

TIMOSHENKO BEAM - Two Spans Beam with a Concentrated Load on Left Span

$$vv1(x) := aa0 + aa1 \cdot x + aa2 \cdot x^2 + aa3 \cdot x^3$$

$$vv1'(x) := \frac{d}{dx} vv1(x) = aa1 + x \cdot (aa2 + aa3 \cdot x + aa2 + 2 \cdot x \cdot aa3)$$

$$vv1''(x) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} vv1(x) = 2 \cdot (aa2 + x \cdot aa3 + 2 \cdot aa3 \cdot x)$$

$$vv1'''(x) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} vv1(x) = 6 \cdot aa3$$

$$vv2(x) := bb0 + bb1 \cdot x + bb2 \cdot x^2 + bb3 \cdot x^3$$

$$vv2'(x) := \frac{d}{dx} vv2(x) = bb1 + x \cdot (bb2 + bb3 \cdot x + bb2 + 2 \cdot x \cdot bb3)$$

$$vv2''(x) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} vv2(x) = 2 \cdot (bb2 + x \cdot bb3 + 2 \cdot bb3 \cdot x)$$

$$vv2'''(x) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} vv2(x) = 6 \cdot bb3$$

$$vv3(x) := cc0 + cc1 \cdot x + cc2 \cdot x^2 + cc3 \cdot x^3$$

$$vv3'(x) := \frac{d}{dx} vv3(x) = cc1 + x \cdot (cc2 + cc3 \cdot x + cc2 + 2 \cdot x \cdot cc3)$$

$$vv3''(x) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} vv3(x) = 2 \cdot (cc2 + x \cdot cc3 + 2 \cdot cc3 \cdot x)$$

$$vv3'''(x) := \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} vv3(x) = 6 \cdot cc3$$

$$\text{Algsys} \left[\begin{array}{c} vv1(0) = 0 \\ vv1''(0) = 0 \\ vv1(aF) - \frac{EI}{GAC} \cdot vv1''(aF) - \left(vv2(0) - \frac{EI}{GAC} \cdot vv2''(0) \right) = 0 \\ vv1'(aF) - vv2'(0) = 0 \\ vv1''(aF) - vv2''(0) = 0 \\ -EI \cdot vv1'''(aF) + EI \cdot vv2'''(0) + F = 0 \\ vv2(bF) - \frac{EI}{GAC} \cdot vv2''(bF) = 0 \\ vv3(0) - \frac{EI}{GAC} \cdot vv3''(0) = 0 \\ vv2'(bF) - vv3'(0) = 0 \\ vv2''(bF) - vv3''(0) = 0 \\ vv3(L2) = 0 \\ vv3''(L2) = 0 \end{array} \right]; \left\{ \begin{array}{l} aa0 = 0 \\ aa1 = -\frac{F \cdot aF \cdot bF \cdot \left(bF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 - bF \cdot L2 \right) \right)}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot \left(L2 + bF \right) + bF^2 \right) \right)} \\ aa2 = 0 \\ aa3 = \frac{F \cdot aF^2 \cdot L2}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 - bF \cdot L2 \right) \right) \right)} \\ bb0 = -\frac{F \cdot aF^2 \cdot L2}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 - bF \cdot L2 \right) \right) \right)} \\ bb1 = -\frac{F}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 - bF \cdot L2 \right) \right) \right)} \\ bb2 = \frac{F}{4 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 - bF \cdot L2 \right) \right) \right)} \\ bb3 = -\frac{F}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 - bF \cdot L2 \right) \right) \right)} \\ cc0 = -\frac{F}{2 \cdot \left(bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot \left(L2 + bF \right) + bF^2 \right) \right)} \\ cc1 = \frac{F}{6 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot \left(L2 + bF \right) + bF^2 \right) \right)} \\ cc2 = -\frac{F}{4 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot \left(L2 + bF \right) + bF^2 \right) \right)} \\ cc3 = \frac{F}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot \left(L2 + bF \right) + bF^2 \right) \right)} \end{array} \right.$$

