

1 Численное решение уравнения Вольтерра

Уравнение имеет вид

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{1}{b-1} \int_{1-T}^x \frac{b-x}{b-s} \varphi(s) ds, \quad 1-T \leq x \leq 1. \quad (1)$$

где функцию $g(x)$ есть

$$g(x) = \frac{b-x}{b(b-1)} [(b-2)e^{-x} + e^{T-1}] \quad (2)$$

Если подставить функцию

$$\varphi(x) = \frac{b-x}{b} e^{-x} \quad (3)$$

в уравнение (1), то оно обратится в тождество.

Так как для уравнения Вольтерра второго рода имеет место теорема существования и единственности, то из этого следует, что выражение (3) и будет решением.

Опишем численную процедуру решения уравнения (1) **методом механических квадратур**.

Отрезок $[1-T, 1]$ разобьем на n одинаковых отрезков длиной h с узлами x_i

$$h = \frac{T}{n}, \quad x_i = 1-T + ih, \quad i = 0, \dots, n.$$

От функции $\varphi(x)$ перейдем к сеточной функции $\varphi(x_i) = \varphi_i, \quad i = 0, \dots, n$.

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части (1), выберем обобщенную формулу трапеций. Тогда для определения неизвестных φ_i получим систему линейных алгебраических уравнений с нижней треугольной матрицей, которая решается обратным ходом метода Гаусса за $3/2 n^2$ действий. Поэтому объем вычислений остается умеренным даже при n порядка 10^3 , что позволяет проводить расчеты с высокой точностью.

Расчеты, проведенные при $b = \frac{17}{16}$ и $T = \frac{1}{2}$ приведены на рисунке 1, где $\varphi_c(x)$ численное решение, а $\varphi_a(x)$ аналитическое решение. При этом точность полученная в расчетах при $n = 128$ равна $2.5 \cdot 10^{-7}$.

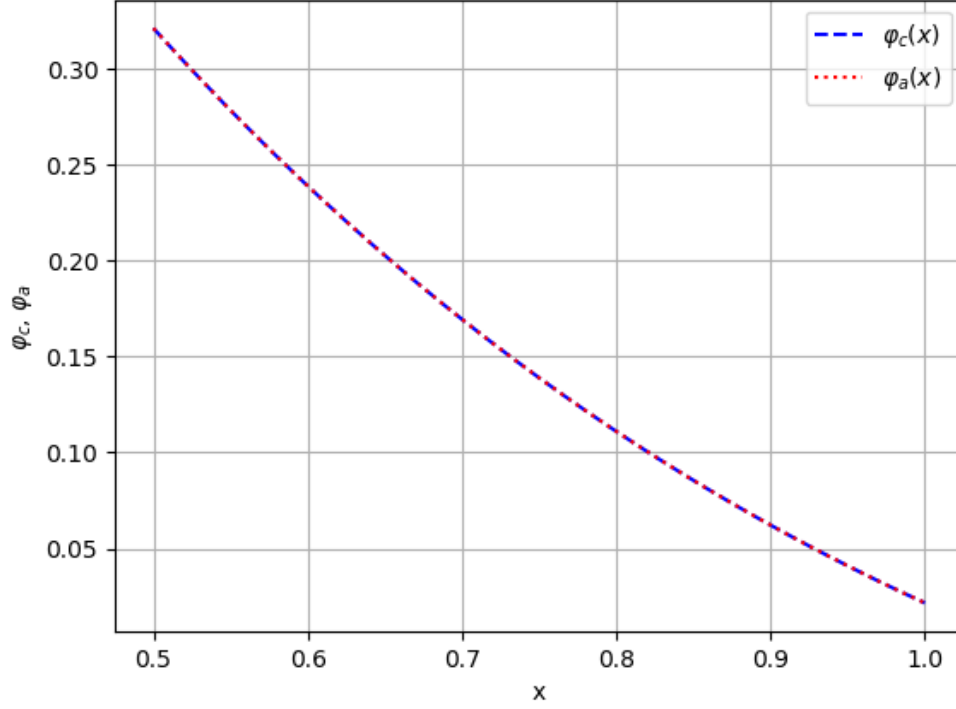


Рис. 1. Графики $\varphi_c(x)$, $\varphi_a(x)$

Для решения интегральных уравнений часто используется **метод последовательных приближений**. Запишем для интегрального уравнения (1) итерационный процесс

$$\varphi^{(0)}(x) = 0, \quad \varphi^{(k+1)}(x) = g(x) - \frac{b-x}{b-1} \int_{1-T}^x \frac{1}{b-s} \varphi^{(k)}(s) ds, \quad 1-T \leq x \leq 1. \quad (4)$$

Для уравнений Вольтерра (1) метод последовательных приближений сходится равномерно по x . Обозначим погрешность k -й итерации через $z^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) - \varphi(x)$. Тогда для погрешности справедлива оценка

$$\|z^{(k)}(x)\|_C \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{(b-1)^2} \|z^{(0)}(x)\|_C$$

При $k \rightarrow \infty$ правая часть этого неравенства стремится к 0.

Так же, как и в первом случае, выполняя разбиение отрезка, переходя к сеточной функции $\varphi^{(k)}(x_i) = \varphi_i^{(k)}$ и заменяя интеграл квадратурной формулой, получим

дискретное представление итерационного процесса (4)

$$\varphi_i^{(0)} = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\varphi_i^{(k+1)} = g_i - \frac{b - x_i}{b - 1} h \left[\frac{\varphi_0^{(k)}}{2(b - x_0)} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\varphi_j^{(k)}}{b - x_j} + \frac{\varphi_i^{(k)}}{2(b - x_i)} \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots, K,$$

где K определяется из условия завершения итерации.

