n 元不等式 100 题

整理: *POSITION*

1 开始之前

试题的 LaTeX 源文件和编译的 PDF 文件和之后的勘误会上传至

`https://github.com/AlohomoraPZX/100Inequalities`

敬请关注.

2 不等式

* 注: 不保证试题难度按升序排序.

1. (2022 联赛 B) 设 $b > a > 0, x_1, \cdots, x_{2022} \in [a, b]$, 求
$$f = \frac{|\ x_1 - x_2\ | + \cdots + |\ x_{2022} - x_1\ |}{x_1 + \cdots + x_{2022}}$$
的最大值.

2. (伊朗 TST) 给定 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, 求最大的 C_n, 使得 $\forall a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, 不等式
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\ a_i - a_j\ | \geq C_n \sum_{i=1}^{n} |\ a_i\ |$$
恒成立.

3. 设 $a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$, 求
$$f = \sum_{i=1}^{n} |\ a_i - a_{i+1}\ |$$
的最大值.

4. 设 $a_1, \cdots, a_n > 0, n \geq 3$, 满足 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = 1$, 证明:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt{\frac{2n}{n-1}}.$$

5. (CGMO2005) 给定正整数 $n \geq 4$. 非负实数 $x_1, \cdots, x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2$, 求
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}^2 + 1}$$
的最小值.

6. (AoPS) 设 $x_1,\cdots,x_n\ge 0,\sum_{i=1}^n x_i=1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^i x_j}\ge \frac{1}{n}.$$

7. 求最大的实数 C, 使得对于任意 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, 有

$$\sum_{k=1}^n x_k^2\left(x_k-x_{k-1}\right)>C.$$

8. (龚固) 设 $a_1,\cdots,a_n\ge 0,\sum_{i=1}^n a_i^2=1$, 求

$$f=\prod_{i=1}^n\left(1-a_i\right)$$

的最大值.

9. (樊畿) 设 $a_1,\cdots,a_n>0,\sum_{i=1}^n=1$, 证明:

$$\prod_{i=1}^n\left(1-a_i\right)\ge (n-1)^n\prod_{i=1}^n a_i.$$

10. 设 $a_1,\cdots,a_n>0,\sum_{i=1}^n a_i=n$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2+\prod_{i=1}^n a_i\ge n+1.$$

11. 设 $a_1,\cdots,a_n>0$, 证明:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\le \max_{1\le i<j\le n}\left(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j}\right)^2.$$

注: 本质上本题给出了 n 元均值不等式中算术平均值与几何平均值之间距离的上界.

12. (Hardy) 设 $a_1,\cdots,a_n>0$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{n}{\sum_{j=1}^i a_i}<\sum_{i=1}^n \frac{2}{a_i}.$$

13. (罗马尼亚 TST) 设 $n\ge 4,a_1,\cdots,a_n>0,\sum_{i=1}^n a_i^2=1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}^2+1}\ge \frac{4}{5}\left(\sum_{i=1}^n a_i\sqrt{a_i}\right)^2.$$

14. 设 $x_1,\cdots,x_n>0,\sum_{i=1}^n x_i^2=n$, 证明:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\ge\ n-1+\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

15. (龚固) 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n > 0$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sum_{j \neq k} a_j b_j} \geq \frac{4}{\sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

16. (西班牙 2011) 设 $n \geq 3, a_1, \cdots, a_n > 0, S = \sum_{i=1}^{n} a_i$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{S - a_i} + \sqrt{\left(\frac{(n-1)\, a_i}{S - a_i} \right)^{n-2}} \right] \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

17. 设 $n \geq 3, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}, S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S + a_i^2} \leq \frac{n^3}{n+1}.$$

18. (XMO2019) 设 $n \geq 2, z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, 证明:

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\, z_i - z_j \,| \right)^2 \geq (n-1) \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\, z_i - z_j \,|^2.$$

19. (CTST2011) 给定正整数 $n \geq 3$, 求最大的实数 M, 使得对于任意正实数数列 $x_1, \cdots, x_n$, 都存在其的一个排列 $y_1, \cdots, y_n$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{y_{i+1}^2 - y_{i+1} y_{i+2} + y_{i+2}^2} \geq M.$$

式中下标按模 n 意义理解.

