



"Modèle simplifié d'ondes magnétohydrodynamiques dans le noyau terrestre"

Nuyt, Alexandre

ABSTRACT

Dans ce mémoire, les équations linéaires de l'hydrodynamique et de la magnétohydrodynamique sont développées pour un fluide conducteur en rotation uniforme imprégné d'un champ magnétique constant. Une décomposition toroïdale-poloïdale est appliquée aux champs solénoïdaux, ce qui nous permet, d'obtenir un système résoluble numériquement. La résolution numérique de ces équations via un solveur d'ondes inertielles, développé dans le cadre de ce mémoire, permet de calculer tous les modes d'oscillations de ces ondes pour le cas hydrodynamique. La base d'un tel solveur a été construite durant cette étude, des améliorations mèneront vers un véritable calculateur d'ondes magnéto-Coriolis applicable à la géophysique et l'astrophysique.

CITE THIS VERSION

Nuyt, Alexandre. *Modèle simplifié d'ondes magnétohydrodynamiques dans le noyau terrestre*. Faculté des sciences, Université catholique de Louvain, 2024. Prom. : Rekier, Jérémie ; Dehant, Véronique. <http://hdl.handle.net/2078.1/thesis:46546>

Le répertoire DIAL.mem est destiné à l'archivage et à la diffusion des mémoires rédigés par les étudiants de l'UCLouvain. Toute utilisation de ce document à des fins lucratives ou commerciales est strictement interdite. L'utilisateur s'engage à respecter les droits d'auteur liés à ce document, notamment le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit à la paternité. La politique complète de droit d'auteur est disponible sur la page [Copyright policy](#)

DIAL.mem is the institutional repository for the Master theses of the UCLouvain. Usage of this document for profit or commercial purposes is strictly prohibited. User agrees to respect copyright, in particular text integrity and credit to the author. Full content of copyright policy is available at [Copyright policy](#)

Faculté des sciences

Modèle simplifié d'ondes magnétohydrodynamiques dans le noyau terrestre

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade académique de
Master [120] en sciences physiques, à finalité approfondie

Auteur : Alexandre Nuyt

Promoteur ■ trice ■ s : Jérémy Rekier, Véronique Dehant

Lecteurs : Hugues Goosse, Tim Van Hoolst

École de physique

Année académique 2023 - 2024

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier sincèrement mon promoteur, Jérémy Rekier, pour son encadrement, toutes les explications données avec bienveillance, sa disponibilité malgré nos horaires décalés et surtout d'avoir pris le temps pour construire un projet qui a duré presque un an. J'ai le sentiment que vous m'avez beaucoup appris durant ce mémoire.

J'aimerais aussi remercier ma promotrice, Véronique Dehant, qui, à travers ses cours, m'a donné l'envie de réaliser ce mémoire et m'a dirigé vers la bonne personne pour le réaliser. J'ai eu la chance d'avoir des promoteurs bienveillants, à l'écoute et dévoués.

Je voudrais également remercier ma famille pour leur soutien durant ces années d'études et particulièrement pour les relectures in extremis toujours dotées d'un bon esprit critique.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | i |
| Table des figures | iv |
| Motivations | 1 |
| 1 Dynamique d'un fluide en rotation | 7 |
| 1.1 Equations de conservation | 7 |
| 1.2 Circulation et vorticité | 9 |
| 1.3 Repère en rotation | 11 |
| 1.3.1 Adimensionnement | 12 |
| 1.3.2 Écoulement géostrophique | 14 |
| 1.3.3 Théorème de Taylor-Proudman | 15 |
| 1.3.4 Les ondes inertielles | 16 |
| 2 Magnétohydrodynamique | 22 |
| 2.1 Équations fondamentales | 22 |
| 2.2 Équations de la MHD | 25 |
| 2.2.1 Le théorème d'Alfvén | 27 |
| 2.3 Les ondes d'Alfvén | 30 |
| 2.3.1 Equation d'onde d'Alfvén | 34 |
| 2.4 Ondes Magnéto - Coriolis | 38 |
| 3 Décomposition toroïdale-poloïdale des ondes magnéto-Coriolis | 43 |
| 3.1 Décomposition toroïdale-poloïdale | 43 |
| 3.2 Discrétisation par la méthode des différences finies | 46 |
| 3.2.1 Equation de Helmholtz | 47 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.3 | Formulation du problème | 52 |
| 3.3.1 | Hydrodynamique | 53 |
| 3.3.2 | Magnétohydrodynamique | 60 |
| 4 | Perspectives et conclusion | 64 |
| 4.1 | Cylindre fini et topographie initiale | 64 |
| 4.2 | Limites des simulations | 66 |
| 4.3 | Futur de l'outil | 66 |
| 4.4 | Conclusion | 67 |
| A | Codes Python | 68 |
| | Bibliographie | 69 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | Schéma du cylindre tangent au noyau interne et de son intersection avec le CMB (rouge) et avec la surface sphérique au milieu de la coque (bleu). Source : [14] | 2 |
| 2 | Illustration schématique d'un tube de flux magnétique à la surface du soleil. Source : [8] | 4 |
| 3 | Cylindre infiniment long, composé d'un fluide de densité ρ en rotation uniforme $\Omega \hat{z}$ imprégné d'un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 aligné en \hat{z} . On repère l'élément de fluide dV en coordonnées cylindriques $P(s, \varphi, z)$. | 5 |
| 1.1 | Ondes inertielles d'un fluide en rotation. La parcelle de fluide (point bleu) se déplace de Δs hors de la ligne de rotation du corps solide et la force de Coriolis (bleue) agit sur elle lui donnant des oscillations circulaires (vert). | 16 |
| 1.4 | Colonne de gauche : racines de l'équation (1.56) pour différents modes de vibration. Colonne de droite : valeurs propres correspondantes | 20 |
| 2.1 | Schéma des coordonnées curvilignes | 32 |
| 2.2 | Réponses des lignes de champ magnétique à une petite perturbation du fluide $\delta \mathbf{u}$, en MHD idéale. Les termes de tension magnétique induisent une force de rappel visant à diminuer la courbure des lignes de champ. Source : [12] | 33 |
| 2.3 | Relation de dispersion ondes magnéto-Coriolis, pour des paramètres géophysiques. | 42 |
| 3.1 | Géométrie d'une décomposition toroïdale (ligne de flux jaune) - polaire (lignes de flux bleues) pour un champ de vecteurs en rotation. | 44 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.2 | Schéma des différences finies en une dimension. Source : [18] | 47 |
| 3.3 | Comparaison des solutions (vecteurs propres) analytiques (à gauche) et numériques (à droite) de l'équation de Helmholtz en 1 dimension cartésienne. | 50 |
| 3.4 | Solution analytique de l'équation de Helmholtz cylindrique (à gauche) et comparaison des valeurs propres analytiques et numériques (à droite). | 52 |
| 3.5 | Schéma des 2 études : Hydro (à gauche) et MHD (à droite) | 52 |
| 3.6 | Vecteur propre toroïdal (gauche) et poloïdal (droite) pour $k = 1, m = 1$ | 57 |
| 3.7 | Composantes du champ de vitesse dans la direction \mathbf{s} (à gauche). Évolution de v_φ en fonction de s et z (à droite), pour $k = 1, m = 1$ | 57 |
| 3.8 | Vecteur propre toroïdal (gauche) et poloïdal (droite) pour $k = 2, m = 1$ | 58 |
| 3.9 | Composantes du champ de vitesse dans la direction \mathbf{s} (à gauche). Évolution de v_φ en fonction de s et z (à droite), pour $k = 2, m = 1$ | 58 |
| 3.10 | Vecteur propre toroïdal (gauche) et poloïdal (droite) pour $k = 1, m = 2$ | 58 |
| 3.11 | Composantes du champ de vitesse dans la direction \mathbf{s} (à gauche). Évolution de v_φ en fonction de s et z (à droite), pour $k = 1, m = 2$ | 59 |
| 4.1 | Topographie à la base d'un cylindre pour $f(s) = \cos(2s) + \sin(3s)$ avec des schémas de colonnes de Taylor. | 65 |

Résumé

Dans ce mémoire, les équations linéaires de l'hydrodynamique et de la magnéto-hydrodynamique sont développées pour un fluide conducteur en rotation uniforme imprégné d'un champ magnétique constant. Une décomposition toroïdale-poloïdale est appliquée aux champs solénoïdaux, ce qui nous permet, d'obtenir un système résoluble numériquement. La résolution numérique de ces équations via un *solveur d'ondes inertielles*, développé dans le cadre de ce mémoire, permet de calculer tous les modes d'oscillations de ces ondes pour le cas hydrodynamique. La base d'un tel solveur a été construite durant cette étude, des améliorations mèneront vers un véritable calculateur d'ondes magnéto-Coriolis applicable à la géophysique et l'astrophysique.

Motivations

La magnétohydrodynamique (MHD) est présente dans de nombreux domaines de la géophysique, de l'astrophysique et même dans certaines applications industrielles. Les objectifs de ce mémoire sont multiples : présenter des phénomènes physiques impliquant la magnétohydrodynamique qui ont motivé notre étude, puis établir un lien avec le travail présenté, qui vise à étudier des ondes inertielles se propageant dans un tel milieu sous certaines contraintes. Nous exposerons d'abord la théorie, passant ensuite à une résolution numérique.

Ondes d'Alfvén

Lorsque l'on étudie des perturbations en MHD, la première étape est de regarder ce que sont les ondes d'Alfvén. Ce sont des ondes de tension magnétique transversales qui se déplacent le long des lignes de champ magnétique dans un fluide conducteur imprégné d'un champ magnétique. Hannes Alfvén a prédit leur existence par les équations de l'électromagnétisme et de l'hydrodynamique en 1942 [1]. La confirmation expérimentale de sa théorie est donnée sept ans plus tard dans des études d'ondes dans le mercure liquide [21]. Les ondes d'Alfvén sont aujourd'hui reconnues comme un mécanisme important pour le transport de l'énergie et de la quantité de mouvement dans de nombreux systèmes hydromagnétiques géophysiques et astrophysiques. Elles ont été observées dans la magnétosphère terrestre [29], dans les plasmas interplanétaires [27] et dans la photosphère solaire [28]. Les ondes d'Alfvén sont donc omniprésentes dans les phénomènes MHD. Dans le contexte du géomagnétisme, il a été suggéré que les ondes d'Alfvén pourraient influencer la dynamique du noyau liquide de la Terre ; elles ont été proposées comme origine des secousses géomagnétiques [17].

Géophysique

Noyau externe et cylindre tangent

Le noyau externe de la Terre est principalement composé de fer ($\pm 80\%$) et d'un petit peu de nickel ($\pm 5\%$) en fusion ; les scientifiques s'accordent à dire qu'il y a la présence d'un autre élément léger qui pourrait être du souffre [14]. Sur base de ce que l'on connaît du fluide, on peut considérer que le liquide du noyau externe est du même ordre de viscosité que l'eau ; cela permet de théoriser la dynamique de cette partie de la Terre. La viscosité du fluide étant très faible, on peut la négliger, la force de Coriolis domine alors les mouvements du fluide. Comme nous le verrons dans la section 1.3, grâce à la force de Coriolis, des structures en colonnes alignées le long de l'axe de rotation de la Terre se forment dans le noyau externe, ces colonnes de fluide conducteur sont primordiales pour générer le champ magnétique terrestre par effet dynamo. La dynamique du système génère un cylindre tangent à la graine au niveau de la limite du noyau interne (ICB : Inner Core Boundary) jusqu'à la limite du noyau-manteau (CMB : Core-Mantle Boundary) [16].

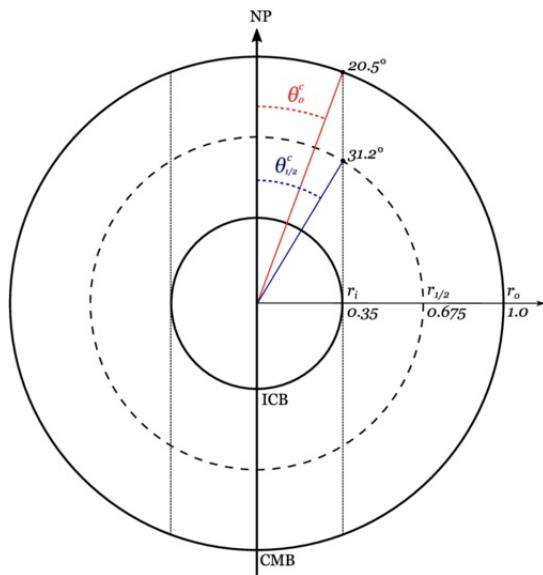


FIGURE 1 – Schéma du cylindre tangent au noyau interne et de son intersection avec le CMB (rouge) et avec la surface sphérique au milieu de la coque (bleu).
Source : [14]

Dans le noyau externe de la Terre se trouve donc un fluide conducteur en rotation ce qui suggère forcément la présence d'ondes magnétohydrodynamiques dans ce milieu, mais peut-on réellement s'attendre à la présence de telles ondes dans le noyau

terrestre ? Dans cette région, la rotation exerce une forte influence sur la dynamique des fluides, comme énoncé dans le théorème de Proudmann-Taylor. Dans ce cas, les ondes d'Alfvén sont modifiées par la force de Coriolis, on appelle ces ondes plus complexes des ondes magnéto-Coriolis (MC).

Une classe spécifique d'ondes d'Alfvén pourrait être le mécanisme par lequel le moment cinétique est redistribué à des échelles de temps courtes (décennales) dans le noyau terrestre [7]. Braginskiy a démontré que lorsque les forces de Coriolis sont équilibrées par des forces de pression, des ondes d'Alfvén impliquant uniquement la composante normale du champ magnétique par rapport à l'axe de rotation peuvent exister. Ces ondes d'Alfvén, appelées oscillations de torsion, se propagent le long des lignes de champ magnétique enfilant des cylindres alignés avec l'axe de rotation. L'interprétation de ces mouvements comme la signature des oscillations de torsion conduit à la suggestion que les secousses géomagnétiques sont provoquées par les ondes d'Alfvén dans le noyau terrestre, avec des perturbations se propageant de l'équateur vers les pôles [15]. Actuellement, le mécanisme à l'origine des oscillations de torsion dans le noyau terrestre reste inconnu, bien qu'une proposition suggère que le champ magnétique non axisymétrique et dépendant du temps pourrait induire un couple de Lorentz fluctuant sur les cylindres géostrophiques [9].

Héliophysique

La haute température de la couronne solaire est un problème intriguant. La couche externe de l'atmosphère de notre étoile est située au-dessus de la chromosphère et s'étend sur des millions de kilomètres dans l'espace. La température de la couronne solaire est nettement plus élevée que celle de la surface du Soleil (la photosphère). Le principal problème réside dans le fait que la température de la couronne solaire peut atteindre plusieurs millions de degrés Celsius, alors que la température de la photosphère est d'environ 5 500 degrés Celsius. Cette augmentation de la température semble contre-intuitive, car en règle générale, on s'attend à ce que la température diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source de chaleur.

Tubes de flux magnétiques

Plusieurs théories ont été proposées pour expliquer ce phénomène, une d'entre elles explique que les ondes d'Alfvén joueraient un rôle important dans le chauffage de la couronne solaire. Il est commun d'étudier le comportement de ces ondes dans des tubes de flux magnétiques [25].

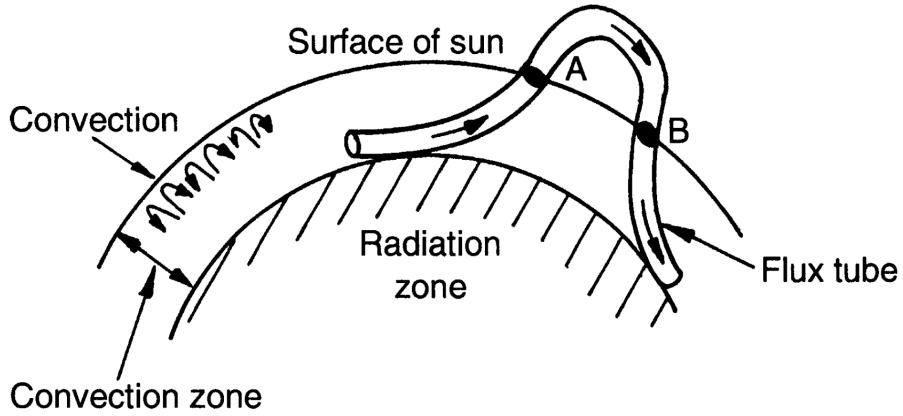


FIGURE 2 – Illustration schématique d'un tube de flux magnétique à la surface du soleil. Source : [8]

Un tube de flux est une région de l'espace, généralement cylindrique, dans laquelle le champ magnétique est entièrement confiné dans une région, de sorte que les côtés cylindriques du tube sont partout parallèles aux lignes de champ magnétique. Étant donné qu'aucun flux magnétique ne passe à travers les parois du tube, le flux magnétique est conservé. La section transversale du tube et l'intensité du champ magnétique peuvent varier le long du tube, mais le flux magnétique à l'intérieur est toujours constant. En astrophysique, un tube de flux désigne généralement une zone de l'espace traversée par un champ magnétique puissant, dans laquelle le comportement de la matière (généralement du gaz ionisé ou du plasma) est fortement influencé par le champ. On les trouve généralement autour des étoiles, notamment autour du Soleil, qui possède de nombreux tubes de flux de quelques dizaines à quelques centaines de kilomètres de diamètre [24]. Les taches solaires sont également associées à des tubes de flux plus grands, d'un diamètre de l'ordre de 2500 km [24]. Il est souvent plus facile de décrire les phénomènes magnétiques en termes de tube de flux ou d'une collection d'objets de ce type qu'en termes de magnétofluide continu. En effet, le modèle des tubes a une utilité formelle au delà des tubes

réellement existants [23].

Objectifs de l'étude

Au vu des motivations évoquées plus haut, nous avons choisi de porter notre attention sur la MHD en géométrie cylindrique. De plus, la géométrie cylindrique est bien adaptée à l'étude de l'influence de la force de Coriolis et est nettement plus simple que la géométrie sphérique.

