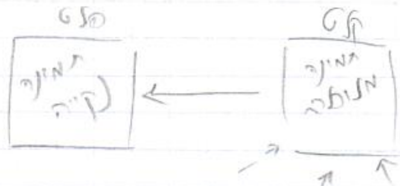
APML
שיעור 1

Unsupervised Learning - Image Restoration

הגדרת הבעיה:



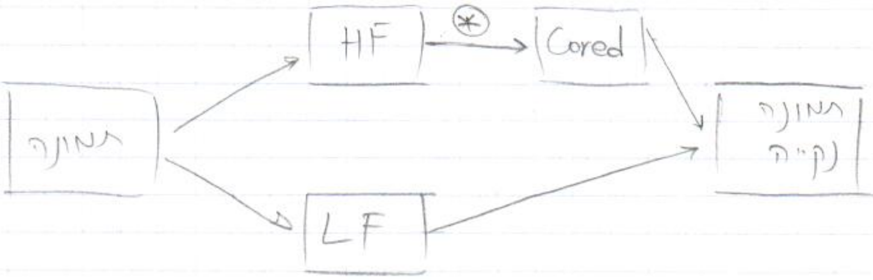
Denoising
תמונה שנוסף לה רעש $n \sim N(0,\sigma^2)$

Deblurring
תמונה שטושטשה ע"י קונבולוציה עם פילטר h.

Inpainting
תמונה עם פיקסלים חסרים

ניתן להבחין בין שני סוגים של בעיות: Blind כאשר אופי הרעש לא ידוע ו- Non-blind כשהוא ידוע.
(נעסוק רק בזה.)

אלגוריתם קלאסי: Coring



$$(*)\ Core(x) = \begin{cases} 0 & |x| < T \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

שימוש בלמידה:

\# במקרה של supervised learning, נשתמש בזוגות $\{c_i, n_i\}$ ונביא למינימום את

(c_i – תמונה נקייה, n_i – תמונה רועשת)

$$\sum_i \|A_\theta(n_i) - c_i\|$$

(על פני θ - המשקולות של הרשת...)

חסרון: האלגוריתם A תלוי מאוד בסוג ההרעשה $\Rightarrow$ נצטרך הרבה כאלה לסוגי רעש שונים.

Image Restoration : המשך

\# מקרים של unsupervised, נשתמש רק בתמונות נקיות $\{c_i\}$
וננסה ללמוד את פונקציית ההסתברות $P_\theta(x)$ שיצרה את הדגימות.

מבחינה פורמלית:

X - תמונה נקייה

Y - תמונה רועשת

$P(x)$ - מה שלומדים

$P(Y|X)$ - ידוע כי אנחנו ב-non-blind

$P(X,Y)$ - רוצים לדעת $\left(P(X,Y) = P(X)\cdot P(Y|X)\right)$

משפט גאוס-מרקוב: אם $P(X,Y)$ ידוע, מחפשים אלגוריתם $A(y)$
שממזער את השגיאה הריבועית הממוצעת

$$MSE = \mathbb{E}_{X,Y}\|A(y)-X\|^2$$

וה-A האופטימלי נתון ע"י $A(Y)=\mathbb{E}[X|Y]$.

הוכחה:

$$MSE(A) = \int_x\int_y P(x,y)\left(A(y)-x\right)^2 dx\,dy =$$

$$= \int_x\int_y P(y)P(x|y)\left(A(y)-x\right)^2 dx\,dy =$$

$$= \int_y P(y)\underbrace{\int_x P(x|y)\left(A(y)-x\right)^2 dx}_{MSE_y(A)}dy = \int_y MSE_y(A)P(y)dy$$

$$\frac{\partial MSE}{\partial A} = 2\int_x P(x|y)\left(A(y)-x\right)dx = 0$$

$$\Longrightarrow \int_x P(x|y)A(y)\,dx = \int_x P(x|y)\,x\,dx$$

$$\Longrightarrow A(y)\underbrace{\int_x P(x|y)dx}_{=1} = \mathbb{E}[x|y]$$

למה שימושית: אם $y|x \sim N(x,\sigma^2)$, $x \sim N(0,\sigma_x^2)$
אז:

$$x|y \sim N\left(\frac{\frac{1}{\sigma^2}y}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_x^2}},\ \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_x^2}}\right)$$

