行列式

考纲要求

一、行列式

行列式的概念和基本性质、行列式按行（列）展开定理

- 考试要求
  1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质
  2. 会应用行列数的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式

本章概念

- 逆序数
  1. 由 $1,2,3,...,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

     > 如1234是一个四级排列，45321是一个五级排列。n 级排列一共有 $n!$ 个。

  2. **在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。排列的逆序数记为$\tau(j_1j_2...j_n)$**

     > 如2431中，21，43，41，31是逆序，2431的逆序数就是4

  3. 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列。
  4. 交换排列中的两个数，改变逆序数的奇偶性。
  5. 在全部n级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个。
- n **级行列式**
  1. n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，带正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，带负号。因此可以写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$
  2. 行列互换（即转置），行列式不变，$|A|=|A^T|$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{21} & ka_{22} & & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，即一行的公因子可以提出去，或者说一个数乘行列式的一行就相当于用这个数乘以行列式。
4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & & b_3+c_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，这就是说，如果某一行是两个数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式除这一行外全与原来的行列式的对应行一样。
5. 如果行列式中有两行（列）相同，那么行列式为 0
6. 如果行列式中有两行（列）成比例，那么行列式为 0
7. 把一行（列）的倍数加到另一行（列），行列式不变
8. 交换行列式中两行（列）的位置，行列式反号
9. **行列具有同等地位，因此上述所有性质都可以对列使用。**

- 行列式的计算
  1. 上三角矩阵、下三角矩阵的行列式等于对角线元素的乘积。
  2. 计算行列式的值需要反复应用上述性质进行化简，或者转变为上、下三角形的矩阵
- **行列式按行（列）展开**
  1. 在行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的元素位置不变，构成一个 $n-1$ 级的行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij} 。记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**
  2. 行列式等于某一行（列）的元素与相应的代数余子式的乘积之和，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}$
  3. **在行列式中，一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为0**

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ ，称为 n 级的范德蒙德行列式，它的值等于这 n 个数的所有可能的差 $a_i - a_j(1 \leq j < i \leq n)$ 的乘积，因此范德蒙德行列式为0的充分必要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中至少有两个相等。

矩阵

考纲要求

二、矩阵

矩阵的概念、矩阵的线性运算、矩阵的乘法、方阵的幂、方阵乘积的行列式、矩阵的转置、逆矩阵的概念和性质、矩阵可逆的充分必要条件、伴随矩阵、矩阵的初等变换、初等矩阵、矩阵的秩、矩阵的等价、分块矩阵及其运算。

- 考试要求
  1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质
  2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质
  3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵
  4. 理解矩阵初等变化的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的办法
  5. 了解分块矩阵及其运算

相关概念

- 矩阵的概念
  1. 由 sn 个数排成的 s 行（横的）n 列（纵的）的表 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$ 称为一个 $s \times n$ 矩阵。
  2. 如果两个矩阵都是 $s \times n$ 的，那么称这两个矩阵是同型的。
- 矩阵的运算
  1. 加法：对应元素相加，要求矩阵是同型的。
  2. 减法：对应元素相减，要求矩阵是同型的。

     > - 结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$
     > - 交换律：$A+B=B+A$
     > - 元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 O_{sn} ，在不引起混淆的时候，可简单记为 O ，显然有 $A+O=A$
     > - 对矩阵A的每个元素取相反数，称为矩阵A的负矩阵，记为$-A$，显然有 $A+(-A)=O$
     > - $秩(A+B) \leq 秩(A)+秩(B)$

3. 乘法：设 $A=(a_{ik})_{sn}, B=(b_{kj})_{nm}$，那么矩阵 $C=(c_{ij})_{sm}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$。也就是矩阵 C 的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 A 的第 i 行与第二个矩阵 B 的第 j 列的对应元素乘积的和。要求第一个矩阵的列数必须等于第二个矩阵的行数。

> - 结合律：$(AB)C=A(BC)$
> - 一般不满足交换律，即 $AB\neq BA$，一般不成立
> - 对于单位矩阵E，有 $AE=A, EA=A$
> - 分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$
> - $秩(AB)\leq min(秩(A),秩(B))$

4. 如果 $AB=BA$ 成立，那么称方阵 A,B 是可交换的

5. 矩阵的方幂：设 A 是一个 $n\times n$ 的方阵，定义 $\begin{cases}A^1=A\\A^{k+1}=A^k+1\end{cases}$，换句话说，$A^k$ 就是 k 个 A 连乘。

> - $A^kA^l=A^{k+l}$
> - $(A^k)^l=A^{kl}$
> - 由于矩阵乘法一般不适合交换律，因此 $(AB)^k$ 一般不等于 A^kB^k，只有当 A,B 是可交换的才成立

6. 数量乘法：矩阵 $\begin{bmatrix}ka_{11}&ka_{12}&\cdots&ka_{1n}\\ka_{21}&ka_{22}&\cdots&ka_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{s1}&ka_{s2}&\cdots&ka_{sn}\end{bmatrix}$ 称为矩阵 $A=(a_{ij})_{sn}$ 与数 k 的数量乘积，记为 kA。换句话说，用数 k 乘矩阵，就是把矩阵的每一个元素都乘上 k

> - $(k+l)A=kA+lA$
> - $k(A+B)=kA+kB$
> - $k(lA)=(kl)A$
> - $1A=A$
> - $k(AB)=(KA)B=A(kB)$

7. 转置：把一矩阵 A 的行列互换，所得到的矩阵称为 A 的转置，记为 A' 或 A^T。设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{bmatrix}$，所谓 A 的转置就是指矩阵 $A'=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{s1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{s2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{sn}\end{bmatrix}$，显然 $s\times n$ 的矩阵的转置是 $n\times s$ 矩阵

> - $(A')'=A$

> - $(A+B)'=A'+B'$
> - $(AB)'=B'A'$
> - $(kA)'=kA'$

8. 设一个 $n\times n$ 的矩阵 A，对其取行列式，记为 $|A|$，称为矩阵 A 的行列式

> - $|A|=|A'|$
> - $|\lambda A|=\lambda^n|A|$
> - $|AB|=|A||B|$
> - 虽然 $AB\neq BA$，但有 $|AB|=|BA|$

9. 设 A,B 是两个 $n\times n$ 的矩阵，那么 $|AB|=|A||B|$，即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积，可以推广到 m 次，即 $|A_1A_2A_3\cdots A_m|=|A_1||A_2||A_3|\cdots|A_m|$
10. 如果 $|A|\neq 0$，则称矩阵 A 是非退化的（非奇异矩阵）；如果 $|A|=0$，则称矩阵 A 是退化的（奇异矩阵）
11. 矩阵 AB 是退化的充分必要条件是 A,B 中至少有一个是退化的

- 矩阵的逆
  1. n 级方阵 A 称为可逆的，如果有 n 级方阵 B，使得 $AB=BA=E$，则称 B 为 A 的逆，记为 A^{-1}
  2. 设 A_{ij} 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$ 称为 A 的伴随矩阵，由行列式按行展开的公式，可得 $AA^*=A^*A=\begin{bmatrix}d&0&\cdots&0\\0&d&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&d\end{bmatrix}=dE$，其中 $d=|A|$。如果 $d=|A|\neq 0$，那么可以得到 $A(\frac{1}{d}A^*)=(\frac{1}{d}A^*)A=E$
  3. 矩阵 A 是可逆的充分必要条件是 A 非退化（非奇异），而 $A^{-1}=\frac{1}{d}A^*,(d=|A|\neq 0)$

  > - $(A^{-1})^{-1}=A$
  > - $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

  4. 如果矩阵 A,B 可逆，那么 A',AB 也可逆，且 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

