**מתימטיקה שימושית ותכנות מדעי**

**תרגיל 3- מכפלה פנימית, מערכות אורתוגונליות ואורתונורמליות, קירוב בממוצע, מטריצות אורתוגונליות, פירוק QR.**

1. (10 נקודות) יהי W תת-מרחב הנפרש על-ידי $\{(1,\ 2,1),(2,\ 1,1),(1,1,2)\}$. מצאו בסיס אורתונורמלי הפורש את אותו תת-מרחב. השתמשו בתהליך גרם-שמידט.

2. (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית ובו בסיס $\{v,v_2,v_3,\dots,v_n\}$. ידוע כי $\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_{k-1}\}$ היא מערכת אורתונורמלית המקיימת

$$span\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_{k-1}\}=span\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_{k-1}\}$$

הוכיחו כי $v_k-\widetilde{v_k}$, ניצב לתת המרחב הנפרש על-ידי $\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_{k-1}\}$ כאשר $\widetilde{v_k}$ הוא ההיטל של $v_k$ על $\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_{k-1}\}$.

3. יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהי $U=Sp\{u_1,\dots,u_k\}$ ונניח שהקבוצה $\{u_1,\dots,u_k\}$ תלויה לינארית.

א. הוכיחו כי אם נבצע את תהליך גרם שמידט על $\{u_1,\dots,u_k\}$, בהכרח נקבל בשלב מסוים $\varphi_i=0$.

ב. במה מפריעה התוצאה של סעיף א להמשך התהליך?

ג. כיצד ניתן בכל זאת, להשתמש בתהליך זה לבניית בסיס א.נ ל- $U$?

4. (10 נקודות) יהי $V$ מרחב מ.פ ויהי $U$ תת מרחב של $V$. אוסף כל הוקטורים ב- $V$ האורתוגונלים ל- $U$ מכונה **המשלים האורתוגונלי** של $U$ וסימונו $U^\perp$. כלומר

$$U^\perp=\{v\in V|<u,v\geq 0,\forall u\in U$$

ענו על הסעיפים הבאים:

א. אם $U=\{0\}$ אז מיהו $U^\perp$?

ב. אם $U=V$ אז מיהו $U^\perp$?

ג. הוכיחו $U^\perp\cap U=\{0\}$.

ד. הוכיחו $U\subseteq(U^\perp)^\perp$.

5. (10 נקודות)

I. נניח כי Q היא מטריצה עם m שורות ו- n עמודות. ידוע כי n העמודות הן בסיס אורתונורמלי, וכן כי m>n.

א. הראו כי $Q^tQ=I$

ב. הוכיחו או הפריכו $QQ^t=I$?

ג. הראו כי אם עמודות Q הן בסיס אורתונורמלי אז לכל וקטור $x\in R^n$ קיים $\|Q\cdot x\|=\|x\|$.

הדרכה: $\|Q\cdot x\|^2=(Q\cdot x)^t(Q\cdot x)$

II. ד. נניח כי המטריצה Q היא מטריצה ריבועית, כלומר n=m. הוכיחו כי $Q^t=Q^{-1}$, וכן $Q^tQ=QQ^t=I$.

ה. מטריצות ריבועיות כנ"ל בהן העמודות הן אורתונורמליות נקראות מטריצות אורתוגונליות. הראו כי גם שורות מטריצות אלה הן אורתונורמליות ויוצרות בסיס של $R^n$

ו. מרחבים אורתוגונליים הם מרחבים בהם כל וקטור במרחב אחד אורתוגונלי לכל וקטור במרחב שני. אלו שני תת-מרחבים הקשורים לפתרון מערכת משוואות הומוגניות הם מרחבים אורתוגונליים? הסבירו.

ז. האם תת המרחב של מישור הרצפה (xy) הוא אורתוגונלי לתת המרחב של ציר ה- z?

ח. האם תת המרחב של מישור הרצפה אורתוגונלי למישור xz?

ט. עבור שני מרחבים אורתוגונליים, נסחו טענה על וקטור הנמצא בתת-מרחב החיתוך.

