

# Découverte des ondes barométriques de Rossby dans l'atmosphère libre : Approche numérique

Alexandre Nuyt

*Université Catholique de Louvain, Faculté des sciences, Ecole de physique*

---

## Ondes de Rossby

Les ondes de Rossby sont des mouvements ondulatoires de la circulation atmosphérique ou océanique de grandes longueurs d'onde qui sont dues à la variation de la force de coriolis qui dépend de la latitude. Si nous nous trouvons avec de l'air barotrope (structure verticale de l'atmosphère où les isobares et les isothermes sont parallèles), ces ondes conservent la vorticité absolue. La vorticité absolue est donnée par :

$$\eta = \zeta + f$$

où  $\zeta$  est la vorticité relative et  $f$  est le paramètre de coriolis (vorticité planétaire).

## Dérivation de l'équation

L'équation de conservation de la vorticité absolue dans le plan  $\beta$  pour un fluide barotrope de profondeur constante supposé sans divergence, est donnée par :

$$\frac{D_h(\zeta + f)}{Dt} = 0$$

Par définition de la dérivée matérielle,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta + f) + (\vec{u}_h \cdot \nabla_h)(\zeta + f) = 0$$

Nous faisons l'approximation selon laquelle on se trouve dans le plan  $\beta$  c'est à dire qu'on linéarise le paramètre de Coriolis  $f$  afin qu'il ait une dépendance linéaire en  $y$  par un facteur  $\beta$ . On peut donc réécrire  $f$ ,

$$f = 2\Omega \sin \phi \rightarrow f = f(y) = f_0 + \beta y$$

où  $\phi$  est la latitude et  $\Omega$  la vitesse angulaire de la Terre. On peut maintenant développer l'équation précédente,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u}_h \cdot \nabla_h)(\zeta) + (\vec{u}_h \cdot \nabla_h)(f) = 0$$

On utilise la définition de la vorticité relative verticale  $\zeta = \vec{k} \cdot (\nabla \wedge \vec{u})$ , avec  $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$$\zeta = (0, 0, 1) \cdot \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

La 3ème composante du produit vectoriel est  $\zeta := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ . Ensuite, on réécrit  $f$  avec l'approximation du plan  $\beta$  et on développe les produits scalaires de la vitesse du fluide  $\vec{u}_h$  avec le gradient  $\nabla_h$  en coordonnées cartésiennes,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left( u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (\zeta) - \left( u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (f_0 + \beta y)$$

Etant donné que le fluide est sans divergence, on peut faire entrer les composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  dans les dérivées, cela ne change rien. De plus,  $\partial_{x,y}(f_0) = 0$ . On arrive alors à l'équation que l'on cherchait :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -F := - \left( \frac{\partial(\zeta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta v)}{\partial y} + \beta v \right)$$

## Situation initiale

Dans cette section, nous devons donner une représentation du champ bidimensionnel  $\psi^0$ , du champ initial de la vorticité relative  $\zeta^0$  et du champ de vitesse initial  $\vec{u}^0 = (u^0, v^0)$ .

Nous pouvons dériver ces équations à partir du champ scalaire initial  $\psi(t, x, y)$ . En effet, un écoulement bidimensionnel sans divergence peut être exprimé en termes de fonction de courant :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

De plus, la composante verticale de la vorticité relative est définie comme :

$$\zeta := \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

en combinant ces équations, on arrive à l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla_h^2 \psi = \zeta$$

Nous avons comme condition initiale que le champ scalaire au temps  $t = 0$  vaut :

$$\psi^0 = \frac{g}{f_0} (100 \cdot \sin(kx) \cdot \cos(jy))$$

avec  $g$  : l'accélération de la gravité et  $f_0$  : le paramètre de Coriolis à la latitude de référence. En appliquant les équations ci-dessus, nous trouvons :

$$\psi^0 = \frac{g}{f_0} (100 \cdot \sin(kx) \cdot \cos(jy))$$

$$\zeta^0 = -\frac{100g}{f_0} (k^2 + j^2) \sin(kx) \cdot \cos(jy)$$

$$\vec{u}^0 = (u^0, v^0) = \left( \frac{100g}{f_0} j \sin(kx) \cdot \sin(jy), \frac{100g}{f_0} k \cos(kx) \cdot \sin(jy) \right)$$

En regardant les figures ci-dessous, nous apercevons des oscillations périodiques. Nous remarquons clairement les oscillations des extremums de la fonction de courant et de la vorticité relative ; il est facile de repérer aussi les tourbillons formés par le champ de vitesse initial.