5. A 是一个 $s \times n$ 矩阵，如果 P 是 $s \times s$ 可逆矩阵，Q 是 $n \times n$ 可逆矩阵，那么 $秩(A) = 秩(PA) = 秩(AQ)$

- 矩阵的初等变换

1. 下面三种变换称为矩阵的初等行变换

   > 1. 对换两行
   > 2. 以数 $k \neq 0$ 乘某一行中的所有元素
   > 3. 把某一行的 k 倍加到另一行

   将行换成列，即可得到初等列变换。

   矩阵的初等行变换与初等列变换，统称初等变换。

2. 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵

3. 对一个 $s \times n$ 矩阵 A 作一初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 $s \times s$ 初等矩阵；对 A 作一初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 $n \times n$ 的初等矩阵

   > 例如矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，对换第一行与第二行变为 $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，等价于在矩阵 A 的左边乘上作相应变换的单位矩阵（即交换单位矩阵的第一行与第二行），即 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$

4. 矩阵 A, B 称为等价的，如果 B 可以由 A 经过一系列初等变换得到，记为 $A \sim B$

   > 矩阵之间的等价具有如下性质：
   >
   > - 反身性：$A \sim A$
   > - 对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$
   > - 传递性：若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$

5. 任何一个 $s \times n$ 的矩阵 A 都与一个形式为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 的矩阵等价，它称为矩阵 A 的标准形，主对角线上 1 的个数等于矩阵 A 的秩（1的个数可以是零）

6. n 级矩阵 A 为可逆的充分必要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积 $A = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$

7. 两个 $s \times n$ 矩阵 A, B 等价的充分必要条件为，存在可逆的 s 级矩阵 P 与可逆的 n 级矩阵 Q 使 $A = PBQ$

8. 可逆矩阵总可以经过一系列初等变换化为单位矩阵

9. 对于 n 阶方阵 A，在右侧扩充一个 n 阶单位矩阵 E，变为 $n\times 2n$ 的矩阵 $(A\ \ E)$，用初等行变换把它的左边一半化成 E，这时，右边的一半就是 A^{-1}

> 例如矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}$，扩充为 $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&4&0&1\end{bmatrix}$，作初等行变换将左侧一半化为单位阵
> $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&4&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&2&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&2&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$
> ，即可得到 $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

- 矩阵的秩

1. 矩阵的行秩是指矩阵行向量组的秩；矩阵的列秩就是指矩阵列向量组的秩
2. 矩阵的行秩等于列秩，统称为矩阵的秩，记为 $R(A)=n$ 或 $r(A)=n$
3. $n\times n$ 矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ 的行列式为零的充分必要条件是 A 的秩小于 n，若$r(A)=n$ 则称 A 为满秩矩阵，因此矩阵 A 可逆当且仅当其为满秩矩阵

> 矩阵秩的性质：
>
> - $0\le r(A_{m\times n})\le min(m,n)$
> - $r(A')=r(A)$
> - 若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$
> - 若P,Q 可逆，则 $r(PAQ)=r(A)$
> - $max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$，特别地，当 $B=b$ 为非零列向量时，有 $r(A)\le r(A,b)\le r(A)+1$
> - $r(A+B)\le r(A)+r(B)$
> - $r(AB)\le min(r(A),r(B))$
> - 若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$

4. 在一个 $s\times n$ 矩阵 A 中任意选定 k 行和 k 列，位于这些选定的行和列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 级行列式，称为 A 的一个 k 级子式。

> 例如矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 中，选第 1,3 行和第 3,4 列，它们交点上的元素所成的 2级行列式 $\begin{vmatrix}3&1\\0&5\end{vmatrix}=15$，就是一个 2级子式

5. 一矩阵的秩是 r 的充分必要条件为矩阵有一个 r 级子式不为零，同时所有的 $r+1$ 级子式全为零

6. 形如
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
的矩阵为阶梯形矩阵。它们的任一行从第一个元素起至该行的第一个非零元素所在的下方全为零；如果该行全为零，则它的下面的行也全为零。
7. 任何一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵
8. 将矩阵 A 化为阶梯形矩阵，其中非零行的个数就是矩阵的秩

- **分块矩阵及运算**
  1. 将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成许多小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

> 例如将 3×4 矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$ 划分为
> $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$，记为 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，其中
> $A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, A_{21}=[a_{31} \quad a_{32}], A_{22}=[a_{33} \quad a_{34}]$

  2. 分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则类似

> - 设矩阵 A,B 的行数、列数相同，采用相同的分块法，有：
> $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix}$，其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数、列数相同，那么 $A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{lr} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{bmatrix}$
> - 设$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$，$\lambda$ 为数，那么 $\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{bmatrix}$
> - 设 A 为 $m\times l$ 矩阵，B 为 $l\times n$ 矩阵，分块成
> $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$，其中
> $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，那么

> $AB=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix}$，其中
> $C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj}, (i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r)$
>
> - 设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$，则 $A'=\begin{bmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{s1} & \cdots & A'_{sr} \end{bmatrix}$
> - 设 A 为 n 阶方阵，若 A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，其余子块都为零块，且在对角线上的子块都是方阵，即 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s \end{bmatrix}$，其中 $A_i,(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称 A 为分块对角矩阵。分块对角矩阵的行列式具有性质：$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$，由此可知，若 $|A_i|\neq 0\ \ (i=1,2,\cdots,s)$，则 $|A|\neq 0$，并有 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & O \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$

- 特殊矩阵

  1. 单位矩阵

     形如 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 的方阵称为单位矩阵，记为 E 或 I，或使用 $E=diag(1,1,\cdots,1)$ 来表示，其中 $diag$ 表示对角阵对角的元素

     > 常用性质：
     >
     > - $AE=A$，$EA=A$

  2. 数量矩阵

     设 k 为常数，则 kE 称为数量矩阵，$\begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$

  3. 对角矩阵

除主对角线元素外的其他所有元素为0的矩阵，称为对角矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，主对角线的元素可以为0或其他的数。对角矩阵可以记作 $diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

> 常用性质：
>
> - 两个对角矩阵的和、差、数乘、乘积运算的结果仍是对角矩阵
> - 两个对角矩阵 A, B 的乘积运算是可交换的，即 $AB = BA$
> - 对角矩阵 A 的行列式 $|A| = a_1 a_2 \cdots a_n$，即对角矩阵的行列式等于主对角线元素的乘积

4. 三角矩阵

主对角线以下的元素全为0的矩阵称为上三角矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，

主对角线以上的元素全为0的矩阵称为下三角矩阵，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

> 常用性质：
>
> - 两个上（下）三角矩阵的加法、减法、数乘、乘积运算的结果仍是上（下）三角矩阵
> - 上（下）三角矩阵的逆也是上（下）三角矩阵
> - 同时是上三角矩阵和下三角矩阵的一定是对角矩阵
> - 上三角矩阵的转置是下三角矩阵，反之亦然
> - 三角矩阵的行列式等于对角线元素的乘积
> - 三角矩阵的对角线元素就是特征值

5. 对称矩阵

对于方阵 A，如果 A 的转置与自身相同，则矩阵 A 为对称矩阵，即 $A = A'$

> 常用性质：
>
> - 对任意方阵 A，方阵 $A + A'$ 是对称矩阵
> - 对角矩阵都是对称矩阵
> - 两个对称矩阵 A, B，如果二者可交换，即 $AB = BA$，则 AB, BA 也是对称矩阵
> - 每个方阵都可以表示为两个对称矩阵的乘积
> - 如果 X 是对称矩阵，那么对于任意矩阵 A，AXA' 也是对称矩阵
> - 对称矩阵的特征值全是实数

