(1) $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

(c) $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

$$E\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\cdot E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E\left(\sum_{1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{1}^{n}X_i + n\cdot\bar{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E\left(\sum_{1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}\cdot\frac{\sum_{1}^{n}X_i}{n} + n\cdot\bar{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E\left(\sum_{1}^{n}X_i^2 - 2n(\bar{X})^2 + n\cdot(\bar{X})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\cdot E\left(\sum_{1}^{n}X_i^2 - n(\bar{X})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{1}^{n}E(X_i^2) - n\cdot E(\bar{X}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[n(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right] = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= \boxed{\sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

לכן: S^2 הוא משערך מוטה של σ^2. $\sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\right) \neq \sigma^2$

ה) $\frac{1}{n-1} E\left(\sum_{1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) = \frac{n-1}{n-1} \cdot \sigma^2 = \sigma^2$

לכן: S_{n-1}^2 הוא משערך לא מוטה. $\sigma^2 = \sigma^2$

②

$$X \sim Bin(n,p)$$

$\theta = p$ (ההסתברות שלנו) $\hat{\theta} = \frac{X}{n}$

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot E(X) = \frac{1}{n} \cdot np = p$$

$E[\hat{\theta}] = p$

$\Downarrow$

לכן $\frac{X}{n}$ הוא אומד מטה ה"ו.