



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# «Линейная задача быстродействия»

*Студент 315 группы*  
А. Т. Айтеев

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2021

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Теоретические выкладки</b>	<b>4</b>
2.1	Принцип максимума Понтрягина . . . . .	4
2.2	Вычисление опорных функций . . . . .	4
2.2.1	Опорная функция для множества $\mathcal{P}$ . . . . .	6
2.2.2	Опорная функция для множества $\mathcal{X}_0$ . . . . .	6
2.2.3	Опорная функция для множества $\mathcal{X}_1$ . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Описание численного решения</b>	<b>13</b>
3.1	Алгоритм решения . . . . .	13
3.2	Комментарии к алгоритму . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Примеры задач и их решения</b>	<b>13</b>
4.1	Пример 1 . . . . .	13
4.2	Пример 2 . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Список литературы</b>	<b>19</b>

# 1 Постановка задачи

Задана линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f, t \in [t_0, +\infty) \quad (1)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $f \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ . На значения управляющих параметров  $u$  наложено ограничение:  $u \in \mathcal{P}$ . Пусть  $\mathcal{X}_0$  начальное множество значений фазового вектора,  $\mathcal{X}_1$  - целевое множество значений фазового вектора. Необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время  $T > 0$ , за которое траектория системы, выпущенная в момент времени  $t_0$  из некоторой точки множества  $\mathcal{X}_0$ , может попасть в некоторую точку множества  $\mathcal{X}_1$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{P} & \text{ — шар радиуса } r > 0 \text{ с центром в точке } p, \\ \mathcal{X}_0 & = \left\{ (x_1, x_2)' : \alpha x_1^2 + (x_2 - 1)^4 \leq \gamma \right\}, \quad \alpha, \gamma > 0 \\ \mathcal{X}_1 & = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \leq a \right\}, \quad a > 0 \end{aligned}$$

1) Необходимо написать в среде MatLab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным параметрам  $A, B, f, t_0, r, p, a, \alpha, \gamma$  определяет, разрешима ли задача быстродействия. Если задача разрешима, то программа должна (приближенно) найти значение  $T$ , построить графики компонент оптимального управления, компонент оптимальной траектории, сопряженных переменных. Программа должна рассчитывать погрешность выполнения условий трансверсальности для найденной “оптимальной” траектории. Программа должна давать пользователю возможность постепенно улучшать результаты расчетов за счет изменения параметров численного метода и анализа получающихся приближенных результатов.

2) В соответствующем заданию отчете необходимо привести все теоретические выкладки, сделанные в ходе решения задачи оптимального управления, привести примеры построенных оптимальных управлений и траекторий (с иллюстрациями) для различных параметров системы (обязательно для различных собственных значений матрицы  $A$ ). Необходимо также исследовать на непрерывность величину  $T$  по начальному (целевому) множеству фазовых переменных.

Начальный момент времени  $t_0$  зафиксирован, а конечный момент времени определяется из условия попадания решения  $x(t)$  на множество  $\mathcal{X}_1$ . Задача быстродействия заключается в нахождении управления  $u(t)$ , осуществляющего переход из множества  $\mathcal{X}_0$  в множество  $\mathcal{X}_1$  за наименьшее время. Таким образом можно записать задачу в следующем виде:

$$\dot{x} = A(t)x + Bu + f, \quad x(t_0) \in \mathcal{X}_0, x(t_1) \in \mathcal{X}_1 \quad (2)$$

$$J = t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{P}} \quad (3)$$

## 2 Теоретические выкладки

### 2.1 Принцип максимума Понтрягина

**Теорема 2.1.** Пусть  $(x(t), u(t))$  - оптимальная пара на отрезке времени  $[t_0, t_1]$ . Тогда она необходимо должна удовлетворять принципу максимума Понтрягина, т.е. существует такое нетривиальное решение  $\psi(t)$  сопряжённой системы дифференциальных уравнений  $\dot{\psi} = -A^*\psi(t)$ , что выполнены следующие три условия:

1. условие максимума  $\langle \psi(t), Bu(t) \rangle = \rho(\psi(t) | B\mathcal{P})$  (5) для почти всех  $t \in [t_0, t_1]$
2. условие трансверсальности на множестве  $\mathcal{X}_0$   
 $\langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0)$ ; (6)
3. условие трансверсальности на множестве  $\mathcal{X}_1$   
 $\langle -\psi(t_1), x(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) | \mathcal{X}_1)$ . (7)

### 2.2 Вычисление опорных функций

**Определение 2.1.** Множество  $F$  - выпуклое, если

$$\forall x, y \in F, \forall \alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in F$$

**Определение 2.2.** Множество  $F$  - замкнутое, если оно содержит все свои предельные точки.

**Определение 2.3.** Множество  $F \in \mathbb{R}^n$  - ограниченное, если существует пар в  $\mathbb{R}^n$ , целиком содержащий множество  $F$ .

**Определение 2.4.** Множество  $F \in \mathbb{R}^n, n < \infty$  - компакт, если оно замкнуто и ограничено. Пусть задано множество  $F \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$  - непустой выпуклый компакт в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.5.** Опорная функция множества  $F$  - скалярная функция  $\rho(\ell | F)$  векторного аргумента  $\ell \in \mathbb{R}^n$ , определяемая условием

$$\rho(\ell | F) = \sup_{x \in F} \langle x, \ell \rangle$$

Перечислим основные свойства опорных функций.

