קדב״ר 00360026

אביב תשפ״ה - 2025

ש״ב 1 – קינמטיקה של רובוט טורי

מגישים:

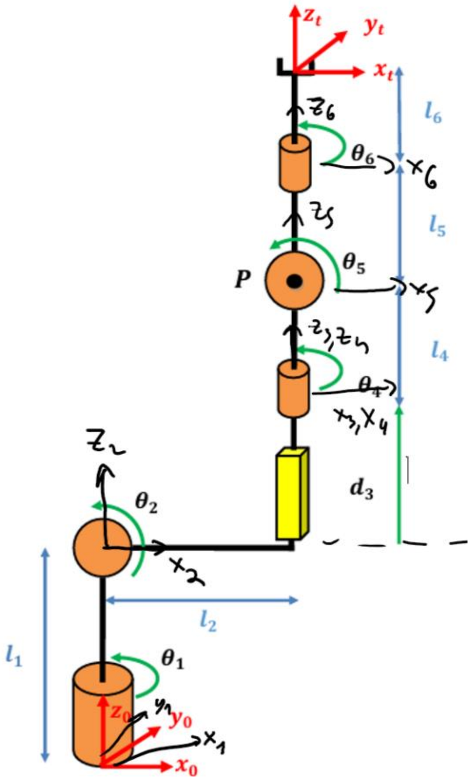
שם	ת״ז	אימייל
אלון עומר בן דוד	213761943	alon.ben@campus.technion.ac.il
יגאל וורנוב	315817007	igal.vornov@campus.technion.ac.il

תאריך הגשה:

לרשום

תוכן

תיאור המטלה



בש"ב האלה נתמקד בפתרון הקינמטיקה של רובוט טורי ותכנון מסלול.

הרובוט הטורי אותו ננתח במטלה:

המשימה:

לתכנן מסלול לטפסנית, ממצב A ל-B, תחת מגבלות המפרקים.

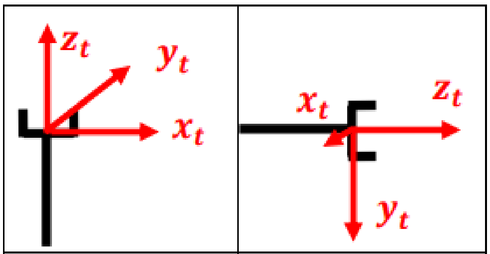
כאשר, אורכי חוליות הרובוט:

$$l_1 = 0.4[m], l_2 = 0.15[m], l_4 = 0.1[m], l_5 = 0.3[m], l_6 = 0.2[m]$$

מצב A ו-B:

$$\boldsymbol{r}_A^0 = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \\ 1.1 \end{pmatrix} [m], \qquad \boldsymbol{r}_B^0 = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55 \\ -0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix} [m]$$

והאוריינטציות הרצויות במצבים אלו:



A- Initial | B- Final

כלומר: ${}^0R_t^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^0R_t^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

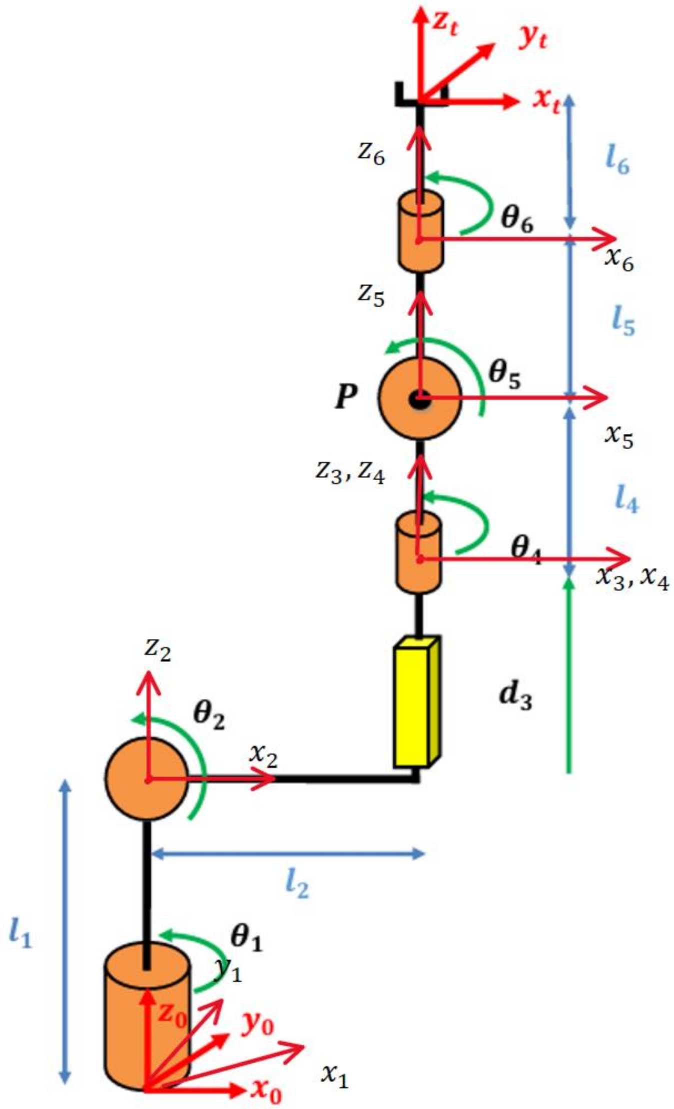
בשביל לתכנן את המסלול, יש צורך בפתרון הקינמטיקה של הרובוט הטורי.

את ה-FK אפשר לפתור בצורה טכנית, מפני שמדובר ברובוט טורי בו כל חוליה מושפעת רק מהמפרקים לפניה. את ה-IK נפתור בעזרת פיצול לבעיית מיקום ואוריינטציה, כבר ניתן לראות שמיקום מפרק 5, בבעיית IK, ידוע ותלוי רק בשלושת המפרקים הראשונים. את היעקוביאן המלא נמצא בעזרת גזירות של פתרון ה-FK ושימוש בגיאומטרית הרובוט.

אחרי שנפתור את הקינמטיקה, נוכל לבחור ענף פתרון ב-IK ולתכנן מסלול במרחב שיתורגם לערכי המפרקים בזמן.

סעיף 1 – פתרון הקינמטיקה הישירה

נשרטט את הרובוט בצורה של שלד עם מערכות צירים לפי ZRP:



מכאן, נחשב את מטריצות המעבר בין מ"צ:

$$ {}^{0}A_1 = (Rot(\hat{\mathbf{z}}_0, \theta_1)|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{1}A_2 = \left(Rot(\hat{\mathbf{y}}_1, -\theta_2) \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{matrix}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} C(-\theta_2) & 0 & S(-\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S(-\theta_2) & 0 & C(-\theta_2) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{2}A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{3}A_4 = (Rot(\hat{\boldsymbol{z}}_3,\theta_4)|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{4}A_5 = \left(Rot(\hat{\boldsymbol{y}}_5,-\theta_5) \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ l_4 \end{matrix} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} C_5 & 0 & -S_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ S_5 & 0 & C_5 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{5}A_6 = \left(Rot(\hat{\boldsymbol{z}}_5,\theta_6) \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ l_5 \end{matrix} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

$$ {}^{6}A_t = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) $$

מכאן, בעזרת מאטלאב , מטריצת המעבר בין הטפסנית לקרקע:

$$ {}^{0}A_t = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \hat{\boldsymbol{x}}_t^0 & \hat{\boldsymbol{y}}_t^0 & \hat{\boldsymbol{z}}_t^0 & \boldsymbol{d}_t^0 \\ | & | & | & | \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

כאשר:

$$ \boldsymbol{d}_t^0 = \begin{pmatrix} C_1C_2l_2 - C_1S_2(d_3+l_4) + (l_5+l_6)(S_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) - C_5C_1S_2) \\ S_1C_2l_2 - S_1S_2(d_3+l_4) - (l_5+l_6)(S_5(C_1S_4 + S_1C_2C_4) + C_5S_1S_2) \\ l_1 + S_2l_2 + C_2(d_3+l_4) + (l_5+l_6)(C_2C_5 - S_2C_4S_5) \end{pmatrix} $$

$$ \hat{\boldsymbol{x}}_t^0 = \begin{pmatrix} -S_6(C_4S_1 + C_1C_2S_4) - C_6(C_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) + C_1S_2S_5) \\ S_6(C_1C_4 - S_1C_2S_4) + C_6(C_5(C_1S_4 + S_1C_2C_4) - S_1S_2S_5) \\ C_6(C_2S_5 + S_2C_4C_5) - S_2S_4S_6 \end{pmatrix} $$

$$ \hat{\boldsymbol{y}}_t^0 = \begin{pmatrix} S_6(C_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) + C_1S_2S_5) - C_6(S_1C_4 + C_1C_2S_4) \\ C_6(C_1C_4 - S_1C_2S_4) - S_6(C_5(C_1S_4 + S_1C_2C_4) - S_1S_2S_5) \\ -S_6(C_2S_5 + C_4C_5S_2) - C_6S_2S_4 \end{pmatrix} $$

$$ \hat{\boldsymbol{z}}_t^0 = \begin{pmatrix} S_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) - C_5C_1S_2 \\ -S_5(C_1S_4 + S_1C_2C_4) - C_5S_1S_2 \\ C_2C_5 - S_2C_4S_5 \end{pmatrix} $$

סעיף 2 – פתרון הקינמטיקה ההפוכה

כדי לפתור את הקינמטיקה ההפוכה של הרובוט הנתון, ניעזר בפירוק הבעיה לבעיית מיקום ובעיית אוריינטציה.

הנתונים

בבעיית ה-IK נתון לנו המטריצה ההומוגנית ממערכת הטפסנית למערכת האדמה:

$$ {}^{0}A_t = T = \text{known} $$

כלומר, אנחנו מקבלים את מיקום הטפסנית $\boldsymbol{d}_t^0$ ואת אוריינטציית הטפסנית ${}^{0}R_t$.

סכמת פתרון IK של הרובוט

נשים לב שצירי 3 המפרקים $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ נחתכים בנקודה משותפת.

1. **בעיית מיקום:** אנחנו יודעים את מיקום הנקודה P – מרכז מפרק 5:

$$ \boldsymbol{P}^0 = \boldsymbol{d}_t^0 - (l_5 + l_6)\hat{\boldsymbol{z}}_t = \boldsymbol{d}_t^0 - (l_5 + l_6)\ {}^{0}R_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} $$

מפה מקבלים פתרונות ל-$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ עבורים מתקבל המיקום הרצוי. מדובר ב-3 משוואות ב-3 נעלמים וכך ניתן לפתור למספר בדיד של אפשרויות את המפרקים האלו בבעיית IK.

2. **בעיית אוריינטציה:** עכשיו ניעזר בדרישה על הרוטציה לקביעת שאר הזוויות:

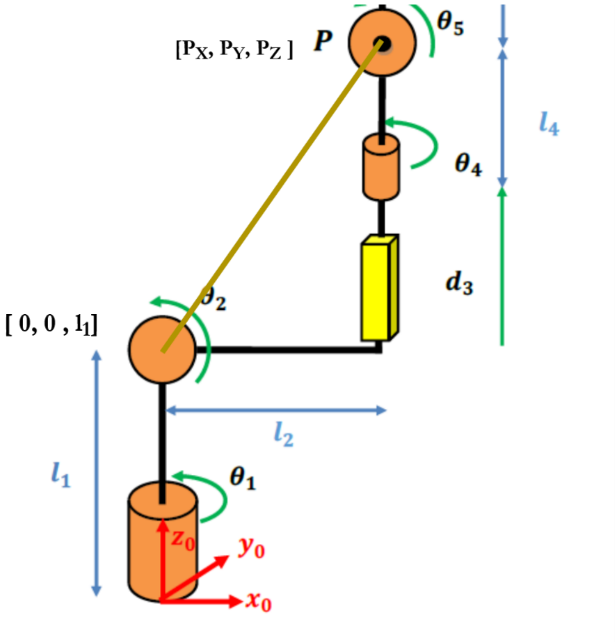
$$ {}^{0}R_t(\boldsymbol{q}) = {}^{0}R_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\ {}^{3}R_t(\theta_4, \theta_5, \theta_6) \overset{\text{נדרוש}}{\triangleq} R $$

$$ \rightarrow\ {}^{3}R_t(\theta_4, \theta_5, \theta_6) = {}^{0}R_3^{-1} R = {}^{0}R_3^T R $$

מפה צריך לפתור אלגברית את $\theta_4, \theta_5, \theta_6$.