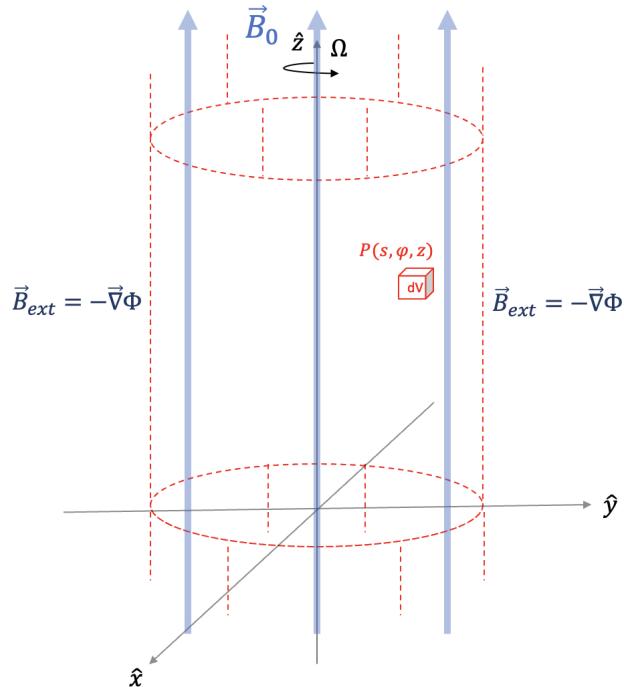


FIGURE 3 – Cylindre infiniment long, composé d'un fluide de densité ρ en rotation uniforme $\Omega\hat{z}$ imprégné d'un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 aligné en \hat{z} . On repère l'élément de fluide dV en coordonnées cylindriques $P(s, \varphi, z)$.

Ce mémoire étant exploratoire, trois objectifs majeurs sont visés :

1. Étudier les fondements de la dynamique des fluides en rotation et de la magnétohydrodynamique, dans un contexte géophysique.
2. Développer les équations différentielles des ondes inertielles pour l'hydrodynamique et la MHD en décomposition toroïdale-poloïdale.
3. Construire un outil numérique : *solveur Hydro + MHD* des ondes inertielles, pour tout mode m et k , en géométrie cylindrique.

Chapitre 1

Dans le premier chapitre, nous nous familiarisons avec la dynamique des fluides en rotation en parcourant les propriétés et théorèmes importants d'un fluide tournant. Le chapitre nous emmènera vers une description des ondes inertielles.

Chapitre 2

Dans le deuxième chapitre, l'effet d'un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$ s'ajoute à l'étude hydrodynamique initiale, on se retrouve alors avec un problème de magnétohydrodynamique. Ici, les mécanismes des ondes d'Alfvén et magnéto-Coriolis seront étudiés plus en profondeur afin de pouvoir résoudre le problème fixé.

Chapitre 3

Dans le dernier chapitre, nous posons les bases afin de résoudre le problème numériquement : d'abord, pour le cas purement hydrodynamique et ensuite pour la MHD. Afin de résoudre les équations, nous utilisons une décomposition toroïdale-poloïdale [6]. Cette méthode efficace permet de calculer tous les modes d'oscillation des ondes inertielles. De plus, c'est un bon apprentissage pour des travaux de recherche futurs. On réduit ensuite les équations différentielles en un système algébrique grâce aux différences finies, ce qui nous conduit à résoudre un problème aux valeurs propres généralisé.

Chapitre 1

Dynamique d'un fluide en rotation

1.1 Equations de conservation

Les équations de base qui régissent la dynamique d'un fluide sont décrites par des lois naturelles pour un système fermé :

- Conservation de la masse
- Conservation de la quantité de mouvement
- Conservation de l'énergie

On développe ces équations pour un fluide de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ avec une densité de masse $\rho(\mathbf{r}, t)$, dans un domaine tri-dimensionnel. Ici, \mathbf{r} et t représente le vecteur position et le temps, respectivement.

Conservation de la masse

Localement, la conservation de la masse est décrite par l'*équation de continuité*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

on considère un fluide incompressible, telle que la densité $\rho(\mathbf{r}, t)$ est constante, l'équation se réduit à

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

Conservation de la quantité de mouvement

L'équation qui régit la conservation de la quantité de mouvement du fluide est connue sous le nom de l'*équation de Navier-Stokes* [8] :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.3)$$

où μ est la *viscosité dynamique*. $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ est l'accélération d'une particule de fluide, ∇p est la force de pression, \mathbf{g} est la gravité et $\mu \nabla^2 \mathbf{v}$ est la force de friction décrite par la viscosité du fluide. Dans notre cas, on écrit $\mathbf{g} = -\nabla \Phi_g$, on peut donc absorber le potentiel de gravité dans la pression. L'équation se réécrit comme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.4)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la *viscosité cinématique* et $\pi = p/\rho + \Phi_g$ est la *pression réduite*.

Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie cinétique du fluide est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}^2 = -\frac{1}{\rho} (\nabla p) \cdot \mathbf{v} + \nu (\mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) \quad (1.5)$$

cette dernière équation ne nous donne pas l'évolution du comportement de l'écoulement mais bien une contrainte.

Les équations de base de la dynamique des fluides découlent des lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Il existe une autre loi de conservation en mécanique que nous n'avons pas abordée jusqu'à présent, la conservation du moment angulaire. Il existe d'importants effets hydrodynamiques liés à la conservation du moment angulaire. Afin de mieux comprendre ces effets, nous introduisons les notions de circulation et de vorticité.

1.2 Circulation et vorticité

La circulation de la vitesse autour d'un contour fermé C orienté d'une surface continue Σ est définie comme

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.6)$$

elle donne une idée qualitative du fait qu'un écoulement suit ou non la rotation des éléments du fluide. Une autre valeur importante est la vorticité, définie comme suit

$$\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (1.7)$$

A travers cette définition, il est clair que $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$. Grâce au théorème de Stokes, on peut transformer l'intégrale de la circulation en une intégrale de surface en utilisant la vorticité

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.8)$$

on a donc que la circulation de la vitesse le long d'un petit contour autour d'un élément de surface $d\mathbf{S}$ est déterminée par la vorticité $\Gamma = \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S}$.

Dynamique de la vorticité

A partir de l'équation de Navier-Stokes (1.4), en prenant le rotationnel de celle-ci, si on néglige la viscosité ν et on considère soit un fluide incompressible ($\nabla \rho = 0$) soit barotropique ($p(\rho) \rightarrow \nabla p \parallel \nabla \rho$) et en sachant que $\nabla \times \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla^2 v^2$, on obtient

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi}) \quad (1.9)$$

qui est linéaire en $\boldsymbol{\xi}$. Dans un fluide incompressible, la vorticité diminue dans un fluide en expansion et augmente dans un fluide en contraction. Concernant la conservation du moment angulaire en mécanique des fluides, elle s'exprime sous la forme du théorème de circulation (ou de Kelvin).

Théorème de Kelvin

La preuve de ce théorème est tirée de [10]. Grâce au théorème de Stokes, on avait la relation

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.10)$$

Afin de vérifier si la circulation Γ est bien conservée, il faut calculer sa dérivée totale par rapport au temps. Γ dépend explicitement du temps à travers la vorticité et implicitement par la déformation de la surface Σ par le transport de l'écoulement.

On peut écrire

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\Sigma} \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \cdot d\mathbf{S} + \left(\frac{d\Gamma}{dt} \right)_{\Delta C} \quad (1.11)$$

Prenons deux instants t et $t + dt$. A l'instant t , le contour C définit une surface orientée Σ . En $t + dt$, le contour ayant été déformé, un nouveau contour C' définit une surface Σ' . Lors du déplacement, une surface latérale est aussi formée Σ_l , ces surfaces forment une surface fermée Σ_t . Comme $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$, le flux de $\boldsymbol{\xi}$ est nul à travers Σ_t .

$$\int_{\Sigma_t} \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} = 0 = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Sigma'} \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\Sigma_l} \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.12)$$

$$= C(t) - C(t + dt) + dC_{\Delta t}. \quad (1.13)$$

On a donc

$$d\Gamma_{\Delta t} = \int_{\Sigma_l} \boldsymbol{\xi} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma_l} \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{l}) = dt \oint_C (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \quad (1.14)$$

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt} \right)_{\Delta C} = \oint_C (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.15)$$

uniquement valable si Σ ne possède aucune singularité. L'évolution temporelle de la circulation est donc donnée par

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v}) \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.16)$$

comme $\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{v}) = -\nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi})$ la dérivée totale de Γ est bien nulle par l'équation (1.9). Ce théorème nous dit que pour un fluide parfait barotropique, le nombre de tubes traversant une surface donnée est constant pour toute déformation

continue subie par cette surface. Maintenant que ces lois fondamentales ont été établies, on peut développer la dynamique particulière d'un fluide en rotation qui est soumis à une force bien connue des géophysiciens et climatologue, la force de Coriolis, résultant de la rotation du repère de référence.

1.3 Repère en rotation

Comme expliqué dans les sections précédentes, l'équation de Navier-Stokes nous donne une description de l'évolution du fluide dans un référentiel inertiel. Or, il existe énormément de phénomènes géophysiques ou astrophysiques en rotation. Nous allons reformuler l'accélération totale dans un repère en rotation constante Ω . La vitesse d'un objet est la dérivée temporelle de la position de l'objet

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.17)$$

Dans un référentiel en rotation, on distingue deux composantes à cette accélération totale : l'une due à la dépendance temporelle explicite causé par le mouvement de l'objet lui-même dans le cadre de référence en rotation, et l'autre due à la rotation propre du référentiel. Les vitesses dans les deux référentiels sont liées par l'équation

$$\mathbf{v}_i = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_i = \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \right] \mathbf{r} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1.18)$$

où la notation _{*i*} signifie le référentiel inertiel, et _{*r*} signifie le référentiel en rotation. L'accélération est donnée par

$$\mathbf{a}_i = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)_i = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_i = \left[\left(\frac{d}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \right] \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right] \quad (1.19)$$

En effectuant les différenciations et en réarrangeant les termes, on obtient l'accélération par rapport au référentiel en rotation

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_i - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \quad (1.20)$$

où $\mathbf{a}_r = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)_r$ est l'accélération apparente dans le cadre de référence en rotation, le terme $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ représente l'accélération centrifuge, et le terme $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r$ est

l'accélération de Coriolis. Le dernier terme, $-\frac{d\Omega}{dt} \times \mathbf{r}$, est l'accélération de Poincaré qui est nulle dans un référentiel en rotation uniforme.

On peut écrire l'accélération centrifuge de telle sorte qu'elle dérive d'un potentiel Φ_c , on peut calculer que

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \left(-\frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \right) \quad (1.21)$$

Les effets centrifuges peuvent donc être intégrés à la pression, on redéfinit la pression réduite comme

$$\pi := \frac{p}{\rho} + \Phi_g - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 \quad (1.22)$$

L'accélération totale dans un repère en rotation en description lagrangienne est alors

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial t} + (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r \quad (1.23)$$

Afin d'alléger l'écriture, nous écrirons maintenant \mathbf{v} au lieu de \mathbf{v}_r . L'équation de Navier-Stokes dans un repère en rotation uniforme s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \pi + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.24)$$

Cette équation est fondamentale en mécanique des fluides pour décrire le mouvement des fluides visqueux dans un référentiel en rotation, tels que les océans, l'atmosphère terrestre, ou encore des réservoirs en rotation. Ici s'ajoute le terme de Coriolis $2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$, qui représente l'effet de la rotation du référentiel.

1.3.1 Adimensionnement

La dynamique d'un fluide est typiquement conditionnée par divers paramètres, tels que sa vitesse, sa viscosité, et les dimensions du conteneur dans lequel il se trouve. Pour décrire ce problème de manière plus générale, il est possible d'adopter des nombres sans dimension. Pour un fluide en rotation à la vitesse Ω dans un conteneur de dimension caractéristique R , on peut utiliser respectivement R, Ω^{-1} et V comme échelles caractéristiques de longueur, de temps et de vitesse pour un petit

élément de fluide. On fait les changements de variables sans dimension

$$\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{R} ; \quad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{V} ; \quad t' = t \cdot \Omega ; \quad \pi' = \frac{\pi}{\pi_0} ; \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.25)$$

On peut remplacer les nouvelles variables dans (1.24). En divisant par $V\Omega$ et en supposant que $\Omega \propto V/R$, l'équation de Navier-Stokes adimensionnée pour un fluide en rotation devient

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + Ro(\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}' = -Eu \nabla' \pi' + Ek \nabla'^2 \mathbf{v}' \quad (1.26)$$

Cette dernière équation nous permet de définir trois nombres sans dimensions :

le nombre d'Euler

$$Eu = \frac{\pi_0}{V^2 R} \quad (1.27)$$

qui donne le rapport entre les forces de pression et les forces d'inertie,

le nombre d'Ekman

$$Ek = \frac{\nu}{\Omega R^2} \quad (1.28)$$

qui donne le rapport entre les forces visqueuses de l'équation du mouvement et la force de Coriolis,

le nombre de Rossby

$$Ro = \frac{V}{R\Omega} \quad (1.29)$$

qui donne le rapport entre la vitesse caractéristique du système et le terme de Coriolis. En dynamique des fluides, il est primordial de faire des analyses dimensionnelles. En effet, lorsque que l'on réalise une expérience ou un prototype et que l'on veut s'assurer d'observer le même comportement pour des échelles caractéristiques différentes de longueur, vitesse, temps, ... Il faut que les nombres adimensionnés du système soient équivalents. On dit que deux systèmes sont géométriquement similaires si les rapports des échelles de longueur, de vitesse, etc., sont respectés. Deux systèmes sont dynamiquement similaires si les nombres adimensionnés sont équivalents, ce qui est la condition la plus importante lorsque l'on veut reproduire une

expérience en laboratoire pour valider des résultats.

Dans le cas d'un écoulement géophysique, la Terre ayant un rayon de ~ 6371 km, le noyau externe étant d'une épaisseur de ~ 2270 km [14], les forces de Coriolis dominent le mouvement du fluide et les échelles de longueur sont de l'ordre de $\sim 10^3$ km. Ce qui nous donne $Ek, Ro \ll 1$; on néglige alors les forces de friction et le terme d'advection qui caractérise le transport d'une quantité par le mouvement du milieu environnant. On se retrouve alors avec *l'équation d'Euler linéaire* donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\pi \quad (1.30)$$

En regardant l'équation d'Euler linéaire, pour un fluide placé dans un cylindre fermé en rotation uniforme. On peut trouver une solution triviale en prenant $\mathbf{v} = 0$ et la pression π constante. Le mouvement de rotation du fluide est en phase avec celui du cylindre, il a un mouvement apparent nul par rapport au référentiel en rotation, on appelle cela un *écoulement en rotation solide*. Cet écoulement est la principale réponse d'un fluide en rotation. Cependant, des écoulements de plus faibles amplitudes peuvent se superposer. Ces écoulements secondaires sont d'une importance cruciale lorsque l'on étudie la dynamique d'un fluide tournant. En effet, ces écoulements secondaires sont bien souvent à l'origine de la transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent. On peut commencer par étudier les écoulements secondaires dit géostrophiques.

1.3.2 Écoulement géostrophique

En considérant l'équation d'Euler linéaire, pour des mouvements à grandes échelles comme les océans ou l'atmosphère, on peut admettre que la force de Coriolis domine le mouvement, on définit l'équation de l'*équilibre géostrophique* comme

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \nabla\pi = 0 \quad (1.31)$$

dans laquelle le gradient de pression est équilibré par le terme de Coriolis. En climatologie, météorologie ou encore océanographie, pour une géométrie sphérique, à une latitude donnée φ , on peut se donner une système de coordonnées locales car-

tésiennes (x, y, z) qui pointent vers l'Est, le Nord et l'extérieur de la sphère respectivement. Les composantes de Ω dans ces coordonées sont $(0, \Omega \cos(\varphi), \Omega \sin(\varphi))$. On peut considérer en bonne approximation un écoulement en 2 dimensions pour $\mathbf{v} = (v, u, w \approx 0)$, parallèle à la surface de la Terre, ce qui nous donne

$$2\Omega \times \mathbf{v} \approx (-2\Omega \sin(\varphi) v, 2\Omega \sin(\varphi) u, 0) \quad (1.32)$$

$$= f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} \quad (1.33)$$

où $f = 2\Omega \sin(\varphi)$ est le paramètre de Coriolis. Comme $\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ Le courant géostrophique est alors donné par

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{f\rho} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla \pi \quad (1.34)$$

il est alors possible de déterminer la direction de \mathbf{v}_g en fonction des zones de basse et haute pression (pour des mouvements à grandes échelles). Nous pouvons découvrir d'autres phénomènes importants en dynamique des fluides en rotation, provenant de l'équation d'Euler linéaire.

1.3.3 Théorème de Taylor-Proudman

A partir de l'équation d'Euler linéaire, en prenant le rotationnel de cette dernière, on obtient une équation qui décrit l'évolution de la vorticité

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = 2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.35)$$

Si le mouvement est quasi-uniforme, on peut négliger $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}$. On peut aussi justifier cela par le fait que l'échelle d'évolution de la vorticité (rotation locale du fluide) est bien plus faible que les effets dus au terme de Coriolis de la rotation globale. Cela nous donne

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad (1.36)$$

Puisque $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla$ est l'opérateur gradient dans la direction $\boldsymbol{\Omega}$ c'est à dire $\hat{\mathbf{z}}$, on obtient une condition assez forte $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$: le champ de vitesse \mathbf{v} est uniquement bidimensionnel, indépendant de la coordonnée parallèle à $\boldsymbol{\Omega}$; on appelle cela *le théorème*

de Taylor-Proudman. Ce théorème implique qu'une colonne de fluide en rotation contenue entre deux parois solides doit avoir la même vitesse le long de l'axe de rotation. Si on applique une perturbation à la base du fluide, cette perturbation va se propager sur toute la colonne. C'est un résultat très important en climatologie et géophysique car il existe de nombreuses situations où une topographie initiale à la base génèrent des perturbations sous forme de colonne de Taylor.