**Утверждение 2.1.** Функция  $\rho(\cdot | F)$  положительно однородна, т.е.

$$\rho(\lambda \cdot \ell | F) = \lambda \cdot \rho(\ell | F), \forall \lambda \geq 0, \forall \ell \in \mathbb{R}^n$$

**Утверждение 2.2.** Пусть  $F, G \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда

$$\rho(\ell | F + G) = \rho(\ell | F) + \rho(\ell | G)$$

**Утверждение 2.3.** Пусть  $A$ -матрица размера  $n \times n$ . Тогда

$$\rho(\ell | A \cdot F) = \rho(A^T \cdot \ell | F)$$

где  $A^T$  - матрица, сопряжённая к  $A$ .

**Утверждение 2.4.** Функция  $\rho(\ell | F)$  непрерывна по совокупности переменных  $\ell, F$ .

**Определение 2.6.** Выпуклая оболочка  $\text{conv}(F)$  множества  $F$  — наименьшее выпуклое множество, содержащее множество  $F$ .

**Замечание 2.1.**  $\text{conv}(F)$  есть пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих множество  $F$ .

**Утверждение 2.5.** Пусть  $F \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$  — непустой компакт в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\rho(\ell \mid F) = \rho(\ell \mid \text{conv}(F))$$

**Определение 2.7.** Опорный вектор множества  $F$  в направлении  $\ell$  — вектор  $\psi_0 \in F$  :

$$\rho(\ell \mid F) = \langle \psi_0, \ell \rangle$$

Иными словами, на векторе  $\psi_0$  достигается точная верхняя грань скалярного произведения в определении опорной функции. Заметим, что такой вектор существует  $\forall \ell \in \mathbb{R}^n$ , т.к. множество  $F$  непусто и компактно, а скалярное произведение непрерывно.

**Определение 2.8.** Опорное множество по направлению  $\ell$  — множество всех опорных векторов.

**Замечание 2.2.** Опорная функция (замкнутого) круга

$$B^c = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2 \right\}$$

и открытого круга

$$B = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2 \right\}$$

с центрами в точке  $a = (a_1, a_2)$  и радиуса  $r$  совпадает с опорной функцией окружности  $C$  с тем же центром  $a$  и того же радиуса  $r$ , поскольку  $B^c, B$  — компакты и  $B^c = \text{conv}(B) = \text{conv}(C)$

### 2.2.1 Опорная функция для множества $\mathcal{P}$

$$B_r(x_0) = p + rB_1(0)$$

$$\rho(\psi | \mathcal{P}) = \rho(\psi | B_r(p)) = \rho(\psi | p) + r \cdot \underbrace{\rho(\psi | B_1(0))}_{\text{максимум при } \frac{\psi}{\|\psi\|}} = \langle \psi, p \rangle + r \cdot \|\psi\|$$

$$\begin{aligned} x_{\max} &= r * \frac{\psi_1}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} + p_1 \\ y_{\max} &= r * \frac{\psi_2}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}} + p_2 \\ \rho(\psi | \mathcal{P}) &= x_{\max} * \psi_1 + y_{\max} * \psi_2 \end{aligned}$$

### 2.2.2 Опорная функция для множества $\mathcal{X}_0$

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ (x_1, x_2)' : \alpha x_1^2 + (x_2 - 1)^4 \leq \gamma \right\}, \quad \alpha, \gamma > 0,$$

По фиксированному вектору  $\psi(t_0)$  можно также найти все начальные значения вектора фазового состояния объекта  $x(t_0)$  из начального множества  $\mathcal{X}_0$ , удовлетворяющих условию трансверсальности на множестве  $\mathcal{X}_0$ . Для удобства записи обозначим  $x^0 = x(t_0)$ ,  $\psi^0 = \psi(t_0)$ .

Решением является опорный вектор множества  $\mathcal{X}_0$ .

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} h &= (0, 1)^T \\ \mathcal{S} &= \left\{ x = (x_1, x_2)^T : \alpha x_1^2 + x_2^4 \leq \gamma \right\}. \end{aligned}$$

Тогда учитывая вид множества  $\mathcal{X}_0$ , получим:

$$\mathcal{X}_0 = h + \mathcal{S}$$

$$\rho(l | \mathcal{X}_0) = \langle h, l \rangle + \rho(l | \mathcal{S})$$

Найдём опорное множество векторов для множества  $\mathcal{S}$  по направлению  $l = (l_1, l_2)^T$ . Воспользуемся методом множителей Лагранжа для следующей задачи:

$$xl_1 + yl_2 \rightarrow \max, \quad \alpha x^2 + y^4 \leq \gamma$$

Предположим для начала, что  $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0$ . Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = xl_1 + yl_2 + \lambda(\alpha x^2 + y^4 - \gamma) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = l_1 + 2\alpha\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = l_2 + 4\lambda y^3 = 0, \\ \alpha x^2 + y^4 = \gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{l_2}{4y^3}, x = \frac{2y^3 l_1}{\alpha l_2} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\alpha} \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 y^6 + y^4 = \gamma$$

Обозначим  $a = \frac{4}{\alpha} \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2$ ,  $w = y^2$  Причём, т.к. вектор  $(x, y) \in \mathcal{S}$ , то  $|y| \leq \sqrt[4]{\gamma} \Rightarrow w \in [0, \sqrt{\gamma}]$

Рассмотрим следующую функцию:

$$g(z) = aw^3 + w^2 - \gamma, w \in [0, \sqrt{\gamma}]$$

$$g'(w) = 3aw^2 + 2w = w(3aw + 2) = 0 \Leftrightarrow w = 0 \text{ либо } w = -\frac{2}{3a}.$$

При  $a \geq 0$  всегда строго возрастает, если же  $a < 0$  функция возрастает до значения  $w = -\frac{2}{3a}$ , затем убывает, что не является необходимым и достаточным доказательством существования и единственности корня уравнения  $g(w) = 0$ .

