-

Hilfestellung zur Auswertung FAS

März 2024

- Bestimmung der Pendellänge eines realen Pendels

  Zur Bestimmung der Pendellänge eines physikalischen Pendels werden Form und Größe des ausgedehnten, starren Körpers, welcher nicht in seinem Schwerpunkt aufgehängt ist, berücksichtigt.

  Die Länge des Pendels ist in diesem Fall die reduzierte Pendellänge l_r, welche wie folgt definiert ist

$$l_r = \frac{I}{md}$$

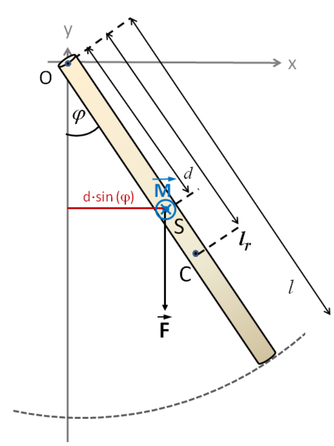
  Dabei ist I das Trägheitsmoment bezüglich des Aufhängepunktes, m die Masse des schwingenden Körpers, d der Abstand vom Aufhängepunkt O zum Massenmittelpunkt $\overrightarrow{M}$.

  Die reduzierte Pendellänge l_r ist äquivalent zur Pendellänge des mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer.

- Ein Stab der Länge l hat seinen Schwerpunkt bei $d = \frac{l}{2}$.Für sein Trägheitsmoment gilt nach dem Steinerschen Satz

$$I = \frac{1}{3}ml^2$$

  (Siehe Wolfgang Demtröder: Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme.)



https : //de.wikipedia.org/wiki/Physikalisches_Pendel#/media/Datei : CoO_3_Illustration_an_einer_Stange.png

- In unserem Fall hängt eine weitere Masse an der Stange.

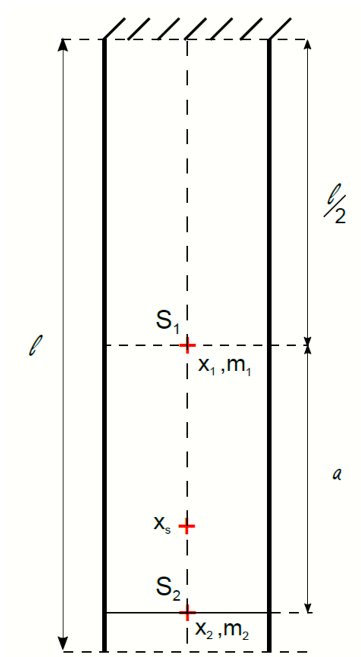
  Für die Bestimmung von d wird zunächst der Massenschwerpunkt zweier Punktmassen m_1 und m_2 auf einem Stab bestimmt.

  Mit der Formel

$$x_s = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot a$$

  erhält man den Masseschwerpunkt am Ort x_s. Dies entspricht in unserem Fall, also bei Aufhängung des Pendels am oberen Ende, dem Abstand d

$$d = x_s$$



  Verwendetes Material Messing mit der Dichte von $\rho_M = 8.73 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

  Daraus lässt sich die reduzierte Pendellänge berechnen zu

$$l_r = \frac{I}{md} = \frac{\left(\frac{1}{3}ml^2\right)}{md} = \frac{1}{3}\frac{l^2}{d}$$

- In unserem Fall (zusätzliche Masse am unteren Ende der Stange) addieren wir zum Trägheitsmoment der Stange noch das Trägheitsmoment einer Punktmasse und erhalten für die reduzierte Pendellänge

$$l_r = \frac{I_1 + I_2}{(m_1 + m_2)d} = \frac{\frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2(\frac{l}{2} + a)^2}{(m_1 + m_2)d}$$