פתרון בעיית המיקום

נפתור פה לשלושת המפרקים הראשונים בעזרת הנתון של ערכי נקודת $\boldsymbol{P}$.



נשים לב שהמרחק בין מרכז מפרק 2 לנקודה P תלוי רק במפרק הלינארי d_3. נראה זאת מה-FK:

$$\boldsymbol{d}_t^0 = \begin{pmatrix} C_1C_2l_2 - C_1S_2(d_3+l_4) + (l_5+l_6)(S_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) - C_5C_1S_2) \\ S_1C_2l_2 - S_1S_2(d_3+l_4) - (l_5+l_6)(S_5(C_1S_4 + S_1C_2C_4) + C_5S_1S_2) \\ l_1 + S_2l_2 + C_2(d_3+l_4) + (l_5+l_6)(C_2C_5 - S_2C_4S_5) \end{pmatrix}$$

לכן מיקום הנקודה $\boldsymbol{P}$ ומרכז מפרק 2:

$$\boldsymbol{P}^0 = \begin{pmatrix} C_1C_2l_2 - C_1S_2(d_3+l_4) \\ S_1C_2l_2 - S_1S_2(d_3+l_4) \\ l_1 + S_2l_2 + C_2(d_3+l_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix}$$

לכן, המרחק בין הנקודה למפרק 2:

$$\left|\boldsymbol{P}^0 - \boldsymbol{d}_2^0\right|^2 = \left(C_1C_2l_2 - C_1S_2(d_3+l_4)\right)^2 + \left(S_1C_2l_2 - S_1S_2(d_3+l_4)\right)^2 + \left(S_2l_2 + C_2(d_3+l_4)\right)^2$$
$$= \cdots = (d_3+l_4)^2 + l_2^2$$

רואים באיור של הרובוט שהמרחק בין הנקודות יכול להיקבע ע"י היתר של משולש ישר זווית, בהתאם לתוצאה פה. לכן:

$$d_3 + l_4 = \pm\sqrt{\left|\boldsymbol{P}^0 - \boldsymbol{d}_2^0\right|^2 - l_2^2} \rightarrow \boxed{d_3 = -l_4 \pm \sqrt{\left|\boldsymbol{P}^0 - \boldsymbol{d}_2^0\right|^2 - l_2^2}}$$

קיבלנו 2 פתרונות למפרק הלינארי.

כעת נעבור לפתרון מפרק 1:

נשים לב שזווית θ_1 קובעת באופן ישיר את היחס בין רכיבים x_p, y_p של הנקודה.

$$\frac{y_p}{x_p} = \frac{S_1C_2l_2 - S_1S_2(d_3+l_4)}{C_1C_2l_2 - C_1S_2(d_3+l_4)} = \frac{S_1}{C_1} = \tan(\theta_1)$$

לכן:

$$\boxed{\theta_1 = Atan2(S_1, C_1) = Atan2(\pm y_p, \pm x_p)}$$

קיבלנו 2 פתרונות למפרק 1.

כעת נעבור לפתרון מפרק 2:

נפתור אותו אלגברית מהשוויון בין נקודה $\boldsymbol{P}^0$ מה-FK לערכיה הידועים.

$$(*) \quad \boldsymbol{P}^0 = \begin{pmatrix} C_1C_2l_2 - C_1S_2(d_3 + l_4) \\ S_1C_2l_2 - S_1S_2(d_3 + l_4) \\ l_1 + S_2l_2 + C_2(d_3 + l_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

אם נסתכל על המשוואה הראשונה והשלישית (הראשונה + שנייה redundant), יש לנו 2 משוואות ב-2 נעלמים S_2, C_2. כלומר, פתרון המשוואות נותן פתרון יחיד לזווית θ_2, פרט לסינגולריות/חוסר פתרון:

$$\begin{pmatrix} -C_1(d_3 + l_4) & C_1l_2 \\ l_2 & (d_3 + l_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ z_p - l_1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} S_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1(d_3 + l_4) & C_1l_2 \\ l_2 & (d_3 + l_4) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_p \\ z_p - l_1 \end{pmatrix} \rightarrow \theta_2 = Atan2(S_2, C_2)}$$

עכשיו, לפני שנפתור את שאר המפרקים בעזרת בעיית האוריינטציה, נבדוק:

<u>מקרי סינגולריות/חוסר פתרון במיקום:</u>

למפרק הלינארי אין פתרון אם $\left|\boldsymbol{P}^0 - \boldsymbol{d}_2^0\right|^2 - l_2^2 < 0 \rightarrow l_2 > \left|\boldsymbol{P}^0 - \boldsymbol{d}_2^0\right|$. זה מתאר את כל הנקודות שבתוך כדור ברדיוס l_2 סביב מפרק 2. ברובוט ניתן לראות שעבור כל ערך של המפרק הלינארי, מרחק הנקודה $\boldsymbol{P}^0$ ממפרק 2 תמיד גדול או שווה ל-l_2.

למפרק 1, אם $y_p = 0$ יש 2 פתרונות גיאומטריים שונים: $\theta_1 = 0, \pi$. אם $x_p = 0$, אז גם יש 2 פתרונות: $\theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$. אם שניהם אפס, כלומר $x_p = 0, y_p = 0$, אז $\theta_1 \in \mathbb{R}$ פרמטר חופשי ויכול לקבל כל ערך (עד כדי מגבלות המפרקים).

למפרק 2, אין פתרון אם המטריצה אינה הפיכה, כלומר כאשר:

$$\det\begin{pmatrix} -C_1(d_3 + l_4) & C_1l_2 \\ l_2 & (d_3 + l_4) \end{pmatrix} = -C_1(d_3 + l_4)^2 - C_1l_2^2 = -C_1((d_3 + l_4)^2 + l_2^2) = 0$$

מפני ש-$l_2 > 0$, האיבר $(d_3 + l_4)^2 + l_2^2 > 0$ תמיד.

לכן, המקרה היחיד עבורו לא נקבל פתרון ל-θ_2: $C_1 = 0 \rightarrow \theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$

אמנם, אם רק $C_1 = 0$, אפשר לפתור בעזרת המשוואה השנייה והשלישית עבור θ_2 יחיד, ולהיפך אם רק $S_1 = 0$. אבל אם $x_p = 0, y_p = 0$, אז אפשר לבחור משוואה 1 או 2 ומשוואה 3 ולקבל פתרון יחיד ל-θ_2.

המסקנה היא שיש צורך להפריד למקרים בהם חלק מהמשוואות מתנוונות לאפס, ואז מתקבל פתרון יחיד ל-θ_2 לכל דרישת מיקום של הטפסנית, בהנחה שהמפרקים הקודמים קיבלו פתרון.

ההפרדה לקוד:

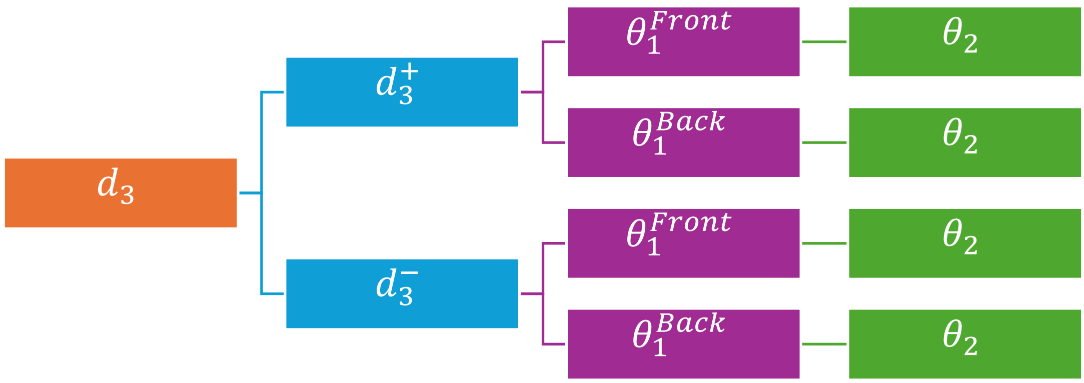
אם $C_1 = 0$ בלבד, ניקח את משוואות 2,3 מ-$(*)$ ונפתור לזווית המפרק 2:

$$\begin{pmatrix} S_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_1(d_3 + l_4) & S_1l_2 \\ l_2 & (d_3 + l_4) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_p \\ z_p - l_1 \end{pmatrix}$$

אחרת, נפתור עם משוואות 1,3 כפי שהוצג קודם.

- אנחנו מניחים שהמסלול לא עובר בציר $\hat{z}_0$.

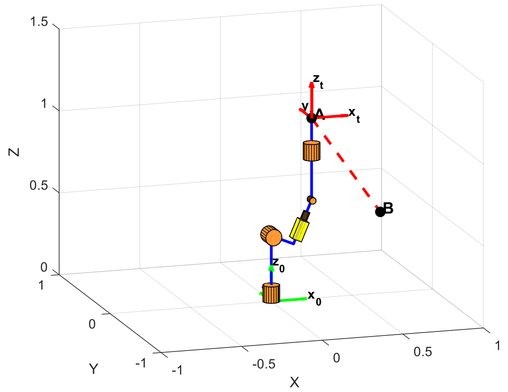
מכאן, עץ הפתרונות לבעיית המיקום:

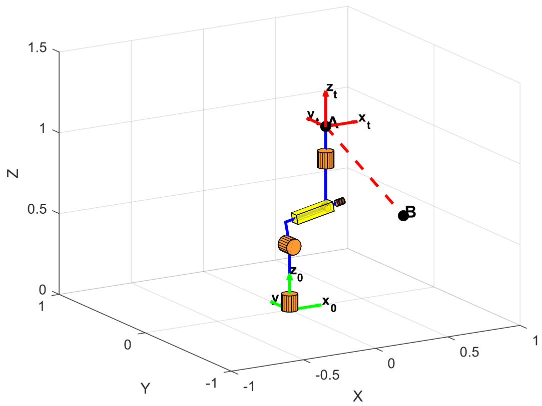


כלומר, פרט למקרי סינגולריות/חוסר פתרון יש 4 פתרונות שונים לבעיית המיקום.

כעת נראה גרפים לפיצול הפתרונות לבעיית המיקום:

עבור $\sqrt{\left|\boldsymbol{P}^0-\boldsymbol{d}_2^0\right|^2-l_2^2}$ $d_3=-l_4\pm$, הפתרונות השונים, לנקודה A, נראים כך (ננית בחירת סימן חיובי לשאר המפרקים):





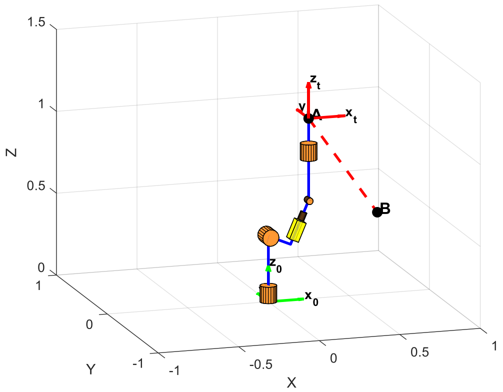
באיור השמאלי רואים את הפתרון, עבור דרישת נקודת A ואוריינטציה eye(3) , עבור d_3 בסימן פלוס ב-elbow ובאיור הימני עבור סימן מינוס. ערכי המפרקים עבור פתרונות אלו:

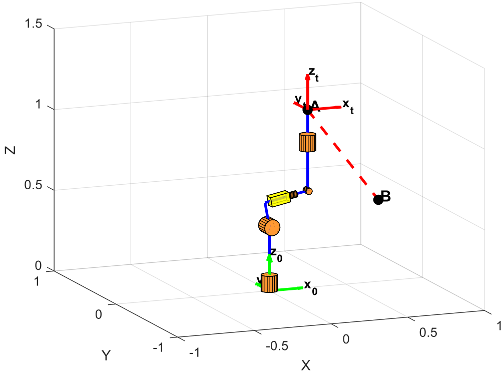
$$q_1=(0 \quad -23.402° \quad 0.1828[m] \quad 0 \quad 23.402° \quad 0)^T$$

$$q_2=(0 \quad 100.722° \quad -0.3828[m] \quad -180° \quad 100.722° \quad -180°)^T$$

כלומר, כאשר d_3 שלילי, המפרק θ_2 מפצה ודואג לפתרון בעיית המיקום במקרה זה.