Так же заметим, что  $\gamma$  всегда должна быть больше нуля. При отрицательном  $a$  уравнение не имеет решения по утверждению выше.

Кроме того при  $\gamma > 0, a > 0$   $g(0) = -\gamma < 0$ ,  $g(\sqrt{\gamma}) = a\sqrt{\gamma^3} + \gamma - \gamma = a\sqrt{\gamma^3} > 0$  что соответствует условию существует и единственно решения уравнения  $g(w) = 0$  на интервале  $w \in (0, \sqrt{\gamma}]$ .

Аналитическое решение можно найти с помощью формулы Кардано.

Решим наше уравнение  $aw^3 + w^2 - \gamma = 0$  в каноничной форме. Прежде всего вычислим следующие константы:

$$p = -\frac{1}{3a^2}$$

$$q = \frac{2 - 27a^2\gamma}{27a^3}$$

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{-1}{27} \frac{1}{27a^6} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{27a^3}\right)^2 [4 - 4 * 27a^2\gamma + 729a^4\gamma^2] = \dots = \\ &= \frac{\gamma}{108a^4} [27a^2\gamma - 4] \end{aligned}$$

Если  $Q \geq 0$  тогда вещественный корень нашего уравнения единственный и выражается через формулу:

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{1}{3a}$$

Если же  $Q < 0$  то наступает условие "casus irreducibilis" при котором все три корня являются вещественными и среди них нужно взять тот что удовлетворяет нашим условиям.

Все три корня можно выразить через следующее выражение:

$$w_k = 2\sqrt{\frac{1}{9a^2}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right), k = 0, 1, 2;$$

выполнив замену переменных  $p, q$  получим следующие выражение:

$$w_k = \frac{2}{3a} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{27a^2\gamma}{2} - 1\right) - \frac{2\pi k}{3}\right), k = 0, 1, 2;$$

Отсюда можно заметить, что так как  $\frac{27a^2\gamma}{2} - 1 < 1$  то  $0 < \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{27a^2\gamma}{2} - 1\right) < \frac{\pi}{3}$

Пусть  $v = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{27a^2\gamma}{2} - 1\right)$  Рассмотрим три функции  $w_0, w_1, w_2$ , заметим, что:

$$w_k = \frac{2}{3a} \cos\left(v - \frac{2\pi k}{3}\right), v \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

Очевидно, что только  $w_0 - \frac{1}{3a}$  - корень уравнения на интервале  $(0, \sqrt{\gamma}]$  при условии casus irreducibilis.

Зная все это, пусть решение уравнения  $g(z) = 0$  будет некоторая  $w$ . Очевидно,  $y^2 = w > 0$ , тогда:

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{w} \\ x &= \pm\frac{2}{\alpha}\frac{l_1}{l_2}\sqrt{w^3} \end{aligned}$$

Выражение  $xl_1 + yl_2 = \pm\left(\frac{2}{\alpha}\frac{l_1}{l_2}\sqrt{w^3}l_1 + l_2\sqrt{w}\right) = \pm\sqrt{w}\frac{1}{l_2}\left[\frac{2w}{\alpha}l_1^2 + l_2^2\right]$  достигает максимума когда оба слагаемых имеют одинаковый знак, а значит  $x, y, l_2$  должны быть больше нуля.

Следовательно вектор на котором достигается максимум должен имеет координаты:

$$\text{sign}(l_2) \cdot \left(\frac{2l_1}{\alpha l_2}w^{\frac{3}{2}}, w^{\frac{1}{2}}\right)$$

В случае же, когда  $l_2 = 0$  получим опорный вектор с координатами  $(\text{sign}(l_1), 0)$ , а если  $l_1 = 0$ , то опорный вектор с координатами  $(0, \text{sign}(l_2))$ .

Вернёмся к выражению для опорной функции множества  $\mathcal{X}_0$  и условию трансверсальности на этом множестве:

$$\langle \psi(t_0), x(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0) = \langle \psi(t_0), h \rangle + \rho(\psi(t_0) | \mathcal{S}) \Rightarrow \langle \psi(t_0), x(t_0) - h \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{S}).$$

Таким образом вектор  $x(t_0) - h$  является опорным для множества  $\mathcal{S}$  по направлению  $\psi(t_0)$ . Обозначим  $\psi^0 = \psi(t_0)$  для более короткой записи. С учётом найденного выражения для опорного вектора, получим

$$x(t_0) = h + \begin{cases} \text{sign}(\psi_2) \cdot \left(\frac{2\psi_1}{\alpha\psi_2}w^{\frac{3}{2}}, w^{\frac{1}{2}}\right)^T, \psi_1, \psi_2 \neq 0 \\ (0, \text{sign}(\psi_2))^T, \psi_1 = 0 \\ (\text{sign}(\psi_1), 0)^T, \psi_2 = 0 \end{cases}$$