1.3.4 Les ondes inertielles

Lorsqu'un fluide est en rotation cela lui confère une stabilité intrinsèque due à l'action de la force de Coriolis sur les parcelles de fluide. Cette force est bien connue pour être à l'origine des tourbillons circulant dans les fluides en rotation, par exemple dans les ouragans de l'atmosphère terrestre [22]. La force de Coriolis ne se manifeste que dans des référentiels en rotation où les mouvements inertIELS suivent des trajectoires courbes. Agissant perpendiculairement à la direction du mouvement du fluide, la force de Coriolis entraîne des mouvements circulaires des éléments du fluide, de sorte qu'ils reviennent périodiquement à leur position initiale après avoir été perturbés. En suivant le schéma de la figure (1.1), un fluide est en rotation

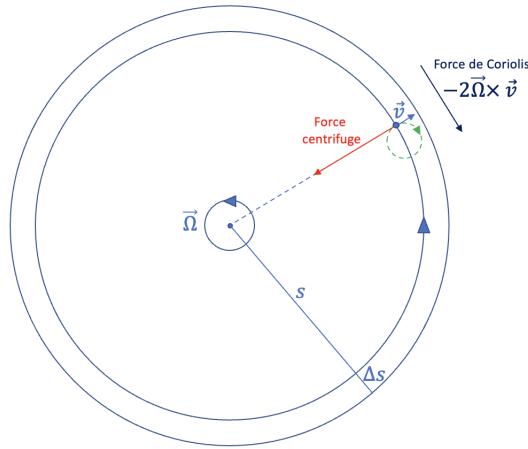


FIGURE 1.1 – Ondes inertielles d'un fluide en rotation. La parcelle de fluide (point bleu) se déplace de Δs hors de la ligne de rotation du corps solide et la force de Coriolis (bleue) agit sur elle lui donnant des oscillations circulaires (vert).

solide à une vitesse angulaire Ω , nous considérons une perturbation radiale. Si cette particule de fluide passe d'un rayon s à un rayon $s + \Delta s$, alors, par conservation du

moment angulaire, sa nouvelle vitesse angulaire sera

$$\Omega' = \left(\frac{s}{s + \Delta s} \right)^2 \Omega < \Omega \quad (1.37)$$

La force centrifuge par unité de masse du fluide à un rayon s est $\Omega^2 s$ et est équilibrée par le gradient de pression à ce rayon. Le déplacement entraînera une force centrifuge plus importante $\Omega'^2(s + \Delta s)$ sur la particule qui est plus petite que le gradient de pression $\Omega^2 s$. Il y aura donc une force de rappel nette sur la particule, donnée par

$$F = \Omega^2(s + \Delta s) - \Omega'^2(s + \Delta s) \quad (1.38)$$

$$= \Omega^2(s + \Delta s) - \Omega^2 s \left(1 - 3 \frac{\Delta s}{s} + O(\Delta s^2) \right) \quad (1.39)$$

$$= 4\Omega^2 \Delta s \quad (1.40)$$

L'équation de mouvement de la parcelle de fluide est donc

$$\ddot{\Delta s} + 4\Omega^2 \Delta s = 0 \quad (1.41)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de fréquence angulaire 2Ω . Ainsi, la particule oscille d'avant en arrière radialement avec une fréquence angulaire de 2Ω . Lorsque la particule se déplace radialement, la force de Coriolis agit sur elle et la fait se déplacer vers la droite en permanence, ce qui produit le mouvement circulaire rétrograde à Ω représenté en vert sur la figure. De telles oscillations sont appelées oscillations inertielles d'un fluide en rotation [4], [11]. On peut maintenant dériver les équations des ondes inertielles et leurs propriétés à partir de l'équation d'Euler linéaire. En y appliquant le rotationnel, on a obtenu une équation pour l'évolution de la vorticité

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = 2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (1.42)$$

en appliquant une nouvelle fois le rotationnel ainsi qu'une dérivée temporelle, en notant que $\nabla \times \boldsymbol{\xi} = -\nabla^2 \mathbf{v}$ pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial^2 (\nabla \times \boldsymbol{\xi})}{\partial t^2} = -2 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \quad (1.43)$$

Comme on veut une expression pour la perturbation du champ de vitesse \mathbf{v} , on remplace le terme $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, ce qui donne

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2 \mathbf{v}) + 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)^2 \mathbf{v} = 0 \quad (1.44)$$

L'équation des ondes inertielles pour un fluide incompressible en rotation, appelée ainsi car elle ne dépend que de l'inertie et la force de Coriolis. Les solutions de cette équation s'appellent des ondes inertielles, on peut déterminer leurs propriétés en posant une solution d'ondes planes

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.45)$$

En substituant cette solution dans l'équation d'onde on trouve la pulsation :

$$\omega^2 |\mathbf{k}|^2 \mathbf{v}_0 + 4 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 \mathbf{v}_0 = 0 \rightarrow \omega = \pm 2 \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \pm 2\Omega \cos \theta \quad (1.46)$$

où θ est l'angle entre $\boldsymbol{\Omega}$ et \mathbf{k} telle que la pulsation est comprise entre 0 et $\pm 2\Omega$. On peut ensuite calculer la vitesse de phase et de groupe de ces ondes :

$$c_{ph} := \frac{\omega(\mathbf{k}) \hat{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} = \pm 2 \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^3} \quad (1.47)$$

$$c_g := \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \pm 2 \frac{(k^2 \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^3} \quad (1.48)$$

La vitesse de groupe donne la vitesse et la direction de propagation de l'énergie. On remarque que si la fréquence de l'onde inertielle est petite, (c-à-d $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k} \ll 1$) alors c_g est presque parallèle à l'axe de rotation de $\boldsymbol{\Omega}$. La propagation verticale des ondes inertielles de basses fréquences a été identifiée comme le vecteur de la formation des colonnes de Taylor [13]. Nous allons maintenant explorer une méthode pour calculer de telles ondes dans une géométrie cylindrique, ce qui est pertinent pour notre étude.

Cylindre fini en rotation

Dans notre étude, nous considérons un cylindre infiniment long en rotation uniforme. Il est intéressant de regarder les solutions analytiques qui ont été trouvées pour un cylindre de longueur finie. Dans le livre de référence de Greenspan [13], ces

solutions ont été trouvées par la méthode dite de Poincaré. Cette méthode a été étudiée en premier par Kelvin [20] et plus tard par Bjerknes et Solberg [5]. On travaille ici en coordonnées généralisées \mathbf{q} pour le champ de vitesse, avec les équations

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' \quad (1.49)$$

ou $p' = P - \frac{1}{2}\rho(s\Omega)^2 + \rho g z$, la pression réduite. On suppose des solutions en ondes-planes du type

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} e^{i\omega t} \quad ; \quad \frac{p'}{\rho} = \Phi e^{i\omega t} \quad (1.50)$$

Pour étudier les ondes inertielles en coordonnées cylindriques, on exprime \mathbf{q} en fonction de $\nabla\Phi$ et en prenant la divergence on obtient

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} s \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.51)$$

avec les conditions limites particulières suivantes

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 & \text{en } z = 0, h \\ i\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{2}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 & \text{en } s = a \end{cases} \quad (1.52)$$

Les conditions aux bords réduisent le nombre de solutions à un ensemble infini discret. On peut résoudre ce problème par méthode de séparation des variables et on trouve que

$$\Phi_{nmk}(s, \varphi, z) = J_{|m|}(\xi_{nmk} s/a) \cos(k\pi z) \exp(im\varphi) \quad (1.53)$$

pour $m = 0$ et $k, m = \pm 1, \pm 2, \dots$. La constante a donne le rapport $\frac{\text{rayon}}{\text{hauteur}}$ du cylindre. Les fréquences propres λ_{nmk} sont données par

$$\lambda_{nmk} = \frac{\omega}{\Omega} = 2 \left(1 + \frac{\xi_{nmk}^2 h^2}{k^2 \pi^2 a^2} \right)^{-1/2} \quad (1.54)$$

avec ξ_{nmk} la n^{ieme} solution positive de l'équation transcendante :

$$\xi \frac{d}{d\xi} J_{|m|}(\xi) + m \left(1 + \frac{\xi_{nmk}^2 h^2}{k^2 \pi^2 a^2} \right)^{1/2} J_{|m|}(\xi) = 0 \quad (1.55)$$

ou J est une fonction de Bessel de première espèce. On peut écrire différent l'équation précédente grâce aux propriétés des fonctions de Bessel

$$\xi \left(-J_{|m+1|}(\xi) + \frac{m}{\xi} J_{|m|}(\xi) \right) + m \left(1 + \frac{\xi^2 h^2}{k^2 \pi^2 a^2} \right)^{1/2} J_{|m|}(\xi) = 0 \quad (1.56)$$

Pour trouver les valeurs de ξ qui satisfont l'équation transcendante, on utilise la méthode de *Newton-Raphson* implémentée en langage *Python* (Annexe A) et on trouve alors les racines pour différents paramètres.

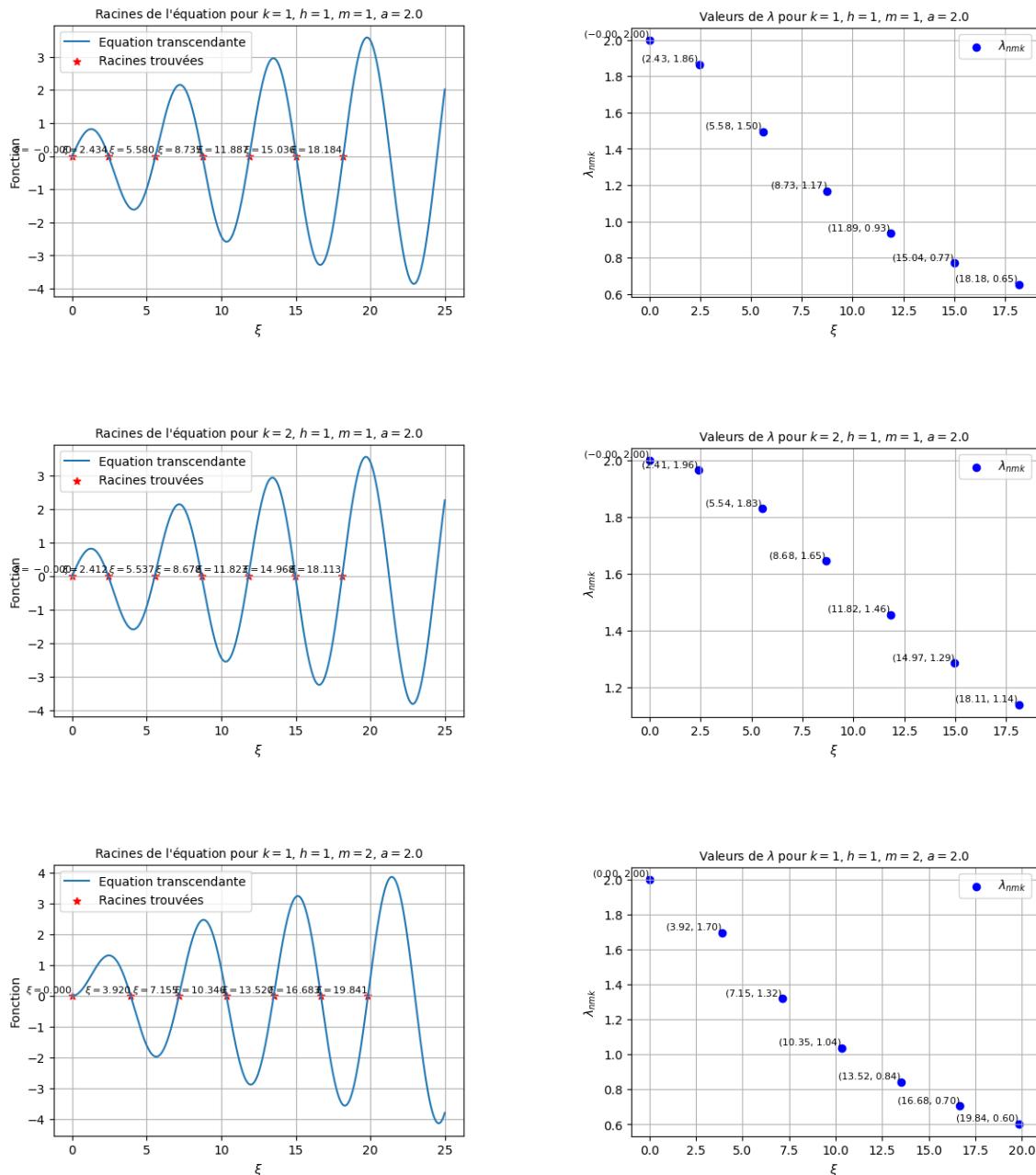


FIGURE 1.4 – Colonne de gauche : racines de l'équation (1.56) pour différents modes de vibration. Colonne de droite : valeurs propres correspondantes

On voit que les valeurs propres ont tendance à être plus élevées pour $k > m$ et plus petites pour $k < m$. Si on force le fluide à une de ces fréquences, il y aura résonance. Pour forcer le fluide, comme expliqué dans les perspectives, on peut imposer une topographie initiale à la base du cylindre et ainsi sélectionner différents modes de vibrations. Ce sont des valeurs importantes car, si on veut s'assurer de la qualité de notre simulation par la suite, on peut imposer des conditions à la base et au sommet du cylindre et, en reprenant les mêmes paramètres, essayer de retrouver les mêmes fréquences propres. Il est maintenant temps de s'intéresser au cas où le fluide conducteur est imprégné d'un champ magnétique, ce qui mène à une étude magnétohydrodynamique.

Chapitre 2

Magnétohydrodynamique

Le noyau liquide de la Terre, étant composé d'un fluide conducteur d'électricité imprégné d'un champ magnétique, correspond à un cas typique de magnétohydrodynamique. Considérant les phénomènes présents dans la couronne solaire, ce milieu n'est pas un fluide conducteur mais un plasma. Cependant, on peut considérer en bonne approximation qu'un plasma spatial se comporte comme un fluide [3]. Dans ce chapitre, il s'agit de rappeler les équations fondamentales de l'électromagnétisme et de les coupler à celles de la dynamique des fluides étudiées au chapitre précédent. Nous pourrons ainsi écrire les équations de base de la magnétohydrodynamique.

2.1 Équations fondamentales

Soit un champ électromagnétique $\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\}$ avec une distribution de charge et de courant (ρ, \mathbf{j}) . La force subie par une particule de charge q est donnée par la force de Lorentz

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

Dans un milieu continu, on veut regarder la force par unité de volume, ce qui fait apparaître la distribution de charge, on peut réécrire \mathbf{F}_L pour un milieu continu

$$\mathbf{f}_L = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

où $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ est la *densité de courant électrique*. On peut introduire la loi de la conservation de la charge électrique qui s'écrit

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.3)$$

Limite non relativiste

Etant donné que le cadre du travail se déroule en MHD, on se focalise sur les oscillations pour lesquelles $\mathbf{v} \ll c$. En regardant la loi d'Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

on peut alors négliger le courant de déplacement $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. En effet, considérons que les champ \mathbf{E} et \mathbf{B} aient respectivement une amplitude E et B , pour une longueur et un temps caractéristiques L , T . Le rapport entre le courant de déplacement et $\nabla \times \mathbf{B}$ est de l'ordre de

$$\frac{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \frac{L}{c^2 T} \frac{E}{B} \quad (2.5)$$

par la loi de Faraday, $\frac{E}{L} \sim \frac{B}{T}$ on a alors

$$\frac{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|}{|\nabla \times \mathbf{B}|} \sim \left(\frac{L/T}{c} \right)^2 \quad (2.6)$$

Le rapport L/T étant une estimation d'une vitesse typique non-relativiste $\ll c$, cela implique $\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \ll |\nabla \times \mathbf{B}|$. On travaillera donc avec les équations de Maxwell simplifiées

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{Loi de Gauss} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Loi d'induction de Faraday} \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{Loi d'Ampère} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Pas de monopôle magnétique} \quad (2.10)$$

où μ_0 est la *perméabilité du vide* et ϵ_0 la *permittivité du vide*, on a la relation $\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2$.

Une autre équation s'ajoute à l'arsenal : en présence d'un champ magnétique et d'un

conducteur en mouvement, la loi d'Ohm généralisée est

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.11)$$

où σ est la *conductivité électrique*.

Équation de l'induction

En MHD, il faut comprendre comment le champ magnétique évolue et est transporté dans le milieu. Pour ce faire, nous partons de la loi d'induction de Faraday, dans laquelle nous injectons (2.11) ainsi que loi d'Ampère par la suite. On introduit la quantité $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ qui est la *diffusivité magnétique*, et on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.12)$$

comme $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$. On peut donc écrire la forme connue de l'*équation d'induction* du champ magnétique, qui détermine le transport du champ magnétique par l'écoulement

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.13)$$

grâce à $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, on peut réécrire $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B}$, ce qui mène à

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.14)$$

On remarque que la dérivée totale de \mathbf{B} dépend de 2 termes en compétition. D'un côté $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}$: un terme de tension qui tend à renforcer le champ magnétique, et d'un autre $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$: un terme de diffusion qui tend à relaxer le champ magnétique. Le rapport des 2 quantités des termes de droite de l'équation d'induction initiale définit le nombre de Reynolds magnétique :

$$Rm = \frac{|\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} \sim \frac{VB/R}{\eta B/L^2} = \frac{VR}{\eta} \quad (2.15)$$

où V et R représentent respectivement la vitesse caractéristique et l'échelle de longueur caractéristique de l'écoulement. On distingue 2 catégories en MHD définies

par le nombre de Reynolds magnétique.

MHD résistive : $Rm \rightarrow 0$. Dans ce cas, l'équation d'induction se réduit à une équation de diffusion

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.16)$$

Tout champ magnétique initial va décroître sous dissipation ohmique du fluide conducteur avec un temps caractéristique τ_η donné par

$$\frac{B}{\tau_\eta} = \frac{\eta B}{R^2} \rightarrow \tau_\eta = \frac{R^2}{\eta} \quad (2.17)$$

connu sous le nom de temps de diffusion magnétique. En MHD résistive, le théorème d'Alfvén n'est plus satisfait, la topologie magnétique peut alors être brisée.

MHD idéale : $Rm \rightarrow \infty$. Ici, on néglige la diffusion car on considère que $\sigma \rightarrow \infty$ et donc $\eta \rightarrow 0$ l'équation d'induction devient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.18)$$

Ceci est une équation de transport du champ magnétique par l'écoulement dont le temps caractéristique est : $\tau = \frac{R}{V}$. La plupart des phénomènes astrophysiques et géophysiques sont décrits en MHD idéale, non pas en raison d'une grande conductivité électrique, mais à cause des très grandes échelles de longueur et de vitesse. En laboratoire, c'est compliqué de se trouver dans le cas de la MHD idéale en raison des faibles échelles de longueur, il est donc difficile de reproduire des phénomènes astrophysiques expérimentalement.

2.2 Équations de la MHD

En MHD, l'écoulement du fluide a un impact sur l'évolution du champ magnétique, observé à travers l'équation d'induction. De manière similaire, le champ magnétique modifie aussi le comportement du fluide, par la force magnétique locale $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. On peut donc étudier un problème MHD en rotation grâce aux équations

suivantes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\pi + \frac{1}{\rho}\mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.20)$$

où ρ dans (2.19) est bien la densité du fluide et non la densité de charge. S'ajoutent aussi les conditions des champs solénoïdaux

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.21)$$

Grâce à ces 4 équations, nous pouvons étudier des ondes se propageant dans un tel milieu, en particulier les ondes inertielles qui sont notre centre d'intérêt.

Étude des perturbations

Afin de regarder les équations d'évolution pour des perturbations, nous considérons un champ de vitesse initial constitué d'un champ homogène ainsi qu'une petite perturbation. Il en est de même pour le champ magnétique où l'on considère qu'il est formé d'un champ homogène ainsi qu'une perturbation due à la perturbation du champ de vitesse.

