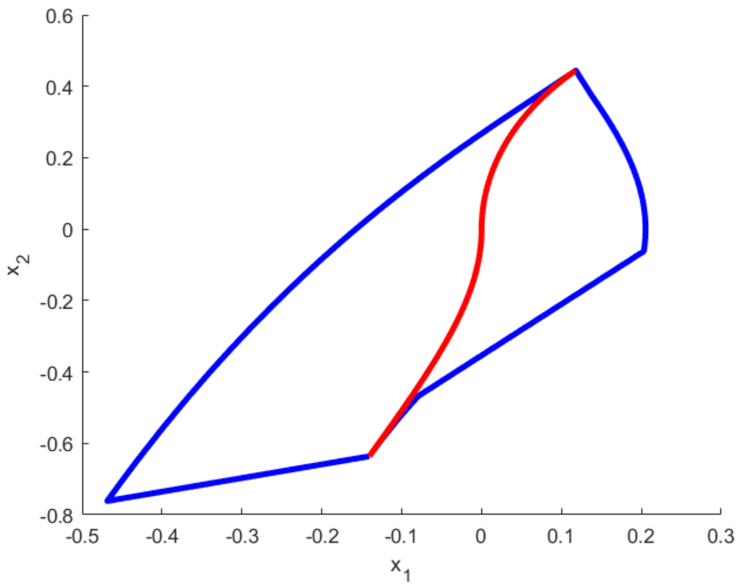

Рис. 5: Аппроксимация множества достижимости при t = 0.5