В уравнении выше  $w$  определяется значением параметра  $Q$ :  
если  $Q \geq 0$

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{1}{3a}$$

если  $Q < 0$

$$w = \frac{2}{3a} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{27a^2\gamma}{2} - 1 \right) \right) - \frac{1}{3a}$$

### 2.2.3 Опорная функция для множества $\mathcal{X}_1$

Вычислим её в аналитическом виде. Итак,

$$\mathcal{X}_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 x_2 \geq 1, x_1 \geq 0, x_1 + x_2 \leq a\}, \quad a > 0$$

задаваемым параметром для этого множества является величина  $a$ . Определим структуру множества при различных значениях параметра  $a$ . Множество определяется над-графиком ветвью гиперболы, находящейся в первой четверти и нижней полуплоскостью, задаваемой прямой  $x_2 = a - x_1$ .

Определим взаимное расположение гиперболы  $x_2 = \frac{1}{x_1}$  и прямой  $x_2 = a - x_1$ .

Для этого приравняем правые части равенств:

$$\frac{1}{x_1} = a - x_1 \Rightarrow x_1^2 - ax_1 + 1 = 0 \Rightarrow D = a^2 - 4 \Rightarrow (x_1)_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Таким образом, если  $D < 0$ , то графики не имеют пересечений и  $\mathcal{X}_1 = \emptyset$ , т.е. при  $a \in (0, 2)$  (т.к.  $a > 0$ ).

Если  $D = 0$ , т.е.  $a = 2$ , то прямая касается гиперболы в точке  $(1, 1)$ .

Если  $D > 0$ , т.е.  $a > 2$ , то прямая пересекает гиперболу в двух точках:

$$A = \left( \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right) \text{ и } B = \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right).$$

Окончательно, множество  $\mathcal{X}_1 = \emptyset$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{X}_1 = \begin{cases} \text{множество образованное гиперболой и прямой, } a > 2, \\ (1, 1), a = 2 \\ \emptyset, 0 < a < 2 \end{cases}$$

При  $a > 2$  множество выпукло и имеет две крайевые точки  $A$  и  $B$ .

Пусть  $x_1 \in [A, B]$ . Для начала покажем, что если максимум линейного функционала  $\langle x_1, l \rangle$  достигается на внутренней точке отрезка прямой  $x_2 = a - x_1$ , то он достигается на всём отрезке, в том числе и в крайевых точках. Предположим, что это не так, т.е.

$$\exists \bar{x} \in (A, B) : \langle \bar{x}, l \rangle = \sup_{x \in [A, B]} \langle x, l \rangle = J^*$$

$$\text{и } \forall x \in (A, B) \setminus \bar{x} \langle x, l \rangle < J^*$$

$$\text{но тогда } \exists \xi^1, \xi^2 \in (A, B), \alpha \in (0, 1) : \bar{x} = \alpha \xi^1 + (1 - \alpha) \xi^2 \Rightarrow$$

$$J^* = \langle \bar{x}, l \rangle = \alpha \langle \xi^1, l \rangle + (1 - \alpha) \langle \xi^2, l \rangle < \alpha J^* + (1 - \alpha) J^* = J^* \Rightarrow$$

получили противоречие. Следовательно, значения функционала в каждой внутренней точке не больше значения функционала в других точках отрезка, в том числе и в крайевых. Следовательно, можно считать, что максимум функционала по данному отрезку прямой  $x_1 \in [A, B]$  достигается только в крайевых точках. Кроме этих точек, максимум может достигаться на части графика, определяемого гиперболой. Рассмотрим в каких точках функционал  $J = \langle x, l \rangle$  может принимать наибольшее значение, где  $x$  пробегает точки отрезка гиперболы. Итак,

$$J(x) = \langle x, l \rangle = x_1 l_1 + x_2 l_2, x_2 = \frac{1}{x_1}, x_1 \in [A, B] \Rightarrow$$

$$J(x) = x_1 l_1 + \frac{1}{x_1} l_2 \rightarrow \sup_{[A, B]}$$

$$J'(x) = \frac{l_1 x_1^2 - l_2}{x_1^2}$$

Возможно несколько случаев:

$$1. l_1 l_2 > 0. \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}.$$

(a)  $l_1 > 0, l_2 > 0$ . Тогда максимум функционала достигается к граничных точках,

(b)  $l_1 < 0, l_2 < 0$ . Максимум достигается в точке  $x_1 = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$ , при этом

$$J(x_1) = -2\sqrt{l_1 l_2}$$

$$\text{Обозначим } C = \left( \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}, \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \right).$$

$$2. l_1 l_2 < 0$$

(a)  $l_1 < 0, l_2 > 0 \Rightarrow J'(x) < 0 \Rightarrow J(x)$  убывает и максимум достигается в точке  $x_1 = A$ .

(b)  $l_1 > 0, l_2 < 0 \Rightarrow J'(x) > 0 \Rightarrow J(x)$  возрастает и максимум достигается в точке  $x_1 = B$ .

3.  $l_1 l_2 = 0$ . В этом случае максимум также достигается в одной из точек  $A$  или  $B$ .

