矩阵

考纲要求

二、矩阵

矩阵的概念、矩阵的线性运算、矩阵的乘法、方阵的幂、方阵乘积的行列式、矩阵的转置、逆矩阵的概念和性质、矩阵可逆的充分必要条件、伴随矩阵、矩阵的初等变换、初等矩阵、矩阵的秩、矩阵的等价、分块矩阵及其运算。

- 考试要求
  1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质
  2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质
  3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵
  4. 理解矩阵初等变化的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的办法
  5. 了解分块矩阵及其运算

相关概念

- 矩阵的概念
  1. 由 sn 个数排成的 s 行（横的）n 列（纵的）的表 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$ 称为一个 $s \times n$ 矩阵。
  2. 如果两个矩阵都是 $s \times n$ 的，那么称这两个矩阵是同型的。
- 矩阵的运算
  1. 加法：对应元素相加，要求矩阵是同型的。
  2. 减法：对应元素相减，要求矩阵是同型的。

     > - 结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$
     > - 交换律：$A+B=B+A$
     > - 元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 O_{sn}，在不引起混淆的时候，可简单记为 O，显然有 $A+O=A$
     > - 对矩阵A的每个元素取相反数，称为矩阵A的负矩阵，记为$-A$，显然有 $A+(-A)=O$
     > - 秩$(A+B) \leq$ 秩$(A)+$秩(B)

3. 乘法：设 $A=(a_{ik})_{sn}, B=(b_{kj})_{nm}$，那么矩阵 $C=(c_{ij})_{sm}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$。也就是矩阵 C 的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 A 的第 i 行与第二个矩阵 B 的第 j 列的对应元素乘积的和。要求第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。

> - 结合律：$(AB)C=A(BC)$
> - 一般不满足交换律，即 $AB\neq BA$，一般不成立
> - 对于单位矩阵E，有 $AE=A, EA=A$
> - 分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$
> - $秩(AB)\leq min(秩(A),秩(B))$

4. 如果 $AB=BA$ 成立，那么称方阵 A,B 是可交换的

5. 矩阵的方幂：设 A 是一个 $n\times n$ 的方阵，定义 $\begin{cases}A^1=A\\A^{k+1}=A^k+1\end{cases}$，换句话说，$A^k$ 就是 k 个 A 连乘。

> - $A^kA^l=A^{k+l}$
> - $(A^k)^l=A^{kl}$
> - 由于矩阵乘法一般不适合交换律，因此 $(AB)^k$ 一般不等于 A^kB^k，只有当 A,B 是可交换的才成立

6. 数量乘法：矩阵 $\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn}\end{bmatrix}$ 称为矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 与数 k 的数量乘积，记为 kA。换句话说，用数 k 乘矩阵，就是把矩阵的每一个元素都乘上 k

> - $(k+l)A=kA+lA$
> - $k(A+B)=kA+kB$
> - $k(lA)=(kl)A$
> - $1A=A$
> - $k(AB)=(KA)B=A(kB)$

7. 转置：把一矩阵 A 的行列互换，所得到的矩阵称为 A 的转置，记为 A' 或 A^T。设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{bmatrix}$，所谓 A 的转置就是指矩阵 $A'=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn}\end{bmatrix}$，显然 $s\times n$ 的矩阵的转置是 $n\times s$ 矩阵

> - $(A')'=A$

> - $(A+B)'=A'+B'$
> - $(AB)'=B'A'$
> - $(kA)'=kA'$

8. 设一个 $n\times n$ 的矩阵 A，对其取行列式，记为 $|A|$，称为矩阵 A 的行列式

> - $|A|=|A'|$
> - $|\lambda A|=\lambda^n|A|$
> - $|AB|=|A||B|$
> - 虽然 $AB\neq BA$，但有 $|AB|=|BA|$

9. 设 A,B 是两个 $n\times n$ 的矩阵，那么 $|AB|=|A||B|$，即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积，可以推广到 m 次，即 $|A_1A_2A_3\cdots A_m|=|A_1||A_2||A_3|\cdots|A_m|$
10. 如果 $|A|\neq 0$ ，则称矩阵 A 是非退化的（非奇异矩阵）；如果 $|A|=0$，则称矩阵 A 是退化的（奇异矩阵）
11. 矩阵 AB 是退化的充分必要条件是 A,B 中至少有一个是退化的

- 矩阵的逆
  1. n 级方阵 A 称为可逆的，如果有 n 级方阵 B ，使得 $AB=BA=E$，则称 B 为 A 的逆，记为 A^{-1}
  2. 设 A_{ij} 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$ 称为 A 的伴随矩阵，由行列式按行展开的公式，可得 $AA^*=A^*A=\begin{bmatrix}d&0&\cdots&0\\0&d&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&d\end{bmatrix}=dE$，其中 $d=|A|$。如果 $d=|A|\neq 0$ ，那么可以得到 $A(\frac{1}{d}A^*)=(\frac{1}{d}A^*)A=E$
  3. 矩阵 A 是可逆的充分必要条件是 A 非退化（非奇异），而 $A^{-1}=\frac{1}{d}A^*,(d=|A|\neq 0)$

  > - $(A^{-1})^{-1}=A$
  > - $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

  4. 如果矩阵 A,B 可逆，那么 A',AB 也可逆，且 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

5. A 是一个 $s\times n$ 矩阵，如果 P 是 $s\times s$ 可逆矩阵， Q 是 $n\times n$ 可逆矩阵，那么 $秩(A)=秩(PA)=秩(AQ)$

- 矩阵的初等变换

1. 下面三种变换称为矩阵的初等行变换

   > 1. 对换两行
   > 2. 以数 $k\neq 0$ 乘某一行中的所有元素
   > 3. 把某一行的 k 倍加到另一行

   将行换成列，即可得到初等列变换。

   矩阵的初等行变换与初等列变换，统称初等变换。

2. 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵
3. 对一个 $s\times n$ 矩阵 A 作一初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 $s\times s$ 初等矩阵；对 A 作一初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 $n\times n$ 的初等矩阵

   > 例如矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，对换第一行与第二行变为 $A_1=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，等价于在矩阵 A 的左边乘上作相应变换的单位矩阵（即交换单位矩阵的第一行与第二行），即 $A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}A$

4. 矩阵 A,B 称为等价的，如果 B 可以由 A 经过一系列初等变换得到，记为 $A\sim B$

   > 矩阵之间的等价具有如下性质：
   >
   > - 反身性：$A\sim A$
   > - 对称性：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$
   > - 传递性：若 $A\sim B,B\sim C$，则 $A\sim C$

5. 任何一个 $s\times n$ 的矩阵 A 都与一个形式为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & & 0 & & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$ 的矩阵等价，它称为矩阵 A 的标准形，主对角线上 1 的个数等于矩阵 A 的秩（1的个数可以是零）
6. n 级矩阵 A 为可逆的充分必要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积 $A=Q_1Q_2\cdots Q_m$
7. 两个 $s\times n$ 矩阵 A,B 等价的充分必要条件为，存在可逆的 s 级矩阵 P 与可逆的 n 级矩阵 Q 使 $A=PBQ$
8. 可逆矩阵总可以经过一系列初等变换化为单位矩阵

9. 对于 n 阶方阵 A，在右侧扩充一个 n 阶单位矩阵 E，变为 $n\times 2n$ 的矩阵 $(A\ \ E)$，用初等行变换把它的左边一半化成 E，这时，右边的一半就是 A^{-1}

> 例如矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}$，扩充为 $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&4&0&1\end{bmatrix}$，作初等行变换将左侧一半化为单位阵
> $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&4&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&2&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&2&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$
> ，即可得到 $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

- 矩阵的秩

1. 矩阵的行秩是指矩阵行向量组的秩；矩阵的列秩就是指矩阵列向量组的秩
2. 矩阵的行秩等于列秩，统称为矩阵的秩，记为 $R(A)=n$ 或 $r(A)=n$
3. $n\times n$ 矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ 的行列式为零的充分必要条件是 A 的秩小于 n，若$r(A)=n$ 则称 A 为满秩矩阵，因此矩阵 A 可逆当且仅当其为满秩矩阵

> 矩阵秩的性质：
>
> - $0\leq r(A_{m\times n})\leq min(m,n)$
> - $r(A')=r(A)$
> - 若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$
> - 若P,Q 可逆，则 $r(PAQ)=r(A)$
> - $max(r(A),r(B))\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$，特别地，当 $B=b$ 为非零列向量时，有 $r(A)\leq r(A,b)\leq r(A)+1$
> - $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$
> - $r(AB)\leq min(r(A),r(B))$
> - 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $r(A)+r(B)\leq n$

4. 在一个 $s\times n$ 矩阵 A 中任意选定 k 行和 k 列，位于这些选定的行和列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 级行列式，称为 A 的一个 k 级子式。

> 例如矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 中，选第 1,3 行和第 3,4 列，它们交点上的元素所成的 2级行列式 $\begin{vmatrix}3&1\\0&5\end{vmatrix}=15$，就是一个 2级子式