עבור $\theta_1 = Atan2(\pm y_p, \pm x_p)$, הפתרונות השונים, לנקודה A, נראים כך (נניח בחירת סימן חיובי לשאר המפרקים):





באיור השמאלי רואים את הפתרון, עבור דרישת נקודת A ואוריינטציה eye(3) , עבור θ_1 בסימן פלוס ב-elbow ובאיור הימני עבור סימן מינוס. ערכי המפרקים עבור פתרונות אלו:

$$q_1 = (0 \quad -23.402° \quad 0.1828[m] \quad 0 \quad 23.402° \quad 0)^T$$

$$q_2 = (-180 \quad 79.2785° \quad 0.1828[m] \quad -180° \quad 79.2785° \quad 0)^T$$

כלומר, כאשר θ_1 הפוך, המפרק θ_2 מפצה ודואג לפתרון בעיית המיקום במקרה זה.

פתרון בעיית האוריינטציה

כעת, כדי לפתור את שאר המפרקים, נמצא מה-FK את מטריצת הסיבוב בין מ"צ 3,6:

$$^3R_t(\theta_4, \theta_5, \theta_6) = \ ^0R_3^T R \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & E & f \\ g & h & I \end{pmatrix}$$

לפי תכונות המטריצה ההומוגנית:

$$^3R = \ ^3A_t(1{:}3, 1{:}3)$$

כאשר:

$$^3A_t = \ ^3A_4 \ ^4A_5 \ ^5A_6 \ ^6A_t$$

מה-FK הסימבולי במאטלטאב, נקבל:

$$^3R_t(\theta_4, \theta_5, \theta_6) = \begin{pmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_6S_4 - C_4C_5S_6 & -C_4S_5 \\ C_4S_6 + C_5C_6S_4 & C_4C_6 - C_5S_4S_6 & -S_4S_5 \\ C_6S_5 & -S_5S_6 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & E & f \\ g & h & I \end{pmatrix}$$

<u>מכאן נקבל, פתרון עבור θ_5:</u>

$$\boxed{C_5 = I \rightarrow S_5 = \pm\sqrt{1 - I^2} \rightarrow \theta_5 = Atan2(S_5, C_5)}$$

יש לזווית זו 2 אפשרויות.

<u>פתרון עבור θ_4, θ_6:</u>

בהנחה ש- $I = C_5 \neq \pm 1$:

$$\boxed{C_4 = -\frac{c}{S_5}, S_4 = -\frac{f}{S_5}, C_6 = \frac{g}{S_5}, S_6 = -\frac{h}{S_5} \rightarrow \theta_4 = Atan2(S_4, C_4), \theta_6 = Atan2(S_6, C_6)}$$

מתקבל פתרון יחיד לשתי הזוויות הנ"ל.

<u>מקרי סינגולריות/חוסר פתרון באוריינטציה:</u>

עבור $\boldsymbol{\theta_5}$, נשים לב שאם: $I = C_5 = \pm 1 \rightarrow S_5 = 0$, במקרה זה:

$$^3R_6(\theta_4, \theta_5, \theta_6) = \begin{pmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_6S_4 - C_4C_5S_6 & 0 \\ C_4S_6 + C_5C_6S_4 & C_4C_6 - C_5S_4S_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}$$

יש פתרון יחיד לזווית θ_5, אבל לזוויות θ_4, θ_6 יהיה אינסוף פתרונות, כפי שנראה כעת:.

עבור $\boldsymbol{\theta_4}, \boldsymbol{\theta_6}$, אם $I = C_5 = \pm 1$:

$$\begin{pmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_6S_4 - C_4C_5S_6 & 0 \\ C_4S_6 + C_5C_6S_4 & C_4C_6 - C_5S_4S_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & E & f \\ g & h & I \end{pmatrix}$$

עבור מקרה בו נבחר $\theta_5 = 0$, נקבל $I = C_5 = +1$ ומכאן:

$$\begin{pmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_6S_4 - C_4C_5S_6 & 0 \\ C_4S_6 + C_5C_6S_4 & C_4C_6 - C_5S_4S_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_4C_6 - S_4S_6 & -C_6S_4 - C_4S_6 & 0 \\ C_4S_6 + C_6S_4 & C_4C_6 - S_4S_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C_{46} & -S_{46} & 0 \\ S_{46} & C_{46} & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & E & f \\ g & h & I \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$\theta_4 + \theta_6 = Atan2(S_{46}, C_{46})$$

ולמעשה מתקבלים אינסוף פתרונות!

עבור מקרה בו נבחר $\theta_5 = \pi$, נקבל $I = C_5 = -1$ ומכאן:

$$\begin{pmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_6S_4 - C_4C_5S_6 & 0 \\ C_4S_6 + C_5C_6S_4 & C_4C_6 - C_5S_4S_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_4C_6 - S_4S_6 & -C_6S_4 + C_4S_6 & 0 \\ C_4S_6 - C_6S_4 & C_4C_6 + S_4S_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -C(\theta_4 - \theta_6) & S(\theta_4 - \theta_6) & 0 \\ S(\theta_4 - \theta_6) & C(\theta_4 - \theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & E & f \\ g & h & I \end{pmatrix}$$

כאשר: $C_1C_2 + S_1S_2 = C_{1-2},\ C_1S_2 - C_2S_1 = S_{1-2}$

ונקבל:

$$\theta_4 - \theta_6 = Atan2\big(S(\theta_4 - \theta_6), C(\theta_4 - \theta_6)\big)$$

ולמעשה מתקבלים אינסוף פתרונות!

נבדוק שמקרה הזה אפשרי:

$$I = \hat{\boldsymbol{z}}^3_{6_{z-component}} = C_5$$

מקרה זה קורה אפילו במצב האפס של הרובוט בש"ב. רואים שזה over-defined באוריינטציה במצב האפס של הרובוט, כי מפרקים 4,6 עושים את אותה הפעולה בסיבוב וצריך שרק הסכום שלהם יתן את האוריינטציה הרצויה.

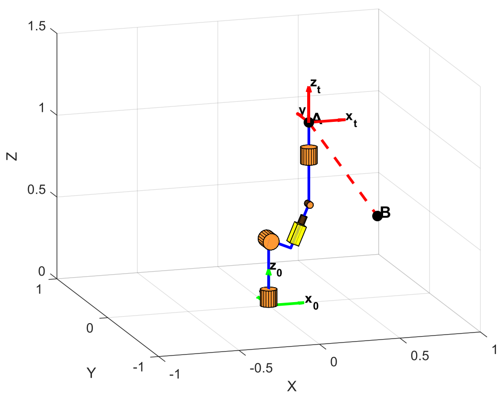
לקוד, נבחר $\theta_4 = 0$ במקרה הסינגולרי, ונקבל:

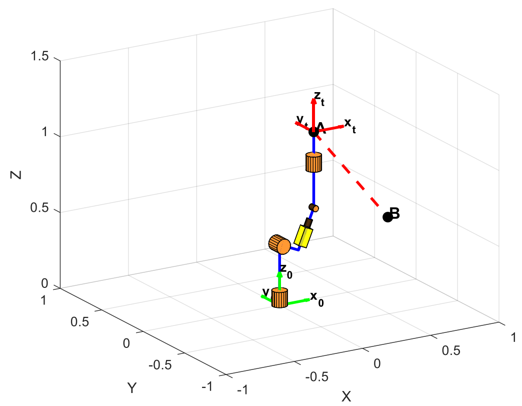
$$\begin{pmatrix} C_4C_5C_6 & -C_4C_5S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & E & f \\ g & h & I \end{pmatrix}$$

ונקבל פתרון יחיד לזווית מפרק 6.

<u>כעת נראה גרפים לפיצול הפתרונות לבעיית האוריינטציה:</u>

עבור בחירת סינוס זווית θ_5 - $S_5 = \pm\sqrt{1-I^2}$, הפתרונות השונים, לנקודה A, נראים כך (נניח בחירת סימן חיובי לשאר המפרקים):





באיור השמאלי רואים את הפתרון, עבור דרישת נקודת A ואוריינטציה eye(3) , עבור θ_5 בסימן פלוס ב-elbow ובאיור הימני עבור סימן מינוס. ערכי המפרקים עבור פתרונות אלו:

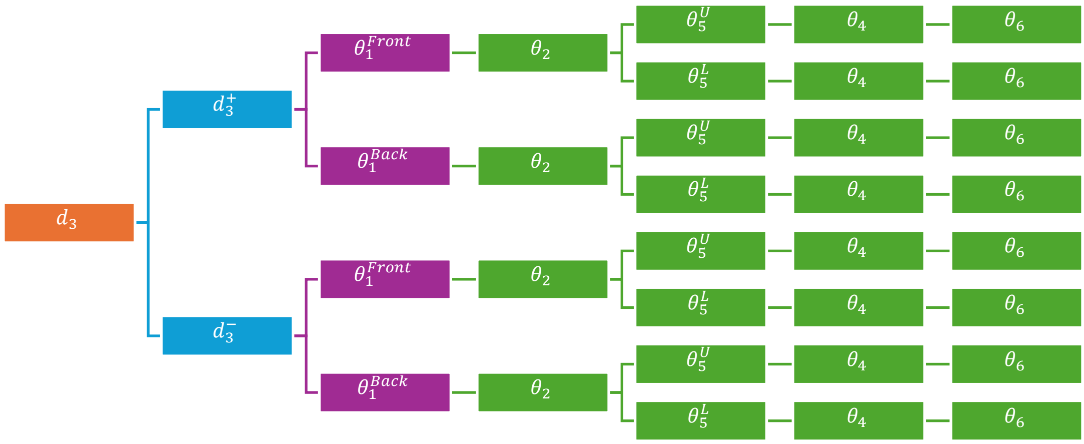
$$q_1 = (0 \quad -23.402° \quad 0.1828[m] \quad 0 \quad 23.402° \quad 0)^T$$

$$q_2 = (0 \quad -23.402° \quad 0.1828[m] \quad -180° \quad -23.402° \quad 180°)^T$$

כלומר, כאשר θ_5 הפוך, המפרקים θ_4, θ_6 מפצים אחד את השני ודואגים לפתרון בעיית האוריינטציה.

<u>מכאן, עץ הפתרונות לפתרון הכולל:</u>

לכן, יש סה"כ 8 פתרונות לקינמטיקה ההפוכה של הרובוט הזה.

