行列式

考纲要求

一、行列式

行列式的概念和基本性质、行列式按行（列）展开定理

- 考试要求
  1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质
  2. 会应用行列数的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式

本章概念

- 逆序数
  1. 由 $1,2,3,...,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

     > 如1234是一个四级排列，45321是一个五级排列。n 级排列一共有 $n!$ 个。

  2. **在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。排列的逆序数记为$\tau(j_1j_2...j_n)$**

     > 如2431中，21，43，41，31是逆序，2431的逆序数就是4

  3. 逆序数为偶数的排列称为偶排列；逆序数为奇数的排列称为奇排列。
  4. 交换排列中的两个数，改变逆序数的奇偶性。
  5. 在全部n级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个。
- **n 级行列式**
  1. n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，带正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，带负号。因此可以写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$
  2. 行列互换（即转置），行列式不变，$|A|=|A^T|$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{21} & ka_{22} & & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，即一行的公因子可以提出去，或者说一个数乘行列式的一行就相当于用这个数乘以行列式。
4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & & b_3+c_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，这就是说，如果某一行是两个数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，这两个行列式除这一行外全与原来的行列式的对应行一样。
5. 如果行列式中有两行（列）相同，那么行列式为 0
6. 如果行列式中有两行（列）成比例，那么行列式为 0
7. 把一行（列）的倍数加到另一行（列），行列式不变
8. 交换行列式中两行（列）的位置，行列式反号
9. **行列具有同等地位，因此上述所有性质都可以对列使用。**

- 行列式的计算
  1. 上三角矩阵、下三角矩阵的行列式等于对角线元素的乘积。
  2. 计算行列式的值需要反复应用上述性质进行化简，或者转变为上、下三角形的矩阵
- **行列式按行（列）展开**
  1. 在行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列，剩下的元素位置不变，构成一个 $n-1$ 级的行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij} 。记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**
  2. 行列式等于某一行（列）的元素与相应的代数余子式的乘积之和，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in}$
  3. **在行列式中，一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为0**

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$，称为 n 级的范德蒙德行列式，它的值等于这 n 个数的所有可能的差 $a_i - a_j(1 \leq j < i \leq n)$ 的乘积，因此范德蒙德行列式为0的充分必要条件是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 这 n 个数中至少有两个相等。