Wiener Filter

Image Restoration : המשך

דוגמא: x= וקטור של ערכי התמונה הנקייה

y= וקטור של ערכי התמונה המורעשת

$$y = Hx + \eta$$

עבור H ידוע ו- $\eta \sim N(0,\sigma^2 I)$

הערה: 3 הבעיות שדיברנו עליהן הן מקרים פרטיים של זה

* Denoising : $H = I$
* Inpainting : $\sigma^2 = 0$, H מטריצה אלכסונית

  $H(i,i) = 1 \Rightarrow$ פיקסל נראה

  $H(i,i) = 0 \Leftarrow$ פיקסל מוסתר
* Deblurring : H מטריצת קונבולוציה

⇐ לכן אם $y|x \sim N(Hx, \sigma^2 I)$

ונניח $x \sim N(0, \Sigma_x)$

הפתרון האופטימלי הוא:

ראינו בתרגול

$$\boxed{A(y) = \left(\frac{1}{\sigma^2} H^T H + \Sigma_x^{-1}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sigma^2} H^T \cdot y}$$

APML שיעור 2

יתרונות של הגישה הלא מפוקחת (unsupervised):

1. למידה מתבצעת רק פעם אחת, על תמונות נקיות
(אין תלות בסוג הרעש בתהליך האימון)
2. בהנחה שלמדנו את $P(x;\theta)$ בצורה מושלמת - סיימנו.
אין צורך להגדיר מחלקת היפותזות או להגדיר שום דבר,
יש לנו את המשערך האופטימלי (מבחינת השגיאה הריבועית)
והוא $E[x|y]$.

הערה: נשים לב שב-wiener filter בסופו של דבר התמונה המשוערת
היא פשוט מכפלה של התמונה הרועשת y באיזושהי מטריצה (לינארי).
לכן - יכולנו להגיע לאותה תוצאה ע"י

$$M^* = \min_M \| M y_i - x_i \|^2$$

הערה: המטריצה M תלויה ב- H, σ^2 (כלומר תלויה בבעיה) ⇐ אופטימיזציה על M אחת
לכל הבעיות תהיה לא אופטימלית

המשך : Image Restoration

מקרי קצה והתנהגות של פילטר וינר:

המקרה של Denoising , $H = I$ אז

• אם $\sigma^2 \to 0$ נקבל

$$E[X|Y] = \left(\frac{1}{\sigma^2} \cancel{H^T H} + \Sigma_x^{-1}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \cancel{H^T}\, y = y$$

• אם $\sigma^2 \to \infty$ נקבל

$$E[X|Y] = \left(\Sigma_x^{-1}\right)^{-1} \cdot 0 \cdot I \cdot y = 0$$

Mixture of Gaussians:

דוגמא: ← האלגוריתם האופטימלי לא חייב להיות לינארי

המטרה: Denoising לפיקסל בודד: $y = x + \eta$

$$\eta \sim N(0, \sigma^2 I)$$

$$x \sim \begin{cases} N(0, \sigma_1^2) & h = 1 \\ N(0, \sigma_2^2) & h = 2 \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} 1 & \text{with probability } \frac{1}{2} \\ 2 & \text{with probability } \frac{1}{2} \end{cases}$$

כלומר החלפנו את ההתפלגות של X: במקום גאוסיין בודד, אנחנו דוגמים כל x_i מתוך אחד משני גאוסיינים [illegible] ההתפלגות מטמע. ⇐ קיבלנו mixture of Gaussians