$$aa0 := 0$$

$$aa1 := - \frac{F \cdot aF \cdot bF \cdot \left(bF \cdot \left(3 \cdot GAc \cdot L2 \cdot (aF + bF) + 4 \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) + 2 \cdot \left(\left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \cdot aF + 9 \cdot EI \cdot L2 \right) \right)}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 2 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) + aF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + aF) + 3 \cdot EI \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 \right)}$$

$$aa2 := 0$$

$$aa3 := \frac{F \cdot bF \cdot \left(bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot \left(3 \cdot aF + 2 \cdot (L2 + bF) \right) + 6 \cdot EI \right) + 2 \cdot \left(\left(GAC \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) \right)}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 \cdot aF + 2 \cdot \left(GAC \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 + bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 3 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) \right) \right)}$$

$$bb0 := - \frac{F \cdot aF^2 \cdot bF \cdot \left(bF \cdot \left(bF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 \cdot bF + 4 \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot (L2 + aF) + 3 \cdot EI \right) \right) + 2 \cdot \left(2 \cdot \left(GAC \cdot L2^2 + \right. \right. \right.}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAC \cdot L2 \cdot aF + 2 \cdot \left(GAC \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 + bF \cdot \left(GAC \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 3 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) \right)}$$

$$bb1 := - \frac{F \cdot aF \cdot bF \cdot \left(bF \cdot \left(bF \cdot \left(3 \cdot GAc \cdot L2 \cdot bF + 4 \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) \right) + 6 \cdot L2 \cdot \left(3 \cdot EI - GAc \cdot aF \right) \right)}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAc \cdot L2 \cdot aF + 2 \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 + bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot \left(L2 + bF + 3 \cdot aF \right) + 3 \cdot EI \right) \right)}$$

$$bb2 := \frac{F \cdot aF \cdot bF \cdot \left(bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (3 \cdot aF + 2 \cdot bF) + 2 \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) + 2 \cdot \left(GAc \cdot L2^2 \cdot \right. \right.}{4 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAc \cdot L2 \cdot aF + 2 \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 + bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 3 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) \right)}$$

$$bb3 := - \frac{F \cdot aF \cdot \left(bF \cdot \left(3 \cdot GAc \cdot L2 \cdot bF + 2 \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + 3 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) \right) + 2 \cdot aF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot \right. \right.}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(aF \cdot \left(3 \cdot GAc \cdot L2 \cdot aF + 2 \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 + bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 3 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) \right)}$$

$$cc0 := - \frac{F \cdot L2 \cdot aF \cdot bF \cdot (bF + 2 \cdot aF)}{2 \cdot \left(bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 2 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) + aF \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI + GAc \cdot L2 \cdot aF \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 \right)}$$

$$cc1 := \frac{F \cdot \left(GAc \cdot L2^2 + 3 \cdot EI \right) \cdot aF \cdot bF \cdot (bF + 2 \cdot aF)}{6 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 2 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) + aF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + aF) + 3 \cdot EI \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 \right)}$$

$$cc2 := - \frac{F \cdot GAc \cdot L2 \cdot aF \cdot bF \cdot (bF + 2 \cdot aF)}{4 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 2 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) + aF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + aF) + 3 \cdot EI \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 \right)}$$

$$cc3 := \frac{F \cdot GAc \cdot aF \cdot bF \cdot (bF + 2 \cdot aF)}{12 \cdot EI \cdot \left(bF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + bF + 2 \cdot aF) + 3 \cdot EI \right) + aF \cdot \left(GAc \cdot L2 \cdot (L2 + aF) + 3 \cdot EI \right) + 3 \cdot EI \cdot L2 \right)}$$