Таким образом для нашего множества опорная функция имеет следующий вид:

$$\rho(\psi \mid \mathcal{X}_1) = \sup_{x \in \mathcal{X}_1} \langle \psi, x \rangle = \max \{ \langle \psi, m_A \rangle, \langle \psi, m_B \rangle, \langle \psi, m_C \rangle \}$$

где вектора  $m_A = (A_1, A_2)^T$ ,  $m_B = (B_1, B_2)^T$  и  $m_C = (C_1, C_2)^T$  определяются точками пересечения

$A, B$  и  $C$ . Таким образом, учитывая, что  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ :

$$\begin{aligned}
\rho(\psi, \mathcal{X}_1) &= \max \left\{ \psi_1 \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \psi_2 \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \psi_1 \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \psi_2 \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, -2\sqrt{\psi_1 \psi_2} \right\} = \\
&= \max \left\{ \frac{a}{2} (\psi_1 + \psi_2) + \frac{a^2 - 4}{2} (\psi_1 - \psi_2), \frac{a}{2} (\psi_1 + \psi_2) + \frac{a^2 - 4}{2} (\psi_2 - \psi_1), -2\sqrt{\psi_1 \psi_2} \right\} = \\
&= \max \left\{ \frac{a}{2} (\psi_1 + \psi_2) + \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2} |\psi_1 - \psi_2|, -2\sqrt{\psi_1 \psi_2} \right\}
\end{aligned}$$

В итоге общий вид опорной функции для множества  $\mathcal{X}_1$  имеет следующий вид:

$$\rho(\psi(t), \mathcal{X}_1) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{a}{2} (\psi_1 + \psi_2) + \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2} |\psi_1 - \psi_2|, -2\sqrt{\psi_1 \psi_2} \right\}, & a > 2, \\ \psi_1 + \psi_2, & a = 2. \end{cases}, \forall \psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^T$$

## 3 Описание численного решения

### 3.1 Алгоритм решения

1. Начинаем перебор начальных условий  $\psi_0$  для сопряженной задачи по единичной окружности.
2. Решаем сопряженную задачу с выбранным начальным условием  $\psi_0$ .
3. Находим оптимальное управление, соответствующее решению сопряженной задачи.
4. Находим оптимальную траекторию, которая соответствует решению сопряженной задачи и найденному оптимальному управлению.
5. Проверяем полученную траекторию на попадание в целевое множество  $\mathcal{X}_1$ .
6. В случае попадания: сравниваем полученное время быстрогодействия с минимальным и запоминаем наименьшее.

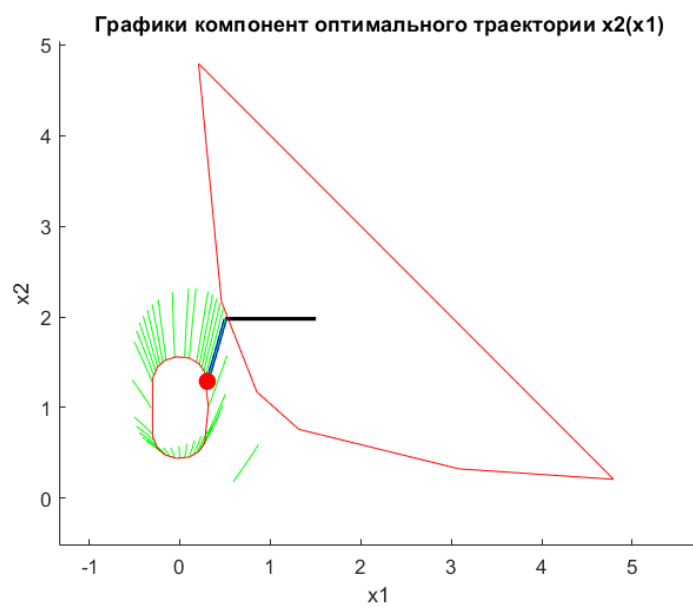
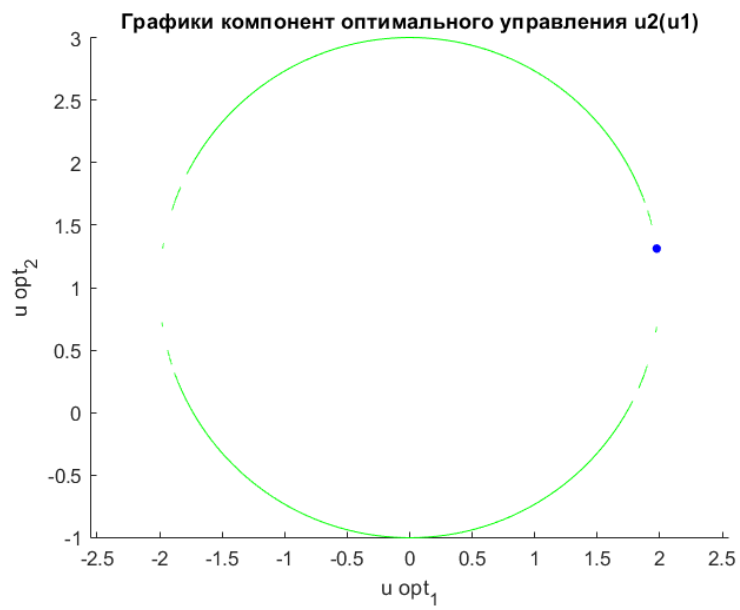
### 3.2 Комментарии к алгоритму