- Die Längenmessung bringt Unsicherheiten mit sich, welche wie folgt aussehen können. Diese Unsicherheiten pflanzen sich fort und müssen in der Fehlerrechnung berücksichtigt werden.
- Parameter zu den drei unterschiedlichen Pendel im Praktikum

  i) Langes Pendel

$$\begin{aligned} l &= 1.694\,\mathrm{m} \\ a &= 0.802\,\mathrm{m} \\ m_1 &= 1.08\,\mathrm{kg} \\ m_2 &= 1.61\,\mathrm{kg} + SP_1 + SP_2 + ... \end{aligned}$$

  ii) Mittleres Pendel

$$\begin{aligned} l &= 1.49\,\mathrm{m} \\ a &= 0.705\,\mathrm{m} \\ m_1 &= 1.04\,\mathrm{kg} \\ m_2 &= 1.65\,\mathrm{kg} + SP_1 + SP_2 + ... \end{aligned}$$

  iii) Kurzes Pendel

$$\begin{aligned} l &= 1.192\,\mathrm{m} \\ a &= 0.552\,\mathrm{m} \\ m_1 &= 0.83\,\mathrm{kg} \\ m_2 &= 1.61\,\mathrm{kg} + SP_1 + SP_2 + ... \end{aligned}$$

- Beispiel: Längenmessung physikalisches Pendel

  Aus einer gemessene Pendellänge (Länge der gesamten Stange)

$$\begin{aligned} l &= 1.49\,\mathrm{m} \\ m_1 &= 1.04\,\mathrm{kg} \\ m_2 &= 1.65\,\mathrm{kg} + 0.190\,\mathrm{kg} = 1.84\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

  (Smartphone $Samsung\ Galaxy\ S20FE$ m=0.190 kg)

  wird zunächst der Massenschwerpunkt x_s bestimmt.

$$\begin{aligned} x_s &= x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot a \\ x_s &= 0.745\,\mathrm{m} + \frac{1.84\,\mathrm{kg}}{1.04\,\mathrm{kg} + 1.84\,\mathrm{kg}} \cdot 0.705\,\mathrm{m} = 1.1954\,\mathrm{m} \\ x_s &= d \end{aligned}$$

Die Masse m_1 ist in unserem Fall die zwei Stangen und die beiden Querstreben. Die Masse m_2 ist der massive Messingklotz, auf dem das Smartphone platziert wird. Die Masse des Smartphones wird nicht vernachlässigt und wirkt sich als zusätzliches Gewicht auf den Messingklotz aus. Es hat sich bewehrt, die Schutzhülle zu entfernen, so kann man das Gewicht vom Hersteller übernehmen. Hierzu werden keine weiteren Unsicherheiten behandelt. Werden mehrere Smartphones bei einer Messung verwendet, werden die Gewichte, die Lage und die Höhen notiert, um eine zusätzliche Verschiebung des Schwerpunkts berücksichtigen zu können.

Daraus lässt sich die reduzierte Pendellänge berechnen zu

$$l_r = \frac{\frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2(\frac{l}{2}+a)^2}{(m_1+m_2)d} = \frac{\frac{1}{3}1.04\,\mathrm{kg}\,(1.1954\,\mathrm{m})^2 + 1.84\,\mathrm{kg}(\frac{1.49\,\mathrm{m}}{2}+0.705\,\mathrm{m})^2}{(1.04\,\mathrm{kg}+1.84\,\mathrm{kg})1.1954\,\mathrm{m}} = 1.268\,\mathrm{m}$$

Wenn man noch genauer sein möchte, könnte man an dieser Stelle die zufällige und systematische Unsicherheit der reduzierten Pendellänge aus obiger Gleichung aus den voneinander unabhängiger Messgrößen bestimmen.

Dies soll im Rahmen dieses Praktikums vernachlässigt werden. Weiteres siehe Abschnitt Fehlerfortpflanzung.