$$L1 := 5000 \text{ mm} \quad L2 := 5000 \text{ mm}$$

$$h := 100 \text{ mm}$$

$$b := 100 \text{ mm}$$

$$E := 11000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$I := \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{25000000}{3} \text{ mm}^4$$

$$G := 690 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$EI := E \cdot I = 9,1667 \cdot 10^{10} \text{ N mm}^2$$

$$A := b \cdot h = 0,01 \text{ m}^2$$

$$GA := G \cdot A = 6,9 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$ks := 1,2$$

$$GA_c := \frac{G \cdot A}{ks} = 5,75 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$aF := 2500 \text{ mm}$$

$$bF := L1 - aF = 2,5 \text{ m}$$

$$F := 1 \text{ kN}$$

$$u_1(x) := \left(v_1(x) - \frac{EI}{GAc} \cdot v_1''(x) \right) = \frac{x \cdot \left(530012000 \cdot \left(-658399341600 \, \text{m}^2 + 37985084368 \cdot x^2 \right) - 192572222518762 \right)}{27244371460271300000000 \, \text{m}^2}$$

[illegible]

[illegible]

$$u1 \left(aF \right) = -0,0207 \text{ m}$$

$$u_2(0) = -0,0207 \text{ m}$$

$$u_3(0) = 0$$

$$M1(x) := - (v v 1''(x) \cdot EI) = - \frac{4682875 \cdot x \text{ kg m}}{11522 \text{ s}^2}$$

$$M2(x) := -\left(vv2''(x) \cdot EI\right) = -\frac{34375 \text{ kg m} \cdot \left(50696800 \cdot \left(25348400 \cdot \left(20278720 \cdot \left(5697762655200 \text{ m} - 1109509607360 \cdot x\right)\right)\right)\right)}{100467}$$

$$M3(x) := -\left(vv3''(x) \cdot EI\right) = -\frac{34375 \text{ kg m} \cdot \left(2027872 \cdot \left(1013936 \cdot \left(2027872 \cdot \left(-10494237600 \text{ m} + 699615840 \cdot x\right) - 2128\right)\right)\right)}{642989625285020}$$

$$M1(0) = 0$$

$$M2(0) = -1016,0725 \text{ J}$$

$$M3(0) = 467,855 \text{ J}$$

$$V1(x) := -\left(vv1'''(x) \cdot EI\right)$$

$$V2(x) := -\left(vv2'''(x) \cdot EI\right)$$

$$V3(x) := -\left(vv3'''(x) \cdot EI\right)$$

$$V1(0) = -406,429 \text{ N}$$

$$V_2(0) = 593,571 \text{ N}$$

$$V_3(0) = -93,571 \text{ N}$$

$$L := L1 + L2 = 10 \text{ m}$$

Beam length

$$L_A := 0 \text{ m}$$

Distance to the first support

$$L_B := L1 = 5 \text{ m}$$

Distance to the second support

$$L_C := L = 10 \text{ m}$$

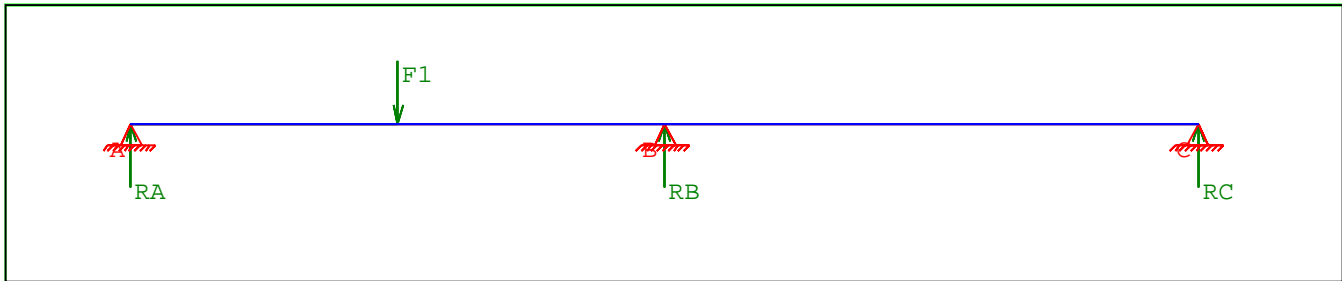
Distance to the third support

List of the Point Loads
(every column - options of a single Load)

$$F := \begin{bmatrix} F \\ aF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \\ 2,5 \text{ m} \end{bmatrix}$$