6. 反对称矩阵

对于方阵 A ，如果 A 的转置与自身相反，则矩阵 A 为反对称矩阵，即 $A=-A'$

> 常用性质：
>
> - 反对称矩阵的对角线上元素全为0
> - 设 A,B 为反对称矩阵，则 $A+B,A-B$ 也是反对称矩阵
> - 设 A 为反对称矩阵，则 $A',\lambda A$ 也是反对称矩阵
> - 设 A,B 为反对称矩阵，则 $AB-BA$ 为对称矩阵
> - 奇数阶的反对称矩阵的行列式必为0
> - 反对称矩阵的特征值是0或者纯虚数

向量

考纲要求

三、向量

向量的概念、向量的线性组合与线性表示、向量组的线性相关与线性无关、向量组的极大线性无关组、等价向量组、向量组的秩、向量组的秩与矩阵的秩之间的关系、向量空间及其相关概念、n维向量空间的基变换和坐标变换、过渡矩阵、向量的内积、线性无关向量组的正交规范化方法、规范正交基、正交矩阵及其性质。

- 考试要求
  1. 理解n维向量、向量的线性组合与线性表示的概念
  2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法
  3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩
  4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系
  5. 了解n维向量空间、子空间、基底、维数、坐标等概念
  6. 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵
  7. 了解内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法
  8. 了解规范正交基、正交矩阵的概念以及它们的性质

相关概念

- 向量的概念
  1. 所谓 n 维向量就是由 n 个数组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ，a_i 称为向量的分量
  2. 如果 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的对应分量都相等，即 $a_i = b_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 就称这两个向量是相等的，记作 $\alpha = \beta$
  3. 向量 $\gamma = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的和，记为 $\gamma = \alpha + \beta$

     > 向量加法满足：
     >
     > - 交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$
     > - 结合律：$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

  4. 分量全为零的向量 $(0, 0, \cdots, 0)$ 称为零向量，记为 0；向量 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的复向量，记为 $-\alpha$

     > - $\alpha + 0 = \alpha$
     > - $\alpha + (-\alpha) = 0$

  5. 设 k 为常数，向量 $(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与数 k 的数量乘积，记为 $k\alpha$

> - $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
> - $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
> - $k(l\alpha)+(kl)\alpha$
> - $1\alpha=\alpha$
> - $0\alpha=0$
> - $(-1)\alpha=-\alpha$
> - $k0=0$
> - 如果 $k\neq 0,\alpha\neq 0$，那么 $k\alpha\neq 0$

6. 一些向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 称为向量组，若从中取出一些向量，则称为向量组的部分组

- 线性相关性

1. 向量 α 称为向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合，如果有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ ，使 $\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s$。当向量 α 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的一个线性组合时，我们也可以说 α 可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ **线性表出。**

> - 任一个 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都是向量组 $\begin{cases}\epsilon_1=(1,0,\cdots,0)\\ \epsilon_2=(0,1,\cdots,0)\\ \cdots\cdots\\ \epsilon_n=(0,0,\cdots,1)\end{cases}$ 的一个线性组合，因为 $\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$ ，向量 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$ 称为 n 维单位向量
> - 零向量是任一向量组的线性组合（只要系数全取0就行）
> - 向量 α 能由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出的充分必要条件是矩阵 $A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的秩等于矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\alpha)$ 的秩

2. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 2)$ 中有一个向量可以由其余的向量线性表出，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 称为线性相关的，否则称为是线性无关的。

> 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是，它所构成的矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的秩小于向量个数 s， 即 $r(A)<s$；线性相关的充分必要条件是 $r(A)=s$

3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 1)$ 称为线性相关，如果有不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ ，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$
4. 一向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\geq 1)$ 线性无关，如果由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 可以推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$

- 向量组的等价

1. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 中每一个向量 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,t)$ 都可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 就称为可以经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出。如果两个向量组互相可以线性表出，它们就称为等价。

> - 反身性：每一个向量组都与它自身等价
> - 对称性：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，那么向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 等价
> - 传递性：如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$ 等价，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_p$ 等价

2. 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性表出的充分必要条件是矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)$ 的秩等于矩阵 $(A, B) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t, \beta_1, \cdots, \beta_s)$ 的秩，即 $r(A) = r(A, B)$
3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 等价的充分必要条件是 $r(A) = r(B) = r(A, B)$， 其中 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t), B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$

- 向量组的相关判断
  1. 如果一个向量组的一部分线性相关，那整个向量组也线性相关
  2. 如果一个向量组线性无关，那么它的任何一个非空的部分组也线性无关
  3. 如果向量组 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 线性无关，那么在每个向量上添加一个分量所得到的 $n+1$ 维向量组 $\beta_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, a_{i,n+1})$ 也线性无关
  4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是两个向量组，如果：
     - 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可以经 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表出
     - $r > s$

     那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 必线性相关
  5. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 可以经向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性表出，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关，那么 $r \leq s$
  6. 两个线性无关的等价的向量组，必含有相同个数的向量
  7. 任意 $n+1$ 个 n 维向量，必线性相关
- 向量组的秩
  1. 一向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组，如果这个部分组本身是线性无关的，并且从这个向量组中任意添一个向量（如果还有的话），所得的部分向量组都线性相关

     > 任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价

  2. 一个向量组的极大线性无关组可以有很多，但是它们都含有相同个数的向量
  3. **向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩**
  4. 一个向量组线性无关的充分必要条件为它的秩与它所含向量的个数相同
  5. 等价的向量组必有相同的秩
  6. 全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组，规定这样的向量组秩为零
  7. 矩阵的秩就等于它的行向量组的秩，也等于列向量组的秩
- 极大线性无关组的求法

  > 设向量组
  > $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0), \alpha_2 = (1, 2, 0, 0), \alpha_3 = (3, -1, 0, 0), \alpha_4 = (1, 4, 5, 0)$

> 将它们按行表示为一个矩阵 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\3&-1&0&0\\1&4&5&0\end{bmatrix}$ ，然后对该矩阵实施行初等变换，尝试将一些行全部化为0，但要注意不要交换两行，如：
> $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\3&-1&0&0\\1&4&5&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&-1&0&0\\0&4&5&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&5&0\end{bmatrix}$ ，此时已经不能将某一行化为0，结束，找到非零行对应的向量，这些向量就是一个极大线性无关组，
> $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ，非零行的个数就是极大线性无关组的秩

- 向量空间
  1. 设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合 V 为向量空间。所谓封闭，是指在集合 V 中可以进行向量的加法及数乘两种运算，且运算结果仍然在 V 中，即：若 $\alpha\in V,\beta\in V$，则 $\alpha+\beta\in V$ ；若 $\alpha\in V,\lambda\in R$，则 $\lambda\alpha\in V$
  2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的所有可能的线性组合 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$ 所成的集合是非空的，且对两种运算封闭，这个向量空间叫做由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 生成的子空间，记作 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$
  3. 设有向量空间 V_1 及 V_2 ，若 $V_1\subseteq V_2$ ，就称 V_1 是 V_2 的子空间
  4. 设 V 为向量空间，如果 r 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V$，且满足：

     (i) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

     (ii) V 中任一向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

     那么，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 就称为向量空间 V 的一个基，r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间
  5. 如果在向量空间 V 中取定一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ ，那么 V 中任一向量 x 可唯一的表示为 $x=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r$ ，数组 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 称为向量 x 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 下的坐标，记为 $x=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)$。特别地，在 n 维向量空间 R^n 中取单位向量组 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为基，则以 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为分量的向量 x 可以表示为 $x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$ ，可见向量在基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 中的坐标就是该向量的分量。因此 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 叫做 R^n 中的自然基。
  6. **过渡矩阵的求法：**