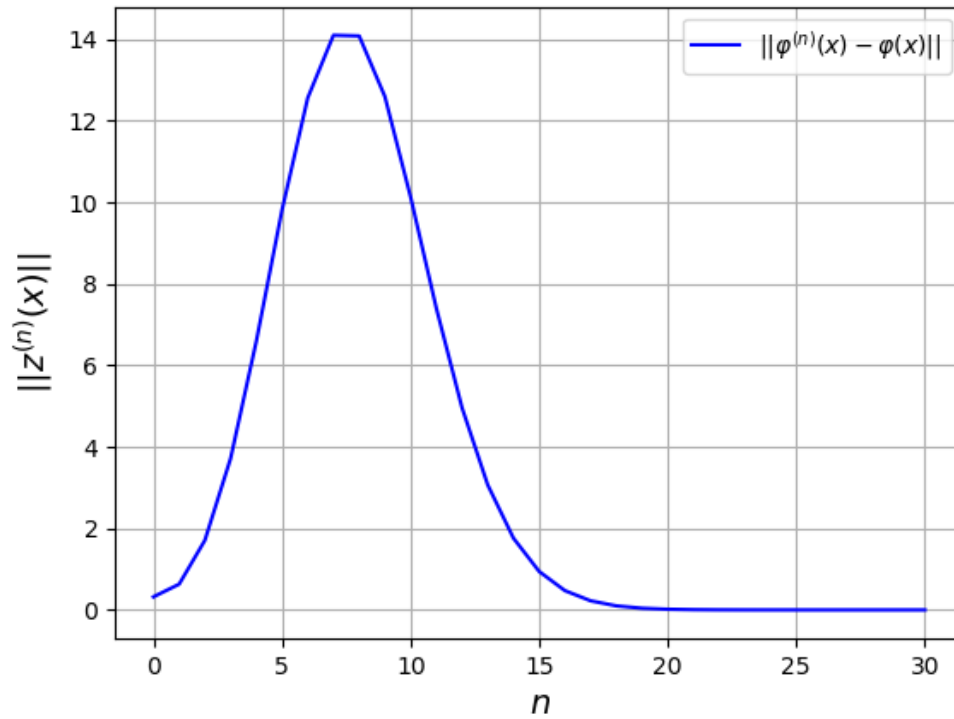


Рис. 2. График изменения погрешности в зависимости от номера итерации

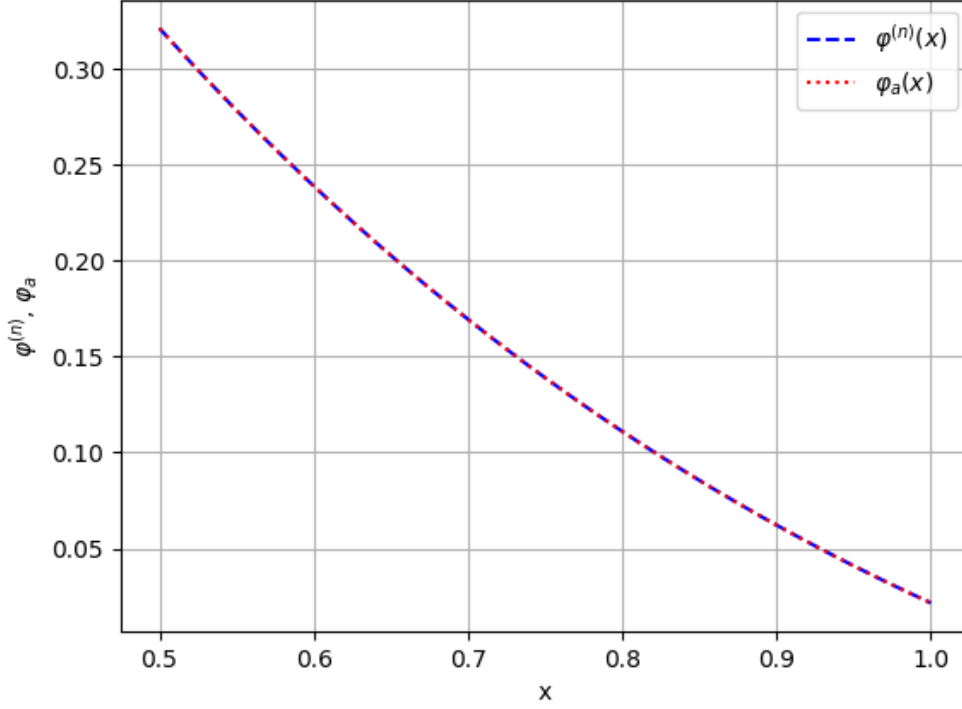


Рис. 3. Графики $\varphi_c^{(n)}(x)$, $\varphi_a(x)$

Расчеты, выполненные по приведенной схеме при $b = \frac{17}{16}$, $T = \frac{1}{2}$, $n = 128$ и заданной точности $2.5 \cdot 10^{-7}$ отражены на рисунке 2, где показаны изменения погрешности $\|z^{(k)}(x)\|_C$ в зависимости от номера итерации. Как видно из рисунка 4, в динамике изменения погрешности выделяются три этапа. Вначале от 1-й до 7-й итерации погрешность растет, значительно превышая исходный уровень $\|z^{(0)}(x)\|_C$, с 8-й по 15-ю итерации происходит восстановление, а затем, с 16-й по 25-ю итерации, происходит существенное повышение точности, которая достигает заданного уровня $2.5 \cdot 10^{-7}$. В итоге получается решение, практически не отличающееся от точного (рисунок 3).