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad (2.22)$$

Pour $\mathbf{v} \ll \mathbf{v}_0$ et $\mathbf{b} \ll \mathbf{B}_0$. Lorsque l'on injecte ces décompositions dans les équations (2.19) et (2.20), des termes du second ordre apparaissent. Nous négligerons les effets non-linéaires. De plus, les champs homogènes ne varient pas dans l'espace et dans le temps. Le terme impliquant la force de Lorentz est discuté dans la section des ondes d'Alfvén. Nous pouvons ainsi étudier les perturbations MHD en rotation à travers ces équations

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\pi + \frac{1}{\rho\mu} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (2.24)$$

Il est maintenant temps de regarder les propriétés de la MHD. Nous allons explorer certains travaux d'Alfvén afin de comprendre les phénomènes que nous étudierons.

2.2.1 Le théorème d'Alfvén

Suite à ses recherches, Annes Alfvén écrit en 1942 [1] :

Supposons que nous ayons un champ magnétique homogène dans un liquide parfaitement conducteur... Compte tenu de la conductivité infinie, tout mouvement (perpendiculaire au champ) du liquide par rapport aux lignes de force est interdit car il donnerait des courants de Foucault infinis. La matière du liquide est donc "attachée" aux lignes de force...

dans lequel il donne une interprétation des ondes MHD, il énonce un résultat connu sous le nom du *théorème d'Alfvén* (la preuve de ce théorème est tirée de [14]). Ce théorème est relié au *frozen flux theorem*

Les tubes à flux magnétique se déplacent avec un fluide parfaitement conducteur, comme s'ils y étaient figés.

Physique sous-jacente : Pour dériver le théorème d'Alfvén, on considère la vitesse \mathbf{v} connue et on se concentre alors seulement sur le champ magnétique \mathbf{B} . On considère

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.25)$$

et l'équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.26)$$

dans la limite de non-diffusivité

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ pour } \sigma = \infty \quad (2.27)$$

cette dernière équation a la même forme que l'équation de la vorticité $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{v}$, pour un fluide incompressible de densité uniforme

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi}) \quad (2.28)$$

qui donne lieu au théorème de Kelvin

Les tubes de vortex se déplacent avec un fluide incompressible de densité uniforme, comme s'ils étaient figés sur celui-ci.

on remarque que le théorème d'Alfvén est l'analogue de celui de Kelvin bien que l'équation d'induction est linéaire en \mathbf{v} tandis que pour la vorticité nous avons un terme $\nabla \times \mathbf{v}$ et \mathbf{v} .

Démonstration formelle du théorème : Bien que l'analogie avec le théorème de Kelvin nous donne une bonne intuition sur le théorème d'Alfvén, on va démontrer ce résultat rigoureusement comme fait dans [14].

Considérons $\Gamma(t)$ une courbe arbitraire gelée au fluide en mouvement et $d\mathbf{s}(t)$ un élément infinitésimal de Γ dont les extrémités sont situées à $\mathbf{s}(t)$ et $\mathbf{s}(t) + d\mathbf{s}(t)$. Les vitesses du fluide correspondantes en ces points sont $\mathbf{v}(\mathbf{s}(t), t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{s}(t) + d\mathbf{s}(t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{s}(t), t) + d\mathbf{s}(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{s}(t), t)$. A un temps dt plus tard, les extrémités se trouvent en $\mathbf{s} + \mathbf{v}dt$ et $\mathbf{s} + d\mathbf{s} + (\mathbf{v} + d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{v})dt$ telle que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ds}) = d\mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (2.29)$$

ou $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ la dérivée lagrangienne. En sachant que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et grâce aux identités vectorielles, on réécrit l'équation d'induction

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.30)$$

on a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \times d\mathbf{s}) = -(\mathbf{B} \times d\mathbf{s})_j \nabla v_j \text{ pour } \sigma = \infty \quad (2.31)$$

avec la sommation implicite sur les indices j . Il suit que

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{s} = 0 \text{ à } t = 0 \Rightarrow \mathbf{B} \times d\mathbf{s} = 0 \quad \forall t \quad (2.32)$$

Une *ligne de champ magnétique* est une courbe dont chaque élément $d\mathbf{s}$ est parallèle à \mathbf{B} . D'après l'équation (2.32), si Γ est initialement une ligne de champ, elle restera une ligne de champ. Ceci établit que les lignes de champ magnétique se déplacent avec un fluide parfaitement conducteur, ce qui conclut la forme faible du théorème

d'Alfvén. Pour la deuxième application de (2.29), prenons $\Sigma(t)$ comme surface arbitraire (ouverte) "gelée" par le fluide en mouvement et prenons $d\mathbf{S}(t)$ comme élément infinitésimal de Σ ayant la forme d'un parallélogramme dont les deux côtés adjacents sont situés le long des courbes $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$, de telle sorte que

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{s}^{(1)} \times d\mathbf{s}^{(2)} \quad (2.33)$$

où $d\mathbf{s}^{(1)}$ et $d\mathbf{s}^{(2)}$ sont des éléments de $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$, en appliquant l'équation (2.29), cela conduit au résultat

$$\frac{d}{dt} d\mathbf{S} = d\mathbf{S}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - dS_j \nabla v_j \quad (2.34)$$

il suit à partir de (2.30) et (2.34) que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = 0, \text{ pour } \sigma = \infty \quad (2.35)$$

et donc,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \text{ à } t = 0 \Rightarrow \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \forall t \quad (2.36)$$

Une surface magnétique, $M(t)$, est une surface composée de lignes de champ, de sorte que chaque élément de surface, $d\mathbf{S}$, est perpendiculaire à \mathbf{B} . Selon (2.36), si M est initialement une surface magnétique, elle restera une surface magnétique. Cette conclusion découle également de (2.32).

Pour obtenir le résultat le plus fort, prenons M comme un tube de flux magnétique. Il s'agit d'un faisceau de lignes de champ magnétique et il est donc limité par une surface magnétique pour tout t . Soit $\Sigma(t)$ une section transversale du tube, c'est-à-dire une surface qui traverse chaque ligne de champ magnétique à l'intérieur du tube. Le flux magnétique net à travers Σ ,

$$m = \int_{\Sigma(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.37)$$

est appelée la "force" du tube. Il est facile de voir à partir de (2.25) que m est le même pour chaque section Σ . L'équation (2.36) montre en outre que m est indépendant

du temps :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \text{ pour } \sigma = \infty \quad (2.38)$$

Cette conservation du flux est la forme forte du théorème d'Alfvén. Selon les équations (2.25) et (2.27) et le théorème de Stokes, (2.38) peut également s'écrire en termes eulériens comme suit

$$\int_{\Sigma(t)} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{S}) = 0, \text{ pour } \sigma = \infty \quad (2.39)$$

où $\Gamma(t)$ est le périmètre de $\Sigma(t)$. Si Σ était fixe dans l'espace, le premier terme du côté gauche de (2.39) serait le taux d'augmentation du flux à travers Σ . Le $\mathbf{v} \times d\mathbf{S}$ du second terme est le taux auquel l'aire vectorielle de Σ augmente lorsque $d\mathbf{S}$, sur le périmètre Γ de Σ , est advecté par le mouvement du fluide \mathbf{v} . Le taux associé auquel Σ gagne du flux magnétique est donc $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{S})$.

Le théorème montre qu'il est impossible de modifier la topologie des lignes de champ traversant le conducteur, pour comprendre comment un fluide réel permet aux lignes de champ de se couper et de se reconnecter (comme dans la couronne solaire), il faut admettre que sa résistivité est finie.

2.3 Les ondes d'Alfvén

Il est maintenant temps d'étudier les ondes qui se propagent dans un fluide conducteur plongé dans un champ magnétique constant, on les appelle les ondes magnétohydrodynamiques ou ondes d'Alfvén en raison de sa belle découverte. Commençons par se donner une intuition du comportement de telles ondes.

Mécanisme des ondes d'Alfvén : La force de rappel responsable des ondes d'Alfvén découle de deux principes physiques simples [14] :

1. La loi de Lenz appliquée aux fluides conducteurs : "Les courants électriques induits par le mouvement d'un fluide conducteur à travers un champ magnétique donnent lieu à des forces électromagnétiques qui s'opposent au mouvement du fluide".

2. Deuxième loi de Newton pour les fluides : "Une force appliquée à un fluide entraîne une variation de la quantité de mouvement du fluide proportionnelle à l'ampleur de la force et dans la même direction."

La force magnétique locale qui s'applique sur une densité de courant \mathbf{j} est donnée par la force de Lorentz

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.40)$$

qu'on peut réécrire comme

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.41)$$

en vertu des équations de Maxwell. On peut développer le terme de droite grâce aux identités vectorielles, et on obtient

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} (-\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{\mu_0} ((\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.44)$$

On a inséré le terme $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ sans rien changer. Ensuite, grâce à l'identité vectorielle $\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$, on a

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (2.45)$$

qu'on peut écrire de manière compacte en introduisant le *Tenseur des contraintes de Maxwell* dans le cas magnétostatique

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \delta_{ij} \quad (2.46)$$

Cette décomposition fait intervenir un terme de pression magnétique ∇B^2 et un autre terme $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$. Pour comprendre l'action du second terme on va l'analyser en coordonnées curvilignes pour lesquelles le champ magnétique s'écrit $\mathbf{B} = B \mathbf{t}$, tel que

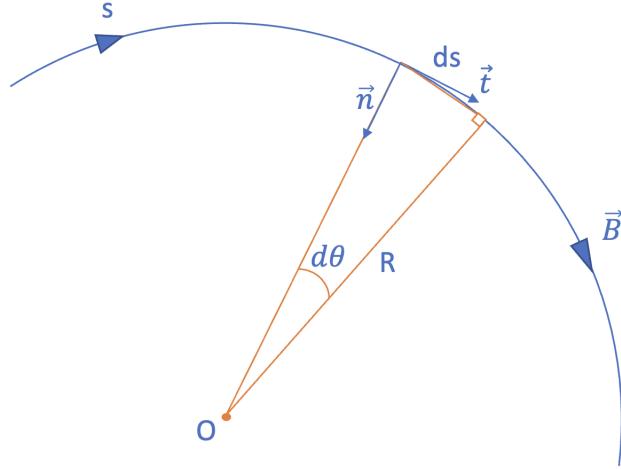


FIGURE 2.1 – Schéma des coordonnées curvilignes

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = B \frac{d}{ds} (B \mathbf{t}) \quad (2.47)$$

$$= B \frac{dB}{ds} (\mathbf{t}) + B^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (2.48)$$

A partir de la figure ci-dessus, on peut dériver les propriétés des coordonnées curvilignes

$$ds = R d\theta \quad (2.49)$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \mathbf{n} \quad (2.50)$$

pour réécrire le terme magnétique

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{2} \frac{dB^2}{ds} \mathbf{t} + \frac{B^2}{R} \mathbf{n} \quad (2.51)$$

La tension magnétique peut être interprétée comme une force qui redresse les lignes du champ magnétique. Lorsque les lignes de champ sont perturbées, la courbure génère une tension magnétique, agissant comme une force de rappel vers la position initiale. En regardant la figure (2.2), on voit que les réponses des lignes de champs magnétiques, à la suite d'une perturbation du fluide, vont engendrer des oscillations transversales, les ondes d'Alfvén. Ces ondes se propagent le long des lignes de champ, perpendiculairement au mouvement de la perturbation magnétique et du fluide, ce

qui les classe comme des ondes transversales.

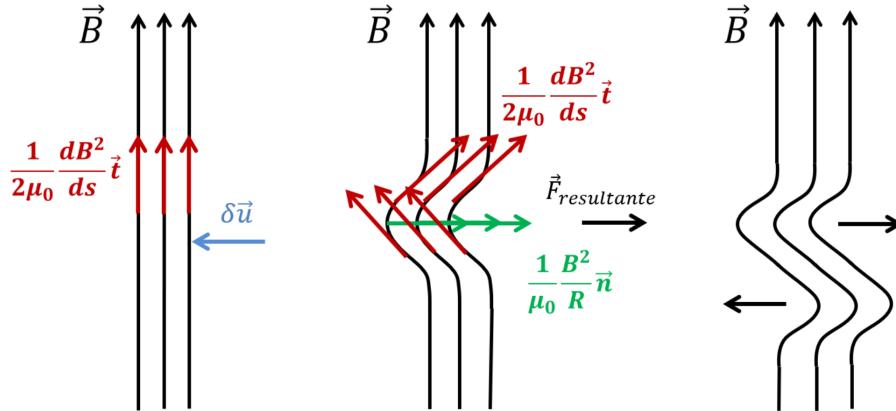


FIGURE 2.2 – Réponses des lignes de champ magnétique à une petite perturbation du fluide $\delta\mathbf{u}$, en MHD idéale. Les termes de tension magnétique induisent une force de rappel visant à diminuer la courbure des lignes de champ. Source : [12]

On peut reprendre à nouveau la force de Lorentz et regarder comment elle sera inclue à nos équations MHD perturbées. Comme dit auparavant, pour

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad (2.52)$$

des termes non linéaires vont apparaître. Pour la force de Lorentz,

$$\mathbf{f}_L = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla (B^2) \quad (2.53)$$

nous déduisons que ce sont les perturbations du champs qui agiront sur le fluide, on peut écrire les contributions de la force de Lorentz des perturbations comme

$$\frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b} : \text{Tension magnétique} \quad (2.54)$$

$$-\frac{1}{2\mu_0} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b}) : \text{Pression magnétique} \quad (2.55)$$

le terme de tension fera parti intégrante de l'équation de mouvement, tandis que le terme de pression sera inclus dans la définition de la pression réduite qui prendra la forme

$$\pi := \frac{p}{\rho} + \Phi_g - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b} \quad (2.56)$$

Nous sommes maintenant prêts à étudier les équations et les propriétés de ces perturbations.

2.3.1 Equation d'onde d'Alfvén

Pour décrire simplement les ondes d'Alfvén, commençons par une analyse en ondes planes. Considérons un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 plongé dans un fluide conducteur parfait d'électricité, infini, homogène et incompressible de densité ρ , viscosité cinématique ν et de diffusivité magnétique η . Imaginons que le fluide est perturbé par un champ de vitesse infinitésimal \mathbf{v} induisant un champ de perturbation magnétique \mathbf{b} , tel que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$, si on ignore les termes quadratiques en les perturbations, on se retrouve avec un système d'équations linéaires qui décrit la quantité de mouvement ainsi que l'évolution du champ magnétique.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \pi + \frac{1}{\rho \mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \nabla^2 \mathbf{b} \quad (2.58)$$

le rotationnel de l'équation (2.57) nous donne une équation qui donne l'évolution de la vorticité $\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{v}$, on prend aussi le rotationnel de l'équation (2.58)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \frac{1}{\rho \mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{b}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\xi} \quad (2.59)$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} + \eta \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (2.60)$$

Afin de trouver une équation d'onde, on prend une dérivée temporelle supplémentaire de l'équation (2.59)

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \mu} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) + \nu \left(\nabla^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right) \quad (2.61)$$

On peut supprimer \mathbf{b} en injectant (2.60) dans (2.62), ce qui donne l'équation d'onde d'Alfvén

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho \mu} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)^2 \boldsymbol{\xi} - \nu \eta \nabla^4 \boldsymbol{\xi} + (\nu + \eta) \nabla^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \quad (2.62)$$

Le premier terme du côté droit est la force de rappel qui résulte de l'étirement des lignes de champ magnétique. Le deuxième terme est la réaction à la force de rappel

causée par la présence de diffusion visqueuse et ohmique, tandis que le dernier terme exprime la dissipation de l'énergie du système due à ces diffusivités finies.

Relation de dispersion et propriétés

On substitue une solution en ondes planes de la forme $\boldsymbol{\xi} = \text{Re} \left\{ \hat{\boldsymbol{\xi}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right\}$ où $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ dans l'équation d'ondes d'Alfvén, cette substitution fait apparaître pour $\partial_t \rightarrow -i\omega$ et $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$. On obtient après simplification

$$\omega^2 = \left(\frac{B_0^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2}{\rho\mu} - \nu\eta k^4 \right) - i(\nu + \eta)k^2\omega \quad (2.63)$$

où $\hat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 / |B_0|$. L'équation (2.63) est la relation de dispersion pour les ondes d'Alfvén, on peut donner une solution explicite pour ω qui est

$$\omega = \frac{-i(\nu + \eta)k^2\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{B_0^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)^2}{\rho\mu} - \frac{(\nu - \eta)^2 k^4}{4}} \quad (2.64)$$

Dans un milieu idéal, $\nu = \eta = 0$, on néglige la viscosité cinématique et la diffusivité magnétique. La relation se simplifie alors à

$$\omega = \pm v_A (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \quad (2.65)$$

où v_A est connu sous le nom de la *vitesse d'Alfvén*

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\rho\mu}}. \quad (2.66)$$

Cette vitesse est celle à laquelle se propage une onde d'Alfvén le long des lignes de champ magnétiques. Les ondes d'Alfvén sont non-dispersives parce que leur fréquence angulaire ω est indépendante de $|k|$ et que la vitesse de phase et la vitesse de groupe (à laquelle l'énergie et l'information sont transportées par l'onde) sont égales. Les ondes d'Alfvén sont cependant anisotropes (elles varient selon la direction considérée), leurs propriétés dépendent de l'angle entre le champ magnétique appliqué et la direction de propagation de l'onde.

Application au noyau terrestre : On peut se faire une idée de la vitesse des ondes d'Alfvén dans le noyau terrestre pour des valeurs caractéristiques [14]. En insérant dans l'équation pour v_A : la densité du fluide du noyau externe $\rho = 1 \times 10^4 \text{ kg}$, déterminée par sismologie, la perméabilité magnétique d'un métal au-dessus de sa température de Curie $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T}^2 \text{ mkg}^{-1}\text{s}^2$ et une valeur plausible de l'intensité du champ magnétique dans le noyau (que nous considérons comme l'amplitude typique du champ radial observé à la surface du noyau $B_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ T}$), cela donne une vitesse d'Alfvén de $v_A = 0,004 \text{ ms}^{-1}$ ou 140 km an^{-1} . Le temps nécessaire à une telle onde pour parcourir une distance de l'ordre de l'épaisseur du noyau est d'environ 25 ans. Dans la magnétosphère, les ondes d'Alfvén se déplacent beaucoup plus rapidement car la densité du conducteur électrique est beaucoup plus faible. Si l'on considère les ondes d'Alfvén dans le noyau terrestre, la dissipation ohmique devrait dominer la dissipation visqueuse, de sorte que $\nu k^2 \ll \eta k^2 \ll v_A^2$. Cela nous donne une relation de dispersion simplifiée

$$\omega = \frac{-i\eta k^2}{2} \pm v_A(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0) \quad (2.67)$$

et les solutions ondulatoires ont la forme de simples ondes d'Alfvén, amorties sur l'échelle de temps de diffusion ohmique de $T_{ohm} = \frac{2}{\eta k^2}$

$$\xi = Re \left\{ \hat{\xi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm v_A(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_0)t)} e^{-t/T_{ohm}} \right\} \quad (2.68)$$

On peut interpréter cette équation en disant que lorsque les ondes à petite échelle (petite longueur d'onde) traversent un milieu conducteur, tel que le noyau terrestre, elles interagissent avec les charges électriques présentes dans ce milieu, dissipant ainsi leur énergie sous forme de chaleur. Ces ondes sont rapidement amorties lorsqu'elles traversent le noyau terrestre en raison de cette diffusion ohmique. Les ondes à grande longueur d'onde interagissent moins efficacement avec le milieu et sont donc moins amorties. Ces ondes ont donc une durée de vie plus longue et peuvent parcourir des distances plus importantes à travers le noyau terrestre sans être aussi rapidement amorties que les ondes à petite échelle. On s'attend donc à ce que les ondes à grande échelle aient un impact plus important sur la dynamique du noyau et sur le champ magnétique observable.