6. (10 נקודות) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

יהי $W$ תת מרחב הנפרש ע"י הקבוצה $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},cos(x)\right\}$ מעל $R$, ותהי $f(x)=|x|$ פונקציה בקטע $[-\pi,\pi]$. מצאו פונקציה $g$ הנפרשת ע"י $S$ שהיא הכי קרובה ל- $f$, כלומר $\|f-g\|$ מינימלי. מהו הערך המינימלי שמתקבל? האם קיימת פונקציה $h$ הנפרשת ע"י $S$ השונה מ-$g$ כך ש-$\|f-h\|=\|f-g\|$? הסבירו את תשובתכם.

7. (10 נקודות) עבור המטריצה A הבאה חשבו את פירוק QR, כלומר חשבו את המטריצה האורתוגונלית Q והמטריצה המשולשת העליונה R כך ש- $A=Q\cdot R$

$$A=\begin{pmatrix}5&9\\1&7\\-3&-5\\1&5\end{pmatrix}$$

הדרכה: צפו בהקלטה על פירוק QR במודל.

## תרגיל Python

i. (15 נקודות) פירוק QR. כיתבו פונקציה למימוש תהליך גרם-שמידט לפי הפסאודו-קוד של האלגוריתם הבא:

```
for j in range(n)
    v = A(:,j)
    for i in range(j-1)
        R(i,j) = Q(:,i)' * v
        v = v - R(i,j) * Q(:,i)

    if v <= eps
        # in case one of the vectors is a
        # linear combination of the others
        update the matrix A and the col dimension
    else
        R(j,j) = norm(v)
        Q(:,j) = v/R(j,j)
return A, Q, R
```

הסבר:

שורה 2 – הוקטור v הוא העמודה ה- j של A.,

שורה 3 – עבור כל הוקטורים q שנבנו עד עכשיו -

שורה 4 - (#מכפלה פנימית בין הוקטור החדש v לבין וקטור אורתונורמלי, חישוב של מקדם ההיטל, מציבים את התוצאה במטריצה R )

שורה 5 – מפחיתים מהוקטור v את ההיטל האורתוגונלי של v על הוקטור q=Q(:,i).

שורה 6-9 – בודקים האם הוקטור לאחר הפחתת ההיטל האורתוגונלי שלו מעצמו קטן מ- eps

(אפשר לקבוע eps = 1e-14).

אם כן מוחקים את העמודה הרלבנטית מהמטריצה ומעדכנים את הממד של המטריצה ואת ריצת הלולאה

שורה 11 – מציבים את הנורמה של v באלכסון הראשי של R

שורה 12 – נירמול הוקטור לאחר ההפחתה (u-u_gal)/||u-u_gal||

הפונקציה תקבל בכניסה מטריצה A כלשהי של n וקטורים $a_1,a_2, \ldots, a_n$, (עמודות המטריצה A), ותייצר m וקטורים אורתונורמליים $(m<=n)$ $q_1,q_2, \ldots, q_m$ (עמודות המטריצה Q). אם וקטורי המטריצה A הם תלויים לינארית, אז עבור לפחות אחד מהם (נניח k+1) ההיטל האורתוגונלי על תת-המרחב הנפרש על-ידי המערכת האורתונורמלית $q_1,q_2, \ldots, q_k$ שווה לוקטור עצמו (עד כדי eps) ואז משמיטים אותו ומעדכנים את ממד העמודות של המטריצה.

את המכפלות הפנימיות בין הוקטורים $q'_i$ ל- $a_j$ מציבים במטריצה הריבועית R, כך ש A=QR. המטריצה R היא מטריצה משולשת עליונה, כי מקדם ההיטל $q'_i a_j$ הוא 0 כאשר i גדול מ- j.

פירוק זה של A למטריצה אורתונורמלית Q ומטריצה משולשת עליונה R נקרא פירוק QR.

הפונקציה תחזיר שתי מטריצות Q ו- R.

כיצד תבדקו האם המטריצה Q היא מטריצה אורתונורמלית? בצעו את הפעולה הדרושה כחלק מהפונקציה.

הפעילו את הפונקציה שכתבתם על המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**ii.** (15 נקודות) איפה נמצא ה- chirp החבוי ?
(המשך לתרגיל בהקלטה)

בהרצאה ראינו איך מייצרים פונקציית קוסינוס או אות קוסינוס : $f(t)=\cos(2\pi \cdot f_0 \cdot t)$

א. כתבו פונקציית Python המייצרת פונקציות מסוג chirp (פונקציות chirp הן פונקציות בהן התדירות עולה או יורדת באופן ליניארי עם הזמן t).
הנוסחה המתארת אותות אלה היא $sig(t)=\cos\left(2\pi \cdot f_0 \cdot t+2\pi \cdot \mu \cdot t^2\right)$.

הפונקציה תקבל בכניסה את משך הזמן של האות, את התדירות ההתחלתית התדירות $f_0$, את המקדם $\mu$ (הקובע את שיפוע עליית (אם $\mu$ חיובי) או ירידת התדירות (אם $\mu$ שלילי) ) ואת תדירות הדגימה $f_s$ (או את מרווח הדגימה $T_s=1/f_s$).

הדרכה : בתוך הפונקציה יצרו ציר זמן על-ידי :

```
fs=44100;
Ts=1/fs
```

ועם משך זמן dur. הפונקציה תחזיר וקטור sig ואת ציר הזמן tt.

ב. הדגימו את פעולת הפונקציה עבור tt ציר זמן עם משך של 0.7 שניות (כלומר dur=0.7), הנדגם בתדירות של 44100 פעמים בשניה, כלומר $T_s=1/44100$ , $\mu=550$ וכן $f_0=1000$ , ציירו את 200 הנקודות הראשונות ו-200 הנקודות האחרונות של הוקטור

sig כפונקציה של ציר הזמן המתאים על שני גרפים באמצעות subplot. מה אפשר לראות בשני הציורים?
לאחר יצירת הפונקציה הפעילו את

```
sd.play(sig,fs)
```

(לאחר הורדה של sounddevice ושימוש ב-

```
import sounddevice as sd)
```

האם הבחנתם בשינוי התדירות?

ג. באמצעות הפקודה np.random.randn יצרו אות רעש עם משך של 15 שניות, עם אותה תדירות דגימה כמו בסעיף הקודם. הוסיפו את אות ה- chirp לאות הרעש לאחר השניה התשיעית (כלומר הוסיפו לאות הרעש את אות ה – chirp בין שניה 9 ל- 9.75 שניות.

ד. כיתבו פונקציה למציאת המיקום של פונקציית chirp כנ״ל $sig(t)=\cos\left(2\pi\cdot f_0\cdot t+2\pi\cdot\mu\cdot t^2\right)$ כאשר t הוא ציר זמן של 0.7 שניות, הנדגם בתדירות של 44100 פעמים בשניה, כלומר $T_s=1/44100$, ו- $\mu=550$ וכן $f_0=1000$, כלומר האות עולה מ- 1000 מחזורים לשניה ל- 1770 מחזורים לשניה. האות טבול בתוך אות רעש של 15 שניות (עם אותה תדירות דגימה של 44100 דגימות לשניה). הפונקציה תחזיר את מיקום האות בדגימות ובשניות לאורך ציר הזמן.

ה. במחיצת התרגיל אפשר למצוא שני אותות: אות chirp היורד מתדירות 1770 מחזורים לשניה לתדירות 1000 מחזורים לשניה במשך של של 0.7 שניות. כלומר ערך $f_0 = 1770$, וסיגנל רעש של 35 שניות המכיל אות chirp במשך של 0.7 שניה. האם תוכלו באמצעות הפונקציה שכתבתם בסעיף הקודם לגלות איפה נמצא אות ה- chirp, כלומר מהו המיקום המדוייק בזמן של אות ה- chirp? במקרה זה תדירות הדגימה היא 44100, כלומר:

```
fs=44100
Ts=1/fs
```

1. (10 נקודות) יהי W תת-מרחב הנפרש על-ידי $\{(1,\ 2,1),(2,\ 1,1),(1,1,2)\}$. מצאו בסיס אורתונורמלי הפורש את אותו תת-מרחב. השתמשו בתהליך גרם-שמידט.