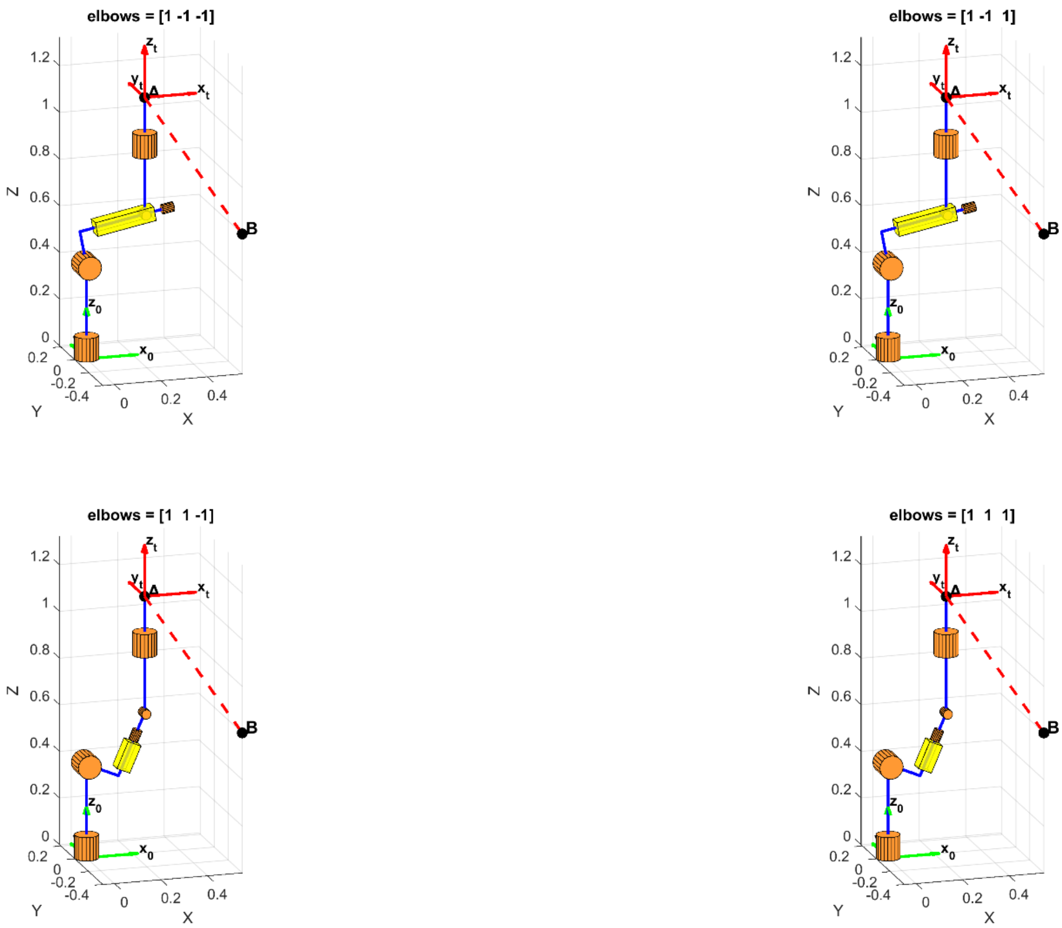


- לא כולל מקרים סינגולריים בהם אינסוף פתרונות

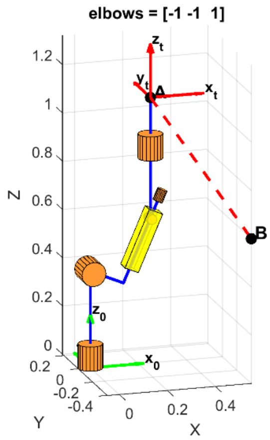
בתוכנה אנחנו סימנו את הסימנים כך: $elbows = [\pm\theta_1, \pm d_3, \pm\theta_5]$

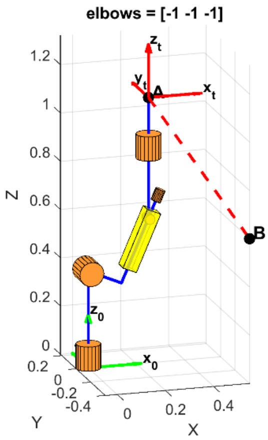
כעת, נצייר את כל הפתרונות עבור דרישת נקודת A ואורייטנציה eye(3) :

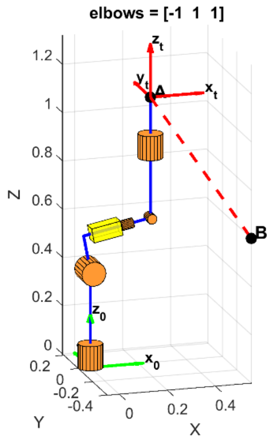
עבור $elbows = [\pm1, \pm1, \pm1]$, נקבל:

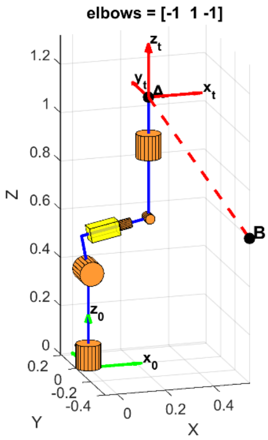


וארבעת הפתרונות האחרים:









חלק מהפתרונות נראים דומים מאוד, ההבדלים יכולים במפרקים כמו θ_4, θ_6 להם אין אינדיקציה גיאומטרית ברורה באיורים.

סעיף 3 – השגת היעקוביאן המלא של הרובוט

היעקוביאן הגדול לרובוט הזה, בבסיס 0: $J = J^0 = \begin{pmatrix} J_{L_1} & J_{L_2} & J_{L_3} & J_{L_4} & J_{L_5} & J_{L_6} \\ J_{A_1} & J_{A_2} & J_{A_3} & J_{A_4} & J_{A_5} & J_{A_6} \end{pmatrix}$.

את היעקוביאן הלינארי נשיג ע"י גזירת ווקטור המיקום של התפסנית מה-FK, ואת היעקוביאן הזוויתי נשיג בעזרת שיטת Witney שאומרת שרק המפרקים הסיבוביים תורמים ותרומתם ליעקוביאן הזוויתי היא ציר הסיבוב של המפרק, בבסיס 0.

היעקוביאן הלינארי מחושב כך:

$$\boldsymbol{d}_t^0(t) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} d_1\big(\boldsymbol{q}(t)\big) \\ \vdots \\ d_n\big(\boldsymbol{q}(t)\big) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_t^0 = \dot{\boldsymbol{d}} = \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial q_n}\dot{q}_n \rightarrow J_{L_i} = \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial q_i}$$

מחישוב סימבולי במאטלאב, נקבל:

$$J_{L_1} = \begin{pmatrix} -l_2C_2S_1 + (d_3+l_4)S_1S_2 + (l_5+l_6)(S_5(C_1S_4 + S_1C_2C_4) + C_5S_1S_2) \\ l_2C_1C_2 - (d_3+l_4)C_1S_2 + (l_5+l_6)(S_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) - C_1C_5S_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{L_2} = \begin{pmatrix} -l_2C_1S_2 - (d_3+l_4)C_1C_2 - (l_5+l_6)(C_1C_2C_5 - C_1C_4S_2S_5) \\ -l_2S_1S_2 - (d_3+l_4)C_2S_1 - (l_5+l_6)(C_2C_5S_1 - C_4S_1S_2S_5) \\ l_2C_2 - (d_3+l_4)S_2 - (l_5+l_6)(C_5S_2 + C_2C_4S_5) \end{pmatrix}$$

$$J_{L_3} = \begin{pmatrix} -C_1S_2 \\ -S_1S_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \widehat{\boldsymbol{u}}_3^0, \qquad J_{L_4} = \begin{pmatrix} (l_5+l_6)S_5(S_1C_4 + C_1C_2S_4) \\ -(l_5+l_6)S_5(C_1C_4 - C_2S_1S_4) \\ (l_5+l_6)S_2S_4S_5 \end{pmatrix}$$

$$J_{L_5} = \begin{pmatrix} (l_5+l_6)(C_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) + C_1S_2S_5) \\ -(l_5+l_6)(C_5(C_1S_4 + C_2C_4S_1) - S_1S_2S_5) \\ -(l_5+l_6)(C_2S_5 + C_4C_5S_2) \end{pmatrix}, \qquad J_{L_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נצטרך ליעקוביאן הזוויתי את ציר המפרקים הסיבוביים בבסיס 0, שהם לפי ה-FK במאטלאב:

$$J_{A_1} = \widehat{\boldsymbol{u}}_1^0 = \widehat{\boldsymbol{z}}_0^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad J_{A_2} = \widehat{\boldsymbol{u}}_2^0 = -\widehat{\boldsymbol{y}}_2^0 = \begin{pmatrix} S_1 \\ -C_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad J_{A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{A_4} = \widehat{\boldsymbol{u}}_4^0 = \widehat{\boldsymbol{z}}_3^0 = \begin{pmatrix} -C_1S_2 \\ -S_1S_2 \\ C_2 \end{pmatrix}, \qquad J_{A_5} = \widehat{\boldsymbol{u}}_5^0 = -\widehat{\boldsymbol{y}}_5^0 = \begin{pmatrix} C_4S_1 + C_1C_2S_4 \\ -C_1C_4 + C_2S_1S_4 \\ S_2S_4 \end{pmatrix}$$

$$J_{A_6} = \widehat{\boldsymbol{u}}_6^0 = \widehat{\boldsymbol{z}}_6^0 = \begin{pmatrix} S_5(S_1S_4 - C_1C_2C_4) - C_5C_1S_2 \\ -S_5(C_1S_4 + S_1C_2C_4) - C_5S_1S_2 \\ C_2C_5 - S_2C_4S_5 \end{pmatrix}$$

כעת, נמצא את היעקוביאן המלא ביחס למערכת התפסנית בעזרת:

$$J_L^t = {}^tR_0 J_L^W, \qquad J_A^t = {}^tR_0 J_A^W$$

כאשר, נסמן מ"צ אדמה כ-$World = W = 0$.

מחישוב סימבולי במאטלאב, נקבל את החלק הלינארי:

$$J_{L_1} = \begin{pmatrix} \\ S_4S_5(d_3S_2 - l_2C_2 + l_4S_2) \end{pmatrix}$$

$$J_{L_2} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$J_{L_3} = \begin{pmatrix} C_6S_5 \\ -S_5S_6 \\ C_5 \end{pmatrix}, \qquad J_{L_4} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$J_{L_5} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad J_{L_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והחלק הזוויתי מהמאטלאב:

$$J_{A_1} = \begin{pmatrix} C_6(C_2S_5 + C_4C_5S_2) - S_2S_4S_6 \\ -S_6(C_2S_5 + C_4C_5S_2) - C_6S_2S_4 \\ C_2C_5 - C_4S_2S_5 \end{pmatrix}, \qquad J_{A_2} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}, \qquad J_{A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{A_4} = \begin{pmatrix} C_6S_5 \\ -S_5S_6 \\ C_5 \end{pmatrix}, \qquad J_{A_5} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$J_{A_6} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

צריך להעתיק את המטריצה המופשטת מ-Symbolic_Jacobian, עכשיו שזה נעשה באיבר-איבר זה עובד

סעיף 4 – תכנון מסלול הטפסנית והדפסת גרפים דרושים

נעבור על דרישת המסלול.

דרוש מסלול עבור הטפסנית ממצב A ל-B, שנמשך $T = 2[s]$, תחת מגבלות המפרקים במטלה.

דרוש שהטפסנית תנוע בקו ישר ותסתובב מאוריינטציה A ל-B.

