矩阵的特征值和特征向量

考纲要求

五、矩阵的特征值和特征向量

矩阵的特征值和特征向量的概念及性质、相似变换及相似矩阵的概念及性质、矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵、实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵。

- 考试要求
  1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量
  2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法
  3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质

相关概念

- **矩阵的特征值与特征向量**
  1. **设 A 是 n 阶矩阵，如果对于数 λ_0 ，存在一个非零向量 ξ ，使得 $A\xi=\lambda_0\xi$，那么 λ_0 称为 A 的一个特征值，而 ξ 称为 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量。**
  2. 如果 ξ 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，那么 ξ 的任何一个非零倍数 $k\xi$ 也是属于 λ_0 的特征向量，因此**特征向量不是被特征值所唯一确定的，但一个特征向量只能对应于一个特征值**
  3. > 若记 $\xi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ ，则 $A\xi=\lambda_0\xi$ 也可以写成
     >
     > $$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$
     >
     > 或

> $$(\lambda_0 E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$
>
> 这说明特征向量 ξ 满足齐次方程组
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda_0 x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda_0 x_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda_0 x_n \end{cases}$$
>
> 即
>
> $$\begin{cases} (\lambda_0 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0, \\ -a_{21}x_1 + (\lambda_0 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - (\lambda_0 - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$
>
> 由于 $\xi \neq 0$，而齐次线性方程组有非零解的充分必要条件为它的系数行列式为零，即
>
> $$|\lambda_0 E - A| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0 - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

4. 设 A 是一个 n 级矩阵，λ 是一个数字，矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式

   $$|\lambda_0 E - A| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0 - a_{nn} \end{vmatrix}$$

   称为 A 的特征多项式，这是一个 n 次多项式
5. n 阶矩阵 A 的特征值就是特征多项式的根，将特征值代入方程组，求出其基础解系，它就是属于这个特征值的几个线性无关的特征向量

6. **矩阵 A 的全体特征值的和等于 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，即对角线元素之和**（称为**矩阵的迹**）；**矩阵 A 的全体特征值的乘积等于矩阵的行列式 $|A|$**
7. **若 λ 是矩阵 A 的特征值，若 A 可逆，那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值**
8. **若 λ 是矩阵 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值；$\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值（$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 是 λ 的多项式，$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ 是矩阵 A 的多项式）**
9. 哈密顿-凯莱定理：设 A 是一个 n 阶矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，则 $f(A)=0$
10. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 线性无关。这也就是说不同特征值对应的特征向量是线性无关的
11. n 阶矩阵 A，设 λ_1 是 A 一个特征值，$\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1s}$ 是特征值 λ_1 的线性无关的特征向量， λ_2 也是 A 一个特征值，$\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2r}$ 是特征值 λ_2 的线性无关的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$ ，那么向量 $\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1s},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2r}$ 也是线性无关的。 这表明对应于两个不同特征值的线性无关的特征向量组，合起来仍是线性无关的。这一结论对于 $m(m\geq 2)$ 个特征值的情形也成立。

- 相似矩阵

1. 设 A,B 为两个 n 级矩阵，如果可以找到 n 级可逆矩阵 X，使得 $B=X^{-1}AX$，就说 A 相似于 B，记作 $A\sim B$

> - 反身性：$A\sim A$
> - 对称性：如果 $A\sim B$，那么 $B\sim A$
> - 传递性：如果 $A\sim B,B\sim C$，那么 $A\sim C$

2. 相似的矩阵有相同的特征多项式（因此也有相同的特征值）。但是特征多项式相同的矩阵不一定相似

3. 若 n 阶矩阵 A 与对角矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 即是 A 的 n 个特征值

- 对角矩阵

1. 形如 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的矩阵称为对角矩阵

> 对于对角矩阵，很容易计算幂和多项式，即：
>
> $\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$，
> $\varphi(\Lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}$

2. 把矩阵 A 对角化，就说寻找可逆矩阵 P，使得 $A = P^{-1}\Lambda P$ ，其中 Λ 是一个对角矩阵

3. n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量，且对角矩阵的对角线元素就是矩阵 A 的特征值

4. **对角化的计算过程：**

> 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求可逆矩阵 P 使得
> $P^{-1}AP = \Lambda$，其中 Λ 是对角阵。
>
> 首先列出特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

所以特征值为 $\lambda_1=-1$（二重根）, $\lambda_2=5$

将特征值 -1 代入齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-1)x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1+(\lambda-1)x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2+(\lambda-1)x_3=0\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_1=-1$ 的两个线性无关的特征向量为 ξ_1,ξ_2

再将特征值 5 代入得

$$\begin{cases}4x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1+4x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_2=5$ 的特征向量为 ξ_3

将特征向量拼成一个矩阵

$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，将对应的特征值变为对角阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\Lambda$，这样我们就将矩阵 A 对角化了

- 实对称矩阵

  1. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A'=A$（$A^T=A$），即 A 的转置等于 A，那么称矩阵 A 为对称矩阵

     > - 对称矩阵的特征值为实数
     > - 设 λ_1,λ_2 是对称矩阵 A 的两个特征值，ξ_1,ξ_2 是对应的特征向量，若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 ξ_1 与 ξ_2 正交

  2. 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 P（$P^TP=E$，也即 $P^T=P^{-1}$），使 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵
  3. 设 A 为 n 阶对称矩阵，λ 是 A 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $\lambda E-A$ 的秩 $r(\lambda E-A)=n-k$，从而对应特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量
  4. **求一个正交矩阵使对称矩阵变为对角阵：**

     > 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是对角阵
     >
     > （相对于前文中对角化计算步骤，这里需要求一个正交矩阵，考虑到对称矩阵不同特征值的特征向量是正交的，因此我们只需要将一个特征值的不同特征向量变为正交的即可，只需要应用施密特正交化。）
     >
     > 列出特征多项式
     >
     > $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$
     >
     > 所以特征值为 $\lambda_1=-1$（二重根）$,\lambda_2=5$
     >
     > 将特征值 -1 代入齐次线性方程组
     >
     > $$\begin{cases}(\lambda-1)x_1-2x_2-2x_3=0,\\-2x_1+(\lambda-1)x_2-2x_3=0,\\-2x_1-2x_2+(\lambda-1)x_3=0\end{cases}$$
     >
     > 得到

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_1 = -1$ 的两个线性无关的特征向量为 ξ_1, ξ_2，对特征向量 ξ_1, ξ_2 应用施密特正交化：

取

$$\eta_1 = \xi_1$$

$$\eta_2 = \xi_2 - \frac{[\eta_1, \xi_2]}{[\eta_1, \eta_1]}\eta_1$$

则 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，然后单位化

$e_1 = \frac{\eta_1}{||\eta_1||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, e_2 = \frac{\eta_2}{||\eta_2||} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

再将特征值 5 代入得

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_2 = 5$ 的特征向量为 ξ_3，单位化得 $e_3 = \frac{\xi_3}{||\xi_3||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

> 将正交单位化的特征向量拼成一个矩阵 $P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，将对应的特征值变为对角阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$
>
> 则 $P^{-1}AP=\Lambda$，这样我们就将矩阵 A 对角化了，且 P 是正交矩阵

- 矩阵的幂
  1. 对于 n 阶矩阵 A （可对角化），若找到可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 为对角矩阵，那么 $A^k=P^{-1}\Lambda^k P$