

## 2 Métodos Matemáticos para el Análisis de Algoritmos

Para cuantificar la eficiencia de los algoritmos, utilizamos funciones que miden, por ejemplo, cuánto tiempo demora un algoritmo en ejecutarse sobre una entrada dada, cuál es su peor caso sobre un conjunto de entradas posibles, o cuánto demora en promedio, suponiendo una cierta distribución de probabilidad de las entradas. Ocasionalmente, estudiaremos el uso de otro tipo de recursos, como por ejemplo la cantidad de memoria utilizada.

Es habitual que los resultados que obtengamos dependan de un parámetro  $n$ , que representa el tamaño del problema (por ejemplo, el número de elementos a ordenar, el número de elementos en un conjunto en el que hay que hacer una búsqueda, etc.). Por lo tanto, nuestras funciones serán normalmente *funciones discretas*, esto es funciones cuyo argumento es un número entero no negativo. Como notación, para este tipo de funciones utilizaremos indistintamente una notación de funciones  $f(n)$  o de sucesiones  $f_n$ .

Tal como en Física el estudio de funciones de variable continua  $f(t)$  conduce a ecuaciones diferenciales que luego hay que resolver, acá el estudio de funciones de variable discreta  $f(n)$  conducirá a *ecuaciones de recurrencia*, y en este capítulo veremos algunos métodos para resolver ese tipo de ecuaciones.

# Notación $O$

Al trabajar con funciones que pueden ser muy complicadas, en la práctica resulta útil poder ignorar los términos de orden inferior para concentrarse en el que determina la forma en que la función evoluciona cuando  $n \rightarrow \infty$ . También resulta útil en ese caso poder ignorar factores constantes, para concentrarse en la forma como la función depende de  $n$ .

Utilizaremos la notación

$$f(n) = O(g(n))$$

si existe una constante  $C$  y un número  $n_0$  tal que

$$|f(n)| \leq C|g(n)|$$

para todo  $n \geq n_0$ .

Cuando la notación  $O(g(n))$  aparezca en medio de una fórmula, representará a una función que cumple con la condición anterior.

Es importante notar que la notación  $O$  provee una cota superior, la cual puede o no ser cercana a la función de la izquierda. Más adelante veremos una notación más ajustada.

## Ejemplos

- $3n = O(n)$
- $2 = O(1)$
- $2 = O(n)$
- $3n + 2 = O(n)$

La notación  $f(n) = O(g(n))$  es utilizada por la mayoría de los autores, pero hay que usarla con cuidado, porque la igualdad que ahí aparece **no es una relación reflexiva**. En efecto, de  $3n = O(n)$  y  $2 = O(n)$ , **no** podemos deducir que  $3n = 2$ . Hay que tener presente siempre que lo que aparece a la derecha del signo igual contiene menos información que lo de la izquierda.

Para evitar las posibles confusiones que podrían derivar de este uso no estándar del signo igual, algunos autores prefieren escribir

$$f(n) \in O(g(n))$$

en donde  $O(g(n))$  se interpreta como el *conjunto* de todas las funciones que acotan a  $f(n)$  de la manera indicada.

## Notación $\Omega$

De manera análoga, se puede definir una notación de cota inferior.

Diremos que

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

si existe una constante  $C$  y un número  $n_0$  tal que

$$|f(n)| \geq C|g(n)|$$

para todo  $n \geq n_0$ .

## Ejemplos

- $3 = \Omega(1)$
- $3n = \Omega(n)$
- $3n = \Omega(1)$
- $3n + 2 = \Omega(n)$

## Notación $\Theta$

La notación  $\Theta$  nos permite especificar el orden exacto de crecimiento de una función.

Diremos que

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

si  $f(n) = O(g(n))$  y  $f(n) = \Omega(g(n))$

## Ejemplo

- $3n + 2 = \Theta(n)$

# Ecuaciones de Recurrencia

Al estudiar la eficiencia de algoritmos, a menudo podremos escribir ecuaciones que relacionan el valor de la función en  $n$  con los valores de la función en  $n - 1$ ,  $n - 2$ , etc. Para que estas ecuaciones tengan solución única, debemos especificar además las *condiciones iniciales*, también llamadas *condiciones de borde*.

## Ejemplo: Número de movidas en las Torres de Hanoi

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \text{ para } n \geq 1$$
$$a_0 = 0$$

## Ejemplo: Números de Fibonacci

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 2$$
$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$

# Resolución de Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Consideremos ecuaciones de la forma

$$a_n = ba_{n-1} + c_n$$

donde  $b$  es una constante y  $c_n$  es una función conocida.

Para ver cómo resolver este tipo de ecuaciones, a modo de "precalentamiento", veamos cómo resolver esta ecuación para el caso  $a = 1$ :

$$a_n = a_{n-1} + c_n$$

Esto se puede reescribir como

$$a_n - a_{n-1} = c_n$$

y ahora introducimos sumatoria en ambos lados:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{1 \leq k \leq n} c_k$$

Pero la suma de la izquierda es telescópica, así que el resultado es:

$$a_n = a_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} c_k$$

Abordemos ahora el caso general. La idea es tomar la ecuación  $a_n = ba_{n-1} + c_n$  y reducirla de alguna manera al caso  $a = 1$  que ya sabemos resolver.