- Im Allgemeinen sind folgende Unsicherheiten zu beachten

  i) systematische Unsicherheit des Schwerpunkts (1/8 der Höhe des Smartphones angesetzt, da Massenverhältnis zum Messingklotz 1/8)

  $$\Delta l_{sys,SP} = 1\,\mathrm{mm}$$

  ii) systematische Unsicherheit Zollstock

  a) Allgemeine Faustregel

  Als allgemeine Regel für nicht geeichte Geräte gilt, dass die systematische Unsicherheit die Hälfte der kleinsten Ableseeinheit plus 0.5 Promille des Ablesewertes beträgt, sofern der Hersteller nichts anderes angibt.

  $$\Delta l_{sys,ZS} = 0.5\,\mathrm{mm} + 5\times 10^{-4}\cdot l$$

  mit der gemessenen Länge in Millimetern $l = 1490\,\mathrm{mm}$ ergibt dies eine Unsicherheit von

  $$\begin{aligned}\Delta l_{sys,ZS} &= 0.5\,\mathrm{mm} + 5\times 10^{-4}\cdot 1490\,\mathrm{mm}\\ &= 1.245\,\mathrm{mm}\end{aligned}$$

b) EG (Europäische Gemeinschaft) Genauigkeitsklassen nach der EU-Richtlinie 2014/32/EU

EG-Genauigkeitsklasse	a in [mm]	b in $[\frac{\text{mm}}{\text{m}}]$
I	0.1	0.1
II	0.3	0.2
III	0.6	0.4

Daraus ergibt sich eine systematische Unsicherheit von

$$\Delta l_{sys,ZS} = \pm(a + b \cdot \widetilde{l})$$

Hierbei wird $\widetilde{l}$ stets auf den nächsten vollen Meter aufgerundet.

Für unsere Messung mit einem Gliedermaßstab der EG Klasse III mit einer Längenmessung von

$$l = 1.49\,\text{m} \approx 2\,\text{m}$$

beträgt die systematische Unsicherheit

$$\begin{aligned} \Delta l_{sys,ZS} &= 0.6\,\text{mm} + 0.4\frac{\text{mm}}{\text{m}} \cdot 2\,\text{m} \\ &= 1.4\,\text{mm} \end{aligned}$$

iii) zufällige Unsicherheit beim Ablesen

Für die zufällige Unsicherheit beim Ablesen nehmen wir die kleinste Einheit des Zollstocks an mit

$$\Delta l_{zuf} = 1\,\text{mm}$$

- Fasst man die systematischen Unsicherheiten zusammen zu

$$\begin{aligned} \Delta l_{sys} &= \Delta l_{sys,SP} + \Delta l_{sys,ZS} \\ &= 1\,\text{mm} + 1.4\,\text{mm} = 2.4\,\text{mm} \end{aligned}$$

ergibt sich ein Endergebnis für die Länge von

$$\mathbf{l} = l_r \pm \Delta l_{sys} \pm \Delta l_{zuf}$$

$$\mathbf{l} = 1.268\,\text{m} \pm 2.4\,\text{mm}(syst.) \pm 1\,\text{mm}(zuf.)$$

- Fehlerrechnung

Für die Berechnung vom Ortsfaktor g wird folgende Formel aus der Herleitung des mathematischen Pendels verwendet

$$g = (2\pi)^2\,\frac{l}{\overline{t}^2}$$

Hierbei entspricht die reduzierte Pendellänge l_r des physikalischen Pendels der Länge l des mathematischen Pendels.

- Messunsicherheiten voneinander unabhängiger Messgrößen pflanzen sich bei der Berechnung von physikalischen Größen fort.

  Man unterscheidet zwischen der

  i) zufälligen Unsicherheit

$$|\Delta g_{zuf}| = \sqrt{\left(\frac{\delta g}{\delta t} \cdot \Delta t_{zuf}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{\delta l} \cdot \Delta l_{zuf}\right)^2}$$

  ii) systematischen Unsicherheit

$$|\Delta g_{sys}| = \left|\frac{\delta g}{\delta t} \cdot \Delta t_{sys}\right| + \left|\frac{\delta g}{\delta l} \cdot \Delta l_{sys}\right|$$

  Die zufällige Unsicherheit ergibt sich aus dem Gaußschen-Fehlerfortpfanzungsgesetz (i). Die systematische Unsicherheit (ii) kann durch eine Taylorentwicklung erster Ordnung abgeschätzt werden.

- Man nimmt hier den sogenannten Maximalfehler an. Die Messunsicherheiten aller eingehenden Größen befinden sich an der für den abgeleiteten Wert ungünstigsten Stelle.

- Aus der Ruhemessung kann man mit dem bereitgestellten Pythonskript *Rauschen.py* eine systematische und zufällige Unsicherheit des Beschleunigungssensors ableiten. Beachte, dass dies nur ein Richtwert für die Berechnung der Periodendauer sein wird, um zumindest die Größenordnung abschätzen zu können. Da Phyphox bei der Ruhemessung einen anderen Sensor (Beschleunigung ohne g) ausliest, ist dies also nicht unmittelbar gleich der systematische Unsicherheit der Schwingungsmessung, welche mit einem anderen Sensor (Gyroskop) aufgenommen wurde. Dies wird bei Verwendung der systematischen Unsicherheit vom Studenten*in im Protokolltext deutlich vermerkt und festgehalten.

- Mit den anderen bereitgestellten Pythonskripten wird unter anderem die Periodendauer t mit verschiedenen Methoden berechnet. Jede berechnete Periodendauer t hat ihre zugehörige Standardabweichung Δt, welche sich aus der Streuung um den Mittelwert der Periodendauer ergibt.

  i) *Rohdaten_xyz.py* kann die Schwingungsebene des Smartphones bestimmt werden. Sollte diese von y abweichen, so muss der Code auf die neue Achse angepasst werden.

  ii) *Pendel_Nulldurchgänge.py* berechnet über die Nulldurchgänge die Periodendauer t und Standardabweichung Δt. Dieser Code erstellt keine Grafik und liefert über *print*() die Ergebnisse im Ausgabefenster.

iii) *Pendel_Extrema.py* berechnet die Periodendauer t und Standardabweichung Δt über die lokalen Extrema (Max→Max, Min→Min, Max→Min). Auch dieser Code erstellt keine Grafik und liefert *print*() die Ergebnisse im Ausgabefenster.

iv) *Pendel_Parabelfit.py* berechnet einerseits über einfache Extremwertsuche (grobe Daten) und andererseits über gezielte Extremwerte, die durch einen Parabelfit genauer bestimmt werden (feine Daten) die Periodendauer t und Standardabweichung Δt.

v) *Pendel_FFT.py* fürhrt eine Spektralanalyse der Gyroskopdaten (Fourier-Transformation) durch und fittet eine Lorentzkurve um den stark ausgeprägten Peak an. Somit lässt sich über die Peakfrequenz eine Periodendauer t und über die Breite eine Güte G der Schwingung bestimmen.

Alle Ergebnisse werden tabellarisch im Protokoll aufgeführt.

- Man entscheidet sich im Anschluss für die Methode, welche die kleinste Standardabweichung liefert. Die daraus ermittelte Periodendauer t wird für die Berechnung für g verwendet. Die zugehörige Standardabweichung entspricht der zufälligen Unsicherheit Δt_{zuf}, welche in der Fehlerrechnung in (i) verwendet wird.

  Die zufällige Δl_{zuf} und systematische Unsicherheit Δl_{sys} der Längenmessung ist im oberen Abschnitt beschrieben und wird in der Fehlerrechnung (i) bzw. (ii) verwendet.

- Aus obiger Formel für g kann man die einzelnen Terme für die Fehlerrechnung ableiten

$$\frac{\delta g}{\delta t} = -\frac{8\pi^2}{\bar{t}^3} l$$

$$\frac{\delta g}{\delta l} = \frac{(2\pi)^2}{\bar{t}^2}$$

- Im Endergebnis sind zufällige und systematische Unsicherheiten wie folgt getrennt anzugeben

$$\mathbf{g} = g \pm |\Delta g_{sys}| \pm |\Delta g_{zuf}|$$

  Beispiel:

$$\mathbf{g} = 9.71 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \pm 0.24 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} (sys.) \pm 0.12 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} (zuf.)$$