Beam diagram:



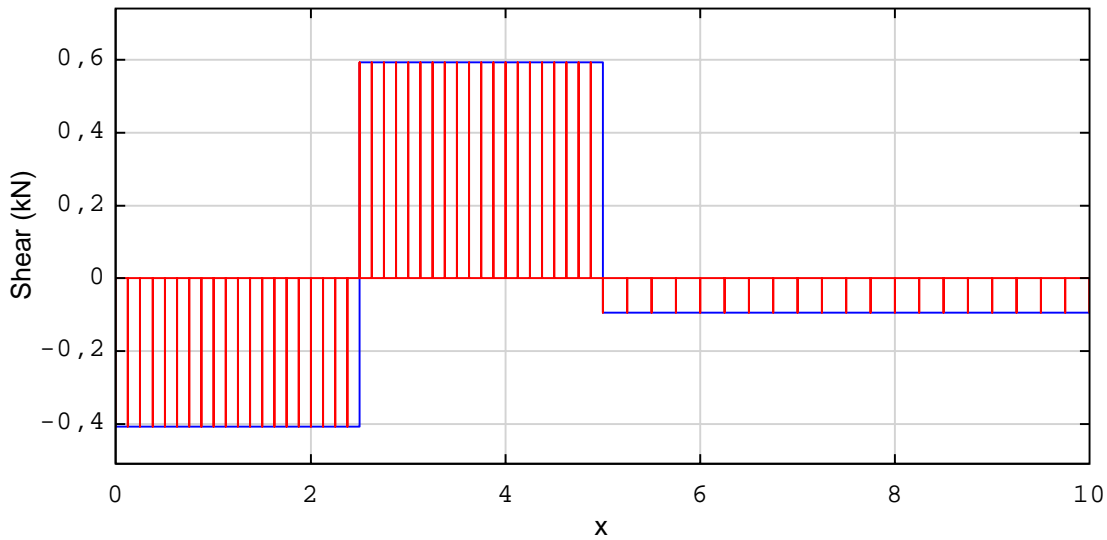
$$V(x) := \begin{cases} V1(x) & \text{if } (x \geq 0) \wedge (x < aF) \\ V2(x - aF) & \text{if } (x \geq aF) \wedge (x < L1) \\ V3(x - L1) & \text{if } (x \geq L1) \wedge (x \leq L) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M(x) := \begin{cases} M1(x) & \text{if } (x \geq 0) \wedge (x < aF) \\ M2(x - aF) & \text{if } (x \geq aF) \wedge (x < L1) \\ M3(x - L1) & \text{if } (x \geq L1) \wedge (x \leq L) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