Para esto, dividiremos ambos lados de la ecuación por el *factor sumante*  $b^n$ , obteniendo

$$\frac{a_n}{b^n} = \frac{a_{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{c_n}{b^n}$$

Si ahora hacemos la sustitución  $A_n = a_n/b^n$  y  $C_n = c_n/b^n$ , la ecuación queda en la forma

$$A_n = A_{n-1} + C_n$$

que ya sabemos cómo resolver:

$$A_n = A_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} C_k$$

Haciendo ahora la sustitución inversa, obtenemos el resultado:

$$a_n = a_0 b^n + \sum_{1 \leq k \leq n} c_k b^{n-k}$$

## Ejemplo: Número de Movidas en las Torres de Hanoi

La ecuación

$$\begin{aligned}a_n &= 2a_{n-1} + 1 \text{ para } n \geq 1 \\ a_0 &= 0\end{aligned}$$

tiene como solución

$$a_n = \sum_{1 \leq k \leq n} 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n-1} 2^k$$

lo cual se simplifica a

$$a_n = 2^n - 1$$

# Resolución de Ecuaciones Lineales Homogéneas con Coeficientes Constantes

Consideremos por ejemplo la ecuación de Fibonacci

$$\begin{aligned}f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ para } n \geq 2 \\f_0 &= 0 \\f_1 &= 1\end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra los valores que toma esta función:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765

Como se ve, el crecimiento es bastante rápido. Esto es porque este tipo de ecuaciones suele tener soluciones de tipo exponencial, esto es, soluciones de la forma

$$f_n = \lambda^n$$

para alguna constante  $\lambda$ . Además, si encontramos más de una constante  $\lambda$  para la cual se satisfaga la ecuación, por ser una ecuación lineal, cualquier combinación lineal de esas soluciones también será solución.

Si logramos encontrar una solución que cumpla las condiciones iniciales bajo este supuesto, no necesitamos seguir buscando, porque la solución es única.

Sustituyendo  $\lambda^n$  en lugar de  $f_n$ , y dividiendo ambos lados por  $\lambda^{n-2}$  obtenemos la siguiente ecuación

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

llamada la *ecuación característica* de la ecuación de recurrencia.

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos las raíces

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618\dots, \quad \hat{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618\dots$$

La solución general sería una combinación lineal de estas soluciones:

$$f_n = A\phi^n + B\hat{\phi}^n$$

La condición inicial  $f_0 = 0$  implica que  $B = -A$ , y por lo tanto

$$f_n = A(\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

La segunda condición inicial,  $f_1 = 1$ , implica que

$$A(\phi - \hat{\phi}) = A\sqrt{5} = 1$$

Con lo cual obtendremos la siguiente fórmula para los números de Fibonacci:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

In [4]:

```
import math
def f(n):
    r5=math.sqrt(5)
    phi=(1+r5)/2
    phihat=(1-r5)/2
    return 1/r5*(phi**n-phihat**n)
```

In [6]:

```
print(f(10), f(15), f(20))
```

55.0000000000000014 610.00000000000003 6765.000000000005

Nótese que como  $|\hat{\phi}| < 1$ , el aporte del segundo término tiende a cero rápidamente, y  $f_n = \Theta(\phi^n)$ .

## El Teorema Maestro

Veremos diversos algoritmos que dan origen a recurrencias de la forma

$$T(n) = pT\left(\frac{n}{q}\right) + Cn^r$$

Para simplificar, supongamos que  $n$  es una potencia de  $q$ , digamos  $n = q^k$ , para que la división  $n/q$  siempre se pueda hacer en forma exacta. Entonces

$$T(q^k) = pT(q^{k-1}) + C(q^r)^k$$

Si introducimos una nueva función incógnita  $a_k = T(q^k)$ , podemos reescribir la ecuación como

$$a_k = pa_{k-1} + C(q^r)^k$$

la cual es de un tipo que ya sabemos resolver. Su solución es

$$\begin{aligned} a_k &= a_0 p^k + C \sum_{1 \leq j \leq k} (q^r)^j p^{k-j} \\ &= p^k \left( a_0 + C \sum_{1 \leq j \leq k} \left( \frac{q^r}{p} \right)^j \right) \end{aligned}$$

El comportamiento de esta sumatoria depende de si el cociente  $q^r/p$  es menor, igual o mayor que 1.

Antes de analizar cada caso, observemos que  $n = q^k$  implica que  $k = \log_q n$ , y

$$p^k = p^{\log_q n} = (q^{\log_q p})^{\log_q n} = (q^{\log_q n})^{\log_q p} = n^{\log_q p}$$

con lo cual la solución puede escribirse como

$$T(n) = n^{\log_q p} \left( T(1) + C \sum_{1 \leq j \leq \log_q n} \left( \frac{q^r}{p} \right)^j \right)$$



**Caso  $q^r < p$ :**

En este caso, la sumatoria está acotada por una constante, porque la serie respectiva es convergente, de modo que

$$T(n) = \Theta(n^{\log_q p})$$

**Caso  $q^r = p$ :**

En este caso la sumatoria es logarítmica, y  $\log_q p = r$ , de modo que

$$T(n) = \Theta(n^r \log n)$$

**Caso  $q^r > p$ :**

En este caso la sumatoria es la suma de una progresión geométrica, que podemos escribir en forma cerrada como

$$\begin{aligned} T(n) &= n^{\log_q p} \left( T(1) + C \frac{q^r}{p} \frac{\left(\frac{q^r}{p}\right)^{\log_q n} - 1}{\frac{q^r}{p} - 1} \right) \\ &= \Theta(n^{\log_q p} + n^r) \\ &= \Theta(n^r) \text{ porque } \log_q p < r \end{aligned}$$

En conclusión, hemos demostrado lo siguiente:

**Teorema Maestro**

La ecuación

$$T(n) = pT\left(\frac{n}{q}\right) + Cn^r$$

tiene solución

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^r) & \text{si } p < q^r \\ \Theta(n^r \log n) & \text{si } p = q^r \\ \Theta(n^{\log_q p}) & \text{si } p > q^r \end{cases}$$