Preuve expérimentale des Ondes d'Alfvén

En 1949, S.Lundquist réalise une expérience dans laquelle il observe pour la première fois les ondes magnétohydrodynamiques [21] prédictes par H.Alfvén 7 années plus tôt [1]. Dans son expérience, il utilise un fluide de mercure dans un cylindre traversé par un champ magnétique uniforme $\mathbf{H}_0 = H_0 \hat{\mathbf{z}}$. Afin d'étudier les perturbations du champ magnétique, il injecte $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$ dans les équations de mouvement et de l'induction, où \mathbf{h} est le champ magnétique induit par les perturbations du fluide. Il obtient le système

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \nabla^2 \right] \mathbf{h} = (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi\rho} (\mathbf{H}_0 \cdot \nabla) \mathbf{h} - \frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\mu}{4\pi} \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{h} \right) \quad (2.70)$$

où $a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$ est le terme de diffusivité magnétique. Le fluide est perturbé par une rotation de la base du cylindre perpendiculaire au champ magnétique uniforme. En coordonnées cylindriques, les seules composantes des perturbations \mathbf{v} et \mathbf{h} sont

$$v_s = 0; v_\varphi = v; v_z = 0 \text{ et } h_s = 0; h_\varphi = h; h_z = 0 \quad (2.71)$$

Les équations en coordonnées cylindriques s'écrivent

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{h}{s^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) + H_0 \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu H_0}{4\pi\rho} \frac{\partial h}{\partial z} \quad (2.73)$$

En prenant une dérivée temporelle supplémentaire de (2.72), on peut injecter (2.73), ce qui élimine v , et obtenir

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{h}{s^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right] + V^2 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (2.74)$$

où

$$V^2 = \frac{\mu H_0^2}{4\pi\rho}. \quad (2.75)$$

En cherchant une solution en ondes planes $\propto \exp(i\omega t + \alpha z)$ de fréquence ω se propageant dans la direction \mathbf{H}_0 , où α est un coefficient d'atténuation, il obtient que l'évolution de \mathbf{h} est donné par l'équation différentielle de Bessel

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial h}{\partial s} + \left(k^2 - \frac{1}{s^2} \right) h = 0 \quad (2.76)$$

avec

$$k^2 = \alpha^2 + \frac{\omega^2 + \alpha^2 V^2}{i\omega a^2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{i\omega k^2 a^2 - \omega^2}{i\omega a^2 + V^2} \quad (2.77)$$

Une solution qui est nulle en $s = 0$ est donnée par

$$h = A \cdot J_1(ks) \cdot \exp(i\omega t + \alpha z) \quad (2.78)$$

où J_1 est la fonction de Bessel du premier degré de première espèce, ce qui est naturel pour une perturbation dans la direction $\hat{\varphi}$ en géométrie cylindrique. Dans cette expérience, Lundquist ne résout que le problème pour un seul mode de vibration $m = 0$. A partir de cette solution analytique, il a déduit les solutions de la vitesse, de la densité de courant et du champ électrique. Cette expérience, de par sa géométrie, constitue un bon point de départ pour étudier les ondes magnéto-coriolis en géométrie cylindrique.

2.4 Ondes Magnéto - Coriolis

Dans ce travail, on considère un système qui est à la fois en rotation $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z}$ et influencé par un champ magnétique \mathbf{B}_0 . Dans les équations du mouvement, il faut tenir compte de la tension du champ magnétique et de la force de Coriolis, cela conduit à une combinaison d'ondes d'Alfvén et d'ondes inertielles. Lehnert [19] a démontré que dans le cas le plus simple où l'axe de rotation et le champ magnétique sont alignés, aussi notre cas, deux scénarios sont possibles :

1. **Les forces de Lorentz et de Coriolis agissent ensemble : Ondes MC rapides.**

La force de Coriolis agit dans la même direction que la force de Lorentz de rappel causée par la déviation de l'élément fluide (et du champ magnétique) par rapport à sa position non perturbée. La force de rappel due à la somme

des forces de Lorentz et de Coriolis est donc importante et provoque un mouvement rapide et une accélération inertielle significative. Les ondes MHD qui en résultent sont généralement plus rapides que les ondes d'Alfvén pures et sont donc connues sous le nom d'ondes MC rapides.

2. Les Forces de Lorentz et de Coriolis en opposition : Ondes MC lentes

En revanche, si la force de Coriolis agit dans la direction opposée à la force de Lorentz qui rétablit l'équilibre. La force de rappel est donc affaiblie et les mouvements de particules qui en résultent sont lents et n'impliquent pas d'accélération inertielle significative. Ces ondes MHD sont généralement plus lentes que les ondes d'Alfvén pures et sont connues sous le nom d'ondes MC lentes. Ces ondes lentes ont une énergie cinétique bien inférieure aux rapides mais préservent leur énergie magnétique importante.

Equation d'onde magnéto-Coriolis

De manière à dériver l'équation d'onde magnéto-Coriolis (MC) pour un fluide en rotation plongé dans un champ magnétique en l'absence de diffusion visqueuse et magnétique, le point de départ est l'équation linéarisée de la quantité de mouvement incluant l'accélération de Coriolis et de Lorentz.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \pi + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (2.79)$$

et l'équation d'induction idéale

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2.80)$$

On peut prendre le rotationnel de chaque équation et utiliser les conditions de champs solénoïdaux pour obtenir

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} - 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (2.81)$$

et

$$\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{b})}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi} \quad (2.82)$$

on prend la dérivée temporelle et en insérant les équations ensemble,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} - 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \rho} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)^2 \boldsymbol{\xi} \quad (2.83)$$

en prenant le rotationnel et en utilisant la propriété $\nabla \times \boldsymbol{\xi} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = -\nabla^2 \boldsymbol{v}$,

$$-2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \rho} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)^2 \right) \nabla^2 \boldsymbol{v} \quad (2.84)$$

on prend une dérivée temporelle supplémentaire de l'équation (2.83)

$$\frac{\partial^3 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^3} - 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}) \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \rho} (\boldsymbol{B}_0 \nabla)^2 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \quad (2.85)$$

qu'on peut réécrire comme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \rho} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)^2 \right) \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = 2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v}) \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} \quad (2.86)$$

on peut ensuite isoler $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}$ à partir de (2.84) pour obtenir une équation qui ne dépend que de la perturbation \boldsymbol{v}

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0 \rho} (\boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla)^2 \right)^2 \nabla^2 \boldsymbol{v} = -4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v})^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} \quad (2.87)$$

ce qui représente l'équation des ondes magnéto-Coriolis ou *Alfvén-Inertiel*.

Relation de dispersion des ondes magnéto-Coriolis

Cette équation nettement plus compliquée que l'équation d'onde d'Alfvén, elle est d'ordre 4 dans la dérivée temporelle, cela nous suggère l'existence de 4 modes distincts. Afin de les étudier, on injecte une onde plane $\boldsymbol{v} = \text{Re} \{ \hat{\boldsymbol{v}} e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)} \}$ dans l'équation d'onde, ce qui donne

$$\left(\frac{(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{k})^2}{\mu_0 \rho} - \omega^2 \right)^2 k^2 = 4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{k})^2 \omega^2 \quad (2.88)$$

on peut diviser le tout par k^2 et prendre la racine carrée

$$\frac{(\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{k})^2}{\mu_0 \rho} - \omega^2 = \pm \frac{2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{k})}{|k|} \omega \quad (2.89)$$

on a ici une équation quadratique en ω , les solutions sont donc

$$\omega_{MC} = \pm \frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})}{k} \pm \left(\frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} + \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{\mu_0 \rho} \right)^{1/2} \quad (2.90)$$

Lorsque les deux signes sont les mêmes, on obtient 2 ondes MC rapides, les forces de Lorentz et de Coriolis se renforçant mutuellement en se déplaçant dans la même direction. Lorsque les deux signes sont opposés, on obtient 2 ondes MC lentes, les forces de Lorentz et de Coriolis s'opposent l'une à l'autre en se déplaçant dans des directions opposées.

On peut se convaincre de cette relation de dispersion en retombant sur celles déjà connues. Dans la limite où $\boldsymbol{\Omega} \rightarrow 0$ on retrouve la relation de dispersion des ondes d'Alfvén $\omega = \pm(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})/\sqrt{\mu_0 \rho}$. Tandis que dans la limite où $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$ on retrouve la relation des ondes inertielles $\omega = \pm(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})/k$. Si on considère une rotation suffisamment rapide, la fréquence des ondes inertielles est nettement supérieure à celle des ondes d'Alfvén, on peut donc écrire

$$\frac{(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})}{k} \gg \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \quad (2.91)$$

qu'on peut réécrire comme

$$1 \gg \frac{k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 \mu_0 \rho} \quad (2.92)$$

pour procéder à une expansion de Taylor dans ω_{MC} . On obtient alors 2 comportements bien distincts pour des ondes avec une fréquence d'oscillation rapide (ω_{MC}^f) et lente (ω_{MC}^s), au premier ordre non-trivial, ces relations de dispersion se réduisent à

$$\omega_{MC}^f = \pm \frac{2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})}{k} \left(1 + \frac{k^2(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{4(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k})^2 \mu_0 \rho} \right) \quad (2.93)$$

et

$$\omega_{MC}^s = \pm \frac{k(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mu_0 \rho} \quad (2.94)$$

Pour des paramètres géophysiques plausibles [14] : $2\pi/k \sim 2,75 \times 10^6$ m, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ T²mkg⁻¹s², $B_0 \sim 5 \times 10^{-4}$ T, $\Omega \sim 7.295 \times 10^{-5}$ rad/sec, on peut tracer les relations de dispersions des ondes magnéto-Coriolis

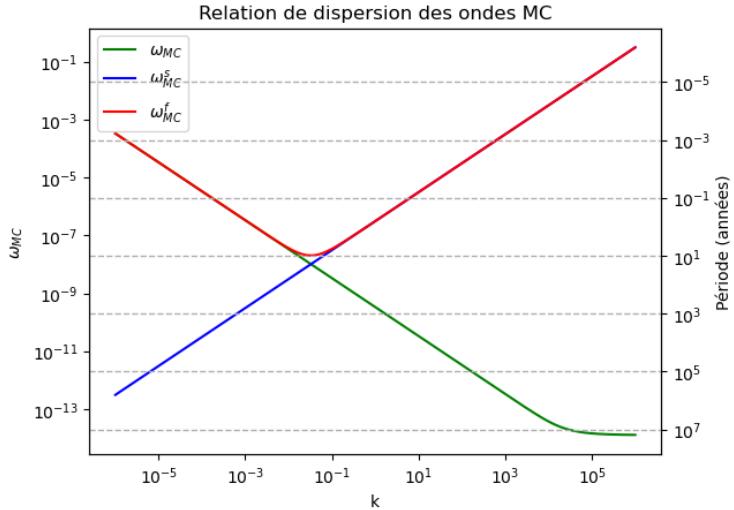


FIGURE 2.3 – Relation de dispersion ondes magnéto-Coriolis, pour des paramètres géophysiques.

Grâce à cette relation de dispersion, on peut estimer les périodes de telles perturbations pour des paramètres géophysiques. Cela donne une idée des potentielles caractéristiques des ondes MC. Comme expliqué précédemment, on s'attend à ce que les ondes les moins diffuses soient celles de grandes longueurs d'onde, $k \sim 10^{-6}$. On pourrait observer des ondes MC lentes avec des périodes de l'ordre $\sim 10^6$ années et des rapides de l'ordre $\sim 10^{-3}$ années.

Chapitre 3

Décomposition toroïdale-poloïdale des ondes magnéto-Coriolis

Dans ce chapitre nous allons résoudre le problème énoncé dans l'introduction. Afin d'étudier tous les modes de vibration en m et k pour une géométrie cylindrique, il faut se munir de techniques spéciales qui permettent de résoudre un tel problème. Il faut ensuite s'assurer de maîtriser ces techniques, d'en observer les forces et les faiblesses, à travers des exemples plus simples, pour poser un œil critique sur nos futures solutions.

3.1 Décomposition toroïdale-poloïdale

En hydrodynamique et en magnétohydrodynamique, la vitesse et le champ magnétique sont sans divergence. Grâce à ces conditions, on peut construire des champs sans divergence à l'aide d'une décomposition toroïdale-poloïdale. Cette technique nous permet de calculer toutes les composantes du champ de vitesse ainsi que celles des perturbations du champ magnétique. La décomposition toroïdale-poloïdale des champs de vecteurs n'est pas seulement une façon élégante de résoudre ces équations mais elle permet surtout d'étudier tous les modes des perturbations k et m . En effet, contrairement à l'expérience de Lundquist dans laquelle il n'a étudié que les modes axisymétriques pour $m = 0$, nous pouvons étudier n'importe quel mode, que ce soit pour le problème hydrodynamique ou magnéto-Coriolis.

De manière générale, un champ solénoïdal \mathbf{F} est un champ vectoriel dont la

divergence est nulle, on peut donc le faire dériver d'un potentiel vecteur \mathbf{A} , tel que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.1)$$

En posant $\mathbf{A} \equiv T\hat{\mathbf{e}} + \nabla \times (P\hat{\mathbf{e}})$, on obtient la décomposition toroïdale (T)-poloïdale (P) d'un champ solénoïdal \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_P \quad (3.2)$$

$$= \nabla \times (T\hat{\mathbf{e}}) + \nabla \times \nabla \times (P\hat{\mathbf{e}}) \quad (3.3)$$

Dans notre cas, on choisit le vecteur unitaire dans la direction radiale, $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{s}}$. Les champs de la vitesse et de l'induction magnétique sont donc de la forme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_P \quad (3.4)$$

$$= \nabla \times (T\hat{\mathbf{s}}) + \nabla \times \nabla \times (P\hat{\mathbf{s}}) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_G + \mathbf{b}_F \quad (3.6)$$

$$= \nabla \times (G\hat{\mathbf{s}}) + \nabla \times \nabla \times (F\hat{\mathbf{s}}) \quad (3.7)$$

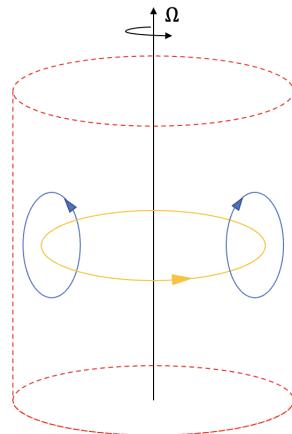


FIGURE 3.1 – Géométrie d'une décomposition toroïdale (ligne de flux jaune) - poloïdale (lignes de flux bleues) pour un champ de vecteurs en rotation.

De par la géométrie cylindrique de notre problème, on exploite la symétrie cylindrique pour décomposer les champs scalaires en modes de Fourier selon φ , il ne

restera qu'une dépendance dans la direction radiale. En nous focalisant sur les solutions ondulatoires, on peut appliquer une transformée de Fourier aux composantes toroïdales-poloïdales. La transformée de Fourier d'une fonction f intégrable sur \mathbb{R} est définie comme

$$\mathcal{F}(f) : \omega \mapsto \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.8)$$

avec t en secondes et ω la pulsation en radians par seconde. On peut appliquer la transformée de Fourier pour les composantes (φ, z, t) en gardant donc une dépendance en s . Lorsque que l'on applique la transformée de Fourier, aux champs scalaires T, P, G et F , cela réduit le problème à supposer des solutions en ondes planes de nos équations pour ces champs,

$$T(s, \varphi, z, t) = \tilde{T}(s) e^{i(kz + m\varphi + \omega t)} \quad (3.9)$$

$$P(s, \varphi, z, t) = \tilde{P}(s) e^{i(kz + m\varphi + \omega t)} \quad (3.10)$$

$$G(s, \varphi, z, t) = \tilde{G}(s) e^{i(kz + m\varphi + \omega t)} \quad (3.11)$$

$$F(s, \varphi, z, t) = \tilde{F}(s) e^{i(kz + m\varphi + \omega t)} \quad (3.12)$$

Dans la suite du document j'omets \sim pour alléger la notation. En général, lorsque l'on considère des perturbations d'un champ de vecteur \mathbf{u} de la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{u}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \lambda t)} \quad (3.13)$$

$\lambda = \omega + i\sigma$ est un nombre complexe. Ici, $\sigma = \text{Im}(\lambda)$ est le taux de croissance des instabilités et $\omega = \text{Re}(\lambda)$ est la fréquence. Si $\sigma > 0$, les instabilités croissent de manière exponentielle dans le temps. Tandis que pour $\sigma \leq 0$ le fluide est stable. Si $\sigma = 0$ et $\omega \neq 0$, les amplitudes des perturbations oscillent dans le temps. Dans notre cas, on ne considère que la propagation des perturbations, on a donc écrit $\lambda = \omega$. On peut calculer nos champs vectoriels à partir des expressions de T, P, G et F . Le rotationnel d'un vecteur \mathbf{A} en coordonnées cylindriques (s, φ, z) étant donné par

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{s} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_s + \left(\frac{\partial A_s}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial s} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{s} \left(\frac{\partial}{\partial s} (s A_\varphi) - \frac{\partial A_s}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z. \quad (3.14)$$

les composantes du champ de vitesse sont donc

$$v_s = \left(k^2 P(s) + \frac{m^2}{s^2} P(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.15)$$

$$v_\varphi = \left(ikT(s) + \frac{im}{s} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{im}{s^2} P(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.16)$$

$$v_z = \left(ik \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{ik}{s} P(s) - \frac{im}{s} T(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.17)$$

et de même, pour le champ magnétique induit

$$b_s = \left(k^2 F(s) + \frac{m^2}{s^2} F(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.18)$$

$$b_\varphi = \left(ikG(s) + \frac{im}{s} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{im}{s^2} F(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.19)$$

$$b_z = \left(ik \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{ik}{s} F(s) - \frac{im}{s} G(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.20)$$

3.2 Discrétisation par la méthode des différences finies

Afin de résoudre numériquement notre problème, nous utilisons la méthode des différences finies qui permet d'obtenir une approximation des équations différentielles pour des points de grille régulièrement espacés. De cette manière, nous pouvons transformer une équation différentielle en un système d'équations algébriques à résoudre numériquement. La figure 3.2 montre une fonction $y(x)$ définie sur un intervalle $[a, b]$ divisé en sous-intervalles égaux de longueur h . En général, nous utilisons les formules de différence centrées dans la méthode des différences finies, car elles offrent une meilleure précision. L'équation différentielle n'est appliquée qu'aux points de la grille, et les dérivées première et seconde sont :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \quad (3.22)$$

Ces définitions donnent l'idée générale de la méthode, il est aussi utile d'utiliser les dérivées en avant et en arrière pour les termes de bord. L'erreur due aux dérivées

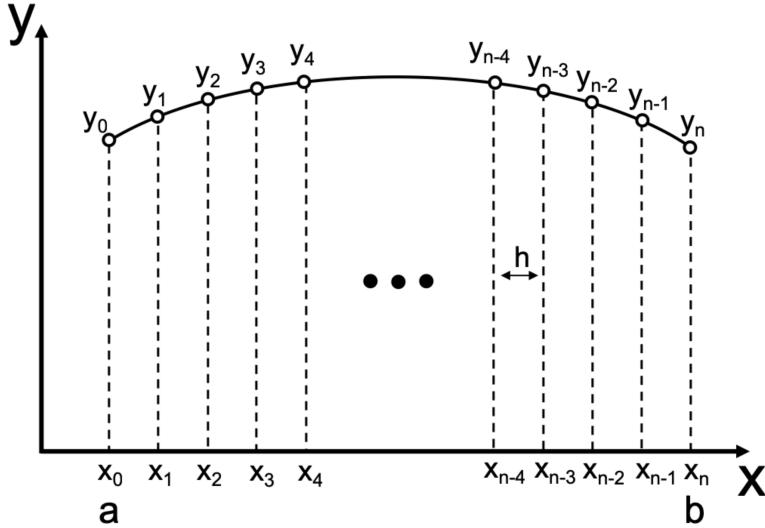


FIGURE 3.2 – Schéma des différences finies en une dimension. Source : [18]

en avant et en arrière sont d'ordre h^1 , tandis que les centrées sont d'ordre h^2 , c'est pourquoi nous les utiliserons seulement aux bords. Ces expressions nous permettent de remplacer les dérivées de $y(x)$ dans l'équation différentielle, ce qui conduit à un système de $n + 1$ équations algébriques.