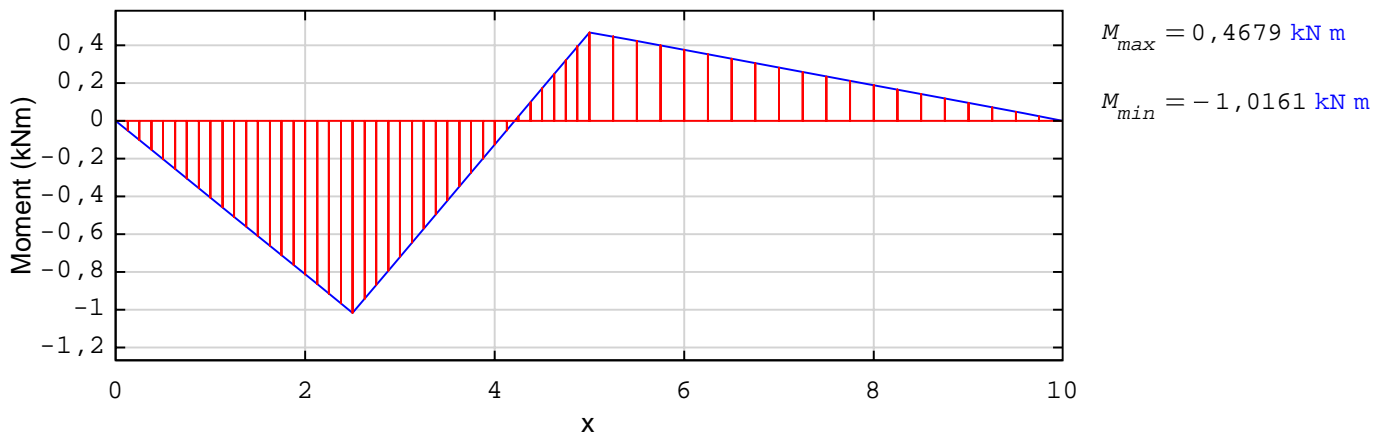
$$u(x) := \begin{cases} u1(x) & \text{if } (x \geq 0) \wedge (x < aF) \\ u2(x - aF) & \text{if } (x \geq aF) \wedge (x < L1) \\ u3(x - L1) & \text{if } (x \geq L1) \wedge (x \leq L) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



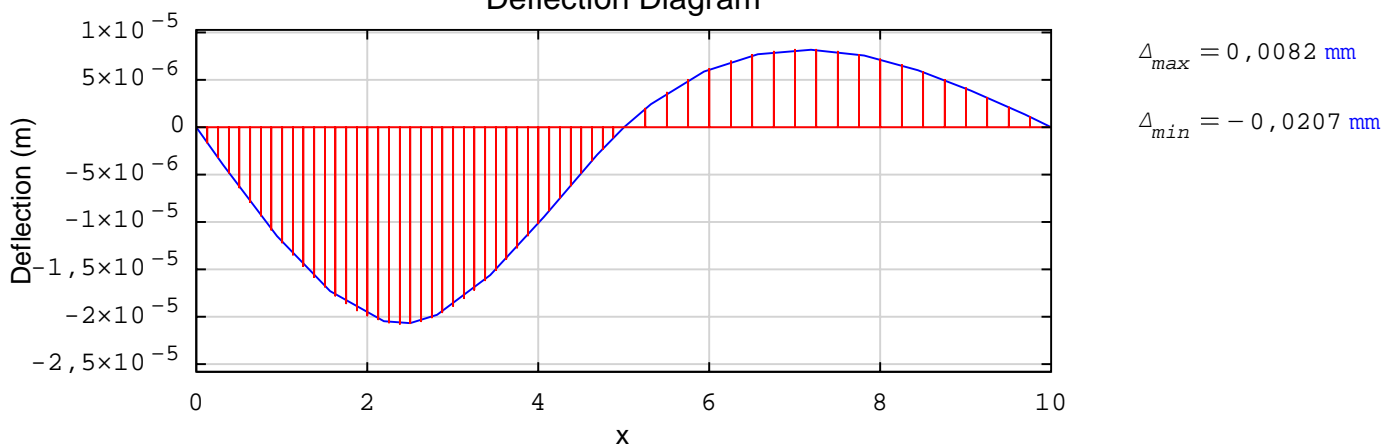
Shear Diagram



Moment Diagram



Deflection Diagram



Reactions

$$R_A := -V1(0 \text{ m}) = 0,4064 \text{ kN} \quad R_B := -(-V2(L1) + V3(0 \text{ m})) = 0,6871 \text{ kN} \quad R_C := V3(L2) = -0,0936 \text{ kN}$$