向量

考纲要求

三、向量

向量的概念、向量的线性组合与线性表示、向量组的线性相关与线性无关、向量组的极大线性无关组、等价向量组、向量组的秩、向量组的秩与矩阵的秩之间的关系、向量空间及其相关概念、n维向量空间的基变换和坐标变换、过渡矩阵、向量的内积、线性无关向量组的正交规范化方法、规范正交基、正交矩阵及其性质。

- 考试要求
  1. 理解n维向量、向量的线性组合与线性表示的概念
  2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法
  3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩
  4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系
  5. 了解n维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念
  6. 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵
  7. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法
  8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质

相关概念

- 向量的概念
  1. 所谓 n 维向量就是由 n 个数组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ，a_i 称为向量的分量
  2. 如果 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的对应分量都相等，即 $a_i = b_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 就称这两个向量是相等的，记作 $\alpha = \beta$
  3. 向量 $\gamma = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的和，记为 $\gamma = \alpha + \beta$

     > 向量加法满足：
     >
     > - 交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$
     > - 结合律：$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

  4. 分量全为零的向量 $(0, 0, \cdots, 0)$ 称为零向量，记为 0；向量 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的复向量，记为 $-\alpha$

     > - $\alpha + 0 = \alpha$
     > - $\alpha + (-\alpha) = 0$

  5. 设 k 为常数，向量 $(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与数 k 的数量乘积，记为 $k\alpha$

> - $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
> - $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
> - $k(l\alpha)+(kl)\alpha$
> - $1\alpha=\alpha$
> - $0\alpha=0$
> - $(-1)\alpha=-\alpha$
> - $k0=0$
> - 如果 $k\neq 0,\alpha\neq 0$，那么 $k\alpha\neq 0$

6. 一些向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 称为向量组，若从中取出一些向量，则称为向量组的部分组

- 线性相关性

1. 向量 α 称为向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合，如果有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ ，使 $\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$。当向量 α 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合时，我们也可以说 α 可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ **线性表出。**

> - 任一个 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是向量组 $\begin{cases}\epsilon_1=(1,0,\cdots,0)\\ \epsilon_2=(0,1,\cdots,0)\\ \cdots\cdots\\ \epsilon_n=(0,0,\cdots,1)\end{cases}$ 的一个线性组合，因为 $\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$ ，向量 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 称为 n 维单位向量
> - 零向量是任一向量组的线性组合（只要系数全取0就行）
> - 向量 α 能由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出的充分必要条件是矩阵 $A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的秩等于矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\alpha)$ 的秩

2. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 2)$ 中有一个向量可以由其余的向量线性表出，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 称为线性相关的，否则称为是线性无关的。

> 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是，它所构成的矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩小于向量个数 s， 即 $r(A)<s$；线性相关的充分必要条件是 $r(A)=s$

3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 1)$ 称为线性相关，如果有不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ ，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$
4. 一向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 1)$ 线性无关，如果由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 可以推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

- 向量组的等价

1. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 中每一个向量 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,t)$ 都可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 就称为可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出。如果两个向量组互相可以线性表出，它们就称为等价。

> - 反身性：每一个向量组都与它自身等价
> - 对称性：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，那么向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 等价
> - 传递性：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$ 等价，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$ 等价

2. 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出的充分必要条件是矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)$ 的秩等于矩阵 $(A,B)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_s)$ 的秩，即 $r(A)=r(A,B)$
3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价的充分必要条件是 $r(A)=r(B)=r(A,B)$，其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$

- 向量组的相关判断
  1. 如果一个向量组的一部分线性相关，那整个向量组也线性相关
  2. 如果一个向量组线性无关，那么它的任何一个非空的部分组也线性无关
  3. 如果向量组 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 线性无关，那么在每个向量上添加一个分量所得到的 $n+1$ 维向量组 $\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},a_{i,n+1})$ 也线性无关
  4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是两个向量组，如果：
     - 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以经 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出
     - $r>s$

     那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 必线性相关
  5. 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，那么 $r\le s$
  6. 两个线性无关的等价的向量组，必含有相同个数的向量
  7. 任意 $n+1$ 个 n 维向量，必线性相关
- 向量组的秩
  1. 一向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组，如果这个部分组本身是线性无关的，并且从这个向量组中任意添一个向量（如果还有的话），所得的部分向量组都线性相关

     > 任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价

  2. 一个向量组的极大线性无关组可以有很多，但是它们都含有相同个数的向量
  3. **向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩**
  4. 一个向量组线性无关的充分必要条件为它的秩与它所含向量的个数相同
  5. 等价的向量组必有相同的秩
  6. 全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组，规定这样的向量组秩为零
  7. 矩阵的秩就等于它的行向量组的秩，也等于列向量组的秩
- 极大线性无关组的求法

  > 设向量组
  > $\alpha_1=(1,0,0,0),\alpha_2=(1,2,0,0),\alpha_3=(3,-1,0,0),\alpha_4=(1,4,5,0)$

> 将它们按行表示为一个矩阵 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\3&-1&0&0\\1&4&5&0\end{bmatrix}$ ，然后对该矩阵实施行初等变换，尝试将一些行全部化为0，但要注意不要交换两行，如：
> $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\3&-1&0&0\\1&4&5&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&-1&0&0\\0&4&5&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&5&0\end{bmatrix}$ ，此时已经不能将某一行化为0，结束，找到非零行对应的向量，这些向量就是一个极大线性无关组，
> $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ，非零行的个数就是极大线性无关组的秩

- 向量空间
  1. 设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合 V 为向量空间。所谓封闭，是指在集合 V 中可以进行向量的加法及数乘两种运算，且运算结果仍然在 V 中，即：若 $\alpha\in V,\beta\in V$，则 $\alpha+\beta\in V$ ；若 $\alpha\in V,\lambda\in R$，则 $\lambda\alpha\in V$
  2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的所有可能的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$ 所成的集合是非空的，且对两种运算封闭，这个向量空间叫做由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 生成的子空间，记作 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$
  3. 设有向量空间 V_1 及 V_2 ，若 $V_1\subseteq V_2$ ，就称 V_1 是 V_2 的子空间
  4. 设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$，且满足：

     (i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

     (ii) V 中任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

     那么，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就称为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间
  5. 如果在向量空间 V 中取定一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ，那么 V 中任一向量 x 可唯一的表示为 $x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$ ，数组 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 称为向量 x 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标，记为 $x=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)$。特别地，在 n 维向量空间 R^n 中取单位向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为基，则以 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为分量的向量 x 可以表示为 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$ ，可见向量在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 中的坐标就是该向量的分量。因此 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 叫做 R^n 中的自然基。
  6. **过渡矩阵的求法：**

     > 在 R^n 中取定两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ ，我们需要求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$
     >
     > $$\text{由 }(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A\Rightarrow(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}$$
     > $$\text{得 }(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}B$$
     > $$\text{即 }(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}B$$

> 记 $P=A^{-1}B$ ，则矩阵 P 称为从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵

7. **坐标变换公式的求法:**

> 设向量 x 在两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 与 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ ，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 P ，则
>
> $$x=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\ x=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$$
>
> 故
>
> $$A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$
>
> 即
>
> $$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$
>
> 这就是从旧坐标到新坐标的坐标变换公式

- 向量的内积

1. 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，令 $[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ ，则 $[x,y]$ 称为向量 x 与 y 的内积。内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数，用矩阵记号表示，当 x 与 y 都是列向量时，有 $[x,y]=x^Ty$

> 内积具有以下性质（其中 x,y,z 为 n 维向量，λ 为实数）
>
> - $[x,y]=[y,x]$
> - $[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$
> - $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$
> - 当 $x=0$ 时，$[x,x]=0$；当 $x\neq 0$ 时，$[x,x]>0$

2. 施瓦茨不等式 $[x,y]^2\leq[x,x][y,y]$

3. 令 $||x|| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$，$||x||$ 称为 n 维向量 x 的长度（或范数）

> 向量的长度具有以下性质：
>
> - 非负性：当 $x \neq 0$ 时，$||x|| > 0$；当 $x = 0$ 时，$||x|| = 0$
> - 齐次性：$||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$
>
> 当 $||x|| = 1$ 时，称 x 为单位向量。若 $\alpha \neq 0$，取 $x = \frac{\alpha}{||\alpha||}$ ，则 x 是一个单位向量，由 α 得到 x 的过程称为把向量 α 单位化。

4. 由施瓦茨不等式得 $-1 \leq \frac{[x,y]}{||x|| \, ||y||} \leq 1$ （当$||x|| \, ||y|| \neq 0$时），因此，当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时，定义 $\theta = arccos\frac{[x,y]}{||x|| \, ||y||}$ 为 n 维向量 x 与 y 的夹角。
5. 当 $[x,y] = 0$ 时，称向量 x 与 y 正交。显然，若 $x = 0$ ，则 x 与任何向量都正交。
6. 若 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关
7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一组基，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 两两正交，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 V 的一个**正交基**，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 还都是单位向量，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 V 的一个**标准正交基**
8. **施密特正交化：**

> 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，要求 V 的一个标准正交基。这也就是要找一组两两正交的单位向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，这样一个问题，称为把基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 标准正交化。
>
> 取
>
> $$\beta_1 = \alpha_1,$$
> $$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1,$$
> $$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2,$$
> $$\cdots\cdots$$
> $$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\beta_1, \alpha_r]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_r]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{r-1}, \alpha_r]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$$
>
> 容易验证 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 两两正交，且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，因此 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 就是 V 的一个正交基。
>
> 然后把它们单位化，即取
>
> $$e_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||}, e_2 = \frac{\beta_2}{||\beta_2||}, \cdots, e_r = \frac{\beta_r}{||\beta_r||}$$
>
> 就是 V 的一个标准正交基。

> 上述从线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 导出正交向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的过程称为施密特（Schmidt）正交化。它不仅满足 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价，还满足：对任何 k $(1\le k\le r)$，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 等价。

- 正交矩阵
    1. 如果 n 阶矩阵 A 满足 $A'A=E$，即 $A^{-1}=A'$，那么称 A 为正交矩阵，简称正交阵

        > - 由 $A'A=E$，取行列式得 $|A|^2=1$，即 $|A|=\pm 1$
        > - 若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1}=A'$ 也是正交矩阵
        > - 若 A,B 为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵

    2. 一个标准正交基到另一个标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