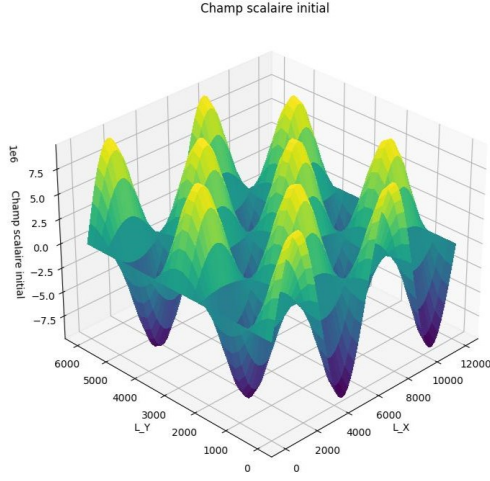


Figure 1: représentation 3D du champ scalaire initial  $\psi^0$  (l'axe vertical représente l'amplitude du champ scalaire initial)

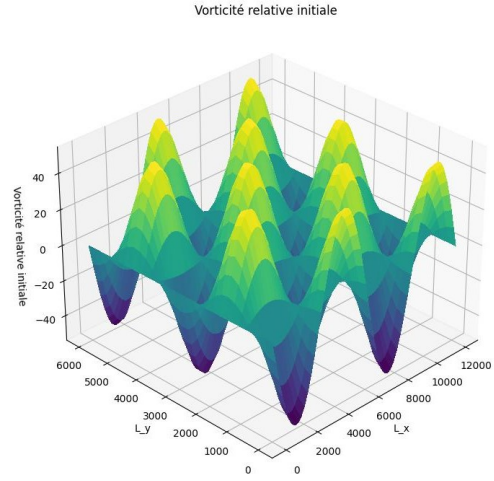


Figure 2: représentation 3D de la vorticité initiale  $\zeta^0$  (l'axe vertical représente l'amplitude la vorticité relative)

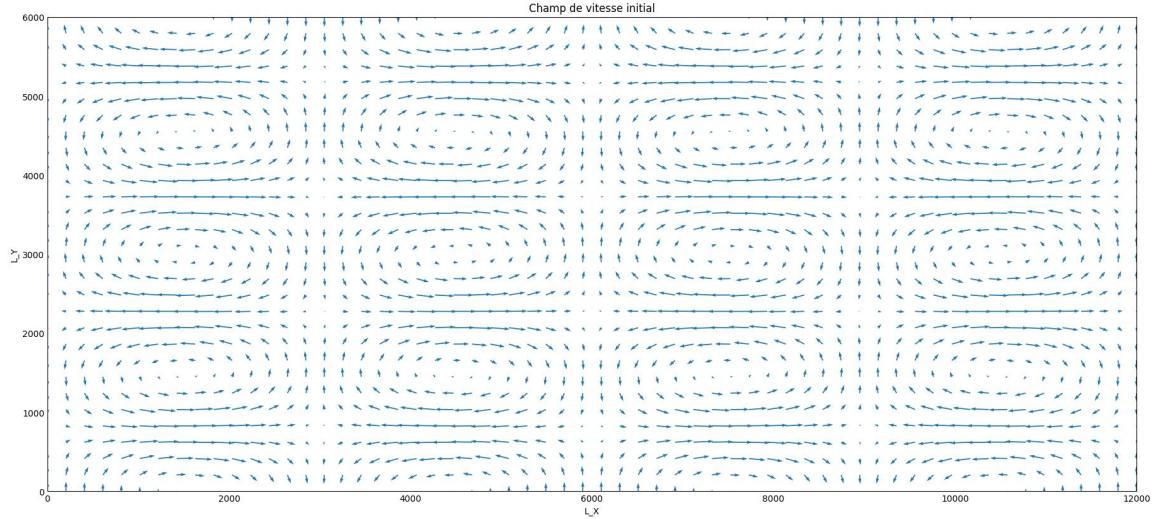


Figure 3: Champ de vitesse initial  $\vec{u}^0 = (u^0, v^0)$

## Intégration de la vorticité barotrope et analyse

Nous avons maintenant un système de 4 équations à 4 inconnues  $(u, v, \zeta, \psi)$  que nous devons faire évoluer les uns par rapport aux autres afin d'intégrer ce système temporellement sur un réseau donné de  $M \times N$  cases de longueur et de largeur  $ds$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -F := -\left(\frac{\partial(\zeta u)}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta v)}{\partial y} + \beta v\right) \\ u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla_h^2 \psi = \zeta \end{cases}$$

