Resolviendo un problema de optimización de portafolios con restricción de cardinalidad a través de un algoritmo genético

Alondra Elizabeth Matos Mendoza
María Guadalupe López Salomón

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

May 31, 2023

Contenido

Introducción

- En un mercado determinado, los inversores se encuentran frente a diferentes activos o valores que ofrecen diversos niveles de rendimiento según el riesgo subyacente.

- Un aspecto práctico al que se enfrentan los inversores racionales es cómo seleccionar el activo o la combinación de activos para construir un portafolio óptimo, minimizando el riego en algún nivel de retorno.

Introducción

Una cartera de inversiones se define por el vector $w = (w_1, \ldots, w_n)$, donde w_j denota la proporción de la inversión a invertir en el activo j.
Harry Markowitz (1952) propuso que el rendimiento de la cartera debe medirse en dos dimensiones:

- **La media**, que describe el rendimiento esperado.
  Sea μ_j el retorno esperado del activo j, el rendimiento esperado de la cartera es:
  $$\mu^T w$$
- **El riesgo**, que mide la incertidumbre del rendimiento.
  El riesgo del portafolio es la varianza esperada:
  $$w^T \Sigma w$$

.

Descripción del problema

El problema de optimización tiene dos objetivos: **maximizar el retorno** $\mu^T w$. y **minimizar el riesgo** $w^T \Sigma w$.

La importancia relativa
de estos objetivos variará dependiendo de la tolerancia al riesgo del inversor.

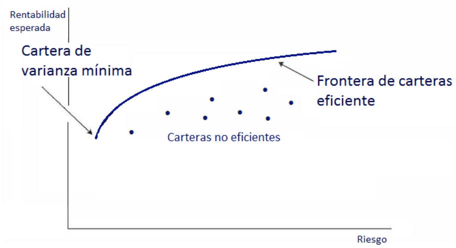

Figure: Frontera eficiente de Markowitz

Descripción del problema

Considerando:

- N: número de activos disponibles.
- K : número deseado de activos en el portafolio.
- ϵ_i: proporción mínima que se debe mantener del activo i si el activo i se mantiene. Representa el nivel mínimo de transacción.
- δ_i: proporción máxima que se debe mantener del activo i si el activo i se mantiene. Limita la exposición de la cartera al activo i.
- $z_i = \begin{cases} 1 & \text{si se mantiene el activo i} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Descripción del problema

Sean las variables de decisión w_i las proporciones del activo i $(i = 1, ..., N)$, el modelo de optimización de cartera con restricciones de cardinalidad es:
Minimizar

$$\lambda \left[w^T \Sigma w\right] - (1 - \lambda) \left[\mu^T w\right] \tag{1}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} z_i = K \tag{3}$$

$$\epsilon_i z_i \leq w_i \leq \delta_i z_i, \quad i = 1, ..., N \tag{4}$$

$$z_i \in [0, 1], \quad i = 1, ..., N \tag{5}$$

Algoritmo genético

La siguiente Figura ilustra las diversas operaciones involucradas en un algoritmo genético básico:

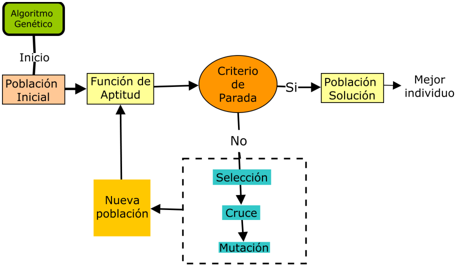

Figure: Algoritmo genético

Se examinará el algoritmo genético propuesto por Chang et al.[1] para la selección de portafolios con la imposición de restricciones enteras.

Ejemplo

Supongamos que un inversionista está planeando una cartera basada en 2 acciones, de 4 posibles. Los datos sobre las tasas de rendimiento de las acciones en los últimos seis periodos son:

Periodo	Acción 1	Acción 2	Acción 3	Acción 4
1	0.08	0.05	0.01	0.08
2	0.06	0.17	0.09	0.12
3	0.07	0.05	0.10	0.07
4	0.04	-0.07	0.04	-0.01
5	0.08	0.12	0.08	0.09
6	0.07	0.22	0.11	0.09

El rendimiento esperado es: $\mu = \begin{pmatrix} 0.0667 & 0.0900 & 0.0717 & 0.0733 \end{pmatrix}$,
y la matriz de covarianza es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.00019 & 0.00065 & 0.00004 & 0.00038 \\ 0.00065 & 0.00883 & 0.00218 & 0.00327 \\ 0.00004 & 0.00218 & 0.00125 & 0.00063 \\ 0.00308 & 0.00327 & 0.00063 & 0.00162 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con el inversionista, las proporciones mínimas y máximas de cada acción son:

$$\epsilon = [0.02, 0.05, 0.01, 0.01]$$

$$\delta = [1, 1, 1, 1]$$

La voluntad del inversor de equilibrar el riesgo y la rentabilidad es 0.25. Por lo que queremos minimizar $0.25[risk] - 0.75[return]$.

