二次型

考纲要求

六、二次型

二次型及其矩阵表示、合同变换与合同矩阵、二次型的秩、惯性定理、二次型的标准形和规范形、用正交变换和配方法化二次型为标准形、二次型及其矩阵的正定性。

- 考试要求
  1. 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理
  2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形
  3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法

相关概念

- 二次型及其矩阵表示
  1. 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

  $$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \\ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

  称为二次型。

  2. 当 $j > i$ 时，取 $a_{ji} = a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_ix_j$，于是二次型可写成

  $$\begin{gathered} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + \\ a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 \\ + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{gathered}$$

  将上式的系数排成一个 $n \times n$ 的矩阵

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  它就称为二次型的矩阵，因为 $a_{ij} = a_{ji}$，所以 $A = A'$，这样的矩阵称为对称矩阵，因此，二次型的矩阵都是对称的。

  3. 令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，于是二次型可以用矩阵的乘积表示出来

$$x^TAx=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$
$$=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}$$
$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$

4. 二次型 f 对应的对称矩阵 A 的秩，称为二次型 f 的秩
5. 二次型和它的矩阵是相互唯一决定的，若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx=x^TBx$，且 $A'=A$，$B'=B$，则 $A=B$
6. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 是两组数字，关系式

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\cdots\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$

   称为由 $x_1,\cdots,x_n$ 到 $y_1,\cdots,y_n$ 的一个线性替换，或简称线性替换。如果系数行列式 $|c_{ij}|\neq 0$，那么线性替换称为非退化的。

   > 经过一个非退化的线性替换，二次型还是变成二次型，替换后的二次型矩阵与原二次型矩阵存在某种关系：
   >
   > 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，$A=A'$ 是一个二次型，
   >
   > 做非退化线性替换 $x=Cy$，
   >
   > 得到一个 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的二次型 y^TBy
   >
   > 将 $x=Cy$ 代入 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 中得：
   >
   > $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx=(Cy)^TA(Cy)=y^TC^TACy=y^T(C^TAC)y=y^TBy$
   >
   > 因此，得到 $B=C^TAC$

7. $n\times n$ 矩阵 A,B 称为合同的，如果存在可逆的 $n\times n$ 矩阵 C，使 $B=C^TAC$

   > 合同是矩阵之间的一个关系。合同关系具有：
   >
   > - 反身性：$A=E'AE$
   > - 对称性：由 $B=C'AC$ 即得 $A=(C^{-1})'B(C^{-1})$
   > - 传递性：由 $A_1=C_1'AC_1$ 和 $A_2=C_2'A_1C_2$ 即得 $A_2=(C_1C_2)'A(C_1C_2)$

   经过非退化的线性替换，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的。

- 标准形：二次型中最简单的一种是只包含平方项的二次型 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$
  1. 任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换变成上述平方和的形式

2. 上述定理1可以叙述为：任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵，即对于任意一个对称矩阵 A 都可以找到一个可逆矩阵 C 使 $C'AC$ 成对角矩阵
3. 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过非退化线性替换所变成的平方和称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个标准形
4. 一般来说，二次型的标准形不是唯一的，与所作的非退化线性替换有关

- 唯一性
    1. 在一个二次型的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关。
    2. 复数域下的规范形：

> 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个复系数的二次型，经过某个非退化的线性替换后，变成标准形。不妨假设它的标准形是 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2, i=1,2,\cdots,r\ \ (1)$
>
> 易知 r 就是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵的秩。
>
> 因为复数总可以开平方，我们再作一非退化线性替换
>
> $$\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r=\frac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ \cdots\cdots \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases} \qquad (2)$$
>
> 那么 (1) 就变为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2\quad(3)$
>
> (3) 称为负二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形，显然，规范形完全被原二次型矩阵的秩所决定。
>
> 因此有：
>
> - 任意一个复系数的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的。
>
>   该定理换个说法就是，任一复数的对称矩阵合同于一个形式为
>
> $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
>
>   的对角矩阵，其中对角线上 1 的个数 r 等于 A 的秩；从而有，两个复数对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相等

3. 实数域下的规范形：

> 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一实系数的二次型，经过某个非退化线性替换，再适当排列次序，可使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成标准形

> $$d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2 \quad (1)$$
>
> 其中 $d_i>0, i=1,\cdots,r$； r 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵的秩。
>
> 因为在实数域中，正实数总是可以开平方，所以再作一非退化线性替换
>
> $$\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r=\frac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ \cdots\cdots \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases} \qquad (2)$$
>
> (1) 就变成 $z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2 \quad (3)$
>
> (3) 就称为实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形。显然，规范形完全被 r,p 这两个数决定。
>
> - 任意一个实数域上的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的。（惯性定理）
> - 在实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形中，正平方项的个数 p 称为正惯性指数；负平方项的个数 $r-p$ 称为负惯性指数；它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为符号差。
> - 实二次型的标准形中系数为正的平方项的个数是唯一确定的，它等于正惯性指数，而系数为负的平方项的个数就等于负惯性指数。
> - 任一实对称矩阵 A 都合同于一个下述形式的对角矩阵：
>
> $$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$
>
>   其中对角线上 1 的个数 p 及 -1 的个数 $r-p$ （r 是 A 的秩）都是唯一确定的，分别称为 A 的正、负惯性指数。它们的差 $2p-r$ 称为 A 的符号差。