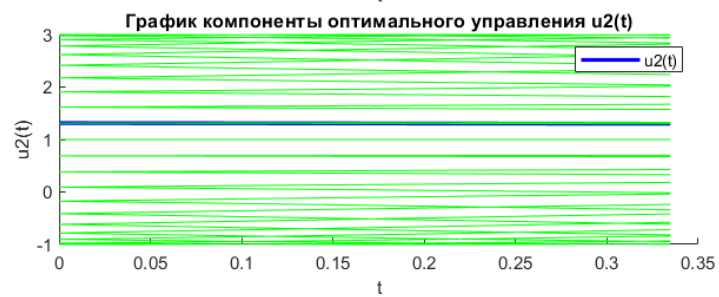
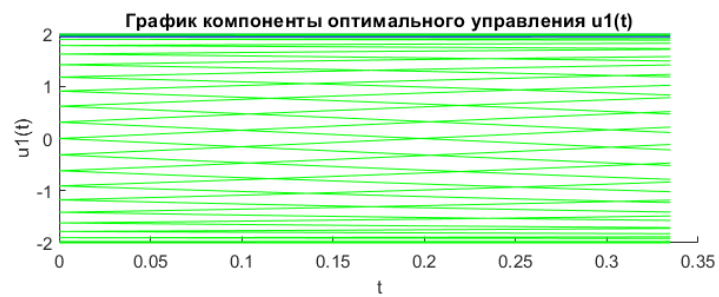
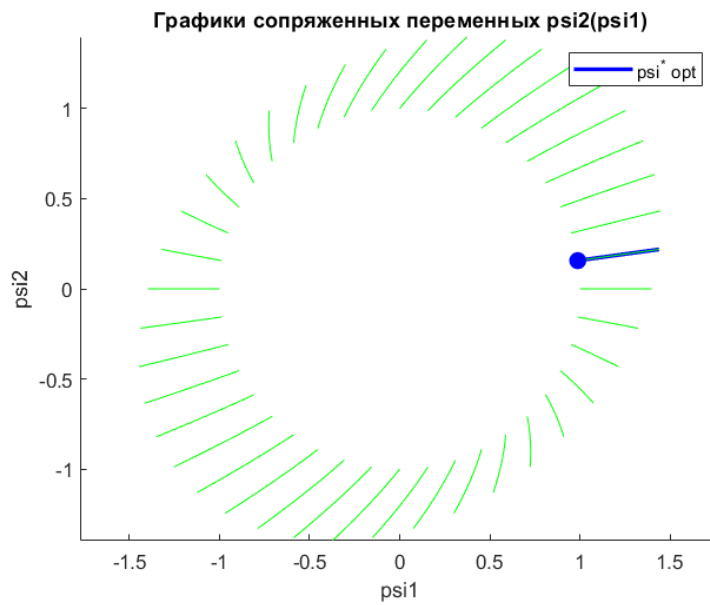
1. Для перебора начальных условий  $\psi_0$  по единичной окружности, разобьем полный оборот  $[0, 2\pi]$  на нужное нам число углов  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . При переходе на следующую итерацию, будем увеличивать угол, а за начальное условие примем величину  $\psi_{0_i} = (\cos(\alpha_i), \sin(\alpha_i))^T$ .
2. Для вычисления матричной экспоненты используется функция `expm` системы Matlab.
3. Система дифференциальных уравнений, задающая оптимальную траекторию, решается с помощью функции `ode45` системы Matlab, которая использует метод Рунге-Кутты четвертого порядка.
4. Для проверки попадания оптимальной траектории в целевое множество используется `Event function` - параметр функции `ode45`, проверяющий неравенства, задающие множество  $\mathcal{X}_1$ .

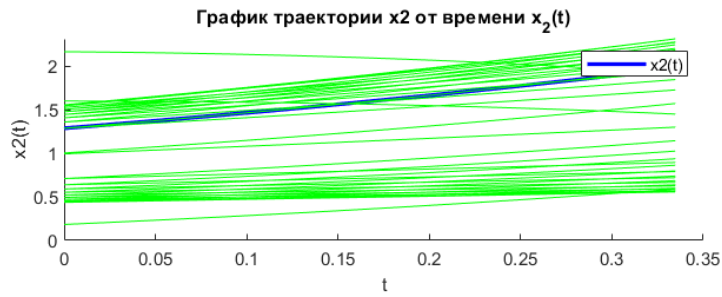
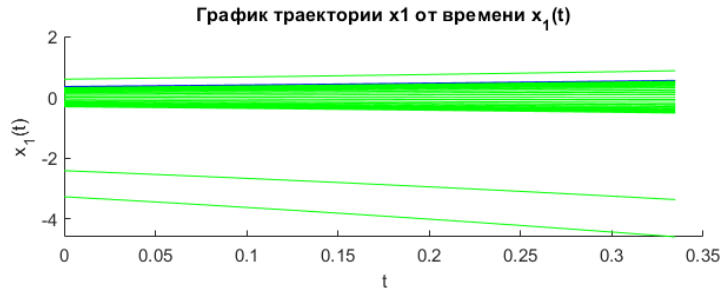
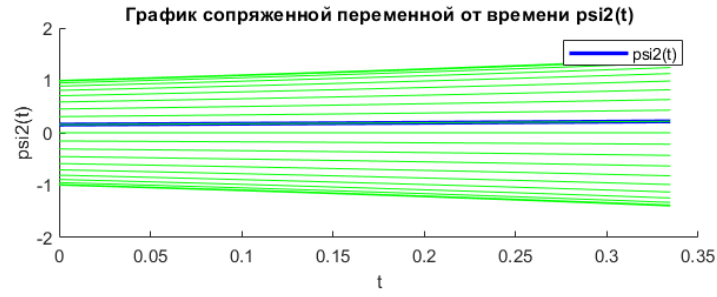
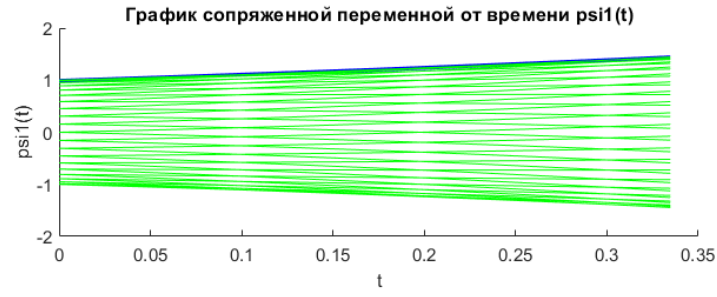
## 4 Примеры задач и их решения