Considerando que $N = 4$, $K = 2$, se aplicará un algoritmo genético para encontrar los pesos o proporciones de una combinación de activos a partir de un gran grupo, para maximizar el rendimiento esperado dada una tasa de riesgo cuantificada.

Algoritmo genético

1. Generar una población inicial de cromosomas de tamaño p .

Supongamos que $p = 10$

$$Población = [S_1, S_2, ...S_{10}]$$

Ejemplo de la representación cromosómica:

$$S_1 = \begin{cases} Q = \{1, 3\} \\ s = \{0.3, 0.6\} \end{cases}$$

2. Evaluar la aptitud de los cromosomas de la población.

Ejemplo del cálculo de la aptitud para el cromosoma $S_1 = \begin{cases} Q = \{1, 3\} \\ s = \{0.3, 0.6\} \end{cases}$

Considerando que $\epsilon_1 = 0.02, \epsilon_3 = 0.01, \delta_1 = 1, \delta_3 = 1$

$$L = s_1 + s_3 = 0.9$$

$$F = 1 - (\epsilon_1 + \epsilon_3) = 0.97$$

Se calculan las proporciones w_i,

$$w_1 = \epsilon_1 + s_1 F/L = 0.02 + 0.3\left(\frac{0.97}{0.9}\right) = 0.34$$

$$w_3 = \epsilon_3 + s_3 F/L = 0.01 + 0.6\left(\frac{0.97}{0.9}\right) = 0.66$$

Rendimiento esperado del portafolio:

$$w_1\mu_1 + w_3\mu_3 = 0.34(0.0667) + 0.66(0.0717) = 0.07$$

Riesgo del portafolio es:
$w_1^2\sigma_1^2 + w_3^2\sigma_3^2 - 2 * w_1 w_3 \sigma_{13} = (0.34)^2(0.00019) + (0.66)^2(0.00125)2 * (0.34)(0.66)(0.00004) = 0.00058$
Aptitud del cromosoma:

$$f = \lambda\left[\sum_{i \in Q}\sum_{j \in Q} w_i w_j \sigma_{ij}\right] - (1 - \lambda)\left[\sum_{i \in Q} w_i \mu_i\right] = 0.25(0.00058) + 0.75(0.07) = 0.052645$$

Se reestablece s: $s_1 = w_1 - \epsilon_1 = 0.32$, $s_3 = w_3 - \epsilon_3 = 0.65$

2. Evaluar la aptitud de los cromosomas de la población.

1. Mientras haya algún activo i en Q tal que $w_i > \delta_i$, se recalcula w_i para toda i siguiendo el procedimiento que se muestra a continuación:
    1. Obtener la suma actual de s_i:

$$L = \sum_{i:w_i \leq \delta_i} s_i$$

    para todos los activos i tal que $w_i \leq \delta_i$

    2. Obtener la proporción libre del portafolio:

$$F = 1 - \sum_{i:w_i \leq \delta_i} \epsilon_i + \sum_{i:w_i > \delta_i} \delta_i$$

    3. Establecer la proporción del activo i como:

$$w_i = \epsilon_i + s_i F/L \text{ para el activo } i \text{ tal que } w_i \leq \delta_i$$

$$w_i = \delta_i \qquad \text{para el activo } i \text{ tal que } w_i > \delta_i$$

2. Se calcula la aptitud (valor de la función objetivo):

$$f = \lambda \left[\sum_{i \in Q} \sum_{j \in Q} w_i w_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[\sum_{i \in Q} w_i \mu_i \right]$$