     > 在 R^n 中取定两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ ，我们需要求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$
     >
     > $$\text{由 }(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)A\Rightarrow(e_1,e_2,\cdots,e_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}$$
     > $$\text{得 }(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}B$$
     > $$\text{即 }(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}B$$

> 记 $P=A^{-1}B$ ，则矩阵 P 称为从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵

7. **坐标变换公式的求法：**

> 设向量 x 在两组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 与 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ ，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 P ，则
>
> $$x=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\ x=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}$$
>
> 故
>
> $$A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=B^{-1}A\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$
>
> 即
>
> $$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$
>
> 这就是从旧坐标到新坐标的坐标变换公式

- 向量的内积

1. 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$，令 $[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$ ，则 $[x,y]$ 称为向量 x 与 y 的内积。内积是两个向量之间的一种运算，其结果是一个实数，用矩阵记号表示，当 x 与 y 都是列向量时，有 $[x,y]=x^Ty$

   > 内积具有以下性质（其中 x,y,z 为 n 维向量，λ 为实数）
   >
   > - $[x,y]=[y,x]$
   > - $[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$
   > - $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$
   > - 当 $x=0$ 时，$[x,x]=0$；当 $x\neq 0$ 时，$[x,x]>0$

2. 施瓦茨不等式 $[x,y]^2\leq[x,x][y,y]$

3. 令 $||x|| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$，$||x||$ 称为 n 维向量 x 的长度（或范数）

> 向量的长度具有以下性质：
>
> - 非负性：当 $x \neq 0$ 时，$||x|| > 0$；当 $x = 0$ 时，$||x|| = 0$
> - 齐次性：$||\lambda x|| = |\lambda| \ ||x||$
>
> 当 $||x|| = 1$ 时，称 x 为单位向量。若 $\alpha \neq 0$，取 $x = \frac{\alpha}{||\alpha||}$，则 x 是一个单位向量，由 α 得到 x 的过程称为把向量 α 单位化。

4. 由施瓦茨不等式得 $-1 \leq \frac{[x,y]}{||x|| \ ||y||} \leq 1 \ (当||x|| \ ||y|| \neq 0时)$，因此，当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时，定义 $\theta = arccos\frac{[x,y]}{||x|| \ ||y||}$ 为 n 维向量 x 与 y 的夹角。
5. 当 $[x,y] = 0$ 时，称向量 x 与 y 正交。显然，若 $x = 0$，则 x 与任何向量都正交。
6. 若 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关
7. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一组基，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 两两正交，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 V 的一个**正交基**，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 还都是单位向量，则称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 V 的一个**标准正交基**
8. **施密特正交化：**

> 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量空间 V 的一个基，要求 V 的一个标准正交基。这也就是要找一组两两正交的单位向量 $e_1, e_2, \cdots, e_r$，使 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，这样一个问题，称为把基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 标准正交化。
>
> 取
>
> $$\beta_1 = \alpha_1,$$
> $$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\beta_1, \alpha_2]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1,$$
> $$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\beta_1, \alpha_3]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_3]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2,$$
> $$\cdots\cdots$$
> $$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\beta_1, \alpha_r]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\beta_2, \alpha_r]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\beta_{r-1}, \alpha_r]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$$
>
> 容易验证 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 两两正交，且与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，因此 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 就是 V 的一个正交基。
>
> 然后把它们单位化，即取
>
> $$e_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||}, e_2 = \frac{\beta_2}{||\beta_2||}, \cdots, e_r = \frac{\beta_r}{||\beta_r||}$$
>
> 就是 V 的一个标准正交基。

> 上述从线性无关向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 导出正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 的过程称为施密特（Schmidt）正交化。它不仅满足 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 等价，还满足：对任何 $k \ (1 \le k \le r)$，向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 等价。

- 正交矩阵
  1. 如果 n 阶矩阵 A 满足 $A'A = E$，即 $A^{-1} = A'$，那么称 A 为正交矩阵，简称正交阵

     > - 由 $A'A = E$，取行列式得 $|A|^2 = 1$ ，即 $|A| = \pm 1$
     > - 若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1} = A'$ 也是正交矩阵
     > - 若 A, B 为正交矩阵，则 AB 也是正交矩阵

  2. 一个标准正交基到另一个标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵

线性方程组

考纲要求

四、线性方程组

线性方程组的克拉默(Cramer)法则、齐次线性方程组有非零解的充分必要条件、非齐次线性方程组有解的充分必要条件、线性方程组解的性质和解的结构、齐次线性方程组的基础解系和通解、解空间、非齐次线性方程组的通解。

- 考试要求
  1. 会用克拉默法则
  2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件
  3. 理解齐次线性方程组的基础解系、通解及解空间的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法
  4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念
  5. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法

相关概念

- 线性方程组
  1. 设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (1)$，其中 a_{ij} 是第 i 个方程的第 j 个未知数的系数，b_i 是第 i 个方程的常数项，$i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$，当常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，线性方程组 (1) 叫做 n 元**非齐次线性方程组**，当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零时，(1) 式成为 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (2)$，叫做 n 元**齐次线性方程组**，(2) 也称为 (1) 的**导出组**
  2. 所谓方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 的一个解，就是指由 n 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 组成的有序数组，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 待入后，方程组中的每个等式都成立。方程组的解的全体称为它的解集合。如果两个方程组有相同的解集合，它们就称为**同解的**。方程组有解也称为相容，无解称为不相容。
  3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称为方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 的**系数矩阵**，矩阵

$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ 称为线性方程组的**增广矩阵**，如果记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，那么方程组可以表示为 $Ax=b$

- 克拉默法则
  1. 含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$，如果它的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的行列式不等于零，即 $|A|\neq 0$，那么方程组有唯一解 $x_1=\frac{|A_1|}{|A|},x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\cdots,x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$，其中 $A_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数矩阵 A 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的 n 阶矩阵，即 $A_j=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

- **线性方程组有解的判定**
  1. n 个未知数 n 个**非齐次线性方程组** $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，如果 $|A|\neq 0$ 那么方程组有唯一解（克拉默法则）
  2. n 个未知数 n 个**齐次线性方程组** $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 必有零解，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 满足该方程组。记其系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，如果 $|A|\neq 0$，由克拉默法则得该齐次线性方程组只有唯一解，那就是零解；如果 $|A|=0$，它才有非零解。因此齐次线性方程组当 $|A|\neq 0$ 是只有零解，换句话说，如果齐次线性方程组有非零解，那么必有 $|A|=0$
  3. 齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ 中，如果 $m<n$，那么它必有非零解（消元法可得）

4. 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 有解的充分必要条件为它的系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ 有相同的秩，即 $r(A) = r(\overline{A})$

5. 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$，
   - 无解的充分必要条件是 $r(A) < r(\overline{A})$；
   - 有唯一解的充分必要条件是 $r(A) = r(\overline{A}) = n$
   - 有无限多解的充分必要条件是 $r(A) = r(\overline{A}) < n$

- 求解线性方程组的消元法
  1. - 用一个非零的数乘某一方程
     - 把一个方程的倍数加到另一个方程
     - 互换两个方程的位置

     以上三个变换称为**线性方程组的初等变换**。消元的过程就是反复实施初等变换的过程。
  2. > 对于方程组
     >
     > $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$
     >
     > 如果 x_1 的系数 $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}$ 全为零，那么方程组对 x_1 没有任何限制，x_1 就可以取任意值，而方程组可以看作 $x_2, \cdots, x_n$ 的方程组来解。如果 x_1 的系数不全为零，那么利用初等变换3，可以设 $a_{11} \neq 0$。利用初等变换2，分别地把第一个方程的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程 $(i = 2, \cdots, m)$，于是方程组 (1) 就变成
     >
     > $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad\quad \cdots\cdots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \quad (2)$$
     >
     > 其中 $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad i = 2, \cdots, m, \ \ j = 2, \cdots, n$
     >
     > 这样解方程组 (1) 的问题就归结为解方程组
     >
     > $$\begin{cases} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \cdots\cdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \quad (3)$$