- 正定二次型
  1. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为正定的，如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$
  2. 非退化实线性替换，保持正定性不变
  3. n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n

4. 正定二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$
5. 实对称矩阵 A 称为正定的，如果二次型 x^TAx 正定；一个实对称矩阵是正定的，当且仅当它与单位矩阵合同，由此可推出：正定矩阵的行列式大于0
6. 子式

$$P_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix},(i=1,2,\cdots,n)$$

   称为 n 阶矩阵 A 的顺序主子式
7. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j=x^TAx$ 是正定的充分必要条件为矩阵 A 的顺序主子式全大于零
8. 对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的特征值全大于0

- 其他二次型
  1. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一实二次型，对于任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为负定的；如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为半正定的；如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leq 0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为半负定的；如果它既不是半正定又不是半负定，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为不定的
  2. 对于实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，其中 A 是实对称的，则下列条件等价：
     - $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的
     - 它的正惯性指数与秩相等
     - 有可逆矩阵 C，使 $C'AC=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，其中 $d_i\geq 0,i=1,2,\cdots,n$
     - 有实矩阵 C，使得 $A=C'C$
     - A 的所有主子式皆大于或等于0（注意，仅有顺序主子式大于等于0是不能保证半正定的）
  3. 对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正

- 二次型化标准形的五种方法
  - 配方法
    - 优点：低阶二次型计算较为方便
    - 缺点：高阶二次型计算复杂，容易出错

> 用配方法化二次型为标准形的关键是消去交叉项，分如下两种情况：
>
> - 情形1：如果二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 含某平方项，如 x_1 的平方项，且 $a_{11}\neq 0$，则合并二次型中含 x_1 的所有交叉项，然后与 x_1^2 配方，并作非退化的线性替换
>
> $$\begin{cases} y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{nn}x_n \\ y_2=x_2 \\ \cdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

得到新二次型 $f = d_1 y_1^2 + g(y_2, \cdots, y_n)$，其中 $g(y_2, \cdots, y_n)$ 是 $y_2, \cdots, y_n$ 的二次型。对于 $g(y_2, \cdots, y_n)$ 重复上述方法，直到化为标准形为止

> 例：求非退化的线性替换 $x = Cy$ 使二次型
> $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4 + 4x_4^2$
> 化为标准形，并写出所作的非退化矩阵 C
>
> 解：$f = x_1^2 + 2x_1(2x_2 - x_4) + (2x_2 - x_4)^2 - (2x_2 - x_4)^2 + 3x_2^2 + 4x_4^2 - 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$
> $= (x_1 + 2x_2 - x_4)^2 - (2x_2 - x_4)^2 + 3x_2^2 + 4x_4^2 - 2x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$
> $= (x_1 + 2x_2 - x_4)^2 - x_2^2 + 3x_4^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4$
>
> 令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - x_4 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \quad (1)$
>
> 则 $f = y_1^2 - y_2^2 + 3y_4^2 - 2y_2y_3 - 2y_2y_4 + 2y_3y_4$
> $= y_1^2 - [y_2^2 + 2y_2(y_3 + y_4) + (y_3 + y_4)^2] + y_3^2 + 4y_4^2 + 4y_3y_4$
> $= y_1^2 - (y_2 + y_3 + y_4)^2 + (y_3 + 2y_4)^2$
>
> 令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 + y_4 \\ z_3 = y_3 + 2y_4 \\ z_4 = y_4 \end{cases} \quad (2)$
>
> 则 $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$ 为所求标准形。由(1),(2)得：
>
> $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_4 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 + z_4 \\ y_3 = z_3 - 2z_4 \\ y_4 = z_4 \end{cases} \quad (4)$
>
> 将(4)代入(3)得非退化线性变换：
>
> $\begin{cases} x_1 = z_1 - 2z_2 + 2z_3 - z_4 \\ x_2 = z_2 - z_3 + z_4 \\ x_3 = z_3 - 2z_4 \\ x_4 = z_4 \end{cases}$ 线性变换的矩阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
>
>
>
> 此题中标准形为 $f = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$，它是四元二次型，只是 z_4^2 的系数为0，所作的线性替换必须有 $y_4 = z_4$，否则不是非退化线性替换

- 情形2：如果二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不含平方项，即 $a_{ii} = 0$，但含某一个 $a_{ij} \neq 0 (i \neq j)$，则可做非退化线性变换

$$x_i = y_i + y_j$$
$$x_j = y_i - y_j$$
$$x_k = y_k, (k = 1, 2, \cdots, n; k \neq i, j)$$

将 f 化为一个含有平方项 y_i^2 的二次型，再用情形1的方法将其化为标准形

> 例：求非退化的线性替换 $x = Cy$ 使二次型
> $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 化为标准形，并写出所作的非退化矩阵
> C
>
> ---
>
> 解：由于没有平方项，故令 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$
>
> 得：$f = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 - (y_1 + y_2)$
>
> $= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3$
>
> $= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$
>
> 令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$
>
> 得：$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$
>
> 所用非退化线性变换为：$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$
>
>