דרוש לתכנן את המסלול עבור 3 מקרים:

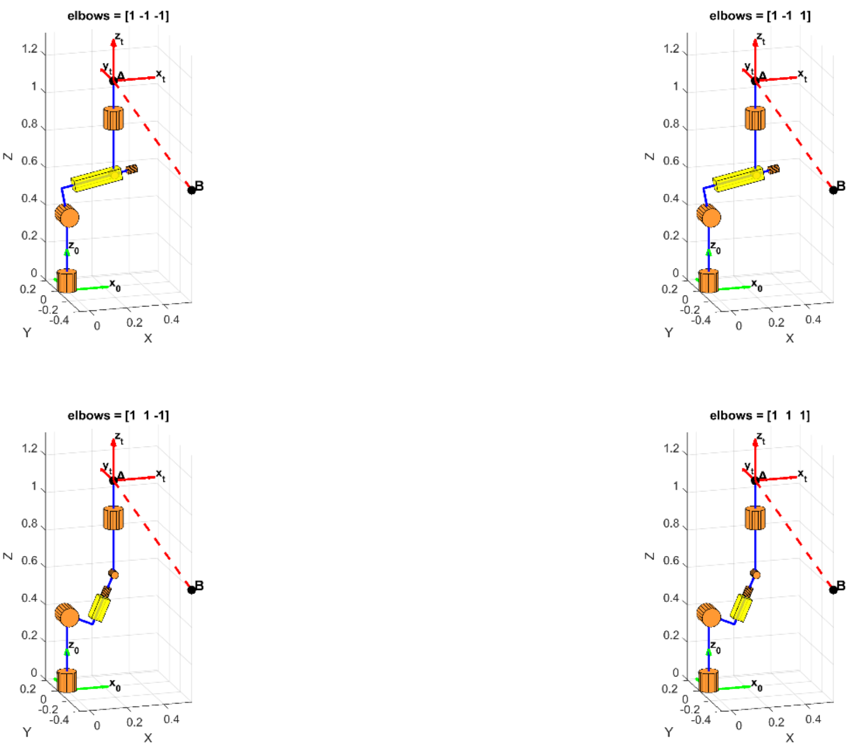
1. מהירות לינארית וזוויתית קבועים.
2. פרופיל מהירות (לינארית וזוויתית) טרפזואידי.
3. פרופיל מהירות פולונומיאלי, שמבטיחים מהירות ותאוצה אפס בהתחלה וסוף התנועה.

כעת, נתכנן וננתח את המסלול לכל מקרה בנפרד.

בחירת ענף פתרון להשגת המסלול הדרוש

קודם, נבחר ענף פתרון ב-IK של הרובוט, אתו נוכל לקבל את ערכי המפרקים הדרושים בזמן כדי לקבל את המסלול הרצוי.

נסתכל על מספר פתרונות אפשריים לנקודה A הדרושה:



הפתרונות האחרים יכולים: להפוך עם θ_1 את הכיוון אליו פונה הרובוט בעזרת מפרק הבסיס, ואז מפרק θ_2 צריך זווית גדולה בשביל להפוך את הרובוט שיפתור את בעיית המיקום ב-IK, ומקרים דומים יתקבלו בבחירת סימן שלילי למפרק הלינארי או מפרק θ_5. לכן, כדי שהרובוט יפנה לכיוון הנקודה ויהיה צורך בזוויות/אורכי מפרק לינארי שאינם שונים מאוד ממצב האפס, נבחר בענף הפתרון עבורו elbow=[1,1,1].

המטרה שלנו היא לבחור ענף פתרון שמתאים למסלול הדרוש ויקיים את האילוצים המכאניים על ערכי המפרקים ביחס למצב האפס הנתון בעבודה. בנוסף, אנחנו לא נרצה לבחור פתרון בו חוליות ומפרקי הרובוט נכנסים אחד בתוך השני, במודל זה אפשרי אבל במציאות לא.

מקרה 1 – פרופיל מהירות קבוע

במקרה זה, נדרוש את המסלול הבא:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v} = const \rightarrow \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{r}_0$$

נבחר את נקודת ההתחלה להיות $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_A$ ונבחר את המהירות שתוך הזמן הדרוש תיקח את המסלול לנקודה B.

$$\boldsymbol{r}(t=T) = \boldsymbol{v}T + \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_B \rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A}{T} \rightarrow \boldsymbol{r}(t) = \frac{\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A}{T} t + \boldsymbol{r}_A$$

כעת יש לנו מסלול שמבטיח פרופיל מהירות קבוע. את הסיבוב בין שני המצבים נבצע בעזרת מרטיצת סיבוב יחסית בין שני המצבים עם זווית משתנה בזמן.

לכל מצב נתון האוריינטציה שלו ביחס למערכת 0: ${}^0R_A,\ {}^0R_B$. ניתן לקבל את מטריצת הסיבוב היחסית ביניהם, כאשר הסיבוב ממצב A ל-B, ע"י:

$${}^AR_B = {}^0R_A^{-1}\,{}^0R_B = {}^0R_A^T\,{}^0R_B$$

לכן, מטריצת הסיבוב הנ"ל בצורת סיבוב סביב ציר:

$${}^AR_B = Rot(\hat{n}^A, \theta)$$

כאשר: $\hat{n}^A = \frac{1}{2\cdot S\theta}\begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix}$, $\theta \equiv \theta_f = \arccos\left(\frac{tr({}^AR_B)-1}{2}\right)$.

הזווית שנקבל ממטריצת הסיבוב היחסית היא הזווית הדרושה לסיבוב מלא בין המצבים. אנחנו רוצים במקום זאת להגדיר סיבוב בזמן $\theta(t)$ שמתחיל ב-0 ומגיע לערך θ_f.

רוצים מ"ז קבועה, לכן פונקציית זווית הסיבוב: $\theta(t) = \frac{\theta_f}{T}t$. כעת נתחיל לענות על הסעיפים.

מקרה 1 – סעיף a

מכאן, המיקום, מהירות ותאוצה של הטפסנית בצורה אנליטית:

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \frac{\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A}{T} t + \boldsymbol{r}_A, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v} = const, \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{0}}$$

מקרה 1 – סעיף b

עבור מטריצת הסיבוב:

$${}^AR_B = {}^0R_A^T\,{}^0R_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta_f = \arccos\left(\frac{tr\left({}^AR_B\right) - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{0-1}{2}\right) = 120° = \frac{2\pi}{3}$$

$$\hat{n}^A = \frac{1}{2\cdot S\theta}\begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} (-1) - (0) \\ (1) - (0) \\ (-1) - (0) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$^{A}R_r(t)=\begin{pmatrix} n_x^2V\theta+C\theta & n_xn_yV\theta-n_zS\theta & n_xn_yV\theta+n_yS\theta \\ n_xn_yV\theta+n_zS\theta & n_y^2V\theta+C\theta & n_yn_zV\theta-n_xS\theta \\ n_xn_zV\theta-n_yS\theta & n_yn_zV\theta+n_xS\theta & n_z^2V\theta+C\theta \end{pmatrix}$$

כאשר $V\theta=1-C\theta$.

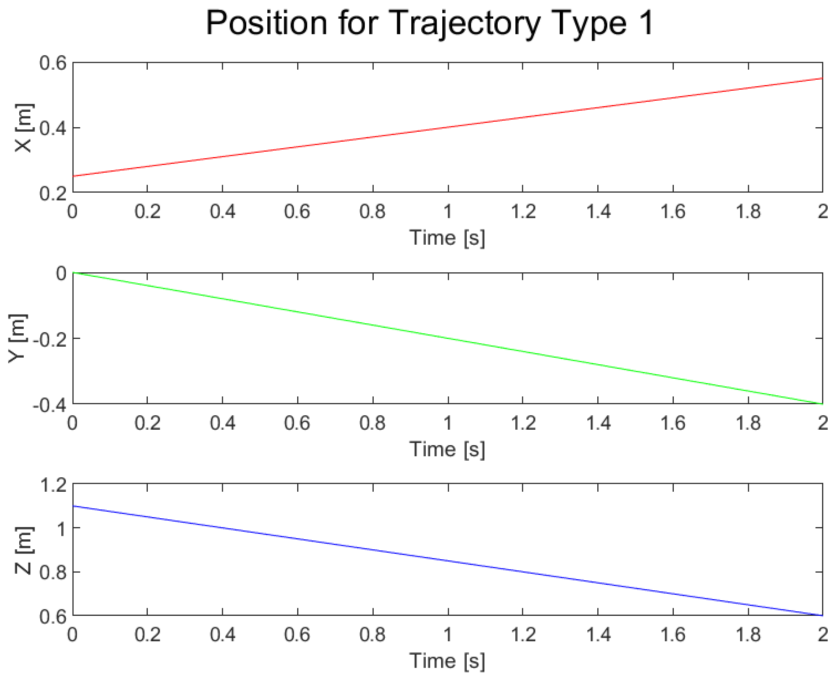
בהצבה, נקבל:

$$\boxed{^{A}R_r(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)+C\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) & -\frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) & -\frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) \\ -\frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) & \frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)+C\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) & -\frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) \\ \frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) & -\frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{3}S\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) & \frac{1}{3}V\left(\frac{\theta_f}{T}t\right)+C\left(\frac{\theta_f}{T}t\right) \end{pmatrix}}$$

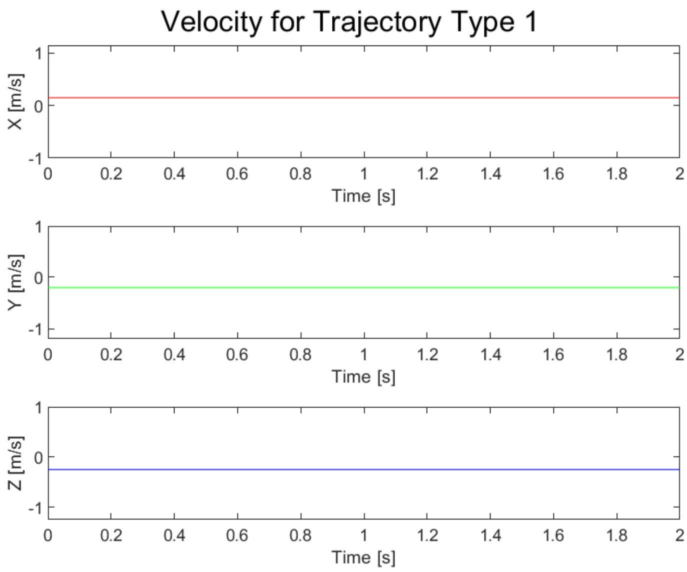
מקרה 1 – סעיף c

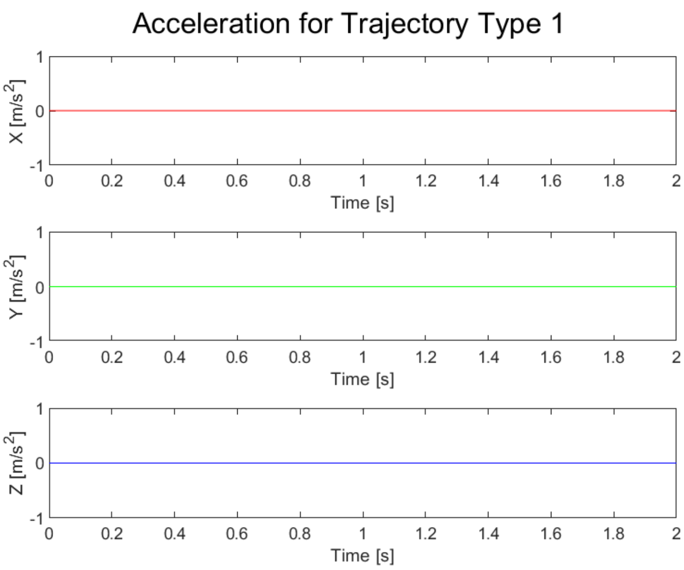
גרפים למיקום, מהירות ותאוצה קצה הרובוט כפונקציה של הזמן.

מיקום:



מהירות ותאוצה:





רואים שהמיקום לינארי, המהירות קבועה והתאוצה אפס.

מקרה 1 – סעיף d

את ערכי המפרקים כבר השגנו בשביל תכנון המסלול, את הנגזרות נשיג דרך גזירה נומרית ודרך היעקוביאן/נגזרתו.

כדי להשיג את נגזרת ערכי המפרקים בזמן, ניעזר בקשר:

$$\boldsymbol{v}_t^0 = J_L\dot{\boldsymbol{q}} \rightarrow \dot{\boldsymbol{q}} = J_L^{-1}\boldsymbol{v}_t^0 \quad ??$$

אבל מטריצת היעקוביאן הלינארי אינה ריבועית. לכן, נצטרך להיעזר במטריצה המלאה:

$$\dot{\boldsymbol{X}} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_t^0 \\ \boldsymbol{\omega}_t^0 \end{pmatrix} = J\dot{\boldsymbol{q}} \rightarrow \boxed{\dot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}\dot{\boldsymbol{X}}}$$

החיסרון הוא שצריך להשיג את המ"ז ונגזרה בפונקציות נוספות.