Les deux sections précédentes donnent la recette à appliquer pour que l'on puisse calculer les différents modes d'oscillation. En effet, grâce à la décomposition toroïdale-poloïdale choisie, en géométrie cylindrique, les modes k et m apparaissent comme des variables que l'on peut faire varier. En discrétilisant ensuite les dérivées dans la direction radiale, on se retrouve avec des équations solvables numériquement. Commençons par nous essayer sur les différences finies.

3.2.1 Equation de Helmholtz

Avant d'entamer la résolution du problème hydrodynamique, considérons un problème de champ magnétique sans force (force-free magnetic field), il trouve son origine en astrophysique. Par exemple, le champ magnétique dans la couronne solaire est souvent considéré comme un champ sans force [30]. Dans un plasma où le flux de vitesse est beaucoup plus petit que le son isotherme et les vitesses d'Alfvén, l'équation du mouvement du plasma se réduit à celle de la magnétohydrostatique. Lorsque, en outre, les forces gravitationnelles et hydrodynamiques sont négligeables par rapport aux contraintes magnétiques locales, la relation d'équilibre des forces

de la magnétohydrostatique devient l'équation du champ sans force. L'étude de ce problème est une justification physique qui mène à la résolution de l'équation d'Helmholtz suivant le développement suivant. Un tel système physique se résume à résoudre la force de Lorentz qui s'annule

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (3.23)$$

avec la condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Comme $\mathbf{j} = 1/\mu_0 \nabla \times \mathbf{B}$, on a

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0 \quad (3.24)$$

Si la densité de courant est non-nulle, cela veut dire que \mathbf{j} doit être parallèle à \mathbf{B} , on peut exprimer cela comme $\mu_0 \mathbf{j} = \alpha \mathbf{B}$, ce qui donne

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \quad (3.25)$$

ou α est une fonction scalaire connue sous le nom de *force free parameter*, on considère que α n'est pas une fonction de la position mais est bien constant, le champ est alors appelé *linear force-free field*. En prenant le rotationnel de l'équation (3.25) et avec la condition de divergence nulle du champ magnétique, on obtient

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\alpha^2 \mathbf{B} \quad (3.26)$$

l'*équation de Helmholtz*. Dans la chromosphère supérieure et la couronne inférieure du Soleil, on peut approximer le champ magnétique comme étant sans force [2]. Nous voilà avec une situation physique intéressante qui nous permet de tester la méthode des différences finies afin de réduire cette équation en un problème algébrique, qui est aussi un problème aux valeurs propres généralisé.

1 Dimension cartésienne

De manière générale, considérons $f(\mathbf{r})$ une fonction, pour $\mathbf{r} = (x, y, z)$ qui ne dépend que de x . En une dimension cartésienne on a

$$\frac{d}{dx} f(x) = -k^2 f(x) \quad (3.27)$$

La solution générale est donnée par

$$f(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad (3.28)$$

Pour $x \in [0, L]$, on impose les mêmes conditions aux bords : $\frac{df(x)}{dx} = 0$ en $x = 0$ et $x = L$. Pour la première C.B, on a $B = 0$. Pour la deuxième C.B, pour toute amplitude A , on a :

$$0 = -kA \sin(kL) \quad (3.29)$$

Donc $k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, avec $n \in \mathbb{Z}$. La solution est donnée par

$$f(x) = A \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (3.30)$$

Pour la résolution numérique, on réécrit l'équation en la discrétilisant grâce aux différences finies,

$$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} = -k^2 f_i \quad (3.31)$$

avec $f = [f_0, f_1, \dots, f_n]$ pour $i = 0, \dots, n$. On peut imposer des conditions aux bords de type Neumann illustrées à la première/dernière ligne par une dérivée en avant/arrière qui s'annulent aux bords. On a donc le système

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -h & h & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -h & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = -k^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

On voit dans la figure 3.3 que la solution numérique est cohérente avec la solution analytique. En effet, le comportement des vecteurs propres numériques est équivalent car un multiple d'un vecteur propre est encore un vecteur propre.

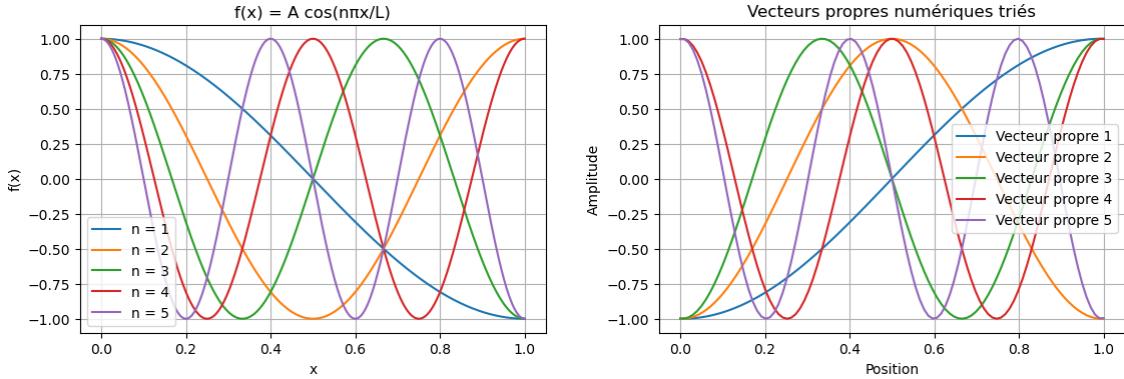


FIGURE 3.3 – Comparaison des solutions (vecteurs propres) analytiques (à gauche) et numériques (à droite) de l'équation de Helmholtz en 1 dimension cartésienne.

2 Dimensions cylindriques : On peut complexifier un peu et se rapprocher de notre problème en regardant l'équation de Helmholtz en coordonnées cylindriques (s, φ, z) , on a

$$\frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = -k^2 f \quad (3.33)$$

on utilise la séparation des variables,

$$f(s, \varphi) := S(s)\Phi(\varphi) \quad (3.34)$$

en substituant,

$$\frac{s^2}{S(s)} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + k^2 S \right] = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = m^2 \quad (3.35)$$

on peut alors exprimer $\Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$. On obtient aussi l'expression suivante

$$s^2 \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + s \frac{\partial S}{\partial s} - (m^2 - k^2 s^2)S = 0 \quad (3.36)$$

En faisant le changement de variable $\tilde{s} := ks$ et en écrivant $\tilde{S}(\tilde{s}) := S(\tilde{s}/k) = S(s)$, cela peut être réécrit comme

$$\tilde{s}^2 \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{s}^2} + s \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{s}} - (m^2 - \tilde{s})\tilde{S} = 0 , \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.37)$$

qui est l'équation des fonctions de Bessel. La solution analytique est donnée par une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première et deuxième espèce d'ordre

m

$$S(s) = A.J_m(ks) + B.Y_m(ks) \quad (3.38)$$

Ici, nous ne considérons que la solution régulière sur $s \in [0, a]$ où a est le rayon du cylindre. La solution radiale est donc

$$S(s) = A.J_m(ks) \quad (3.39)$$

Pour la solution numérique, on réécrit à nouveau l'équation en la discrétilisant grâce aux différences finies, ce qui donne

$$\frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -s_1 & 0 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & -s_{n-1} & 0 & s_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1^2 & -2s_1^2 & s_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & s_{n-1}^2 & -2s_{n-1}^2 & s_{n-1}^2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$-m^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = -k^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & s_{n-1}^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

On peut comparer les solutions analytiques et numériques dans le tableau 3.4. En prenant une discrétilisation de 1000 points, on voit que les valeurs propres sont égales à 0,01% près. Cet écart peut être réduit en augmentant le nombre de points mais cela a des limites. Afin d'améliorer la convergence des solutions numériques, les conditions aux bords ont été séparées en 2 cas distincts : m pair ou m impair, cela a permis de réduire l'écart aux solutions analytiques. Par simplicité, nous continuerons avec les différences dans les prochaines résolutions numériques.

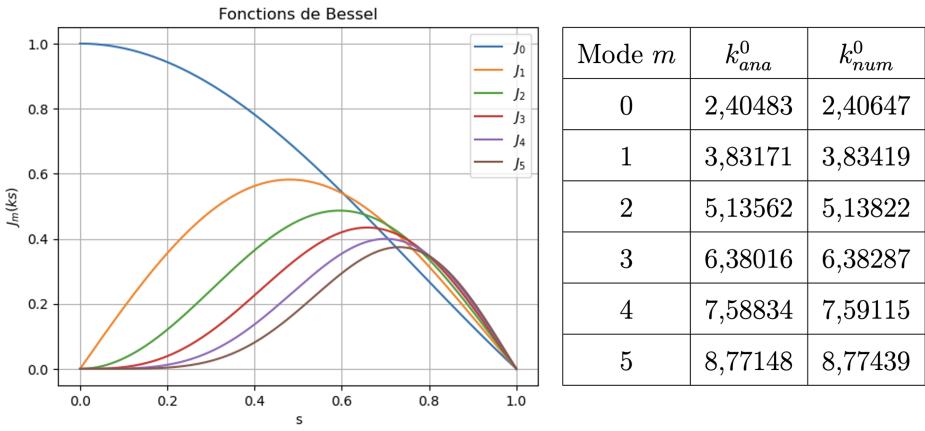


FIGURE 3.4 – Solution analytique de l'équation de Helmholtz cylindrique (à gauche) et comparaison des valeurs propres analytiques et numériques (à droite).

3.3 Formulation du problème

Grâce aux chapitres théoriques et aux sections précédentes, une formulation explicite de la question de recherche peut être donnée. Soit, un cylindre infiniment long en rotation constante, composé d'un fluide conducteur, imprégné d'un champ magnétique homogène et plongé dans un champ magnétique extérieur ; trouvons tous les modes d'oscillation pour les nombres d'onde k et m à partir d'une décomposition toroïdale-poloïdale. Une fois les méthodes mathématiques de décomposition et discréétisation développées, ce problème peut être résolu numériquement. L'étude est divisée en 2 parties : Hydrodynamique et Magnétohydrodynamique

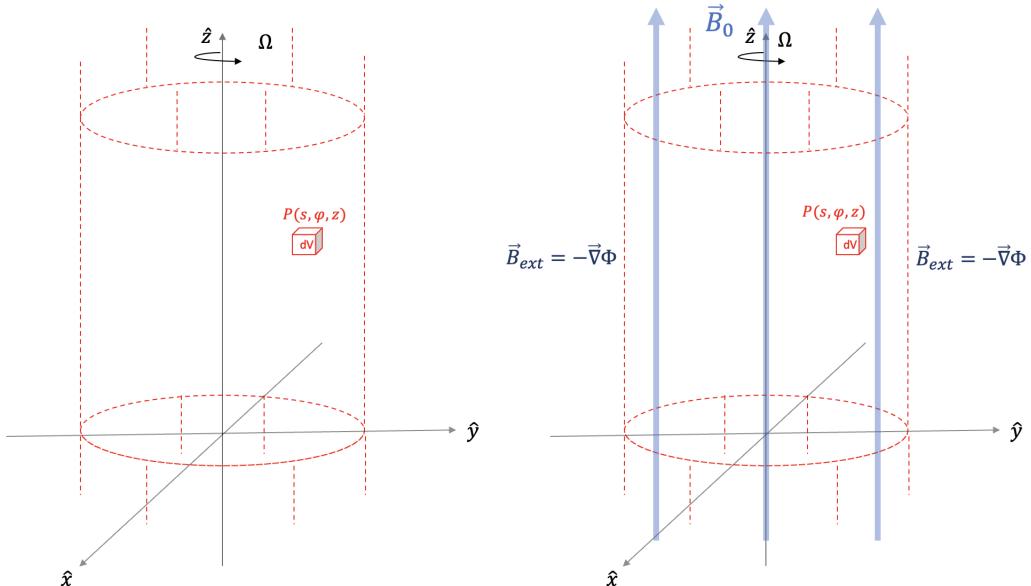


FIGURE 3.5 – Schéma des 2 études : Hydro (à gauche) et MHD (à droite)

3.3.1 Hydrodynamique

On commence par se familiariser avec le problème en regardant uniquement la dynamique des fluides. Contrairement à l'expérience de Lundquist, les perturbations peuvent se propager dans toutes les directions et le fluide est en constante rotation. Dans le cas purement hydrodynamique, nous ne devons considérer que l'équation d'Euler linéaire

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \pi \quad (3.41)$$

avec la condition,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.42)$$

En injectant \mathbf{v} qu'on a calculé comme

$$v_s = \left(k^2 P(s) + \frac{m^2}{s^2} P(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.43)$$

$$v_\varphi = \left(ikT(s) + \frac{im}{s} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{im}{s^2} P(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.44)$$

$$v_z = \left(ik \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{ik}{s} P(s) - \frac{im}{s} T(s) \right) e^{i(kz+m\varphi+\omega t)} \quad (3.45)$$

cela donne l'équation vectorielle (3.41) en composantes

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} k^2 P(s) + \frac{m^2}{s^2} P(s) \\ ikT(s) + \frac{im}{s} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{im}{s^2} P(s) \\ ik \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{ik}{s} P(s) - \frac{im}{s} T(s) \end{pmatrix} + 2\Omega \begin{pmatrix} ikT(s) + \frac{im}{s} \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{im}{s^2} P(s) \\ k^2 P(s) + \frac{m^2}{s^2} P(s) \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial s} \\ \frac{1}{s} \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Pour connaitre le champ \mathbf{v} , on doit connaitre P et T . Afin de trouver les fonctions de ces champs scalaires, on doit se retrouver avec 2 équations à 2 inconnues en $T(s)$ et $P(s)$. Pour obtenir un tel système, on calcule

$$\nabla \times (3.45)|_{\hat{s}} \text{ et } \nabla \times (\nabla \times (3.45))|_{\hat{s}} \quad (3.47)$$

En regardant la composante radiale, on se retrouve avec le système suivant

$$\begin{cases} -\omega(2ikmP(s) + (-ik^2s^2 - im^2)T(s)) + 2(i\Omega k^3s^2 + i\Omega km^2)P(s) = 0 \\ \omega(-2ikms^2T(s) + (ik^4s^4 + 2ik^2m^2s^2 + ik^2s^2 + im^4 - im^2)P(s)) + \\ \omega\left((-ik^2s^3 + im^2s)\frac{\partial P(s)}{\partial s} + (-ik^2s^4 - im^2s^2)\frac{\partial^2 P(s)}{\partial s^2}\right) + \\ 4i\Omega k^2ms^2P(s) + (-2i\Omega k^3s^4 - 2i\Omega km^2s^2)T(s) = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Afin de résoudre ces équations dans notre géométrie, on se doit prendre en considération les conditions aux bords. Étant donné que l'on considère un cylindre infiniment long, on ne doit pas se soucier de conditions à la base ou au sommet du cylindre. Le long du cylindre, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_s = 0$. Pour un rayon $a = 1$, la condition se traduit par

$$\left(k^2 + \frac{m^2}{s^2}\right)|_{s=1} P(s=1)e^{i(m\phi+kz+\omega t)} = 0 \rightarrow P(s=1) = 0 \quad (3.49)$$

La composante poloïdale du champ doit être nulle le long du cylindre.

Axisymétrie

A partir du système (3.48), on peut isoler P par rapport à T , ce qui donne la relation

$$T = \frac{2k}{\omega} \frac{\frac{\omega m}{s^2} + \Omega\left(\frac{m^2}{s} + k^2\right)}{\frac{m^2}{s^2} + k^2} P \quad (3.50)$$

qu'on peut remplacer dans la deuxième équation du système, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{k}{s^2(k^2s^2 + m^2)} & \left[-m^4(m^2 - 1)\omega^2 - k^6m^6(\omega^2 - 4\Omega^2) - k^4s^4((1 + 3m^2)\omega^2 - 4m\omega\Omega \right. \\ & \left. - 8m^2\Omega^2) + k^2s^2m^2((4 - 3m^2)\omega^2 + 4m\omega\Omega + 4m^2\Omega^2)P(s) \right. \\ & \left. + s(k^2s^2 + m^2)\omega^2\left((k^2s^2 - m^2)\frac{\partial P(s)}{\partial s} + s(k^2s^2 + m^2)\frac{\partial^2 P(s)}{\partial s^2}\right)\right] = 0 \quad (3.51) \end{aligned}$$

Si on pose les mêmes restrictions que dans l'expérience de Lundquist, c'est-à-dire que le problème est axisymétrique $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$ qui se traduit par $m = 0$, on obtient une équation beaucoup plus simple, donnée par l'équation différentielle de Bessel

légèrement modifiée

$$\left(k^2 \left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1 \right) - \frac{1}{s^2} \right) P(s) + \frac{1}{s} \frac{\partial P(s)}{\partial s} + \frac{\partial^2 P(s)}{\partial s^2} = 0 \quad (3.52)$$

La solution de cette équation différentielle est donnée par une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de 1^{ere} et 2^{eme} espèce

$$P(s) = c_1 J_1 \left(iks \sqrt{\frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{\omega^2}} \right) + c_2 Y_1 \left(-iks \sqrt{\frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{\omega^2}} \right) \quad (3.53)$$

Pour $m = 0$, $P(s) = \frac{2k\Omega}{\omega^2} T(s)$:

$$T(s) = \frac{\omega^2}{2k\Omega} c_1 J_1 \left(iks \sqrt{\frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{\omega^2}} \right) + \frac{\omega^2}{2k\Omega} c_2 Y_1 \left(-iks \sqrt{\frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{\omega^2}} \right) \quad (3.54)$$

Ces solutions illustrent bien le fait d'une perturbation axisymétrique en géométrie cylindrique.