Afin de résoudre notre système numériquement, nous devons introduire une discrétisation de la dérivée partielle et du Laplacien, en faisant un changement de notation :  $x \rightarrow i$  ;  $y \rightarrow j$  ;  $t \rightarrow n$ , nous avons :

- Dérivées partielles :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2ds}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2ds}$$

- Laplacien :

$$\nabla_h^2 \psi = \frac{-4\psi_{i,j}^n + \psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n}{ds^2}$$

Afin de résoudre ce système, nous devons résoudre l'équation de Poisson et ainsi trouver une valeur de  $\psi$  qui correspond à celle de  $\zeta$  au même instant. Grâce à la 4ème équation de notre système et à la discrétisation du laplacien, nous pouvons écrire :

$$\zeta_{i,j}^n = \frac{-4\psi_{i,j}^n + \psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n}{ds^2}$$

ce qui donne,

$$\psi_{i,j}^n = \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - \zeta_{i,j}^n ds^2}{4}$$

Nous avons bien une expression du champ scalaire en fonction de la vorticté relative et des valeurs du champ autour du point  $(i, j)$ . Nous avons discrétisé le réseau, lorsque qu'on a  $(i + 1, j)$  ou  $(i, j + 1)$ , nous avançons d'une case de taille  $ds$  dans les directions  $(i, 0)$  ou  $(0, j)$  respectivement. On retrouve ici un schéma de résolution par différences finies :

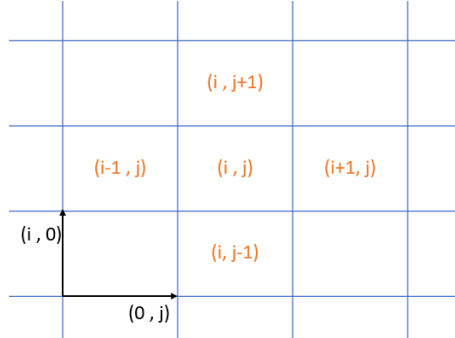


Figure 4: Illustration de la discrétisation du réseau en case  $(i, j)$  de longueur et largeur  $ds$

Nous avons maintenant des relations entre nos équations en fonction des paramètres du réseau  $(i, j)$ . Il faut maintenant que nous intégrions la vorticté relative au pas de temps suivant, en discrétisant l'équation de conservation (1ère équation de notre système) par un schéma de différences finies, nous avons :

$$\zeta(t + dt) = -F \cdot 2dt + \zeta(t - dt)$$

Il faut à présent faire une boucle (ici : en python) qui lie le système d'équation spatiale à celle qui donne l'évolution de la vorticté relative. En procédant par itération, on calcule à chaque instant la vorticté relative à un pas de temps ; grâce à l'équation de poisson, on a l'expression du champ scalaire, ce qui donne le champ de vitesse, on peut alors évaluer la conservation de la vorticté relative  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ . On effectue ce schéma pour un nombre d'itérations voulu et on a l'évolution temporelle de la vorticté relative sur un réseau 2D à partir d'un champ scalaire.

Ci-dessous, l'évolution temporelle de la vorticité relative :