כאשר אנחנו יודעים את מהירות הטפסנית, כי תכננו ערכי מפרקים בזמן שיתנו את המסלול הרצוי.

בנוסף, כדי לחשב את התאוצה של המפרקים:

$$\ddot{\boldsymbol{X}} = \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{X}} = \dot{J}\dot{\boldsymbol{q}} + J\ddot{\boldsymbol{q}} \rightarrow \boxed{\ddot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}\left(\ddot{\boldsymbol{X}} - \dot{J}\dot{\boldsymbol{q}}\right)}$$

חישב היעקוביאן לערך המפרקים באותו זמן זה הצבה בלבד.

חישוב הנגזרת של היעקוביאן מאט יותר מאתגר ודורש הכנה של ביטוי אנליטי.

את הנגזרת של כל איבר במטריצה נחשב ע"י גזירה לפי ערכי המפרקים, והכפלה בווקטור מהירויות המפרקים:

$$J_{i,j} = J_{i,j}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \rightarrow \dot{J}_{i,j} = \frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{d\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

כאשר:

$$\frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{d\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{dq_1} & \frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{dq_2} & \frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{dq_3} & \frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{dq_4} & \frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{dq_5} & \frac{dJ_{i,j}(\boldsymbol{q})}{dq_6} \end{pmatrix}$$

נרשום את הביטוי לנגזרת של המטריצה בפונקציה המתאימה, כאשר את החישוב הסימבולי נעשה במקום נפרדת.

גרפים של מיקום, מהירות ותאוצה המפרקים לסעיף זה:

מקרה 2 – פרופיל מהירות טרפזואידי

במקרה זה, נדרוש את המסלול עבורו המהירות מקיימת:

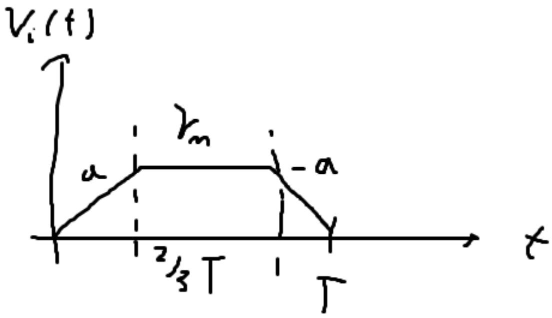
$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{a}t, & 0 < t < \frac{1}{6}T \\ \boldsymbol{v}_m, & \frac{1}{6}T < t < \frac{5}{6}T \\ \boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{a}\left(t - \frac{5}{6}T\right), & \frac{5}{6}T < t < T \end{cases}$$

הזמנים נבחרו מהדרישה למשך הזמן של המהירות הקבועה להיות-$\frac{2}{3}T$ והדרישה שזמן ההאצה וההאטה יהיו זהים.

הרעיון הוא שבכל ציר בנפרד המסלול יהיה טרפזואידי פשוט, כך שהמסלול הכולל התלת-מימדי יהיה גם טרפזואידי בצורה ווקטורית.

את התאוצה והמהירות המקסימלית הדרושים בכל ציר ניקח מערכי נקודות הקצה והזמן הדרוש למסלול T:

עבור ציר i:



מערכי הנקודות, ידוע לנו את ההעתק הדרוש מציר ה-i לבצע כדי להגיע לידע, שנסמן כ-Δ_i, וצריך שההאצה a_i תיקח את המסלול למהירות v_m שהיא הקבועה בציר זה תוך $\frac{1}{6}T$ שניות. לכן, המשוואות:

$$\Delta_i = 2 \times \left(\frac{v_m \cdot \frac{1}{6}T}{2}\right) + v_m \cdot \frac{2}{3}T, \qquad a_i \cdot \frac{1}{6}T = v_m$$

$$\rightarrow v_m = \frac{\Delta_i}{\frac{5}{6}T} = \frac{6}{5}\frac{\Delta_i}{T}, \qquad a_i = \frac{v_m}{\frac{1}{6}T} = \frac{\frac{6}{5}\frac{\Delta_i}{T}}{\frac{1}{6}T} = \frac{36}{5}\frac{\Delta_i}{T^2}$$

לכן, המהירויות והתאוצות בכל ציר:

	$x-\text{axis}$	$y-\text{axis}$	$z-\text{axis}$
$v_m[m/s]$	0.18	-0.24	-0.3
$a_i[m/s^2]$	0.54	-0.72	-0.9

לכן:

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0.54\\-0.72\\-0.9\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right],\boldsymbol{v}_m=\begin{pmatrix}0.18\\-0.24\\-0.3\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]}$$

עכשיו צריך לתכנן את הסיבוב בצורה אנליטית:

נתכנן באותה שיטה, בה הזווית נעה במהירות טרפזואידית. נקבל:

$$\dot{\theta}(t)=\begin{cases}\alpha t, & 0<t<\frac{1}{6}T\\ \omega_m, & \frac{1}{6}T<t<\frac{5}{6}T\\ \omega_m-\alpha\left(t-\frac{5}{6}T\right), & \frac{5}{6}T<t<T\end{cases}$$

כאשר, לפי ערכי הזוויות מתכנון המסלול הקודם:

$$\omega_m=\frac{6}{5}\frac{\left(\left(\frac{2\pi}{3}\right)-(0)\right)[rad]}{2[s]}=\frac{2}{5}\pi\left[\frac{rad}{s}\right],\alpha=\frac{6}{5}\pi\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

כעת, אפשר לעבור לסעיפים הטכנים:

מקרה 2 – סעיף a

מאינטגרציה של המהירות, נקבל את המסלול הרצוי:

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_A+\int_0^t\boldsymbol{v}(t)dt=\boldsymbol{r}_A+\int_0^t\begin{cases}\boldsymbol{a}t, & 0<t<\frac{1}{6}T\\ \boldsymbol{v}_m, & \frac{1}{6}T<t<\frac{5}{6}T\\ \boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{a}\left(t-\frac{5}{6}T\right), & \frac{5}{6}T<t<T\end{cases}dt$$

$$\rightarrow\boxed{\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}_A+\begin{cases}\frac{\boldsymbol{a}t^2}{2}, & 0<t<\frac{1}{6}T\\ \frac{\boldsymbol{a}\left(\frac{1}{6}T\right)^2}{2}+\boldsymbol{v}_m\left(t-\frac{1}{6}T\right), & \frac{1}{6}T<t<\frac{5}{6}T\\ \frac{\boldsymbol{a}\left(\frac{1}{6}T\right)^2}{2}+\boldsymbol{v}_m\left(\frac{5}{6}T\right)+\left(t-\frac{5}{6}T\right)\left(v_m-a\left(t-\frac{5}{6}T\right)\right)+\frac{a}{2}\left(t-\frac{5}{6}T\right)^2, & \frac{5}{6}T<t<T\end{cases}}$$

המהירות:

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t)=\begin{cases}\boldsymbol{a}t, & 0<t<\frac{1}{6}T\\ \boldsymbol{v}_m, & \frac{1}{6}T<t<\frac{5}{6}T\\ \boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{a}\left(t-\frac{5}{6}T\right), & \frac{5}{6}T<t<T\end{cases}}$$

התאוצה:

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{a}, & 0 < t < \frac{1}{6}T \\ \boldsymbol{0}, & \frac{1}{6}T < t < \frac{5}{6}T \\ -\boldsymbol{a}, & \frac{5}{6}T < t < T \end{cases}$$

מקרה 2 – סעיף b

לזווית ביטוי אנליטי שקול לזה של התנועה הלינארית:

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{\alpha t^2}{2}, & 0 < t < \frac{1}{6}T \\ \frac{\alpha\left(\frac{1}{6}T\right)^2}{2} + \omega_m\left(t - \frac{1}{6}T\right), & \frac{1}{6}T < t < \frac{5}{6}T \\ \frac{\alpha\left(\frac{1}{6}T\right)^2}{2} + \omega_m\left(\frac{5}{6}T\right) + \left(t - \frac{5}{6}T\right)\left(\omega_m - \alpha\left(t - \frac{5}{6}T\right)\right) + \frac{\alpha}{2}\left(t - \frac{5}{6}T\right)^2, & \frac{5}{6}T < t < T \end{cases}$$

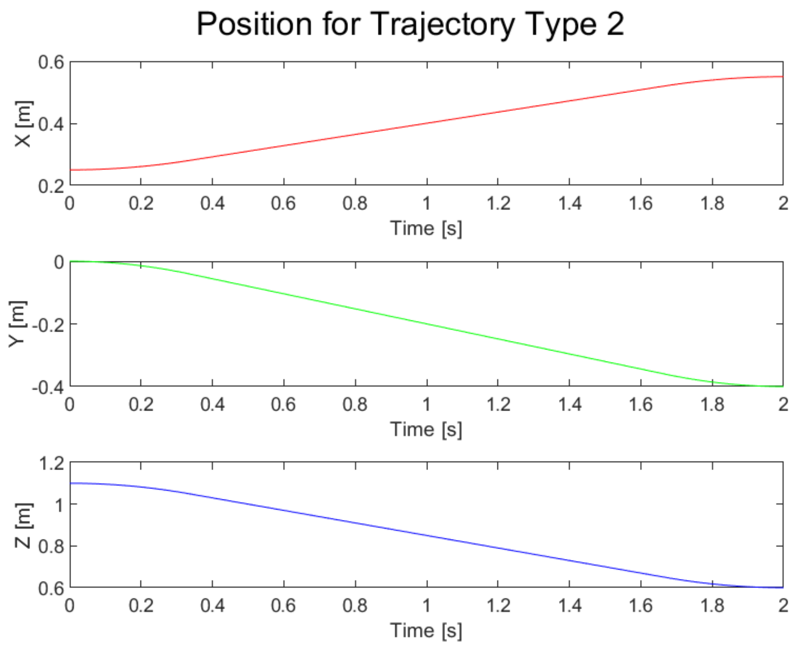
מכאן, הביטוי האנליטי למטריצת הסיבוב.

$$^{A}R_r(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}V(\theta(t)) + C(\theta(t)) & -\frac{1}{3}V(\theta(t)) + \frac{\sqrt{3}}{3}S(\theta(t)) & -\frac{1}{3}V(\theta(t)) + \frac{\sqrt{3}}{3}S(\theta(t)) \\ -\frac{1}{3}V(\theta(t)) - \frac{\sqrt{3}}{3}S(\theta(t)) & \frac{1}{3}V(\theta(t)) + C(\theta(t)) & -\frac{1}{3}V(\theta(t)) + \frac{\sqrt{3}}{3}S(\theta(t)) \\ \frac{1}{3}V(\theta(t)) - \frac{\sqrt{3}}{3}S(\theta(t)) & -\frac{1}{3}V(\theta(t)) - \frac{\sqrt{3}}{3}S(\theta(t)) & \frac{1}{3}V(\theta(t)) + C(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

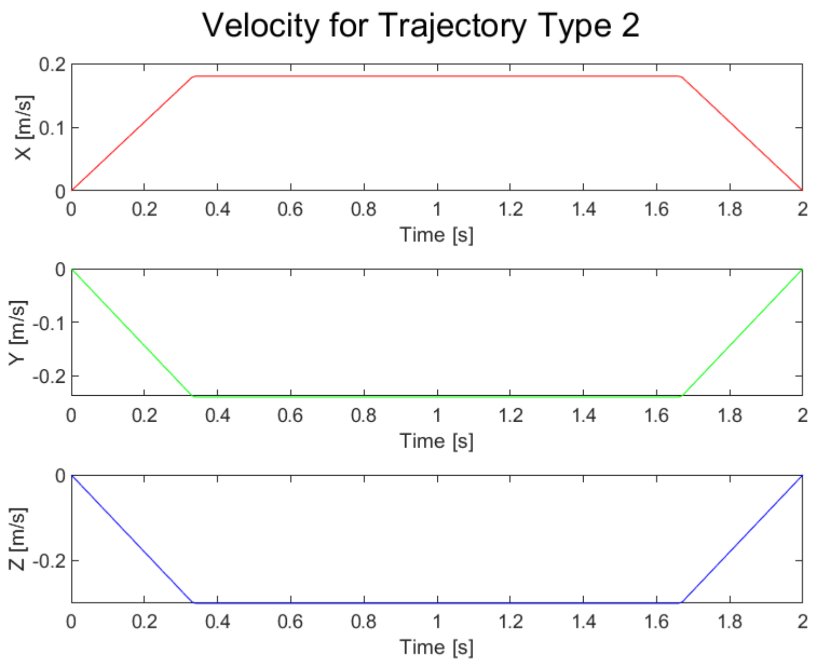
מקרה 2 – סעיף c

גרפים למיקום, מהירות ותאוצה קצה הרובוט כפונקציה של הזמן.