Afin de résoudre le système d'équations différentielles (3.48), on met en évidence les termes dépendants ou non de ω . On se retrouve alors avec un système que l'on peut écrire comme un problème aux valeurs propres généralisé.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2\Omega ikm^2 1/s + ik^3 \\ 2\Omega k^2 & \frac{2\Omega km}{s} \partial_s - \frac{2\Omega km}{s^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} T(s) \\ P(s) \end{bmatrix} = \omega \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{im^2}{s^2} + ik^2 & \frac{-2i}{s^2} \\ \frac{-m}{s^2} + \frac{m}{s} \partial_s & \frac{km^2}{s} + k^3 + \frac{k}{s^2} - \frac{k}{s} \partial_s + k \partial_s^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} T(s) \\ P(s) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

on a bien un système de la forme

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \quad (3.56)$$

où ω vérifie de manière générale

$$\text{Det} (\mathbf{A} - \omega \mathbf{B}) = 0 \quad (3.57)$$

Grâce à la réduction en un problème aux valeurs propres, il suffit de résoudre ce système pour obtenir les valeurs propres étant les fréquences propres d'oscillation avec les vecteurs propres correspondants. Ces valeurs nous donnent les modes propres d'oscillation des ondes inertielles dans un cylindre infiniment long. Une fois que les opérateurs différentiels sont discrétisés par la méthode des différences finies, ils se transforment en opérateur algébrique, de cette façon on pourra résoudre le problème numériquement. Commençons par discrétiser $s \in [0, a]$, où a est le rayon du cylindre en n intervalles égaux de longueur h .

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \quad (3.58)$$

Les champs $T(s)$ et $P(s)$ peuvent être écrits comme

$$T = (T_0, T_1, \dots, T_{n-1}) \quad (3.59)$$

$$P = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) \quad (3.60)$$

Chaque membre du système est multiplié par s^2 pour éviter les divisions par zéro lorsqu'on intégrera sur toutes les valeurs de s . Ayant discrétisé notre système, chaque membre des équations devient une matrice de taille $n \times n$ agissant sur les vecteurs T et P . On peut réécrire notre problème proprement,

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T \\ P \end{array} \right] = \omega \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} T \\ P \end{array} \right] \quad (3.61)$$

Le système (3.61) est résolu dans le langage de programmation *python* avec le package *scipy* en utilisant les solveurs de problèmes aux valeurs propres généralisés *linalg*. En fonction des paramètres imposés Ω , k et m , on sélectionne la valeur propre dominante qui nous donne une valeur pour ω . Les vecteurs propres, eux, sont donnés en un seul bloc pour T et P à la fois, on sépare donc les champs toroïdaux et poloïdaux.

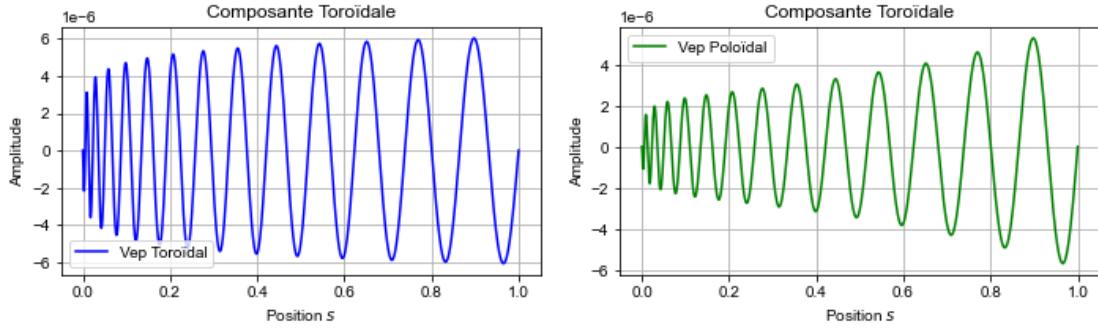


FIGURE 3.6 – Vecteur propre toroïdal (gauche) et poloïdal (droite) pour $k = 1$, $m = 1$.

Les composantes du champ de vitesse (v_s, v_φ, v_z) peuvent être reconstruites grâce aux équations (3.15-3.17) que l'on implémente numériquement aussi. On peut observer le comportement oscillatoire des amplitudes des composantes du champ de vitesse pour $s \in [0, 1]$. Cependant, lorsque l'on calcule les composantes du champ de vitesse, des divisions par s apparaissent, faisant ainsi diverger les amplitudes de \mathbf{v} pour les premières itérations de s_i . On peut donc observer les composantes ($v_s s^2, v_\varphi s^2, v_z s^2$), à la figure 3.7, qui illustrent tout de même les comportements de ces oscillations bien que les valeurs des amplitudes ne sont pas parfaitement relevantes.

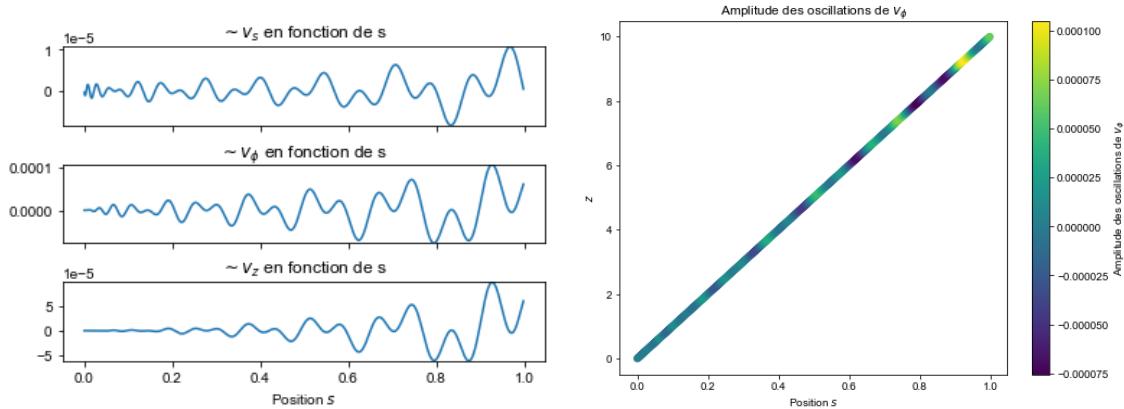


FIGURE 3.7 – Composantes du champ de vitesse dans la direction \mathbf{s} (à gauche). Évolution de v_φ en fonction de s et z (à droite), pour $k = 1$, $m = 1$.

Il n'est pas vraiment pertinent de faire varier la valeur de la rotation globale Ω étant donné que les valeurs propres associées sont simplement proportionnelles à sa valeur, on fixe donc $\Omega = 1[\text{rad/sec}]$ pour l'ensemble de nos simulations. Dans la suite, nous allons regarder des comportements pour 2 autres cas : $k > m$ et $k < m$.

$k = 2$ et $m = 1$:

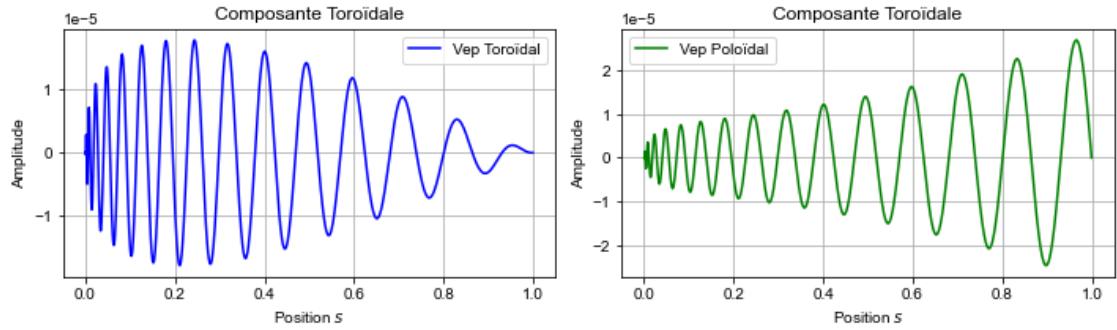


FIGURE 3.8 – Vecteur propre toroïdal (gauche) et poloïdal (droite) pour $k = 2$, $m = 1$.

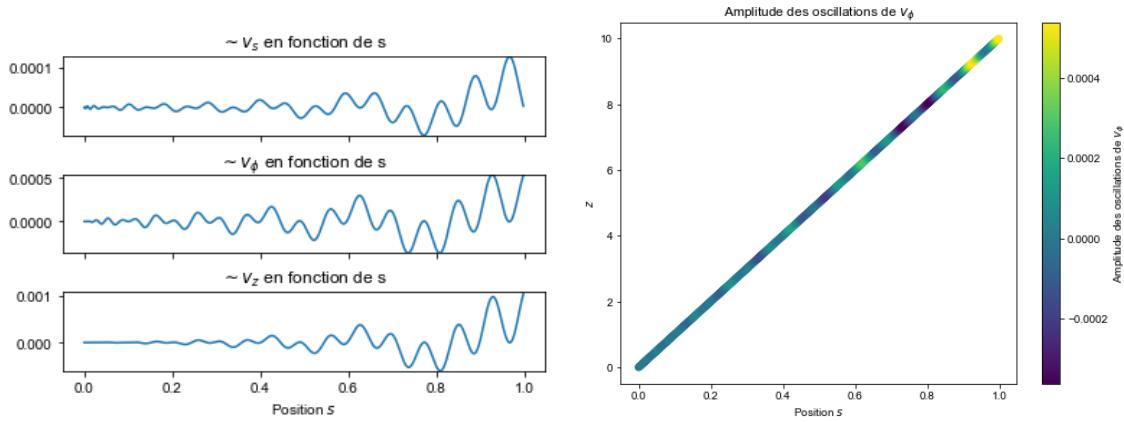


FIGURE 3.9 – Composantes du champ de vitesse dans la direction s (à gauche). Évolution de v_ϕ en fonction de s et z (à droite), pour $k = 2$, $m = 1$.

$k = 1$ et $m = 2$:

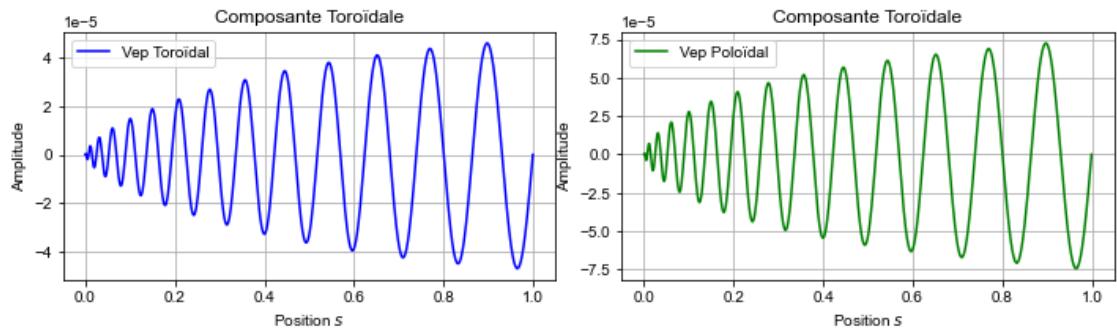


FIGURE 3.10 – Vecteur propre toroïdal (gauche) et poloïdal (droite) pour $k = 1$, $m = 2$.

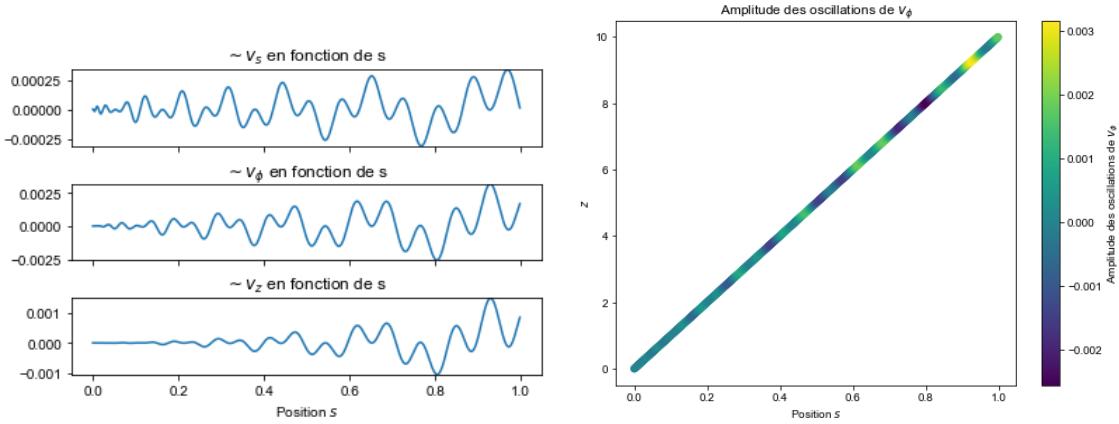


FIGURE 3.11 – Composantes du champ de vitesse dans la direction s (à gauche). Évolution de v_φ en fonction de s et z (à droite), pour $k = 1$, $m = 2$.

Les différentes simulations nous donnent des résultats qui, malheureusement, ne convergent pas assez vite dans tous les cas. En effet, pour le cas $k = 2$ et $m = 1$, le solveur donne la valeur propre fondamentale $\omega = 1.963855$ (pour $n = 1000$ points) ce qui correspond exactement à la valeur propre dominante calculée analytiquement, figure (1.4). Cependant, pour les 2 autres cas, les valeurs propres calculées sont différentes de celles attendues. Cela est du à la lente convergence algébrique des différences finies et au fait qu'il n'y ait pas de condition aux bords pour la base et le sommet du cylindre. En imposant des valeurs limites, cela aiderait le solveur à converger plus vite et donc renvoyer les valeurs propres attendues.

Bien que les valeurs propres calculées ne soient pas forcément toutes correctes, on peut tout de même légèrement discuter les graphes. On obtient des comportements différents pour les vecteurs propres toroïdaux-poloïdaux mais les conditions aux bords sont toutes bien respectées : les champs scalaires à l'origine et au bord du cylindre valent zéro. Les oscillations du champ de vitesse s'illustrent bien dans les 3 directions, ce qui démontre bien la non-axisymétrie de notre étude. Lorsque les valeurs de k ou m varient, on regarde différents modes d'oscillation plus ou moins rapide dans la direction longitudinale pour k et azimuthal pour m . La modulation de ces valeurs permet de définir les caractéristiques de propagation de l'onde en géométrie cylindrique, influençant la longueur d'onde, la fréquence, les modes de résonance et les propriétés de dispersion de l'onde.

3.3.2 Magnétohydrodynamique

On prend maintenant en compte le champ magnétique, ce qui revient à résoudre les ondes magnéto-Coriolis en appliquant la décomposition toroïdale-poloïdale. Réécrivons les équations qui décrivent ce système

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\Omega \times \mathbf{v} = -\nabla\pi + \frac{1}{\mu_0\rho}(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{b} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (3.63)$$

avec les conditions

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 ; \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.64)$$

Afin d'obtenir un système complet qu'on peut résoudre de la même manière que la version purement hydrodynamique, on applique à nouveau aux champs de vecteurs la décomposition toroïdale-poloïdale. On peut alors réécrire les équations vectorielles de la quantité de mouvement en composantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} k^2P(s) + \frac{m^2}{s^2}P(s) \\ ikT(s) + \frac{im}{s}\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{im}{s^2}P(s) \\ ik\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{ik}{s}P(s) - \frac{im}{s}T(s) \end{pmatrix} + 2\Omega \begin{pmatrix} ikT(s) + \frac{im}{s}\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{im}{s^2}P(s) \\ k^2P(s) + \frac{m^2}{s^2}P(s) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ - \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi}{\partial s} \\ \frac{1}{s}\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \pi}{\partial z} \end{pmatrix} + \frac{B_0}{\mu_0\rho} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} k^2F(s) + \frac{m^2}{s^2}F(s) \\ ikG(s) + \frac{im}{s}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{im}{s^2}F(s) \\ ik\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{ik}{s}F(s) - \frac{im}{s}G(s) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

et pour l'équation d'induction

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} k^2F(s) + \frac{m^2}{s^2}F(s) \\ ikG(s) + \frac{im}{s}\frac{\partial F}{\partial s} - \frac{im}{s^2}F(s) \\ ik\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{ik}{s}F(s) - \frac{im}{s}G(s) \end{pmatrix} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} k^2P(s) + \frac{m^2}{s^2}P(s) \\ ikT(s) + \frac{im}{s}\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{im}{s^2}P(s) \\ ik\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{ik}{s}P(s) - \frac{im}{s}T(s) \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

Pour obtenir un système de 4 équations à 4 inconnues en $T(s)$, $P(s)$, $G(s)$ et $F(s)$ on prend

$$\nabla \times (3.65)|_{\hat{s}} \text{ et } \nabla \times (\nabla \times (3.65))|_{\hat{s}} \quad (3.67)$$

et

$$(3.66)|_{\hat{s}} \text{ et } \nabla \times (3.66)|_{\hat{s}} \quad (3.68)$$

On peut se demander ici pourquoi il faut prendre au moins une fois un rotationnel pour l'équation d'Euler et pas spécialement pour l'induction. C'est simplement que nous voulons éliminer le gradient de pression qui n'apparaît pas dans l'équation d'équation. Pour les équations du mouvement, on obtient

$$(-2ikm\mu P(s) + (ik^2\mu s^2 + im^2\mu)T(s))\omega + (2iB_0k^2m\rho F(s) + (-iB_0k^3\rho s^2 - iB_0km^2\rho)G(s) - 2(ik^3\mu s^2 + ikm^2\mu)P(s)) = 0 \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} & -\omega(2ikm\mu s^2 T(s) + (-ik^4\mu s^4 + (-2ik^2m^2 - ik^2)\mu s^2 + (-im^4 + im^2)\mu) P(s) + \\ & \quad (ik^2\mu s^3 - im^2\mu s) \frac{d(P)}{ds} + (ik^2\mu s^4 + im^2\mu s^2) \frac{d^2(P)}{ds^2}) \\ & - 2iB_0k^2m\rho s^2 G(s) - 4ik^2m\mu s^2 P(s) + (iB_0k^5\rho s^4 + (2iB_0k^3m^2 + iB_0k^3)\rho s^2 + \\ & \quad (iB_0km^4 - iB_0km^2)\rho) F(s) - 2(-ik^3\mu s^4 - ikm^2\mu s^2) T(s) \\ & + (-iB_0k^3\rho s^3 + iB_0km^2\rho s) \frac{d(F)}{ds} + (-iB_0k^3\rho s^4 - iB_0km^2\rho s^2) \frac{d^2(F)}{ds^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

et les équations de l'induction donnent

$$(ik^2s^2 + im^2)\omega F(s) + (-iB_0k^3s^2 - iB_0km^2)P(s) = 0 \quad (3.71)$$

$$(2ikmF(s) + (-ik^2s^2 - im^2)G(s))\omega - 2iB_0k^2mP(s) + (iB_0k^3s^2 + iB_0km^2)T(s) = 0 \quad (3.72)$$