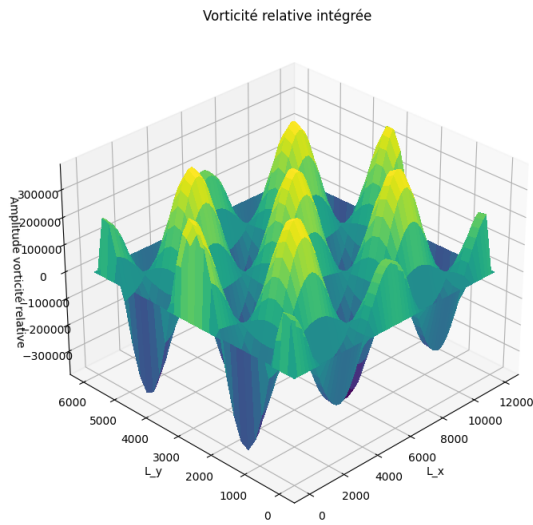


Figure 5: Evolution après 12h

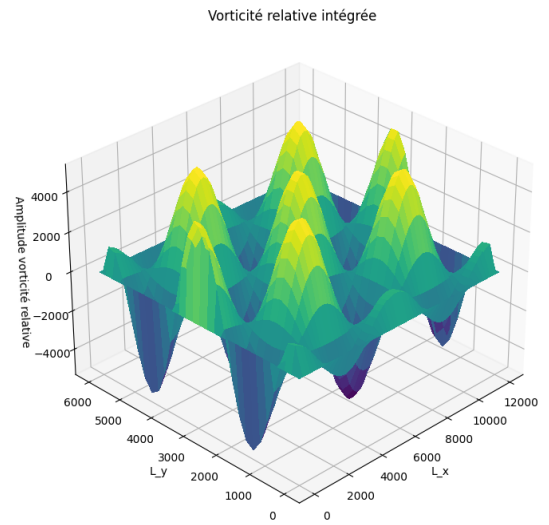


Figure 6: Evolution après 48h

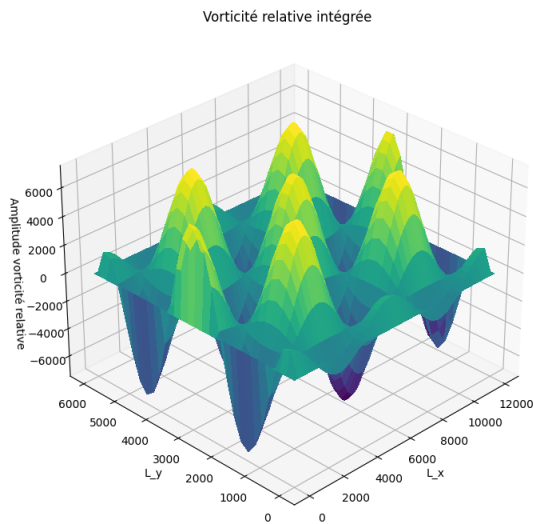


Figure 7: Evolution après 60h

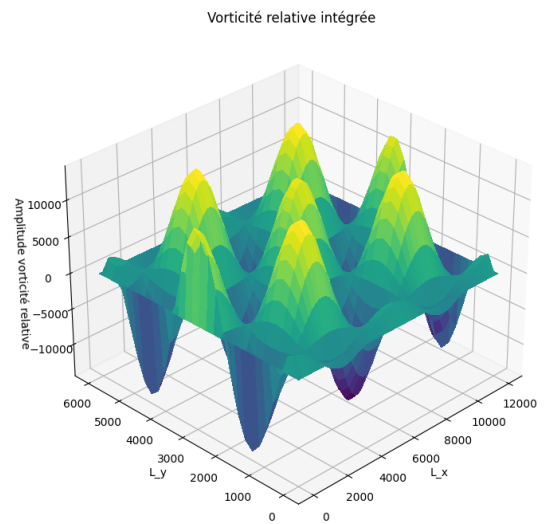


Figure 8: Evolution après 96h

Nous pouvons voir l'évolution des courbes pour la vorticité relative, celles-ci se stabilisent spatialement au fur et à mesure que le temps passe mais les valeurs varient avec le temps. Nous arrivons donc dans une solution en régime permanent, avec des oscillations périodiques bien définies.