עכשיו,
$$P(x) = \sum_h P(x|h) \cdot P(h)$$

ולכן:
$$E[x|y] = P(h=1|y) \cdot E[x|y, h=1] + P(h=2|y) \cdot E[x|y, h=2] =$$
$$= P(h=1|y) \cdot \frac{\frac{1}{\sigma^2} \cdot y}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_1^2}} + P(h=2|y) \cdot \frac{\frac{1}{\sigma^2} \cdot y}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

(שנשאר מחוק מ״ס כב: נחשב את ההסתברויות שנותרו:

$$P(h=1|y) = \frac{P(h=1, y)}{P(y)} = \frac{P(h=1, y)}{P(h=1, y) + P(h=2, y)}$$

ידוע לנו:
$$P(h=1, y) = P(h=1) \cdot P(y|h=1) = \frac{1}{2} N(0, \sigma_1^2 + \sigma^2)$$

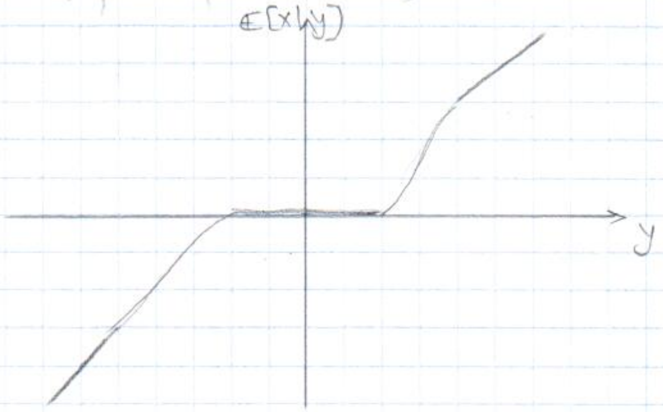
ובאותו אופן
$$P(h=2, y) = \frac{1}{2} N(0, \sigma_2^2 + \sigma^2)$$

Image Restoration : המשך

כעת אם נסתכל על המשערך האופטימלי נקבל:

$$E(x|y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \text{ is small } \& \ \sigma_1 << \sigma_2 \\ y & \text{if } y \text{ is large} \end{cases}$$

אז הפונקציה הזו נראית בערך כך:



זה מאוד דומה ל- coring שראינו בשיעור הראשון

אז למה זה לא עובד?

* מהדוגמאות שראינו קודם ראינו שנראה ש-x לא מתפלג כמו אוסף של גאוסיינים, כי לו היה מתפלג ככה אז וינר פילטר היה עובד טוב יותר, והוא לא נראה כל כך טוב בעין.
* איך נבדוק אם התמונות שלנו הן גאוסיין רב מימדי או לא?

טענה: אם $x \sim N(0, \Sigma_x)$ ונגדיר $z = w^T x$ אז מתקיים:

$$z \sim N(0, w^T \Sigma_x)$$

אז אפשר לעשות איזה טרנספורמציה w שאנחנו רוצים ולבדוק אם z יוצא גאוסייני. אם הוא לא- x גם לא היה.

דוגמה לטרנספורמציה כזו שראינו בשיעור היא גזירה.

אז איך נעריך את $P(x;\theta)$ אם x לא גאוסייני?

הנחה מקלה: במקום לעבוד עם תמונה, נעבוד עם patches וככה במקום בעיה במימד מיליון, ירדנו למימד 64 למשל.

Image Restoration: המשך

<u>אלגוריתמים שונים</u> יתאימו למודלים הבאים (וננסה למצוא את $p(x)$...)

1. נניח ש-x גאוסיין עם Σ, μ

2. Independent Component Analysis.

נניח ש-s מתפלג iid עם פילוג לא גאוסיין, $x=As$.

3. Gaussian Scale Mixture.

נניח $s \sim N(0,\Sigma_s)$ כלומר גאוסיין רב מימדי.

ו- $x=bs$ כאשר גם b הוא משתנה מקרי חיובי תמיד.

נשים לב שזה mixture of Gaussians כי $x|b \sim N(0,b\Sigma_s)$

כלומר נקבל אוסף גאוסיינים עם אותה מטריצת Covariance עד כדי כפל בסקלר.