On peut aussi réécrire le système sous forme matricielle

$$\left[\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ \hline A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ \hline A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline P \\ \hline G \\ \hline F \\ \hline \end{array} \right] = \omega \left[\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ \hline B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ \hline B_9 & B_{10} & B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline P \\ \hline G \\ \hline F \\ \hline \end{array} \right] \quad (3.73)$$

Ici, les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont composées de 16 blocs de matrices de taille $n \times n$. Cela ne change en rien la méthode de résolution bien que les temps de calcul augmentent considérablement. Comme pour le cas hydrodynamique, nous devons faire attention à la condition au bord du cylindre en $s = a$. Un tube de flux magnétique est entouré d'un champ magnétique extérieur \mathbf{B}_{ext} , on peut supposer que celui-ci peut être dérivé d'un potentiel de la même forme que les champ toroïdaux-poloïdaux. C'est à dire qu'on a

$$\mathbf{B}_{ext} = -\nabla\Phi \text{ où } \Phi = \tilde{\Phi}(s)e^{i(m\varphi+kz+\omega t)} \quad (3.74)$$

Où $\tilde{\Phi}$ est à nouveau l'amplitude de Fourier. Comme $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, nous pouvons résoudre

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (3.75)$$

ce qui nous donnera la forme du potentiel. En coordonnées cylindriques, l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.76)$$

Sans surprise, nous résolvons à nouveau l'équation de Bessel. Cette fois, nous avons besoin que le champ magnétique extérieur soit régulier pour $s \in [a, \infty]$. Les solutions que nous sélectionnons sont alors les fonctions de Bessel de deuxième espèce

$$\tilde{\Phi}(s) = C_1 Y_m(-iks) \quad (3.77)$$

tel que

$$\Phi = C_1 Y_m(-iks)e^{i(m\varphi+kz+\omega t)} \quad (3.78)$$

J'omettrai également le $\tilde{\ }$ pour alléger l'écriture. Maintenant que nous connaissons Φ , nous devons nous assurer qu'à la frontière, les perturbations du champ magnétique

\mathbf{b} sont continues avec le champ magnétique extérieur, tel que

$$\mathbf{b}|_{s=1} = -\nabla\Phi|_{s=1} \quad (3.79)$$

Je ne préciserai pas la condition $s = 1$ dans les équations suivantes pour alléger l'écriture. On peut écrire la condition pour chaque composante de \mathbf{b} et $-\nabla\Phi$

$$\hat{s} : (k^2 + m^2) F = -C_1 \frac{\partial}{\partial s} (Y_m(-iks)) \quad (3.80)$$

$$\hat{\varphi} : \left(ikG + im \frac{\partial F}{\partial s} - imF \right) = -imC_1 Y_m(-iks) \quad (3.81)$$

$$\hat{z} : \left(ik \frac{\partial F}{\partial s} + ikF - imG \right) = -ikC_1 Y_m(-iks) \quad (3.82)$$

Dans la suite, nous aurons besoin de calculer les dérivées de Y_m . Grâce aux propriétés des fonctions de Bessel et aux relations de récurrence, on peut calculer que

$$\frac{\partial}{\partial s} (Y_m(-iks)) = -\frac{ik}{2} (Y_{m-1}(-iks) - Y_{m+1}(-iks)) \quad (3.83)$$

et donc

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} (Y_m(-iks)) = -\frac{k^2}{4} (Y_{m-2}(-iks) - 2Y_m(-iks) + Y_{m+2}(-iks)) \quad (3.84)$$

En résolvant ce système, on peut calculer les valeurs de C_1 pour différents nombres d'onde k et m . On connaît donc les valeurs que doivent prendre les champs G et F en $s = 1$. On implémente donc ces valeurs aux bords dans les blocs de matrices correspondants.

En suivant les différentes étapes de cette section, comme pour le cas hydrodynamique, on obtient les solutions numériques pour la valeur propre, les vecteurs propres, les perturbations du champ de vitesse et les perturbations du champ magnétique. Malheureusement, en raison de la faible précision des différences finies et de la lenteur du langage python, les solutions pour la valeur propre ne convergent pas, on ne peut donc pas poursuivre les analyses.

Chapitre 4

Perspectives et conclusion

4.1 Cylindre fini et topographie initiale

Dans un premier temps, il serait intéressant d'imposer des conditions aux bordx, à la base et au sommet du cylindre afin de s'assurer que les solutions du solveur hydro sont en accord avec les solutions analytiques calculées par la méthode dite de Poincaré. Si c'est bien le cas, on peut clairement imaginer que les résultats d'un tel solveur pour les ondes magnéto-Coriolis seraient corrects et on aurait alors un outil qui permet tous les modes de vibration des ondes MC pour une géométrie cylindrique.

Topographie initiale

Lundquist a étudié les modes propres de vibration $m = 0$, pour une surface plane à la base du cylindre. Or, dans un cadre géophysique, pour le noyau externe de la Terre, c'est la surface de la graine solide de la Terre, qui, en vibrant, provoque la perturbation initiale. Bien que l'on continue de négliger divers phénomènes se produisant au centre de la Terre, il serait très intéressant d'imposer une topographie initiale à la base de notre cylindre. Cette topographie rendrait compte des irrégularités à la surface de la graine solide qui sont représentées par une fonction bosselée.

$$z(s, \varphi) = g(\varphi).f(s) \quad (4.1)$$

Avec

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \quad (4.2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\varphi} \quad \text{avec } C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

Pour la fonction radiale, on peut prendre n'importe quelle fonction définie sur l'intervalle du rayon du cylindre, par exemple $f(s) = \cos(2s) + \sin(3s)$. Notre topographie sera donnée par :

$$z(s, \varphi) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\varphi} \right) f(s) \quad (4.5)$$

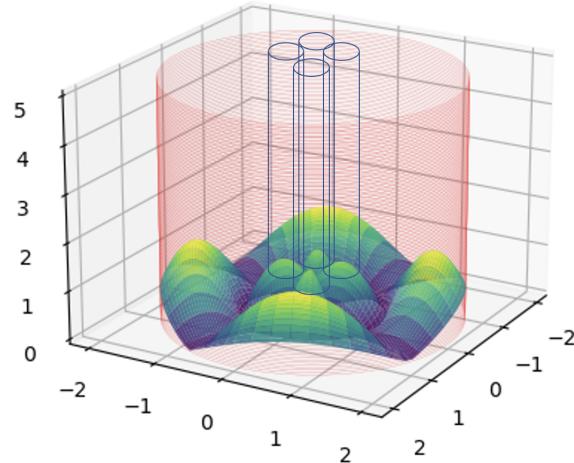


FIGURE 4.1 – Topographie à la base d'un cylindre pour $f(s) = \cos(2s) + \sin(3s)$ avec des schémas de colonnes de Taylor.

Etant donné que les conditions aux bords sont $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ à la paroi, à la base et au sommet du cylindre, nous devons connaître le vecteur normal unitaire de la surface initiale. Le gradient d'une fonction renvoie le vecteur orthogonal aux courbes de niveau. On prend donc

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla z(s, \varphi)}{\|\nabla z(s, \varphi)\|} \quad (4.6)$$

De cette façon, on peut s'imaginer que les différentes bosses formées par la topographie implémentée par la fonction $z(s, \varphi)$ agiront comme des obstacles à la base du cylindre tangent, formant des colonnes de Taylor-Proudman parallèles à l'axe de

rotation dans lesquelles se propageront les ondes inertielles induites par une perturbation de la base.

4.2 Limites des simulations

Malgré les limites de nos résolutions numériques, toute la recette qui permet de résoudre ces équations a été développée. Il suffit donc de reprendre le même raisonnement et d'utiliser une méthode spectrale pour discréteriser le problème, comme les polynômes de Chebyshev [26]. Typiquement, les points de Chebyshev sont donnés par

$$x_j = \cos(j\pi/N) \text{ où } j = 0, 1, \dots, N \quad (4.7)$$

Comme on peut lire dans la référence précédente, les erreurs d'une telle discréétisation diminuent très vite et offrent une convergence exponentielle avec le nombre de points tandis que l'on a une convergence algébrique pour les différences finies. Grâce à l'accumulation des points proches des bords, les conditions aux bords sont mieux traitées, les matrices de différenciation sont plus efficaces, le temps de calcul est moindre, etc. De manière générale, cette méthode spectrale nous aurait été grandement utile dans cette étude de dynamique des fluides et d'électromagnétisme.

Suite à ces améliorations, il serait très intéressant de réaliser une expérience similaire afin de comparer les prédictions théoriques qui seraient basées en partie sur ce travail. Une telle expérience pourrait s'apparenter à celle de Lundquist (1949) mais en ajoutant une rotation globale au réservoir.

4.3 Futur de l'outil

Grâce à la décomposition toroïdale-poloïdale et à une discréétisation, on peut rédiger un code qui résout un tel problème. Après avoir procédé aux améliorations possibles, on se retrouverait en la possession d'un outil numérique capable de calculer n'importe quel mode d'oscillation des ondes inertielles pour une géométrie cylindrique. Cela peut être très utile dans la communauté des géophysiciens et astrophysiciens car il n'existe pas de solution analytique aux calculs de ces ondes pour un phénomène MHD.

4.4 Conclusion

A travers les années, les recherches en mécanique des fluides et magnétohydrodynamique n'ont cessé d'apporter des réponses aux questions que l'on peut se poser lorsque l'on s'intéresse à la géophysique, à la physique solaire et à encore bien plus de domaines. Grâce à l'accessibilité des méthodes numériques, de nombreux problèmes sans solution analytique peuvent dorénavant être résolus. Les solutions analytiques des ondes inertielles de tout mode k et m pour un fluide en rotation uniforme dans un cylindre sont connues. L'expérience de Lundquist nous donne une solution analytique des ondes MHD dans un cylindre pour une perturbation $m = 0$ à sa base. Il est naturel de s'intéresser aux solutions lorsque l'on couple ces 2 études : l'étude de tous les modes de vibration des ondes magnéto-Coriolis en géométrie cylindrique. C'est pourquoi, dans ce mémoire, pour donner suite à ces motivations et leurs liens avec la géophysique et l'astrophysique, une méthode de calcul incluant l'algorithme numérique de la résolution est développée.

Afin de réaliser un tel projet, un socle de connaissances et de compréhension en hydrodynamique et magnétohydrodynamique est primordial. C'est donc naturellement que le chapitre 3 est précédé de deux chapitres plus théoriques qui exposent et développent des phénomènes qui doivent être redérivés et compris avant d'aborder la résolution de cette étude. Dans le chapitre 3, la marche à suivre pour résoudre cette étude est complètement développée théoriquement ; le solveur numérique développé dans le cadre de cette étude apporte certains résultats décrits dans ce mémoire. Bien que les résultats numériques ne semblent pas satisfaisants pour l'instant, la méthode et l'algorithme de résolution des ondes magnéto-Coriolis en géométrie cylindrique ont été développés. En continuant à améliorer cet outil, par optimisation de la discréétisation, on se retrouvera avec un réel calculateur utile pour des phénomènes géophysiques et astrophysiques.

Annexe A

Codes Python

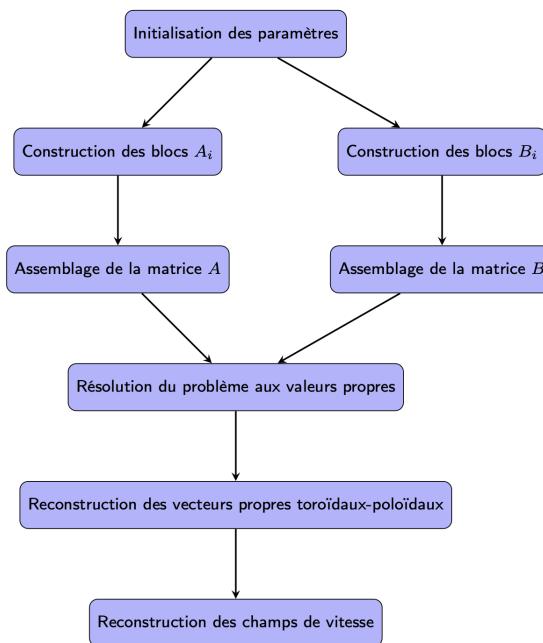
Les codes Python qui ont servi pour la résolution

- de l'équation transcendante
- de l'équation de Helmholtz cylindrique
- des ondes inertielles en décomposition Toroïdale-Poloïdale

se trouvent sur [mon compte GitHub](#).

Algorithme du solveur d'ondes inertielles

Les différentes étapes pour faire ressortir les résultats désirés sont déjà expliquées dans les sections précédentes. Ci-dessous se trouve un schéma simple qui reprend la recette de résolution et visualisation des résultats.



Bibliographie

- [1] Hannes Alfvén. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves. *Nature*, 150(3805) :405–406, 1942.
- [2] T Amari, JJ Aly, JF Luciani, TZ Boulmezaoud, and Z Mikic. Reconstructing the solar coronal magnetic field as a force-free magnetic field. *Solar physics*, 174 :129–149, 1997.
- [3] Wolfgang Baumjohann and Rudolf A Treumann. *Basic space plasma physics*. World Scientific, 2012.
- [4] Bjerknes Bjerknes and J BJERKNES. Solberg and bergeron, physikalische hydrodynamik, 1933.
- [5] Vilhelm Bjerknes and Halvor Solberg. *Zellulare Trägheitswellen und Turbulenz*. I komm. hos J. Dybwad, 1929.
- [6] Piotr Boronski and Laurette S Tuckerman. Poloidal–toroidal decomposition in a finite cylinder. i : Influence matrices for the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, 227(2) :1523–1543, 2007.
- [7] SI Braginskiy. Torsional magnetohydrodynamic vibrations in the earth’s core and variations in day length. *Geomagnetism and Aeronomy*, 10 :1, 1970.
- [8] Peter Alan Davidson. *Introduction to magnetohydrodynamics*, volume 55. Cambridge university press, 2016.
- [9] Mathieu Dumberry and Jeremy Bloxham. Torque balance, taylor’s constraint and torsional oscillations in a numerical model of the geodynamo. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 140(1-3) :29–51, 2003.
- [10] Jonathan Ferreira. Introduction aux plasmas magnétisés : Magnétohydrodynamique. Syllabus de cours, 2024.

- [11] D Fultz. A note on overstability and the elastoid-inertia oscillations of kelvin, solberg, and bjerknes. *Journal of Atmospheric Sciences*, 16(2) :199–208, 1959.
- [12] Sébastien Galtier. *Magnéto-hydrodynamique : des plasmas de laboratoire à l'astrophysique : cours & exercices corrigés : licence 3 et master physique fondamentale & écoles d'ingénieurs*. Vuibert, 2013.
- [13] Harvey Philip Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, 1969.
- [14] David Gubbins and Emilio Herrero-Bervera. *Encyclopedia of geomagnetism and paleomagnetism*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] Raymond Hide, Dale H Boggs, and Jean O Dickey. Angular momentum fluctuations within the earth's liquid core and torsional oscillations of the core–mantle system. *Geophysical Journal International*, 143(3) :777–786, 2000.
- [16] R Hollerbach, D Gubbins, D Gubbins, and E Herrero-Bervera. Inner core tangent cylinder. *Encyclopedia of geomagnetism and paleomagnetism*. Springer, Dordrecht, pages 430–433, 2007.
- [17] D Jault and G Légaut. Alfvén waves within the earth's core. *Fluid dynamics and dynamos in astrophysics and geophysics*, (2004057907) :277, 2005.
- [18] Qingkai Kong, Timmy Siauw, and Alexandre Bayen. *Python programming and numerical methods : A guide for engineers and scientists*. Academic Press, 2020.
- [19] Bo Lehnert. Magnetohydrodynamic waves under the action of the coriolis force. *Astrophysical Journal*, vol. 119, p. 647, 119 :647, 1954.
- [20] Kelvin Lord. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, 10 :155–168, 1880.
- [21] Stig Lundquist. Experimental investigations of magneto-hydrodynamic waves. *Physical Review*, 76(12) :1805, 1949.
- [22] John Marshall and R Alan Plumb. *Atmosphere, ocean and climate dynamics : an introductory text*. Academic Press, 1989.
- [23] Mathieu Ossendrijver. The solar dynamo. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 11(4) :287–367, 2003.
- [24] Eugene N Parker. Sunspots and the physics of magnetic flux tubes. i-the general nature of the sunspot. ii-aerodynamic drag. *Astrophysical Journal, Part 1*, vol. 230, June 15, 1979, p. 905-923., 230 :905–923, 1979.

- [25] Chaitanya Prasad Sishtla, Jens Pomoell, Emilia Kilpua, Simon Good, Farhad Daei, and Minna Palmroth. Flux-tube-dependent propagation of alfvén waves in the solar corona. *Astronomy & Astrophysics*, 661 :A58, 2022.
- [26] Lloyd N Trefethen. *Spectral methods in MATLAB*. SIAM, 2000.
- [27] Bruce T Tsurutani and Christian M Ho. A review of discontinuities and alfvén waves in interplanetary space : Ulysses results. *Reviews of Geophysics*, 37(4) :517–541, 1999.
- [28] T Van Doorsselaere, Valery M Nakariakov, and Erwin Verwichte. Detection of waves in the solar corona : kink or alfvén? *The Astrophysical Journal*, 676(1) :L73, 2008.
- [29] Joachim Vogt. Alfvén wave coupling in the auroral current circuit. *Surveys in Geophysics*, 23 :335–377, 2002.
- [30] Thomas Wiegmann and Takashi Sakurai. Solar force-free magnetic fields. *Living Reviews in Solar Physics*, 18(1) :1, 2021.

UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc