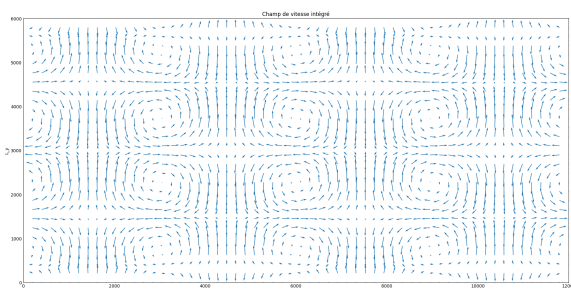


Figure 9: Evolution après 12h

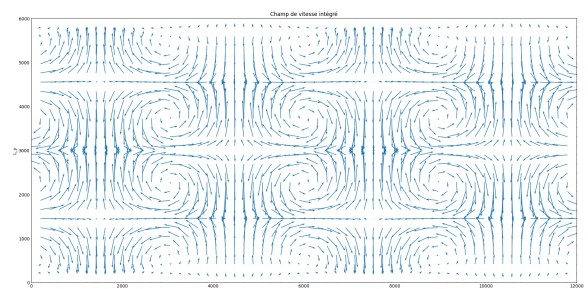


Figure 10: Evolution après 48h

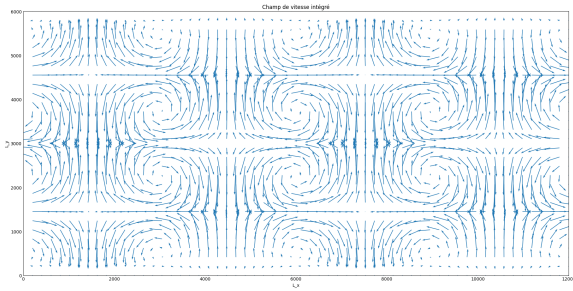


Figure 11: Evolution après 60h

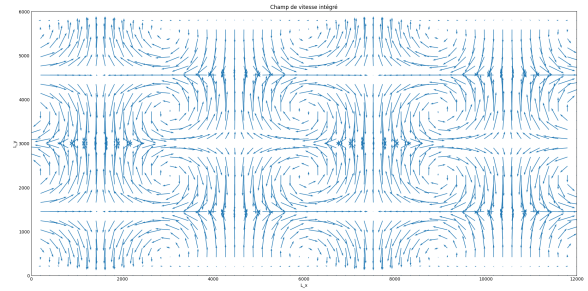


Figure 12: Evolution après 96h

Le régime permanent se remarque principalement grâce au champ de vitesse, on voit bien qu'il converge vers un régime permanent où les points stables et instables ainsi que les flots correspondants sont de plus en plus marqués sur les graphes.

Nous pouvons observer sur les figures précédentes l'évolution de la vitesse et la direction des parcelles d'air. Lorsqu'on observe un champ de vitesse qui se propage vers l'ouest, il constitue une onde de Rossby. En effet, la vitesse de phase de ces ondes se fait toujours vers l'ouest par rapport au flux zonal moyen, donc opposé au sens du courant principal.

La fonction de courant régit le comportement de la vorticité relative et aussi celui du champ de vitesse. Lorsqu'on observe l'évolution du champ de vitesse, on remarque que les extremums de la vorticité relative sont situés là où il y a convergence ou divergence du champ de vitesse. On peut le voir sur une figure du champ de vitesse et une autre de la fonction de courant après 48 heures, en r p rant les coordonnées correspondantes entre les deux figures:

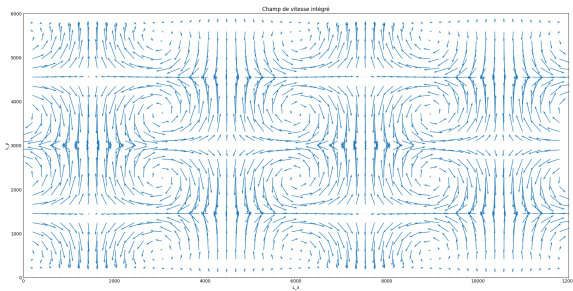


Figure 13: Evolution après 60h

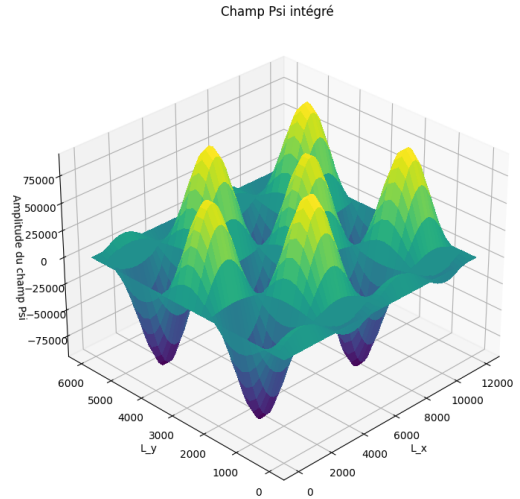


Figure 14: Evolution après 96h



## Tests de sensibilité

Dans cette section, nous allons faire varier les paramètres de base que nous avons utilisés pour toutes nos simulations :

**Variation de la longueur d'onde  $W_{x,y}$  :** Une augmentation de la longueur d'onde engendre une diminution du nombre d'onde et aussi une diminution de la fréquence. Pour un même réseau, si la longueur d'onde augmente, il faudra naturellement une plus grande distance à parcourir pour la fonction trigonométrique qui en dépend avant qu'elle ne fasse une période complète, nous observerons donc une diminution de la vitesse de variation. Cependant, les valeurs des extremums sont inchangées, il faudra juste plus de temps et d'espace à la fonction pour atteindre les mêmes valeurs que pour une longueur d'onde plus faible et inversement. On remarque aussi que si on augmente  $W_x$  et  $W_y$ , les vitesses zonales et méridionales diminuent respectivement.

**Latitude de référence :** Lorsqu'on fait varier la latitude de référence  $\phi$ , nous faisons directement varier  $\beta$  et  $f_0$  via les relations suivantes :

$$f_0 = 2.\Omega \sin(\phi) \text{ et } \beta = \frac{2.\cos(\phi)}{a}$$

Quand on regarde les équations qui régissent notre système, devant chacune d'elle se trouve le facteur  $\frac{g}{f_0}$ . On comprend vite que si le paramètre  $f_0$  diminue à cause d'une latitude de référence plus basse, la fonction prendra des valeurs plus grandes, et inversement. Par exemple, pour la vorticté relative, le comportement de son évolution reste identique mais les valeurs des extremums sont plus faibles pour une latitude élevée et plus grandes pour une latitude plus basse. Il y a divergence totale des fonctions lorsqu'on se place à l'équateur car il y a une division par zéro, ce problème peut être évité si on ne fait pas l'approximation du plan  $\beta$  mais cela est bien plus compliqué.

Si on prend des valeurs négatives de  $\phi$ , c'est à dire qu'on se trouve dans l'hémisphère Sud, on peut remarquer que dans le champ de vitesse initial, les tourbillons tournent dans le sens contraire par rapport à l'hémisphère Nord. Cela est dû au fait que la Terre tourne sur elle-même dans le sens des aiguilles d'une montre vue depuis le pôle Nord.

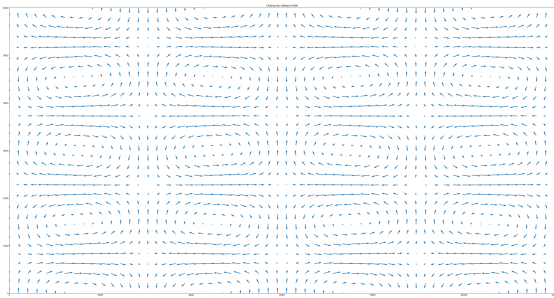


Figure 15: Champ de vitesse initial : hémisphère Nord

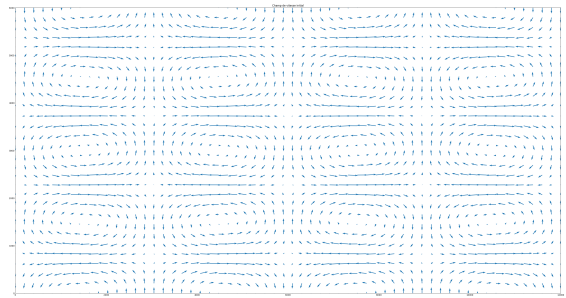


Figure 16: Champ de vitesse initial : hémisphère Sud

**Valeur zéro pour  $\beta$  :** Si on impose la valeur  $\beta = 0$  dans notre modèle, il n'y a plus de dépendance en la latitude, ce qui implique que pour un changement de latitude, il n'y a pas de changement de vorticté planétaire et donc pas de changement de vorticté relative. Il n'y aura pas de création d'onde de Rossby, la fonction de la vorticté relative sera donc constante.

# Bibliographie

- Les ondes de Rossby : <http://euromet.meteo.fr/euromet/french/nwp/n2d00/n2d00009.htm>
- Marshall, J., Plumb, R. A. (2016). Atmosphere, ocean and climate dynamics : an introductory text. Academic Press.
- Les Fiches CGPE - Python : <https://cpge.frama.io/fiches-cpge/Python/00-Outils/>