5. 一矩阵的秩是 r 的充分必要条件为矩阵有一个 r 级子式不为零，同时所有的 $r+1$ 级子式全为零

6. 形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   的矩阵为阶梯形矩阵。它们的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在的下方全为零；如果该行全为零，则它的下面的行也全为零。

7. 任何一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵
8. 将矩阵 A 化为阶梯形矩阵，其中非零行的个数就是矩阵的秩

- **分块矩阵及运算**

1. 将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

> 例如将 3×4 矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ 划分为
>
> $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$，记为 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，其中
>
> $A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

2. 分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似

> - 设矩阵 A,B 的行数、列数相同，采用相同的分块法，有：
> $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix}$，其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数、列数相同，那么 $A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{lr} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{bmatrix}$
> - 设$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$，$\lambda$ 为数，那么 $\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{bmatrix}$
> - 设 A 为 $m\times l$ 矩阵，B 为 $l\times n$ 矩阵，分块成
> $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$，其中
> $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，那么

> $$AB=\begin{bmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ C_{s1} & \cdots & C_{sr}\end{bmatrix}$$，其中
> $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj},(i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r)$
>
> - 设 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{bmatrix}$，则 $A'=\begin{bmatrix}A'_{11} & \cdots & A'_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ A'_{s1} & \cdots & A'_{sr}\end{bmatrix}$
> - 设 A 为 n 阶方阵，若 A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零块，且在对角线上的子块都是方阵，即 $A=\begin{bmatrix}A_1 & & & O\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s\end{bmatrix}$，
>   其中 $A_i,(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角矩阵。分块对角矩阵的行列式具有性质：$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$，由此可知，若 $|A_i|\neq 0\ (i=1,2,\cdots,s)$，则 $|A|\neq 0$，并有
> $$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & & & O\\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1}\end{bmatrix}$$

- 特殊矩阵

  1. 单位矩阵

     形如 $\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ 的方阵称为单位矩阵，记为 E 或 I，或使用 $E=diag(1,1,\cdots,1)$ 来表示，其中 $diag$ 表示对角阵对角的元素

     > 常用性质：
     >
     > - $AE=A$，$EA=A$

  2. 数量矩阵

     设 k 为常数，则 kE 称为数量矩阵，$\begin{bmatrix}k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & k\end{bmatrix}$

  3. 对角矩阵

除主对角线元素外的其他所有元素为0的矩阵，称为对角矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，主对角线的元素可以为0或其他的数。对角矩阵可以记作 $diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

> 常用性质：
>
> - 两个对角矩阵的和、差、数乘、乘积运算的结果仍是对角矩阵
> - 两个对角矩阵 A, B 的乘积运算是可交换的，即 $AB = BA$
> - 对角矩阵 A 的行列式 $|A| = a_1 a_2 \cdots a_n$，即对角矩阵的行列式等于主对角线元素的乘积

4. 三角矩阵

主对角线以下的元素全为0的矩阵称为上三角矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，

主对角线以上的元素全为0的矩阵称为下三角矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

> 常用性质：
>
> - 两个上（下）三角矩阵的加法、减法、数乘、乘积运算的结果仍是上（下）三角矩阵
> - 上（下）三角矩阵的逆也是上（下）三角矩阵
> - 同时是上三角矩阵和下三角矩阵的一定是对角矩阵
> - 上三角矩阵的转置是下三角矩阵，反之亦然
> - 三角矩阵的行列式等于对角线元素的乘积
> - 三角矩阵的对角线元素就是特征值

5. 对称矩阵

对于方阵 A，如果 A 的转置与自身相同，则矩阵 A 为对称矩阵，即 $A = A'$

> 常用性质：
>
> - 对任意方阵 A，方阵 $A + A'$ 是对称矩阵
> - 对角矩阵都是对称矩阵
> - 两个对称矩阵 A, B，如果二者可交换，即 $AB = BA$，则 AB, BA 也是对称矩阵
> - 每个方阵都可以表示为两个对称矩阵的乘积
> - 如果 X 是对称矩阵，那么对于任意矩阵 A，AXA' 也是对称矩阵
> - 对称矩阵的特征值全是实数

6. 反对称矩阵

对于方阵 A ，如果 A 的转置与自身相反，则矩阵 A 为反对称矩阵，即 $A=-A'$

> 常用性质:
>
> - 反对称矩阵的对角线上元素全为0
> - 设 A, B 为反对称矩阵，则 $A+B, A-B$ 也是反对称矩阵
> - 设 A 为反对称矩阵，则 $A', \lambda A$ 也是反对称矩阵
> - 设 A, B 为反对称矩阵，则 $AB-BA$ 为对称矩阵
> - 奇数阶的反对称矩阵的行列式必为0
> - 反对称矩阵的特征值是0或者纯虚数