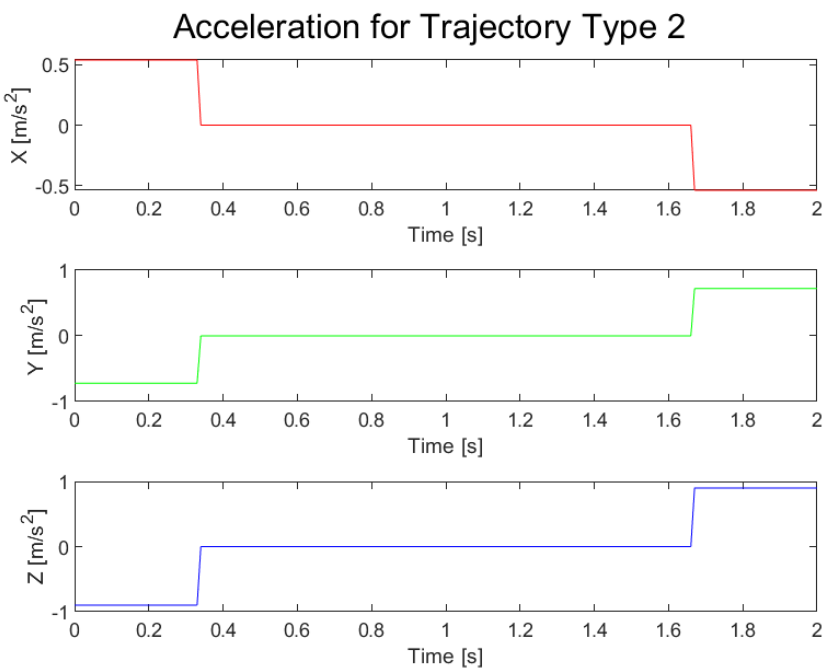
מיקום:



מהירות:



תאוצה:



מקרה 2 – סעיף d

גרפים של מיקום, מהירות ותאוצה המפרקים לסעיף זה:

מקרה 3 – פרופיל מהירות פולינומיאלי

במקרה זה, נבנה מסלול פולונומיאלי בצורה הבאה:

נבנה מסלול שעבורו הטפסנית עוברת בין שתי נקודות במרחב התלת-ממדי, כך שבקצוות מהירות ותאוצה אפס:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_A + \lambda(t)(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A), \qquad 0 \le t \le T$$

כאשר $\lambda(t)$ הוא פולינום סקלרי שדואג לעבור בין הנקודות, עם הת"ש הדרושים.

הת"ש הדרושים:

$$\lambda(0) = 0, \lambda(T) = 1, \dot{\lambda}(0) = \dot{\lambda}(T) = 0, \ddot{\lambda}(0) = \ddot{\lambda}(T) = 0$$

נבחר פולינום עבורו פרמטרים חופשיים כמספר הדרישות:

$$\lambda(t) = a_0 + a_1\left(\frac{t}{T}\right) + a_2\left(\frac{t}{T}\right)^2 + a_3\left(\frac{t}{T}\right)^3 + a_4\left(\frac{t}{T}\right)^4 + a_5\left(\frac{t}{T}\right)^5$$

נקבל: $\lambda(t) = 10\left(\frac{t}{T}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{T}\right)^5$.

את האוריינטציה נפתור בצורה זהה עבור פונקציית הזווית.

מקרה 3 – סעיף a

לכן, הביטויים האנליטיים למיקום, מהירות ותאוצת הטפסנית:

$$\boxed{\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_A + \lambda(t)(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)}$$

$$\rightarrow \boxed{\boldsymbol{v}(t) = \dot{\lambda}(t)(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A), \boldsymbol{a}(t) = \ddot{\lambda}(t)(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)}$$

מקרה 3 – סעיף b

הביטוי לזווית הסיבוב:

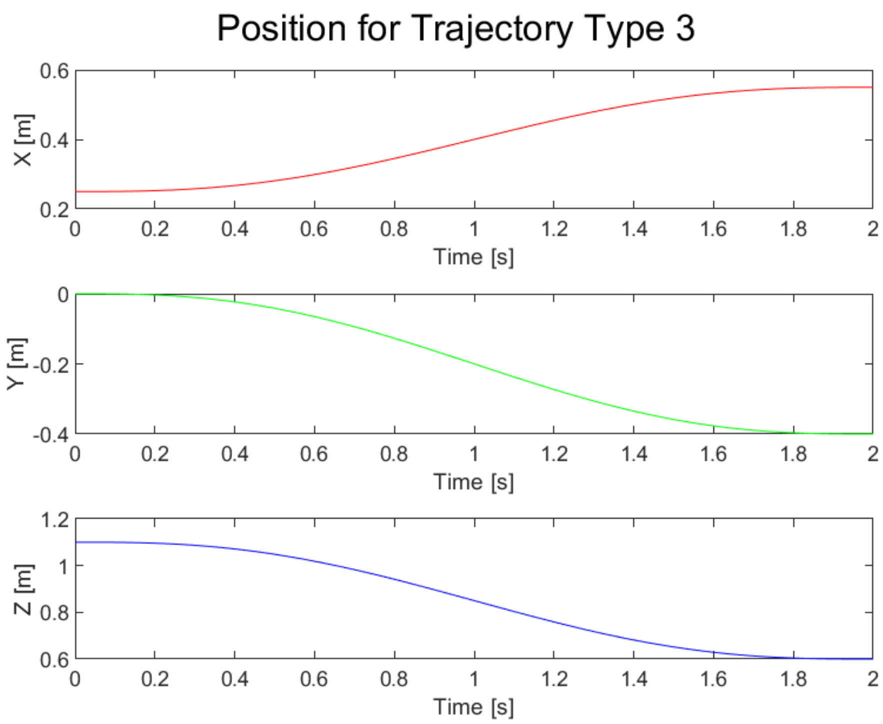
$$\boxed{\theta(t) = \theta_A + \lambda(t)(\theta_B - \theta_A) = \lambda(t) \cdot \frac{2\pi}{3}}$$

ואת הביטוי האנליטי למטריצת הסיבוב אפשר לקבל מהצבת הפונקציה הזאת באותה מטריצת סיבוב מסעיפים מתכנון המסלולים הקודמים.

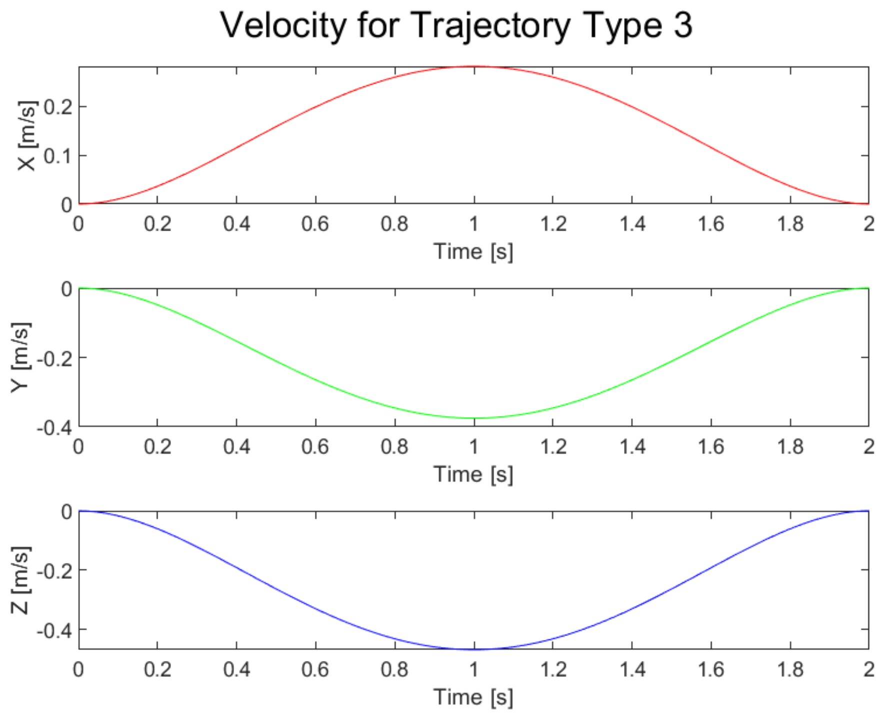
מקרה 3 – סעיף c

גרפים למיקום, מהירות ותאוצה קצה הרובוט כפונקציה של הזמן.

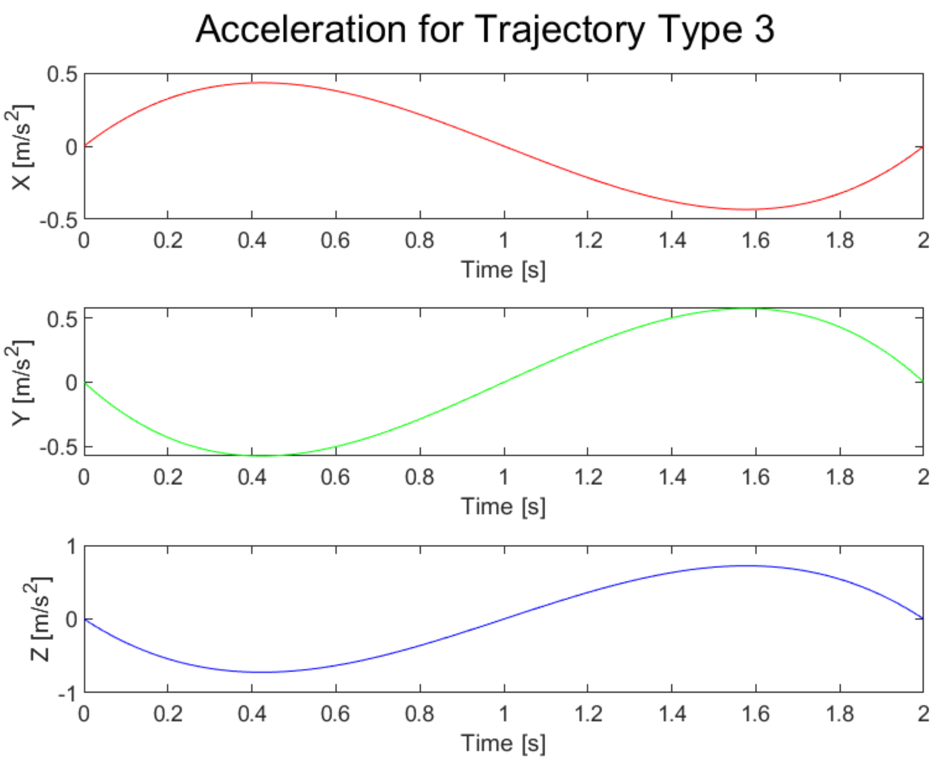
מיקום:



מהירות:



תאוצה:



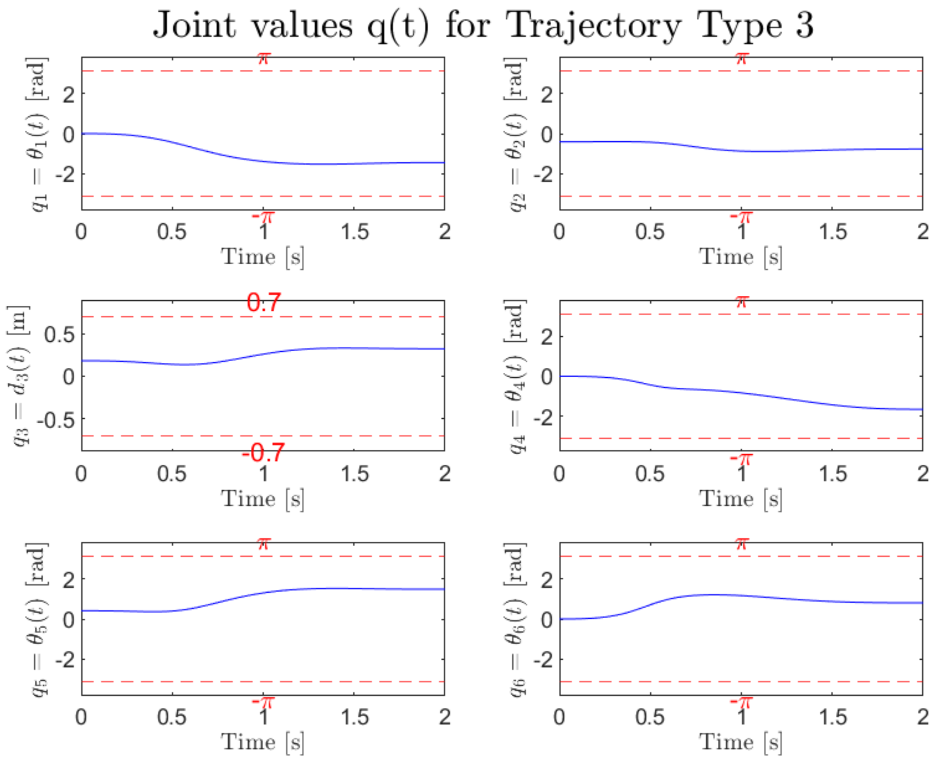
מקרה 3 – סעיף d

גרפים של מיקום, מהירות ותאוצה המפרקים לסעיף זה:

סיכום תכנון המסלול וסרטון

לבסוף, קיבלנו שלכל מקרה ערכי המפרקים כתלות בזמן בתחום הנדרש והטפסנית נעה ממצב A למצב B.

למשל, למקרה של מסלול פולינומיאלי:



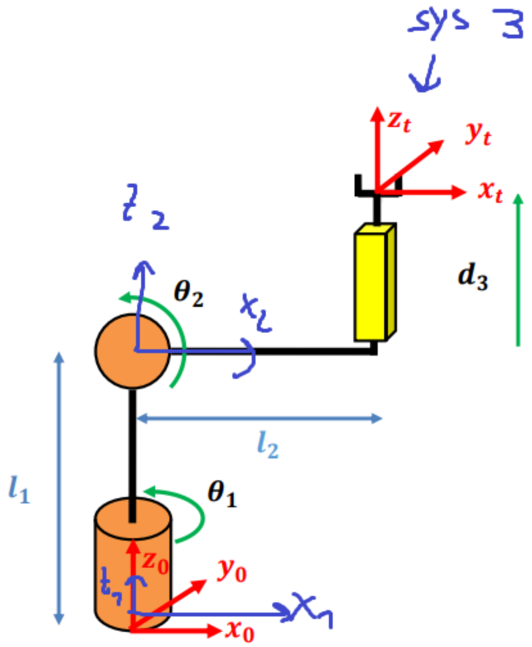
מצרפים סרטון ביוטיוב, שמכיל את תנועת הרובוט בשלושת המסלולים:

דד

סעיף 5 – חקירת מצבי הסינגולריות לרובוט המופשט

קודם, נראה איך יראה הרובוט במצב המופשט בו $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$ וגם $l_4 = l_5 = l_6 = 0$.

מפני שבחרנו לעבוד עם מ"צ ZRP, במצב זה מ"צ 3 הופכת להיות מערכת הטפסנית ונקבל:



לכן, במצב זה נוכל לאפס את הרכיבים המתאימים ב-FK ולקבל את הקינמטיקה הישירה של הרובוט הזה:

מכאן, בעזרת מאטלאב , מטריצת המעבר בין התפסנית לקרקע **במקרה המופשט**:

$$^{0}A_t = {^{0}A_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & C_1C_2l_2 - C_1S_2d_3 \\ C_2S_1 & C_1 & -S_1\,S_2 & S_1C_2l_2 - S_1S_2d_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 + S_2l_2 + C_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

נבחר בתור וקטור משימה את המיקום הרצוי של הטפסנית $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$, מכאן, הקשר בין מהירות המפרקים למהירות המתקבל בטפסנית בנקודה הרצויה:

$$\boldsymbol{v}_t^0 = \frac{d}{dt}\boldsymbol{d}_t^0 = \frac{\partial \boldsymbol{d}_t^0}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{d}_t^0}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{d}_t^0}{\partial q_3}\dot{q}_3 \rightarrow \dot{\boldsymbol{d}}_t^0 = J_L\dot{\boldsymbol{q}}$$

כאשר:

$$J_L = \begin{pmatrix} -S_1C_2l_2 + S_1S_2d_3 & -C_1S_2l_2 - C_1C_2d_3 & -C_1S_2 \\ C_1C_2l_2 - C_1S_2d_3 & -S_1S_2l_2 - S_1C_2d_3 & -S_1S_2 \\ 0 & C_2l_2 - S_2d_3 & C_2 \end{pmatrix}$$

סינגולריות תתרחש כאשר העמודות של מטריצת היעקוביאן הלינארי יהיו תלויות ולא יהיה ניתן לפרוס את כל $\mathbb{R}^3$ איתם. מצב זה מתרחש כאשר $\det(J_L) = 0$. נבדוק עבור אילו ערכי מפרקים זה קורה.

לפי העמודה הראשונה:

$$\det(J_L) = (-S_1C_2l_2 + S_1S_2d_3)[(-S_1S_2l_2 - S_1C_2d_3)(C_2) - (C_2l_2 - S_2d_3)(-S_1S_2)] \\ - (C_1C_2l_2 - C_1S_2d_3)[(-C_1S_2l_2 - C_1C_2d_3)(C_2) - (-C_1S_2)(C_2l_2 - S_2d_3)]$$

$$= (-S_1C_2l_2 + S_1S_2d_3)[-S_1S_2C_2l_2 - S_1C_2^2d_3 + S_1S_2C_2l_2 - S_1S_2^2d_3] \\ - (C_1C_2l_2 - C_1S_2d_3)[-C_1S_2C_2l_2 - C_1C_2^2d_3 + C_1S_2C_2l_2 - C_1S_2^2d_3]$$

$$= (-S_1C_2l_2 + S_1S_2d_3)[-S_1C_2^2d_3 - S_1S_2^2d_3] - (C_1C_2l_2 - C_1S_2d_3)[-C_1C_2^2d_3 - C_1S_2^2d_3]$$

$$= (-S_1C_2l_2 + S_1S_2d_3)(-S_1d_3) - (C_1C_2l_2 - C_1S_2d_3)(-C_1d_3)$$

$$= (-C_2l_2 + S_2d_3)(-S_1^2d_3) + (-C_2l_2 + S_2d_3)(-C_1^2d_3)$$

$$= d_3(-S_1^2 - C_1^2)(S_2d_3 - C_2l_2) = d_3(C_2l_2 - S_2d_3)$$

לכן, הרובוט יקבל סינגולריות עבור 2 מקרים:

מקרה 1:

$$d_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{d}_t^0 = \begin{pmatrix} C_1C_2l_2 \\ S_1C_2l_2 \\ l_1 + S_2l_2 \end{pmatrix}$$

אז, שני מפרקים פורסים וקטור מהירות תלת-ממדי כל אחד, כך שחסר עוד כיוון מהירות כדי שיהיה אפשר להזיז את הטפסנית בכל כיוון רצוי. לכן, מדובר בסינגולריות במיקום.

צריך ציור של הסינגולריות בו יש להראות את הכיוונים הסינגולריים בהם לא ניתן לנוע במצב זה

מקרה 2:

$$C_2l_2 - S_2d_3 = 0 \rightarrow \boldsymbol{d}_t^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + S_2l_2 + C_2d_3 \end{pmatrix}$$

כלומר, במצב זה הטפסנית מעל ציר $\hat{\boldsymbol{z}}_0$. אז היעקוביאן הקווי:

$$J_L = \begin{pmatrix} 0 & -C_1S_2l_2 - C_1C_2d_3 & -C_1S_2 \\ 0 & -S_1S_2l_2 - S_1C_2d_3 & -S_1S_2 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

כלומר, מפרק 1 לא יכול לתרום למהירות של הטפסנית באותה נקודה, ולכן מדובר בסינגולריות במיקום.
בנוסף, ניתן לראות שבסינגולריות הזאת רק המפרק הלינארי יכול לתת מהירות בכיוון האנכי $\hat{\boldsymbol{z}}_0$.

צריך ציור של הסינגולריות בו יש להראות את הכיוונים הסינגולריים בהם לא ניתן לנוע במצב זה

סעיף 6 – חישוב מומנטים דרושים במפרקים בהרמה סטטית לרובוט המופשט

כעת נרצה לחשב את המומנטים/כוחות הנדרשים במפרקים, כאשר נתון שהטפסנית מחזיקה מסה M בשדה גרביטציה בכיוון $\boldsymbol{g} = -g\hat{\boldsymbol{z}}_0$, כאשר מסת המפרקים והחוליות זניחות ביחס ל-M.

את המומנטים הנדרשים, בהעמסה סטטית, נחשב בעזרת הקשר שמבוסס על שימור אנרגיה במערכת גק"ש הכוללת את החוליות והמפרקים של הרובוט.

העומס בטפסנית:

$$\boldsymbol{F}_e^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{M} \end{pmatrix}$$

הקשר בין מהירות הטפסנית (קווית וזוויתית) למהירות המפרקים:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_t^0 \\ \boldsymbol{\omega}_t^0 \end{pmatrix} = J\dot{\boldsymbol{q}}$$

מכאן, המומנטים שפועלים **על** המפרקים:

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = J^T \boldsymbol{F}_e^0$$

כדי לייצב את הרובוט, צריך להפעיל את אותם המומנטים בכיוון ההפוך, כלומר **צריך להפעיל**:

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{N} = -J^T\boldsymbol{F}_e^0 = -(J_L^T\boldsymbol{f} - J_A^T\boldsymbol{M})$$

מפני שאין עומס מומנט בטפסנית, נקבל:

$$\boldsymbol{\tau} = -\left(\begin{pmatrix} -S_1C_2l_2 + S_1S_2d_3 & C_1C_2l_2 - C_1S_2d_3 & 0 \\ -C_1S_2l_2 - C_1C_2d_3 & -S_1S_2l_2 - S_1C_2d_3 & C_2l_2 - S_2d_3 \\ -C_1S_2 & -S_1S_2 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix}\right)$$

לכן, המומנט שהמנועים צריכים להשקיע במשימה הסטטית:

$$\rightarrow \boxed{\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ (C_2l_2 - S_2d_3)Mg \\ C_2Mg \end{pmatrix}}$$

מקבלים שבמצב הסינגולריות ה-2 בו הטפסנית מעל ציר $\hat{\boldsymbol{z}}_0$ המפרק ה-2 לא מפעיל מומנט. זה הגיוני כאשר שמים לב שבמצב זה הכוח $-Mg\hat{\boldsymbol{z}}_0$ חותך את נקודת הפעלת המומנט של מפרק 2, ככה שהמפרק אינו צריך להפעיל שום מומנט (רק להחזיק את המשקל עם כוח קווי).

מפרק 1 מסוגל להפעיל מומנט רק בכיוון $\hat{\boldsymbol{z}}_0$ ולכן אינו יכול לסייע בביצוע משימת הרמת משקל.