的问题，显然方程组 (3) 的一个解，代入方程组 (2) 的第一个方程，就能够解出 x_1 的值。这就是说方程组 (2) 有解的充分必要条件是方程组 (3) 有解，而方程组 (2) 与方程组 (1) 是同解的，因此，方程组 (1) 有解的充分必要条件是方程组 (3) 有解。

对方程组 (3) 重复上述步骤，最终得到一个阶梯形方程组，不妨设所得的方程组为

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \cdots + c_{rn}x_n = d_r, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $c_{ii} \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, r$，方程组 (4) 中的 $0 = 0$ 这样的一些恒等式可能出现，也可能不出现，去掉不影响解。方程组 (1) 与方程组 (4) 是同解的。

现在考察方程组 (4) 的解：

- 如果 $d_{r+1} \neq 0$，那么等式不可能成立，因此方程组无解
- 如果 $d_{r+1} = 0$
  1. 当 $r = n$ 时，阶梯形方程组为

     $$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_r \end{cases} \tag{5}$$

     其中 $c_{ii} \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，从最后一个方程开始 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 的值就可以逐一地唯一确定了。这个情形，方程组 (5)，也就是方程组 (1) 有唯一解。

     > 例如方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$，经过一系列初等变换后，它变成了阶梯形方程组
     >
     > $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad 2x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 = -6 \end{cases}$$
     >
     > 把 $x_3 = -6$ 代入第二个方程，得 $x_2 = -1$，再把 $x_3 = -6, x_2 = -1$ 代入第一个方程，即得 $x_1 = 9$，这就是说，上述方程组有唯一的解 $(9, -1, -6)$

  2. 当 $r < n$ 时，阶梯形方程组为

     $$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

     其中 $c_{ii} \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, r$，把它改写成

     $$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases} \tag{6}$$

> 由此可见，任给 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 一组值，就唯一地定出 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的值。一般地，由方程组 (6) 我们可以把 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 通过 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 表示出来，这样一组表达式称为方程组 (1) 的一般解，而 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为**一组自由未知量**
>
> > 例如，方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\4x_1-2x_2+5x_3=4\\2x_1-x_2+4x_3=-1\end{cases}$，用初等变换消去 x_1，得
> >
> > $$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\\qquad\qquad -x_3=2\\\qquad\qquad\ \ x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 再施行一次初等变换，得
> >
> > $$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=1\\\qquad\qquad\ \ x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 改写一下
> >
> > $$\begin{cases}2x_1+3x_3=1+x_2\\\qquad\ \ x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 最后得
> >
> > $$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(7+x_2),\\x_3=-2\end{cases}$$
> >
> > 这就是方程组的一般解，其中 x_2 是自由未知量。
>
> 3. $r>n$ 的情形是不可能出现的

3. > 对于线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$，写出其增广矩阵 $\overline{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}$，使用矩阵的初等变换，将该增广矩阵转化为行阶梯形矩阵，然后从最后一个非零行开始，逐渐求解。

- 齐次线性方程组解的结构
  1. 设 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ 是一齐次线性方程组，它的解所成的集合具有下面两个重要的性质：
     - 两个解的和还是方程组的解
     - 一个解的倍数还是方程组的解
  2. 齐次线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ (1) 的一组解 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 称为一个**基础解系**，如果
     - (1) 的任一个解都能表成 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 的线性组合

- $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关

3. 在齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于 $n-r$，这里 r 表示系数矩阵的秩（$n-r$ 也就是**自由未知量的个数**）

> 在前面的消元法步骤中，当 $r<n$ 时我们可以将齐次线性方程组化为阶梯形
>
> $$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1r}x_r = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ \qquad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2r}x_r = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases}$$
>
> 如果分别用 $n-r$ 组数 $(1,0,\cdots,0)$，$(0,1,\cdots,0), \cdots, (0,0,\cdots,1)$ 来代替自由未知量 $(x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n)$，就得出方程组的 $n-r$ 个解
>
> $$\begin{cases} \eta_1 = (c_{11}, \cdots, c_{1r}, 1, 0, \cdots, 0), \\ \eta_2 = (c_{21}, \cdots, c_{2r}, 0, 1, \cdots, 0), \\ \cdots\cdots \\ \eta_{n-r} = (c_{n-r,1}, \cdots, c_{n-r,r}, 0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$
>
> 显然这 $n-r$ 个解是线性无关的，并且齐次线性方程组的任意解都可以由它们线性表出，因此这 $n-r$ 个解就是齐次线性方程组的一个基础解系

4. 任何一个线性无关的与某一个基础解系等价的向量组都是基础解系（基础解系不唯一，它们互相等价）

- 非齐次线性方程组解的结构

1. 设线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ (1)，如果把常数项换成0，就得到一个齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ (2)，这个齐次线性方程组称为方程组 (1) 的导出组
   - 线性方程组 (1) 的两个解的差是导出组 (2) 的解
   - 线性方程组 (1) 的一个解与它的导出组 (2) 的一个解之和还是这个线性方程组的解
2. 如果 γ_0 是方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 的一个特解，那么方程组的任一个解 γ 都可以表成 $y = \gamma_0 + \eta$，其中 η 是导出组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$ 的一个解。因此，对于方程组的任一个特解 γ_0，当 η 取遍它的导出组的全部解时，就得到了方程组的所有解。
3. 在方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 有解的条件下，解是唯一的充分必要条件是它的导出组只有零解

- 求解方程组的一般方法：

例如：求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

写出增广矩阵，并进行初等变换化为行阶梯形

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组有解，并有 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \frac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$，

取 $x_2 = x_4 = 0$，则 $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$，即得方程组一个特解 $\eta^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^T$，

将行阶梯矩阵的最后一列全部变为0，即得到对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$，

取 $x_2 = 1, x_4 = 0$，得 $x_1 = 1, x_3 = 0$；取 $x_2 = 0, x_4 = 1$，得 $x_1 = 1, x_3 = 2$

因此齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1 = (1, 1, 0, 0)^T$，$\xi_2 = (1, 0, 2, 1)^T$

于是方程组的通解为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta^*$，$(k_1, k_2 \in R)$，即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (k_1, k_2 \in R)$$

矩阵的特征值和特征向量

考纲要求

五、矩阵的特征值和特征向量

矩阵的特征值和特征向量的概念及性质、相似变换及相似矩阵的概念及性质、矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵、实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵。

- 考试要求
  1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量
  2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法
  3. 掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质

相关概念

- **矩阵的特征值与特征向量**
  1. **设 A 是 n 阶矩阵，如果对于数 λ_0，存在一个非零向量 ξ，使得 $A\xi = \lambda_0\xi$，那么 λ_0 称为 A 的一个特征值，而 ξ 称为 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量。**
  2. 如果 ξ 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，那么 ξ 的任何一个非零倍数 $k\xi$ 也是属于 λ_0 的特征向量，因此**特征向量不是被特征值所唯一确定的，但一个特征向量只能对应于一个特征值**
  3. > 若记 $\xi = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，则 $A\xi = \lambda_0\xi$ 也可以写成
     >
     > $$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
     >
     > 或

> $$(\lambda_0 E - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$
>
> 这说明特征向量 ξ 满足齐次方程组
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda_0 x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda_0 x_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda_0 x_n \end{cases}$$
>
> 即
>
> $$\begin{cases} (\lambda_0 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n = 0, \\ -a_{21}x_1 + (\lambda_0 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - (\lambda_0 - a_{nn})x_n = 0 \end{cases}$$
>
> 由于 $\xi \neq 0$，而齐次线性方程组有非零解的充分必要条件为它的系数行列式为零，即
>
> $$|\lambda_0 E - A| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0 - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

4. 设 A 是一个 n 级矩阵，λ 是一个数字，矩阵 $\lambda E - A$ 的行列式

   $$|\lambda_0 E - A| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_0 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_0 - a_{nn} \end{vmatrix}$$

   称为 A 的特征多项式，这是一个 n 次多项式

5. n 阶矩阵 A 的特征值就是特征多项式的根，将特征值代入方程组，求出其基础解系，它就是属于这个特征值的几个线性无关的特征向量

6. **矩阵 A 的全体特征值的和等于 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，即对角线元素之和**（称为**矩阵的迹**）；**矩阵 A 的全体特征值的乘积等于矩阵的行列式 $|A|$**
7. **若 λ 是矩阵 A 的特征值，若 A 可逆，那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值**
8. **若 λ 是矩阵 A 的特征值，则 λ^k 是 A^k 的特征值；$\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值（$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 是 λ 的多项式，$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ 是矩阵 A 的多项式）**
9. 哈密顿-凯莱定理：设 A 是一个 n 阶矩阵，$f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，则 $f(A)=0$
10. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个特征值，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相等，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 线性无关。这也就是说不同特征值对应的特征向量是线性无关的
11. n 阶矩阵 A，设 λ_1 是 A 一个特征值，$\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1s}$ 是特征值 λ_1 的线性无关的特征向量， λ_2 也是 A 一个特征值，$\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2r}$ 是特征值 λ_2 的线性无关的特征向量，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$ ，那么向量 $\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1s},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2r}$ 也是线性无关的。 这表明对应于两个不同特征值的线性无关的特征向量组，合起来仍是线性无关的。这一结论对于 $m(m\geq 2)$ 个特征值的情形也成立。

- 相似矩阵
  1. 设 A,B 为两个 n 级矩阵，如果可以找到 n 级可逆矩阵 X，使得 $B=X^{-1}AX$，就说 A 相似于 B，记作 $A\sim B$

     > - 反身性：$A\sim A$
     > - 对称性：如果 $A\sim B$，那么 $B\sim A$
     > - 传递性：如果 $A\sim B,B\sim C$，那么 $A\sim C$

  2. 相似的矩阵有相同的特征多项式（因此也有相同的特征值）。但是特征多项式相同的矩阵不一定相似

3. 若 n 阶矩阵 A 与对角矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，
   则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 即是 A 的 n 个特征值

- 对角矩阵

1. 形如 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的矩阵称为对角矩阵

   > 对于对角矩阵，很容易计算幂和多项式，即：
   > $\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$,
   > $\varphi(\Lambda) = \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}$

2. 把矩阵 A 对角化，就说寻找可逆矩阵 P，使得 $A = P^{-1}\Lambda P$ ，其中 Λ 是一个对角矩阵
3. n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量，且对角矩阵的对角线元素就是矩阵 A 的特征值
4. **对角化的计算过程：**

   > 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求可逆矩阵 P 使得
   > $P^{-1}AP = \Lambda$，其中 Λ 是对角阵。
   >
   > 首先列出特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

所以特征值为 $\lambda_1=-1$（二重根），$\lambda_2=5$

将特征值 -1 代入齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda-1)x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1+(\lambda-1)x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2+(\lambda-1)x_3=0\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_1=-1$ 的两个线性无关的特征向量为 ξ_1,ξ_2

再将特征值 5 代入得

$$\begin{cases}4x_1-2x_2-2x_3=0,\\ -2x_1+4x_2-2x_3=0,\\ -2x_1-2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_2=5$ 的特征向量为 ξ_3

将特征向量拼成一个矩阵

$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，将对应的特征值变为对角阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP=\Lambda$，这样我们就将矩阵 A 对角化了

- 实对称矩阵

  1. 若 n 阶矩阵 A 满足 $A' = A$ （$A^T = A$），即 A 的转置等于 A，那么称矩阵 A 为对称矩阵

     > - 对称矩阵的特征值为实数
     > - 设 λ_1, λ_2 是对称矩阵 A 的两个特征值，ξ_1, ξ_2 是对应的特征向量，若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 ξ_1 与 ξ_2 正交

  2. 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交矩阵 P （$P^TP = E$，也即 $P^T = P^{-1}$），使 $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵
  3. 设 A 为 n 阶对称矩阵，λ 是 A 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $\lambda E - A$ 的秩 $r(\lambda E - A) = n - k$，从而对应特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量
  4. **求一个正交矩阵使对称矩阵变为对角阵：**

     > 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$，其中 Λ 是对角阵
     >
     > （相对于前文中对角化计算步骤，这里需要求一个正交矩阵，考虑到对称矩阵不同特征值的特征向量是正交的，因此我们只需要将一个特征值的不同特征向量变为正交的即可，只需要应用施密特正交化。）
     >
     > 列出特征多项式
     >
     > $$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5)$$
     >
     > 所以特征值为 $\lambda_1 = -1$（二重根）$, \lambda_2 = 5$
     >
     > 将特征值 -1 代入齐次线性方程组
     >
     > $$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + (\lambda - 1)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + (\lambda - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$
     >
     > 得到

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0,\\-2x_1-2x_2-2x_3=0,\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_1=-1$ 的两个线性无关的特征向量为 ξ_1,ξ_2，对特征向量 ξ_1,ξ_2 应用施密特正交化:

取

$$\eta_1=\xi_1$$

$$\eta_2=\xi_2-\frac{[\eta_1,\xi_2]}{[\eta_1,\eta_1]}\eta_1$$

则 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，然后单位化

$e_1=\frac{\eta_1}{||\eta_1||}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},e_2=\frac{\eta_2}{||\eta_2||}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

再将特征值 5 代入得

$$\begin{cases}4x_1-2x_2-2x_3=0,\\-2x_1+4x_2-2x_3=0,\\-2x_1-2x_2+4x_3=0\end{cases}$$

它的基础解系为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即特征值 $\lambda_2=5$ 的特征向量为 ξ_3，单位化得 $e_3=\frac{\xi_3}{||\xi_3||}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

> 将正交单位化的特征向量拼成一个矩阵 $P=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，将对应的特征值变为对角阵 $\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$
>
> 则 $P^{-1}AP=\Lambda$，这样我们就将矩阵 A 对角化了，且 P 是正交矩阵

- 矩阵的幂

  1. 对于 n 阶矩阵 A （可对角化），若找到可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 为对角矩阵，那么 $A^k=P^{-1}\Lambda^kP$

二次型

考纲要求

六、二次型

二次型及其矩阵表示、合同变换与合同矩阵、二次型的秩、惯性定理、二次型的标准形和规范形、用正交变换和配方法化二次型为标准形、二次型及其矩阵的正定性。

- 考试要求
  1. 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理
  2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形
  3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法

相关概念

- 二次型及其矩阵表示
  1. 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数

     $$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \\ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

     称为二次型。
  2. 当 $j > i$ 时，取 $a_{ji} = a_{ij}$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_ix_j$，于是二次型可写成

     $$\begin{gathered} f = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + \\ a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 \\ + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{gathered}$$

     将上式的系数排成一个 $n \times n$ 的矩阵

     $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

     它就称为二次型的矩阵，因为 $a_{ij} = a_{ji}$，所以 $A = A'$，这样的矩阵称为对称矩阵，因此，二次型的矩阵都是对称的。
  3. 令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，于是二次型可以用矩阵的乘积表示出来

$$
\begin{aligned}
x^TAx &= (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

