线性方程组

考纲要求

四、线性方程组

线性方程组的克拉默(Cramer)法则、齐次线性方程组有非零解的充分必要条件、非齐次线性方程组有解的充分必要条件、线性方程组解的性质和解的结构、齐次线性方程组的基础解系和通解、解空间、非齐次线性方程组的通解。

- 考试要求
  1. 会用克拉默法则
  2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件
  3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法
  4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念
  5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法

相关概念

- 线性方程组
  1. 设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$，其中 a_{ij} 是第 i 个方程的第 j 个未知数的系数，b_i 是第 i 个方程的常数项，$i=1,2,\cdots,m$； $j=1,2,\cdots,n$，当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，线性方程组 (1) 叫做 n 元**非齐次线性方程组**， 当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零时，(1) 式成为 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (2)$，叫做 n 元**齐次线性方程组**，(2) 也称为 (1) 的**导出组**
  2. 所谓方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 的一个解，就是指由 n 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 组成的有序数组，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 待入后，方程组中的每个等式都成立。方程组的解的全体称为它的解集合。如果两个方程组有相同的解集合，它们就称为**同解的**。方程组有解也称为相容，无解称为不相容。
  3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称为方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 的**系数矩阵**，矩阵

$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ 称为线性方程组的**增广矩阵**，如果记

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，那么方程组可以表示为 $Ax=b$

- 克拉默法则

  1. 含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$，如果它的系数矩阵

     $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的行列式不等于零，即 $|A|\neq 0$，那么方程组有唯一解

     $x_1=\frac{|A_1|}{|A|},x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\cdots,x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$，其中 $A_j\ \ (j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数矩阵 A 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶矩阵，即

     $A_j=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

- **线性方程组有解的判定**

  1. n 个未知数 n 个**非齐次线性方程组** $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的系数矩阵

     $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，如果 $|A|\neq 0$ 那么方程组有唯一解（克拉默法则）

  2. n 个未知数 n 个**齐次线性方程组** $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 必有零解，即

     $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 满足该方程组。记其系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，

     如果 $|A|\neq 0$，由克拉默法则得该齐次线性方程组只有唯一解，那就是零解；如果 $|A|=0$，它才有非零解。因此齐次线性方程组当 $|A|\neq 0$ 是只有零解，换句话说，如果齐次线性方程组有非零解，那么必有 $|A|=0$

  3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ 中，如果 $m<n$，那么它必有非零解（消元法可得）

4. 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 有解的充分必要条件为它的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ 有相同的秩，即 $r(A)=r(\overline{A})$

5. 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$，
   - 无解的充分必要条件是 $r(A)<r(\overline{A})$；
   - 有唯一解的充分必要条件是 $r(A)=r(\overline{A})=n$
   - 有无限多解的充分必要条件是 $r(A)=r(\overline{A})<n$

- 求解线性方程组的消元法
  1. - 用一个非零的数乘某一方程
     - 把一个方程的倍数加到另一个方程
     - 互换两个方程的位置

     以上三个变换称为**线性方程组的初等变换**。消元的过程就是反复实施初等变换的过程。
  2. > 对于方程组
     >
     > $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$$
     >
     > 如果 x_1 的系数 $a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1}$ 全为零，那么方程组对 x_1 没有任何限制，x_1 就可以取任意值，而方程组可以看作 $x_2,\cdots,x_n$ 的方程组来解。如果 x_1 的系数不全为零，那么利用初等变换3，可以设 $a_{11}\neq 0$。利用初等变换2，分别地把第一个方程的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程 $(i=2,\cdots,m)$，于是方程组 (1) 就变成
     >
     > $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \qquad\quad \cdots\cdots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m, \end{cases} \quad (2)$$
     >
     > 其中 $a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad i=2,\cdots,m, \;\; j=2,\cdots,n$
     >
     > 这样解方程组 (1) 的问题就归结为解方程组
     >
     > $$\begin{cases} a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2, \\ \cdots\cdots \\ a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m, \end{cases} \quad (3)$$

的问题，显然方程组 (3) 的一个解，代入方程组 (2) 的第一个方程，就能够解出 x_1 的值。这就是说方程组 (2) 有解的充分必要条件是方程组 (3) 有解，而方程组 (2) 与方程组 (1) 是同解的，因此，方程组 (1) 有解的充分必要条件是方程组 (3) 有解。

对方程组 (3) 重复上述步骤，最终得到一个阶梯形方程组，不妨设所得的方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $c_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\cdots,r$，方程组 (4) 中的 $0=0$ 这样的一些恒等式可能出现，也可能不出现，去掉不影响解。方程组 (1) 与方程组 (4) 是同解的。

现在考察方程组 (4) 的解：

- 如果 $d_{r+1}\neq 0$ ，那么等式不可能成立，因此方程组无解
- 如果 $d_{r+1}=0$
  1. 当 $r=n$ 时，阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n=d_r \end{cases} \tag{5}$$