3. Se reestablece s_i para cada activo del conjunto Q: $s_i = w_i - \epsilon_i$, $\forall i \in Q$

3. Realizar el siguiente proceso de forma repetida hasta alcanzar el límite máximo de iteraciones:

a) Selección: *Torneo binario*

$$Grupo_1 = \{S_4, S_9\} \xrightarrow{min\ f} S_4$$

$$Grupo_2 = \{S_1, S_6\} \xrightarrow{min\ f} S_1$$

3. Realizar el siguiente proceso de forma repetida hasta alcanzar el límite máximo de iteraciones:

a) Selección

b) Cruce: *Por método uniforme*

Considerando a los padres S_1 y S_4,

$$S_1 = \begin{cases} Q_{s_1} = \{1,3\} \\ s = \{0.32, 0.65\} \end{cases}, S_4 = \begin{cases} Q_{s_4} = \{4,1\} \\ s = \{0.15, 0.79\} \end{cases} \rightarrow C = \begin{cases} Q_c = \{1,1\} \\ s = \{0.32, 0.79\} \end{cases}$$

Se guardan los activos no heredados en el cromosoma A.

$$A = \begin{cases} Q_A = \{3,4\} \\ s = \{0.65, 0.15\} \end{cases}$$

3. Realizar el siguiente proceso de forma repetida hasta alcanzar el límite máximo de iteraciones:

a) Selección

b) Cruce

c) Mutación:

Considerando el hijo,

$$C = \begin{cases} Q_c = \{1\} \\ s = \{0.32\} \end{cases}$$

Se elige aleatoriamente un activo i del conjunto Q_c y se muta el valor s_i asociado. Con probabilidad 0.5,

$$s_i = 0.9(\epsilon_i + s_i) - \epsilon_i$$

o bien

$$s_i = 1.1(\epsilon_i + s_i) - \epsilon_i$$

Si $s_i < 0$, se elimina el activo i del conjunto Q_c

Para este ejemplo, supongamos que

$$s_1 = 0.9(\epsilon_1 + s_1) - \epsilon_1 = 0.9(0.02 + 0.32) - 0.2 = 0.106$$

3. Realizar el siguiente proceso de forma repetida hasta alcanzar el límite máximo de iteraciones:

a) Selección

b) Cruce

c) Mutación

d) Garantizar que Q tenga exactamente K activos:

- Mientras $|Q_c| > K$, eliminar el activo j con el menor valor de s_j
- Mientras $|Q_c| < K$
  - Si $|Q_A| \neq 0$, añadir a Q_c un activo j aleatoriamente elegido de Q_A, tomando el valor s_j asociado.
  - Si $|Q_A| = 0$, añadir a Q_c un activo j aleatoriamente elegido del universo de activos disponibles y establecer $s_j = 0$

Para el ejemplo, sea $j = 4$:

$$A = \begin{cases} Q_A = \{3, 4\} \\ s = \{0.65, 0.15\} \end{cases} \rightarrow C = \begin{cases} Q_c = \{1, 4\} \\ s = \{0.32, 0.15\} \end{cases}$$

3. Realizar el siguiente proceso de forma repetida hasta alcanzar el límite máximo de iteraciones:
a) Selección
b) Cruce
c) Mutación
d) Garantizar que Q tenga exactamente K activos
e) Evaluar la aptitud del hijo

Reemplazar al peor individuo de la población por el hijo. El peor individuo es aquél con la menor aptitud, es decir, el valor más grande obtenido en la función objetivo.

$$S_j := C \text{ donde } j \text{ es tal que} f(S_j) = max[f(S_i)|i = 1, 2, p]$$

3. Realizar el siguiente proceso de forma repetida hasta alcanzar el límite máximo de iteraciones:
a) Selección
b) Cruce
c) Mutación
d) Garantizar que Q tenga exactamente K activos
e) Evaluar la aptitud del hijo

4.Obtener al mejor individuo de la población mejorada, quien tiene el menor valor de la fución objetivo

Conclusiones

- El algoritmo genético implementado mostró un gran desempeño en la experimentación computacional. Demostrando que esta heurística es una herramienta confiable y eficiente pues brindó resultados consistentes, reproducibles y estables.
- Este resultado es de gran importancia en la toma de decisiones financieras, ya que proporciona información valiosa sobre las combinaciones óptimas de activos para maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo.

Referencias

[1] Chang, T. J., Meade, N., Beasley, J. E., & Sharaiha, Y. M.(2000). *"Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation"*. Computers & Operations Research, 27(13), 1271-1302.

[2] Guennoun, Z., & Hamza, F(2012). *"Stocks portfolio optimization using classification and genetic algorithms"*.Applied Mathematical Sciences, 6(94), 4673-4684.

[3] Ackora-Prah, J., Gyamerah, S. A., & Andam, P. S.(2014). *"A heuristic crossover for portfolio selection"*.

Thank you!