### 4.1 Пример 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.8 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$r = 2, \quad \alpha = 1, \gamma = 0.1, a = 5.$$





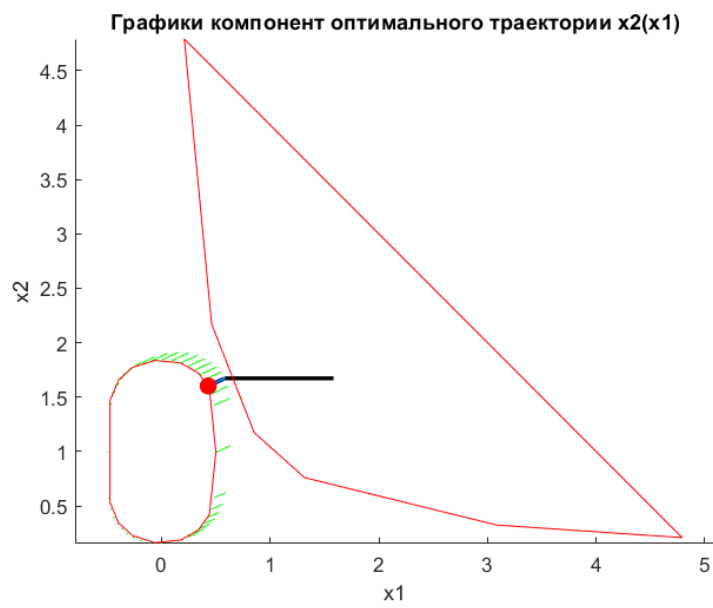
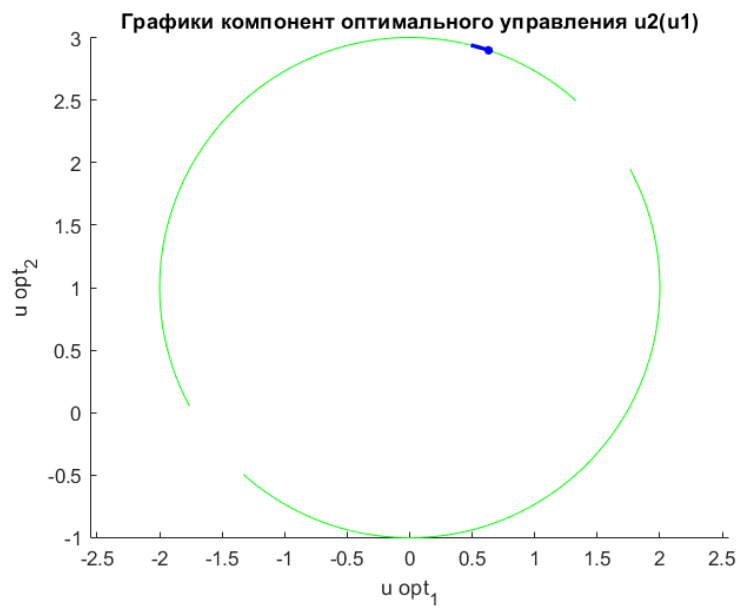