  其中 $c_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$，从最后一个方程开始 $x_n,x_{n-1},\cdots,x_1$ 的值就可以逐一地唯一确定了。这个情形，方程组 (5) ，也就是方程组 (1) 有唯一解。

  > 例如方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4 \\ 2x_1+x_2+4x_3=5 \end{cases}$ ，经过一系列初等变换后，它变成了阶梯形方程组
  >
  > $$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ \qquad 2x_2-x_3=4 \\ \qquad\qquad x_3=-6 \end{cases}$$
  >
  > 把 $x_3=-6$ 代入第二个方程，得 $x_2=-1$，再把 $x_3=-6,x_2=-1$ 代入第一个方程，即得 $x_1=9$，这就是说，上述方程组有唯一的解 $(9,-1,-6)$

  2. 当 $r<n$ 时，阶梯形方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r \end{cases}$$

  其中 $c_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\cdots,r$，把它改写成

$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ \qquad\quad c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases} \tag{6}$$

> 由此可见，任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组值，就唯一地定出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值。一般地，由方程组 (6) 我们可以把 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 通过 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表示出来，这样一组表达式称为方程组 (1) 的一般解，而 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为**一组自由未知量**
>
> > 例如，方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\4x_1-2x_2+5x_3=4\\2x_1-x_2+4x_3=-1\end{cases}$，用初等变换消去 x_1，得
> >
> > $$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\ \qquad\qquad -x_3=2\\ \qquad\qquad\quad x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 再施行一次初等变换，得
> >
> > $$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\ \qquad\qquad\quad x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 改写一下
> >
> > $$\begin{cases}2x_1+3x_3=1+x_2\\ \qquad\quad x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 最后得
> >
> > $$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(7+x_2),\\x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 这就是方程组的一般解，其中 x_2 是自由未知量。
>
> 3. $r>n$ 的情形是不可能出现的

3. > 对于线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$，写出其增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}$，使用矩阵的初等变换，将该增广矩阵转化为行阶梯形矩阵，然后从最后一个非零行开始，逐渐求解。

- 齐次线性方程组解的结构
  1. 设 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ 是一齐次线性方程组，它的解所成的集合具有下面两个重要的性质：
     - 两个解的和还是方程组的解
     - 一个解的倍数还是方程组的解
  2. 齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ (1) 的一组解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 称为一个**基础解系**，如果
     - (1) 的任一个解都能表成 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 的线性组合

- $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关

3. 在齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于 $n-r$，这里 r 表示系数矩阵的秩（$n-r$ 也就是**自由未知量的个数**）

> 在前面的消元法步骤中，当 $r<n$ 时我们可以将齐次线性方程组化为阶梯形
>
> $$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases}$$
>
> 如果分别用 $n-r$ 组数 $(1,0,\cdots,0)$，$(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)$ 来代替自由未知量 $(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n)$，就得出方程组的 $n-r$ 个解
>
> $$\begin{cases} \eta_1 = (c_{11},\cdots,c_{1r},1,0,\cdots,0), \\ \eta_2 = (c_{21},\cdots,c_{2r},0,1,\cdots,0), \\ \cdots\cdots \\ \eta_{n-r} = (c_{n-r,1},\cdots,c_{n-r,r},0,0,\cdots,1) \end{cases}$$
>
> 显然这 $n-r$ 个解是线性无关的，并且齐次线性方程组的任意解都可以由它们线性表出，因此这 $n-r$ 个解就是齐次线性方程组的一个基础解系

4. 任何一个线性无关的与某一个基础解系等价的向量组都是基础解系（基础解系不唯一，它们互相等价）

- 非齐次线性方程组解的结构
  1. 设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)，如果把常数项换成0，就得到一个齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ (2)，这个齐次线性方程组称为方程组 (1) 的导出组
     - 线性方程组 (1) 的两个解的差是导出组 (2) 的解
     - 线性方程组 (1) 的一个解与它的导出组 (2) 的一个解之和还是这个线性方程组的解
  2. 如果 γ_0 是方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 的一个特解，那么方程组的任一个解 γ 都可以表成 $y=\gamma_0+\eta$，其中 η 是导出组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ 的一个解。因此，对于方程组的任一个特解 γ_0，当 η 取遍它的导出组的全部解时，就得到了方程组的所有解。
  3. 在方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 有解的条件下，解是唯一的充分必要条件是它的导出组只有零解

- 求解方程组的一般方法：

例如：求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

写出增广矩阵，并进行初等变换化为行阶梯形

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组有解，并有 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$ ，

取 $x_2 = x_4 = 0$ ，则 $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$，即得方程组一个特解 $\eta^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^T$，

将行阶梯矩阵的最后一列全部变为0，即得到对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$ ，

取 $x_2 = 1, x_4 = 0$，得 $x_1 = 1, x_3 = 0$；取 $x_2 = 0, x_4 = 1$，得 $x_1 = 1, x_3 = 2$

因此齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1 = (1, 1, 0, 0)^T$，$\xi_2 = (1, 0, 2, 1)^T$

于是方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta^*$，$(k_1, k_2 \in R)$ ，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (k_1, k_2 \in R)$$