20. (希望联盟 2022) 设 $a_1, \cdots, a_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 4$, 求

$$S = a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 \cdots a_n = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} a_j$$

的最大值.

21. (ZMO2022) 求最大的正实数 c, 使得对于任意 n 个正实数 $x_1, \cdots, x_n$, 均有

$$(2n-3) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \geq c \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{1 + x_i x_j}.$$

22. 给定正整数 $n \geq 4$, 设实数 $x_1, \cdots, x_n \in [0, 1]$, 求

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \,|\, x_i - x_{i+1} \,|$$

的最大值, 下标按模 n 意义理解.

23. (凌禹 T26) 非负实数 $x_1,\cdots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^n x_i=1$. 证明: 存在 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个排列 $a_1,\cdots,a_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^n a_ia_{i+1}\le\frac{1}{n}.$$

下标按模 n 意义理解.

24. (王永喜) 设 $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$, 且 $\forall i\ne j, z_i\ne z_j, |z_i|=|z_j|$, 证明:

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left|\frac{z_i+z_j}{z_i-z_j}\right|^2\ge\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

25. (王永喜) 给定正整数 $n>k>1$, 试找出使得 $\forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, 不等式

$$\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2\ge T(n,k)\sum_{1\le i<j\le k}(x_i-x_j)^2$$

成立的最佳系数 $T(n,k)$.

26. (CTST, 凌禹 T7) 设 $n\ge2,a_1,\cdots,a_n>0$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i=1$. 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{1+a_i}}\right)\le\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

27. (凌禹 T11) 设 $n\ge2,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R},\sum_{i=1}^n a_i=0$. 证明:

$$\max_{1\le i\le n}a_i^2\le\frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)^2.$$

28. (凌禹 T15) 设 $n\ge2,a_1,\cdots,a_n>0,\sum_{i=1}^n a_n=1$. 证明:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ia_{i+1}\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{a_{i+1}^2+a_{i+1}}\right)\ge\frac{n}{n+1}.$$

29. (DCMO2) 设 $n\ge3,x_1,\cdots,x_n>0,S=\sum_{i=1}^n x_i$, 且 $\min_{1\le i\le n}x_i\ge S-2$. 求

$$f=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{S-x_i}}{(S-x_i)^2}$$

的最小值.

30. (DCMO3) 设 $a_1,\cdots,a_n>0$ 满足 $\min_{1\le i<j\le n}a_ia_j\ge k^2(n,k\in\mathbb{Z}_+)$, 证明:

$$\prod_{i=1}^n\left(a_i^2+k^2\right)\le\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\right)^2+k^2\right]^n.$$

31. (CMO2016) 设 $n\ge2,b>a>0,x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$, 求

$$S=\frac{\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}}{x_1+\cdots+x_n}$$

的最值.

32. (CTST1995) 对于 $n \in \mathbb{N}$, 求最小的正实数 λ, 使得对于任意实数 $b_1, \cdots, b_n$ 是 $a_1, \cdots, a_n \in [1,2]$ 的排列, 就有
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

33. (CMO2017) 给定 $n, k \in \mathbb{N}_+(n > k), a_1, \cdots, a_n \in (k-1, k)$, 若正实数 $x_1, \cdots, x_n$ 满足: 对任意集合 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}, |I| = k$, 有
$$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} a_i,$$
求 $\prod_{i=1}^{n} x_i$ 的最大值.

34. 已知 $x_i > 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, 证明:$\forall r > 0$, 有
$$\prod_{i=1}^{n}(1 + r x_i) \geq (n+r)^n \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

35. (不等式吧 10006) 试求常数 λ 的最小值, 使得对一切正整数 n 及任意和为 1 的正实数 $x_k (1 \leq k \leq n)$, 有
$$\lambda \prod_{i=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} x_k^2.$$

36. (CWMO6) 设 $n \geq 2, a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$. 证明:
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}} \leq n + \frac{1}{2a_1 a_n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})^2.$$

37. `To be continued...`