Alon Spinner

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה להנדסה אזרחית וסביבתית

Numerical Methods for Engineering – Graduate Course 019003

Prep HW 2: Iterative techniques for solving linear systems

Due date: before next lecture

1. What are advantages of using iterative techniques for solving linear systems compared to direct methods?
2. Perform 3 iterations using Jacabi method on the next system:

$$\begin{cases} 17x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 500 \\ -5x_1 + 21x_2 - 2x_3 = 200. \\ -5x_1 - 5x_2 + 22x_3 = 30 \end{cases}$$

   What is the condition to guarantee convergence?

3. Perform 3 iterations using Gauss- Zeidel method on the next system:

$$\begin{cases} -5x_1 + 12x_3 = 80 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ 6x_1 + 8x_2 = 45 \end{cases}$$

   What are the differences between the Jacobi and Gauss-Zeidel methods? Advantages, disadvantages. Is the convergence condition identical in both cases?

4. Explain the SOR method in short. When is it advises to use it? Will it always be better than the above methods?

1. <u>שיטות</u> <u>איטרטיביות</u> <u>מאפשרות</u> חישוב מקביל מה גם <u>שסיבוכיות</u> האלגוריתמים קטנה יותר.

2.

$$Ax = b$$

$$0 = b - Ax$$

$$Qx = b + Qx - Ax$$

$$Qx = (Q - A)x + b$$

$$x = Q^{-1}(Q-A)x + Q^{-1}b$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} = Q^{-1}(Q-A)x_k + Q^{-1}b$$

• <u>שיטת</u> יעקובי $Q = D$

$$\begin{bmatrix} 17 & -2 & -3 \\ -5 & 21 & -2 \\ 5 & -5 & 22 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 500 \\ 200 \\ 30 \end{bmatrix}$$

תנאי <u>התכנסות</u> $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} < |a_{ii}|$ $\Rightarrow$ (מתכנס)

$$x_{k+1} = D^{-1}(D-A)x_k + D^{-1}b =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & & \\ & \frac{1}{21} & \\ & & \frac{1}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{17} & & \\ & \frac{1}{21} & \\ & & \frac{1}{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.176 & 0.176 \\ 0.238 & 0 & 0.952 \\ 0.227 & 0.227 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 29.4118 \\ 9.5238 \\ 1.3636 \end{bmatrix}$$

Matlab

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 29.4118 \\ 9.5238 \\ 1.3636 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 30.7729 \\ 16.6565 \\ 10.2424 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 33.1736 \\ 17.9233 \\ 12.146 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 12 \\ 4 & -1 & -1 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 80 \\ -2 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$Q_{GS} = D - C_L$$

$$C_L = \begin{cases} -A_{ij} & jj < ii \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

לפני שמתחיל יש צריך להחליף שורות
כדי לקיים שליטה אלכסונית

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} < |a_{ii}|$$ (תנאי מספיק אך לא הכרחי)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 6 & 8 & 0 \\ -5 & 0 & 12 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 45 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. שיטת SOR (Successive over relaxation)

מנסים להכליל את שיטת גאוס זיידל

$$X_{k+1} = \underbrace{(I-\omega C_L)^{-1}[(1-\omega)I + \omega C_U]}_{G}X_k + \omega(I-\omega C_L)^{-1}b$$

גאוס זיידל מתקבלת כאשר $\omega = 1$

התכנסות $\iff \rho(G) < 1$

הבחנה: $\omega \leq 0$; $\omega \geq 2 \implies$ (ערך עצמי מקסימלי → ρ)

מניב האפשר לקבוע ω אופטימלי בכל איטרציה שמקיים $\rho(G) < 1$ (התכנסות) אך לא שאפשר התכנסות מהירה.

יש הנחה בויקיפדיה לבחירה אופטימלית מנחה ש- $I - D^{-1}A$ ממש

בגדול, מניב עדיף SOR > GS > Jacobi

$$x_{k+1} = Q_{GS}^{-1}(Q_{GS}-A)x_k + Q_{GS}^{-1}b =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & -0.1875 & -0.1875 \\ 0 & 0.1042 & 0.7042 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 6 \\ 6.4583 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 6 \\ 6.4583 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 2.6146 \\ 3.6641 \\ 7.7561 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 2.3559 \\ 3.5887 \\ 7.6474 \end{pmatrix}$$