- 初等变换法
  - 优点：任意阶二次型计算均简便
  - 缺点：无

> 1. 第一步写出二次型的矩阵 A，并构造 $2n \times n$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$
> 2. 对 A 进行初等行变换和同样的初等列变换（不可交换两行或两列的位置），把 A 化为对角矩阵 B，并对 E 施行与 A 相同的初等列变换（切记 E 并不进行初等行变换），将 E 化为矩阵 C，此时 $C'AC = B$
> 3. 第三步写出非退化线性变换 $x = Cy$，化二次型为标准形 $f = y^T By$
> 4. 补充：若 1 中构造矩阵 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$，则 2 中将 A 化为对角矩阵 B，并对 E 施行与 A 相同的初等行变换，将 E 化为矩阵 C，则此时 C 不是我们需要的非退化替换，C' 才是

> 例：求非退化的线性替换 $x=Cy$ 使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ 化为标准形，并写出所作的非退化矩阵 C
>
> 解：写出f对应的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}$
>
> 构造 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二列减第一列}]{\text{第二行减第一行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&4\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第三列减二倍的第二列}]{\text{第三行减二倍的第二行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$
>
> 故非退化的线性变换矩阵为$C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，记$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
>
> 线性变换 $x=Cy$ 将f化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2$，经验算$B=C'AC$
>
>

- 正交变换法
  - 优点：所求出的变换矩阵是正交矩阵
  - 缺点：计算复杂

> - 主轴定理：任给二次型 $f=\sum_i^n\sum_j^n a_{ij}x_ix_j=x^TAx$ ，总有正交变换 $x=Py$ ，使 f 化为标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值
>
> 计算步骤如下：
>
> 1. 写出二次型的矩阵 A
> 2. 求出 A 的特征值，得到 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$
> 3. 求出对应的特征向量
> 4. 将特征向量作施密特正交化，得到正交的特征向量
>
>   （由于对称矩阵不同特征值所对应的特征向量是正交的，因此只要对单个特征值所对应的特征向量做施密特正交化即可）
> 5. 将正交的特征向量单位化
> 6. 将这些单位化的特征向量按列排成矩阵，得到正交矩阵 P
>
> > 例：求正交变换 $x=Cy$ 使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 化为标准形

解：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$

1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & -\lambda+5\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$

所以A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$

2) 对$\lambda_1=\lambda_2=5$，解$(5E-A)X=0$,得基础解系为：$\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

对$\lambda_3=-4$，解$(-4E-A)X=0$,得基础解系为：$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$

3,4) 对每个基础解系进行施密特正交化，再单位化：

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-4\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

5) 令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$,则$Q$是正交矩阵

并且$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=diag(5,5,-4)$

写出正交变换$X=QY$，则可得标准形$f=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$

- 偏导数法
  - 优点：配方法的改进
  - 缺点：高阶二次型计算复杂

在二次型中，若有$a_{ii}\neq0$,取$f_i=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$,则：$f=\frac{1}{a_{ii}}f_i^2+\emptyset$,($\emptyset$中不含$x_i$),对$\emptyset$实施类似的计算，直至写出平方项为止，再换元；若$a_{ii}=0$，但有一个$a_{ij}\neq0$，取$f_i=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$，$f_j=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_j}$，则：$f=\frac{1}{a_{ij}}[(f_i+f_j)^2-(f_i-f_j)^2+\emptyset]$,($\emptyset$中不含$x_i$与$x_j$),对$\emptyset$实施类似的计算，若$\emptyset$出现平方项，则用第一步的方法。

> 例：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形，并写出所作的非退化线性变换

$f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 \qquad (1)$

解：$f_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}=-2x_2+x_3$ ，$f_2=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}=-2x_1+x_3$

则 $f=-\frac{1}{4}[(-2x_1-2x_2+2x_3)^2-(2x_1-2x_2)^2+\emptyset]$

$=-(x_1+x_2-x_3)^2+(x_1-x_2)^2-\frac{1}{4}\emptyset \qquad (2)$

将(2)展开得 $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-x_3^2-\frac{1}{4}\emptyset \qquad (3)$

将(3)与(1)比较得 $\emptyset=-4x_3^2$ 代入(2)式：$f=-(x_1+x_2-x_3)^2+(x_1-x_2)^2+x_3^2$

作非退化的线性变换 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=x_1-x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ x_2=\frac{1}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

f在该变换下化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$

- 顺序主子式法
  - 优点：计算标准形极其简单
  - 缺点：无法得出所作的变换矩阵，只能得到标准形

二次型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，若 $\Delta_1=a_{11}\neq 0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,\cdots,\ \Delta_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0,$

则该二次型可化为标准形：$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=\Delta_1y_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2+\cdots+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2$

> 例：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形

解：

写出二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta_1=1$，$\Delta_2=-\frac{25}{4}$，$\Delta_3=-4$，所以 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-\frac{25}{4}y_2^2+\frac{16}{25}y_3^2$