א.

$$e_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{(1,2,1)}{\sqrt6}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$$

$$V_2=u_2-\langle u_2,e_1\rangle e_1=u_2-\left\langle(2,1,1),\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)\right\rangle\cdot\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$$

$$=u_2-\left(\frac{2}{\sqrt6}+\frac{2}{\sqrt6}+\frac{1}{\sqrt6}\right)\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)=u_2-\frac{5}{\sqrt6}\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)$$

$$=(2,1,1)-\left(\frac{5}{6},\frac{5}{3},\frac{5}{6}\right)=\left(1\frac{1}{6},-\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$$

$$e_2=\frac{V_2}{\|V_2\|}=\frac{\left(\frac{7}{6},\frac{-2}{3},\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\frac{11}{6}}}=\left(\frac{7\sqrt{66}}{66},\frac{-2\sqrt{66}}{33},\frac{\sqrt{66}}{66}\right)$$

$$V_3=u_3-\left(\langle u_3,e_1\rangle e_1+\langle u_3,e_2\rangle e_2\right)=$$

$$u_3-\left(\left\langle(1,1,2),\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)+\left\langle(1,1,2),\left(\frac{7\sqrt{66}}{66},\frac{-2\sqrt{66}}{33},\frac{\sqrt{66}}{66}\right)\right\rangle\left(\frac{7\sqrt{66}}{66},\frac{2\sqrt{66}}{33},\frac{\sqrt{66}}{66}\right)\right)$$

$$=u_3-\left(\frac{5}{\sqrt6}\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6}\right)+\frac{5}{\sqrt{66}}\left(\frac{7}{\sqrt{66}},\frac{-2\sqrt2}{\sqrt{33}},\frac{1}{\sqrt{66}}\right)\right)$$

$$=u_3-\left(\left(\frac{5}{6},\frac{5}{3},\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{35}{66},\frac{-10}{33},\frac{5}{66}\right)\right)=u_3-\left(\frac{15}{11},\frac{15}{11},\frac{10}{11}\right)$$

$$=(1,1,2)-\left(\frac{15}{11},\frac{15}{11},\frac{10}{11}\right)=\left(\frac{-4}{11},\frac{-4}{11},\frac{12}{11}\right)$$

$$e_3=\frac{u_3}{\|u_3\|}=\frac{\left(\frac{-4}{11},\frac{-4}{11},\frac{12}{11}\right)}{\sqrt{\frac{16}{11}}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt6},\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{1}{\sqrt6}\right),\left(\frac{7}{\sqrt{66}},\frac{-2\sqrt2}{\sqrt{33}},\frac{1}{\sqrt{66}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)\right\}$$

2. (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית ובו בסיס $\{v, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. ידוע כי $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{k-1}\}$ היא מערכת אורתונורמלית המקיימת

$$span\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}\} = span\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{k-1}\}$$

הוכיחו כי $v_k - \widetilde{v_k}$, ניצב לתת המרחב הנפרש על-ידי $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{k-1}\}$ כאשר $\widetilde{v_k}$ הוא ההיטל של $v_k$ על $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{k-1}\}$.

נבדוק את המכפלה $\langle V_k - \hat{V}_k, e_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots,$

$$\langle V_k - \hat{V}_k, e_j \rangle = \langle V_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V_k, e_i \rangle e_i , e_j \rangle$$

$$= \langle V_k, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle V_k, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle$$

* סכום של אפסים ועוד אחד 1 כש: $j=i$

$$= \langle V_k, e_j \rangle - \langle V_k, e_j \rangle = 0 \longrightarrow V_k - \hat{V}_k \perp e$$

3. יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ויהי $U = Sp\{u_1, \dots, u_k\}$ ונניח שהקבוצה $\{u_1, \dots, u_k\}$ תלויה לינארית.

א. הוכיחו כי אם נבצע את תהליך גרם שמידט על $\{u_1, \dots, u_k\}$, בהכרח נקבל בשלב מסוים $\varphi_i = 0$.

ב. במה מפריעה התוצאה של סעיף א להמשך התהליך?

ג. כיצד ניתן בכל זאת, להשתמש בתהליך זה לבניית בסיס א.נ ל- $U$?

א)

התהליך גרם שמידט מחשבים את $e_i$ כך:

$$e_i = u_i - \left(\langle u_i, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}\right)$$

אם הקבוצה תלויה לינארית יש $u_i$ שהוא צירוף לינארי של קודמיו ואז נקבל $e_i = u_i - u_i = 0$.

ב)

התוצאה מעידה כי אחרי שמחשבים את $e_i = 0$ צריך לחשב את $e_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$ ונצטרך לחלק ב-0.

ג)

ניתן להתעלם מהאפסים ולא לחשב אותם ועדיין לקבל בסיס א.נ.

4. (10 נקודות) יהי $V$ מרחב מ.פ ויהי $U$ תת מרחב של $V$. אוסף כל הוקטורים ב- $V$ האורתוגונלים ל- $U$ מכונה **המשלים האורתוגונלי** של $U$ וסימונו $U^{\perp}$. כלומר

$$U^{\perp} = \{v \in V | < u, v \geq 0, \forall u \in U$$

ענו על הסעיפים הבאים:

א. אם $U = \{0\}$ אז מיהו $U^{\perp}$?
ב. אם $U = V$ אז מיהו $U^{\perp}$?
ג. הוכיחו $U^{\perp} \cap U = \{0\}$.
ד. הוכיחו $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$.

א) $U^{\perp} = V$ כי: $<V_i, 0> = 0$ לכל $V_i \in V$.

ב) ב $U^{\perp}$ נמצאים כל הוקטורים מ$V$ שניצבים לכל הוקטורים מ$U$
אבל מכיוון ש $V=U$ אז הוקטור היחיד שניצב לשאר הוקטורים הוא $\vec{0}$.
ולכן $U^{\perp} = \{0\}$

ג) נניח שקיים $V \in U^{\perp} \cap U$ <= $V \in U$ וגם $V \in U^{\perp}$
לפי ההגדרה $<V, U_i> = 0$ לכל $U_i$.
אבל אם $V \in U$ מן ההגדרה נקבל ש $<V,V> = 0$
כלומר הוקטור ניצב לעצמו, זו כמובן סתירה לזניה
ולכן אם $V \in U^{\perp} \cap U$ אז $V = 0$.
$U^{\perp} \cap U = \{0\}$

ד) נניח $u \in U$, $v \in U^{\perp}$ ← $<u,v> = 0$
מכיוון שכל וקטור $u \in U$ אורתוגונלי ל $v \in U^{\perp}$ אז $u \in (U^{\perp})^{\perp}$

5. (10 נקודות)

I. נניח כי Q היא מטריצה עם m שורות ו- n עמודות. ידוע כי n העמודות הן בסיס אורתונורמלי, וכן כי m>n.

א. הראו כי $Q^tQ=I$

$Q_{m\times n}$

ב. הוכיחו או הפריכו $QQ^t=I$?

ג. הראו כי אם עמודות Q הן בסיס אורתונורמלי אז לכל וקטור $x\in R^n$ קיים $\|Q\cdot x\|=\|x\|$.

הדרכה: $\|Q\cdot x\|^2=(Q\cdot x)^t(Q\cdot x)$

א)

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mn} \end{pmatrix} \qquad Q^t=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{1m} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}$$

כשכופלים את המטריצות בעצם בכל פעולה מכפלים איברים שהם אורתונורמליים כלומר כש $<q_i\cdot q_j>$

אם $j\neq i$ אזי $<q_i,q_j>=0$.

ואם $j=i$ אזי $<q_i,q_j>=1$.

$j=i$ רק באלכסון אז נקבל מטריצה מאח עם אלכסון של 1 ים.

וכל השאר אפסים, קרי $I$.

ב)

$$QQ^t=A_{m\times m}$$

בגלל ש m>n ו n עמודות אורתונורמליות

בעצם קיימים שלבים במכפלה אנחנו כופלים

איברים שהם לא א.נ. לכן:

$Q^t$ — שורות א.נ.

$Q$ — עמודות א.נ.

$$<q_i,q_j>\neq\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

ולכן $QQ^t\neq I$.

ג)

$$\|Q\cdot X\|^2=(Q\cdot X)^t(Q\cdot X)=(X^t\cdot Q^t)(Q\cdot X)$$
$$=X^t\cdot I\cdot X = X^t\cdot X=\langle X,X\rangle=\|X\|^2$$

$$\|Q\cdot X\|^2=\|X\|^2 \quad /(\sqrt{\ })$$

$$\|Q\cdot X\|=\|X\| \quad \blacksquare$$

$$\begin{matrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{matrix}$$

ד) הוכיחו $Q^t=Q^{-1}$ אם $n=m$.

נצטרך להראות ש $Q^tQ=QQ^t=I$

בסעיף א' הראינו כי $Q^tQ=I$. נשאר להראות ש $QQ^t=I$

$QQ^t=A_{n\times n}$

n עמודות א.נ.    n שורות א.נ.

$$A_{ij}=q_{i1}q_{1j}+q_{i2}q_{2j}+\dots+q_{in}q_{nj}$$

כל מכפלה פה יוצרת מכפלה פנימית של איברים אורתונורמליים

ולכן כמו בסעיף א' אם $j=i \Leftarrow A_{ij}=1$.

ואם $j\neq i \Leftarrow A_{ij}=0$.

מכאן ש $QQ^t=Q^tQ=I$ אזי $Q^t=Q^{-1}$. $\blacksquare$

ה) מטריצה אורתוגונלית $Q \Leftarrow Q^tQ=I,\ Q^t=Q^{-1}$

$$Q=\begin{pmatrix}|&|&&|\\q_1&q_2&\dots&q_n\\|&|&&|\end{pmatrix}\rightarrow Q^tQ=I$$
$$\downarrow$$
$$Q^t=Q^{-1}$$
$$\downarrow$$

לפי הסעיף הקודם $(Q^t)^t(Q^t)=I \rightarrow Q^t$ מטריצה אורתוגונלית

ולכן השורות של $Q$ הן בסיס א.נ. שפורש את $R^n$.

1)

$Ax=0$

במערכת משוואות הומוגנית מרחב השורות של $A$
אורתוגונלי למרחב העמודות ב$x$.
כל מכפלה $<a_i,x>=0$.

ד) כן.
$(0,0,c)\in Z$ , $(a,b,0)\in XY$
$<(0,0,c),(a,b,0)>=(0\cdot a)+(0\cdot b)+(0\cdot c)=0$

ה) לא
$(1,0,1)\in XZ$ , $(2,3,0)\in XY$
$<(1,0,1),(2,3,0)>=2+0+0=2$

ג) $V,W$ מרחבים אורתוגונליים.
נקח $u\in V\cap W$ כלומר $u\in W$ $<u,v>=0$
$u\in V$ $<u,w>=0$

וכמובן ש $<u,u>=1$.
מכיוון ש $u$ שייך גם ל$W$ וגם ל$V$ אז

6. (10 נקודות) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

יהי $W$ תת מרחב הנפרש ע"י הקבוצה $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},cos(x)\right\}$ מעל $R$, ותהי $f(x) = |x|$ פונקציה בקטע $[-\pi,\pi]$. מצאו פונקציה $g$ הנפרשת ע"י $S$ שהיא הכי קרובה ל- $f$, כלומר $\|f-g\|$ מינימלי. מהו הערך המינימלי שמתקבל? האם קיימת פונקציה $h$ הנפרשת ע"י $S$ השונה מ-$g$ כך ש-$\|f-g\|=\|f-h\|$? הסבירו את תשובתכם.

נפעיל תהליך גרם שמידט על $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos(x)\right\}$

$$e_1=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{2}\cdot 2\pi\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$u_2=\cos(x)-\left\langle\cos(x),\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\cos(x)-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(x)}{\sqrt{2\pi}}dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\cos(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\,dx}_{=0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\cos(x)-0$$

פונקציה אי זוגית במרחב סימטרי

$$e_2=\frac{\cos(x)}{\|\cos(x)\|}=\frac{\cos(x)}{\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\cos^2(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\cos(x)}{\left(\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)+1\,dx\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\cos(x)}{\left(\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)dx}_{0}+\int_{-\pi}^{\pi}dx\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\cos(x)}{\frac{1}{2}(0+2\pi)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

מרחב אורתונורמלי

$$g = \left\langle |x|, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle |x|, \frac{\cos(x)}{\pi} \right\rangle \frac{\cos(x)}{\pi}$$

$$= \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x| \cdot \cos(x)}{\sqrt{\pi}} dx \cdot \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(x) \, dx \cdot \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\pi}^{0} -x + \int_{0}^{\pi} x \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\cos(x)}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{\cos(x)}{\pi} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(x) \, dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2\pi} + \frac{2\cos(x)}{\pi} \left( x \sin(x) - \int \sin(x) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2\cos(x)}{\pi} \left( x \sin(x) + \cos(x) \right) \Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2\cos(x)}{\pi} \cdot -2 = \frac{\pi}{2} - \frac{4\cos(x)}{\pi}$$

כעת נחשב את השגיאה:

$$\|f-g\| = \left( \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \left( |x| - \frac{\pi}{2} + \frac{4\cos(x)}{\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left( \int_{-\pi}^{\pi} x^2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{16\cos(x)^2}{\pi^2} - \pi|x| + \frac{8\cos(x) \cdot |x|}{\pi} + 4\cos(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx}_{\frac{2\pi^3}{3}} + \frac{\pi^2}{4}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx}_{2\pi} + \frac{16}{\pi^2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx}_{\pi} - \pi\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx}_{\pi^2} + \frac{8}{\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cdot\cos(x)\,dx}_{-4} + 4\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx}_{0}$$

$$=\left(\frac{2\pi^3}{3} + \frac{2\pi^3}{4} + \frac{16\pi}{\pi^2} - \pi^3 - \frac{32}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.0747}$$

נוכיח את היחידות:

נניח כי $\|f-g\|^2 = \|f-h\|^2$

נקבל לפי משפט פיתגורס המוכלל $\|f-h\|^2 = \|f-g\|^2 + \|g-h\|^2$

$$\Downarrow$$

$$\|g-h\|^2 = 0$$

$$\|g-h\| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g = h$$

7. (10 נקודות) עבור המטריצה A הבאה חשבו את פירוק QR, כלומר חשבו את המטריצה האורתוגונלית Q והמטריצה המשולשת העליונה R כך ש- $A = Q\cdot R$

$$A=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 1 & 7\\ -3 & -5\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$a_1=(5,1,-3,1)^t$$
$$a_2=(9,7,-5,5)^t$$
$$Q=\begin{pmatrix} | & | \\ q_1 & q_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$q_1=\frac{(5,1,-3,1)}{(5^2+1^2+(-3)^2+1^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(5,1,-3,1)}{6}=\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{-1}{2},\frac{1}{6}\right)$$

$$\hat{a}_2=a_2-\langle a_2,q_1\rangle q_1$$
$$=(9,7,-5,5)-\langle(9,7,-5,5),\left(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{6}\right)\rangle\left(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{6}\right)$$
$$=(9,7,-5,5)-\left(\frac{15}{2}+\frac{7}{6}+\frac{5}{2}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{6}\right)$$
$$=(9,7,-5,5)-12\left(\tfrac{5}{6},\tfrac{1}{6},\tfrac{-1}{2},\tfrac{1}{6}\right)$$
$$=(9,7,-5,5)-(10,2,-6,2)=(-1,5,1,3)$$

$$q_2=\frac{\hat{a}_2}{\|\hat{a}_2\|}=\frac{(-1,5,1,3)}{6}=\left(\frac{-1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$$

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{-1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}\|a_1\| & \langle a_2,q_1\rangle\\ 0 & \|\hat{a}_2\|\end{pmatrix}\quad R=\begin{pmatrix}6 & 12\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$QR=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{-1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 12\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 1 & 7\\ -3 & -5\\ 1 & 5\end{pmatrix}=A$$