故 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx$

4. 二次型 f 对应的对称矩阵 A 的秩，称为二次型 f 的秩
5. 二次型和它的矩阵是相互唯一决定的，若二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx = x^TBx$，且 $A' = A$，$B' = B$，则 $A = B$
6. 设 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 是两组数字，关系式

$$
\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}
$$

称为由 $x_1, \cdots, x_n$ 到 $y_1, \cdots, y_n$ 的一个线性替换，或简称线性替换。如果系数行列式 $|c_{ij}| \neq 0$ ，那么线性替换称为非退化的。

> 经过一个非退化的线性替换，二次型还是变成二次型，替换后的二次型矩阵与原二次型矩阵存在某种关系：
>
> 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx$，$A = A'$ 是一个二次型，
>
> 做非退化线性替换 $x = Cy$，
>
> 得到一个 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的二次型 y^TBy
>
> 将 $x = Cy$ 代入 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx$ 中得：
>
> $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^TAx = (Cy)^TA(Cy) = y^TC^TACy = y^T(C^TAC)y = y^TBy$
>
> 因此，得到 $B = C^TAC$

7. $n \times n$ 矩阵 A, B 称为合同的，如果存在可逆的 $n \times n$ 矩阵 C，使 $B = C^TAC$

> 合同是矩阵之间的一个关系。合同关系具有：
>
> - 反身性：$A = E'AE$
> - 对称性：由 $B = C'AC$ 即得 $A = (C^{-1})'B(C^{-1})$
> - 传递性：由 $A_1 = C_1'AC_1$ 和 $A_2 = C_2'A_1C_2$ 即得 $A_2 = (C_1C_2)'A(C_1C_2)$

经过非退化的线性替换，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的。

- 标准形：二次型中最简单的一种是只包含平方项的二次型 $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$
  1. 任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换变成上述平方和的形式

2. 上述定理1可以叙述为：任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵，即对于任意一个对称矩阵 A 都可以找到一个可逆矩阵 C 使 $C'AC$ 成对角矩阵
3. 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经过非退化线性替换所变成的平方和称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个标准形
4. 一般来说，二次型的标准形不是唯一的，与所作的非退化线性替换有关

- 唯一性
   1. 在一个二次型的标准形中，系数不为零的平方项的个数是唯一确定的，与所作的非退化线性替换无关。
   2. 复数域下的规范形：

      > 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个复系数的二次型，经过某个非退化的线性替换后，变成标准形。不妨假设它的标准形是 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2, i=1,2,\cdots,r\ \ (1)$
      >
      > 易知 r 就是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵的秩。
      >
      > 因为复数总可以开平方，我们再作一非退化线性替换
      >
      > $$\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r=\frac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ \cdots\cdots \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases} \qquad (2)$$
      >
      > 那么 (1) 就变为 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2 \quad (3)$
      >
      > (3) 称为负二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形，显然，规范形完全被原二次型矩阵的秩所决定。
      >
      > 因此有：
      >
      > - 任意一个复系数的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的。
      >
      >   该定理换个说法就是，任一复数的对称矩阵合同于一个形式为
      >
      > $$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
      >
      >   的对角矩阵，其中对角线上 1 的个数 r 等于 A 的秩；从而有，两个复数对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相等

   3. 实数域下的规范形：

      > 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一实系数的二次型，经过某个非退化线性替换，再适当排列次序，可使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成标准形

> $$d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2 \quad (1)$$
>
> 其中 $d_i>0, i=1,\cdots,r$； r 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵的秩。
>
> 因为在实数域中，正实数总是可以开平方，所以再作一非退化线性替换
>
> $$\begin{cases} y_1=\frac{1}{\sqrt{d_1}}z_1 \\ \cdots\cdots \\ y_r=\frac{1}{\sqrt{d_r}}z_r \\ \cdots\cdots \\ y_{r+1}=z_{r+1} \\ \cdots\cdots \\ y_n=z_n \end{cases} \qquad (2)$$
>
> (1) 就变成 $z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2 \quad (3)$
>
> (3) 就称为实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形。显然，规范形完全被 r,p 这两个数决定。
>
> - 任意一个实数域上的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的。（惯性定理）
> - 在实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形中，正平方项的个数 p 称为正惯性指数；负平方项的个数 $r-p$ 称为负惯性指数；它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为符号差。
> - 实二次型的标准形中系数为正的平方项的个数是唯一确定的，它等于正惯性指数，而系数为负的平方项的个数就等于负惯性指数。
> - 任一实对称矩阵 A 都合同于一个下述形式的对角矩阵：
>
> $$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$
>
>   其中对角线上 1 的个数 p 及 -1 的个数 $r-p$ （r 是 A 的秩）都是唯一确定的，分别称为 A 的正、负惯性指数。它们的差 $2p-r$ 称为 A 的符号差。

- 正定二次型
  1. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为正定的，如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$
  2. 非退化实线性替换，保持正定性不变
  3. n 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n

4. 正定二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$
5. 实对称矩阵 A 称为正定的，如果二次型 x^TAx 正定；一个实对称矩阵是正定的，当且仅当它与单位矩阵合同，由此可推出：正定矩阵的行列式大于0
6. 子式

$$P_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix},(i=1,2,\cdots,n)$$

   称为 n 阶矩阵 A 的顺序主子式
7. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=x^TAx$ 是正定的充分必要条件为矩阵 A 的顺序主子式全大于零
8. 对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的特征值全大于0

- 其他二次型
  1. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一实二次型，对于任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为负定的；如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geq 0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为半正定的；如果都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leq 0$，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为半负定的；如果它既不是半正定又不是半负定，那么 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为不定的
  2. 对于实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，其中 A 是实对称的，则下列条件等价：
     - $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的
     - 它的正惯性指数与秩相等
     - 有可逆矩阵 C，使 $C'AC=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$，其中 $d_i\geq 0,i=1,2,\cdots,n$
     - 有实矩阵 C，使得 $A=C'C$
     - A 的所有主子式皆大于或等于0（注意，仅有顺序主子式大于等于0是不能保证半正定的）
  3. 对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是：奇数阶顺序主子式为负，偶数阶顺序主子式为正

- 二次型化标准形的五种方法
  - 配方法
    - 优点：低阶二次型计算较为方便
    - 缺点：高阶二次型计算复杂，容易出错

> 用配方法化二次型为标准形的关键是消去交叉项，分如下两种情况：
>
> - 情形1：如果二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 含某平方项，如 x_1 的平方项，且 $a_{11}\neq 0$，则合并二次型中含 x_1 的所有交叉项，然后与 x_1^2 配方，并作非退化的线性替换
>
> $$\begin{cases} y_1=c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{nn}x_n \\ y_2=x_2 \\ \cdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

得到新二次型 $f=d_1y_1^2+g(y_2,\cdots,y_n)$，其中 $g(y_2,\cdots,y_n)$ 是 $y_2,\cdots,y_n$ 的二次型。对于 $g(y_2,\cdots,y_n)$ 重复上述方法，直到化为标准形为止

> 例：求非退化的线性替换 $x=Cy$ 使二次型
> $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_4+3x_2^2-2x_2x_3-6x_2x_4+2x_3x_4+4x_4^2$
> 化为标准形，并写出所作的非退化矩阵 C
>
> 解：$f=x_1^2+2x_1(2x_2-x_4)+(2x_2-x_4)^2-(2x_2-x_4)^2+3x_2^2+4x_4^2-2x_2x_3-6x_2x_4+2x_3x_4$
>
> $=(x_1+2x_2-x_4)^2-(2x_2-x_4)^2+3x_2^2+4x_4^2-2x_2x_3-6x_2x_4+2x_3x_4$
>
> $=(x_1+2x_2-x_4)^2-x_2^2+3x_4^2-2x_2x_3-2x_2x_4+2x_3x_4$
>
> 令 $\begin{cases} y_1=x_1+2x_2-x_4 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \\ y_4=x_4 \end{cases}$ (1)
>
> 则 $f=y_1^2-y_2^2+3y_4^2-2y_2y_3-2y_2y_4+2y_3y_4$
>
> $=y_1^2-[y_2^2+2y_2(y_3+y_4)+(y_3+y_4)^2]+y_3^2+4y_4^2+4y_3y_4$
>
> $=y_1^2-(y_2+y_3+y_4)^2+(y_3+2y_4)^2$
>
> 令 $\begin{cases} z_1=y_1 \\ z_2=y_2+y_3+y_4 \\ z_3=y_3+2y_4 \\ z_4=y_4 \end{cases}$ (2)
>
> 则 $f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$ 为所求标准形。由(1),(2)得：
>
> $\begin{cases} x_1=y_1-2y_2+y_4 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \\ x_4=y_4 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y_1=z_1 \\ y_2=z_2-z_3+z_4 \\ y_3=z_3-2z_4 \\ y_4=z_4 \end{cases}$ (4)
>
> 将(4)代入(3)得非退化线性变换：
>
> $\begin{cases} x_1=z_1-2z_2+2z_3-z_4 \\ x_2=z_2-z_3+z_4 \\ x_3=z_3-2z_4 \\ x_4=z_4 \end{cases}$ 线性变换的矩阵 $C=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
>
>
>
> 此题中标准形为 $f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$，它是四元二次型，只是 z_4^2 的系数为0，所作的线性替换必须有 $y_4=z_4$，否则不是非退化线性替换

- 情形2：如果二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 不含平方项，即 $a_{ii}=0$，但含某一个 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$，则可做非退化线性变换

$$x_i = y_i + y_j$$
$$x_j = y_i - y_j$$
$$x_k = y_k, (k = 1, 2, \cdots, n; k \neq i, j)$$

将 f 化为一个含有平方项 y_i^2 的二次型，再用情形1的方法将其化为标准形

> 例：求非退化的线性替换 $x = Cy$ 使二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 化为标准形，并写出所作的非退化矩阵 C
>
> ---
>
> 解：由于没有平方项，故令 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$
>
> 得：$f = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 - (y_1 + y_2)$
>
> $= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3$
>
> $= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$
>
> 令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$
>
> 得：$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$
>
> 所用非退化线性变换为：$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$
>
>

- 初等变换法
  - 优点：任意阶二次型计算均简便
  - 缺点：无

> 1. 第一步写出二次型的矩阵 A，并构造 $2n \times n$ 的矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$
> 2. 对 A 进行初等行变换和同样的初等列变换（不可交换两行或两列的位置），把 A 化为对角矩阵 B，并对 E 施行与 A 相同的初等列变换（切记 E 并不进行初等行变换），将 E 化为矩阵 C，此时 $C'AC = B$
> 3. 第三步写出非退化线性变换 $x = Cy$，化二次型为标准形 $f = y^T By$
> 4. 补充：若 1 中构造矩阵 $\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix}$，则 2 中将 A 化为对角矩阵 B，并对 E 施行与 A 相同的初等行变换，将 E 化为矩阵 C，则此时 C 不是我们需要的非退化替换，C' 才是

> 例：求非退化的线性替换 $x=Cy$ 使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ 化为标准形，并写出所作的非退化矩阵 C
>
> 解：写出 f 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}$
>
> 构造 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&2&4\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第二列减第一列}]{\text{第二行减第一行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&4\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第三列减二倍的第二列}]{\text{第三行减二倍的第二行}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$
>
> 故非退化的线性变换矩阵为 $C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，记 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
>
> 线性变换 $x=Cy$ 将 f 化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2$，经验算 $B=C'AC$
>
>

- 正交变换法
  - 优点：所求出的变换矩阵是正交矩阵
  - 缺点：计算复杂

> - 主轴定理：任给二次型 $f=\sum_i^n\sum_j^n a_{ij}x_ix_j=x^TAx$，总有正交变换 $x=Py$，使 f 化为标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值
>
> 计算步骤如下：
>
> 1. 写出二次型的矩阵 A
> 2. 求出 A 的特征值，得到 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$
> 3. 求出对应的特征向量
> 4. 将特征向量作施密特正交化，得到正交的特征向量
>
>   （由于对称矩阵不同特征值所对应的特征向量是正交的，因此只要对单个特征值所对应的特征向量做施密特正交化即可）
> 5. 将正交的特征向量单位化
> 6. 将这些单位化的特征向量按列排成矩阵，得到正交矩阵 P
>
> > 例：求正交变换 $x=Cy$ 使二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 化为标准形

> 解：二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
>
> 1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & -\lambda+5 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-5)^2(\lambda+4)$
>
> 所以A的特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=5$，$\lambda_3=-4$
>
> 2) 对$\lambda_1=\lambda_2=5$，解$(5E-A)X=0$,得基础解系为：$\alpha_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
>
> 对$\lambda_3=-4$，解$(-4E-A)X=0$,得基础解系为：$\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
>
> 3,4) 对每个基础解系进行施密特正交化，再单位化：
>
> $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\gamma_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
>
> 5) 令$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,则$Q$是正交矩阵
>
> 并且$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=diag(5,5,-4)$
>
> 写出正交变换$X=QY$，则可得标准形$f=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$
>
>

- 偏导数法
  - 优点：配方法的改进
  - 缺点：高阶二次型计算复杂

> 在二次型中，若有$a_{ii}\neq 0$,取$f_i=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$,则：$f=\frac{1}{a_{ii}}f_i^2+\varnothing$,($\varnothing$中不含$x_i$),对$\varnothing$实施类似的计算，直至写出平方项为止，再换元；若$a_{ii}=0$，但有一个$a_{ij}\neq 0$，取$f_i=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}$，$f_j=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_j}$，则：$f=\frac{1}{a_{ij}}[(f_i+f_j)^2-(f_i-f_j)^2+\varnothing]$,($\varnothing$中不含$x_i$与$x_j$),对$\varnothing$实施类似的计算，若$\varnothing$出现平方项，则用第一步的方法。
>
>

> 例：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 化为标准形，并写出所作的非退化线性变换

$$f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 \qquad (1)$$

解：$f_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=-2x_2+x_3$ ， $f_2=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-2x_1+x_3$

则 $f=-\dfrac{1}{4}[(-2x_1-2x_2+2x_3)^2-(2x_1-2x_2)^2+\varnothing]$

$$=-(x_1+x_2-x_3)^2+(x_1-x_2)^2-\frac{1}{4}\varnothing \qquad (2)$$

将(2)展开得 $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-x_3^2-\dfrac{1}{4}\varnothing \quad (3)$

将(3)与(1)比较得 $\varnothing=-4x_3^2$ 代入(2)式：$f=-(x_1+x_2-x_3)^2+(x_1-x_2)^2+x_3^2$

作非退化的线性变换 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3 \\ y_2=x_1-x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3 \\ x_2=\dfrac{1}{2}y_1-\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{1}{2}y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

f在该变换下化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2+y_2^2+y_3^2$

- 顺序主子式法
  - 优点：计算标准形极其简单
  - 缺点：无法得出所作的变换矩阵，只能得到标准形

二次型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，若 $\Delta_1=a_{11}\neq 0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,\cdots$, $\Delta_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0$,

则该二次型可化为标准形：$f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=\Delta_1y_1^2+\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2+\cdots+\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2$

> 例：将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_1x_2-4x_2x_3$ 化为标准形

解：

写出二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta_1=1$，$\Delta_2=-\dfrac{25}{4}$，$\Delta_3=-4$，所以$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-\dfrac{25}{4}y_2^2+\dfrac{16}{25}y_3^2$