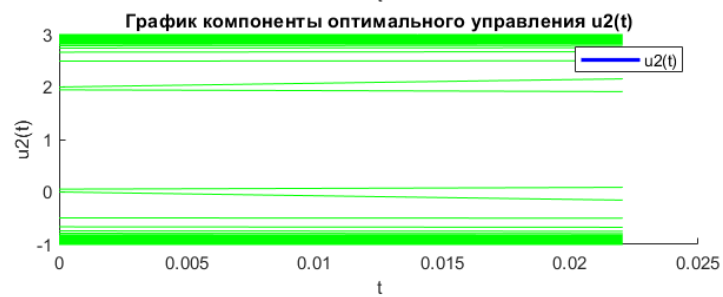
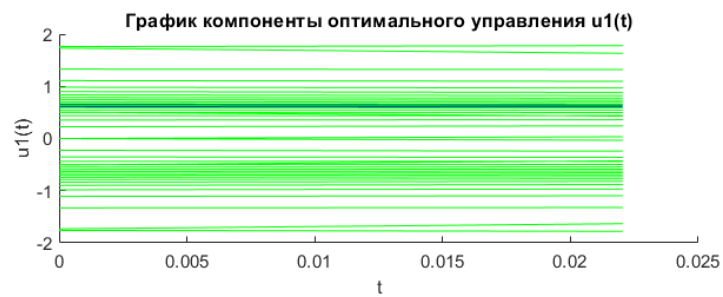
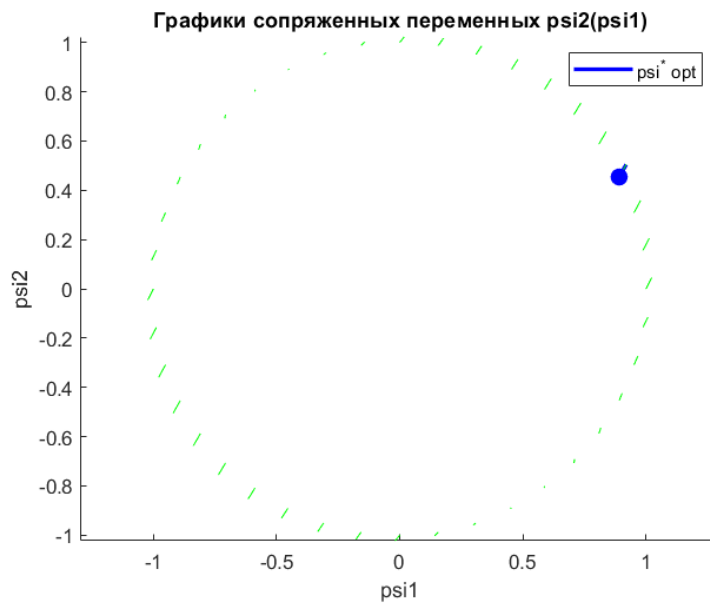
## 4.2 Пример 2

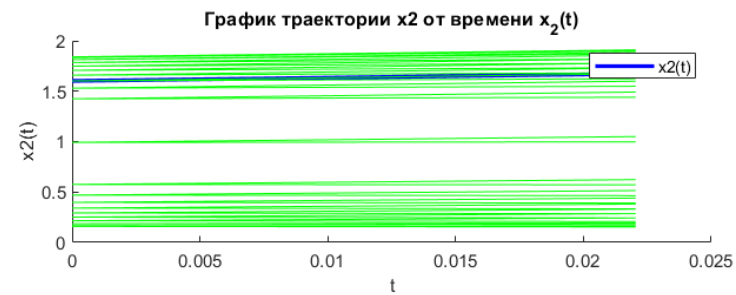
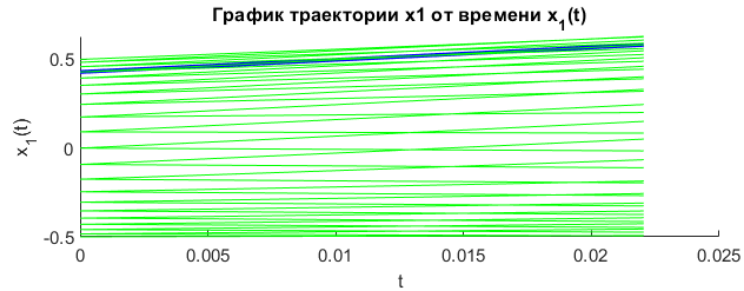
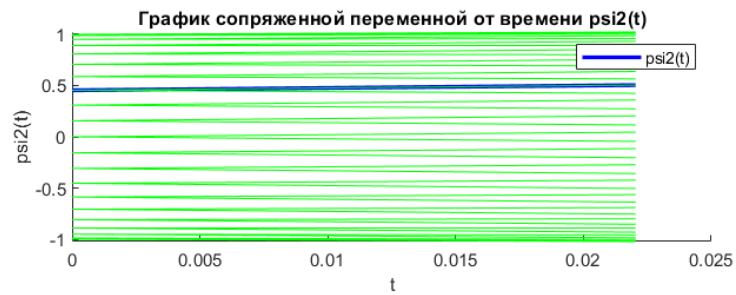
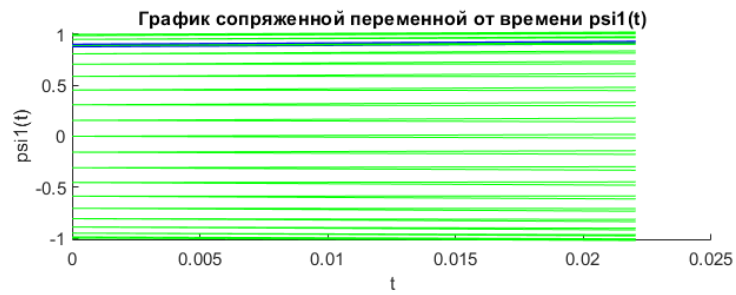
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.4 & 1 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r = 2, \quad \alpha = 1, \gamma = 0.1, a = 5.$$









## 5 Список литературы

[1] Понтрягин Л. С, Болтянский В. Г., Гамкредидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1976 .

- [2] Благодатских В. И Введение в оптимальное управление.- М.: Высшая школа, 2001.
- [3] Киселёв Ю. Н, Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. - М.: МАКС Пресс, 2007.
- [4] Калиткин Н. Н. Численные методы. - М.: Наука, 1984.