Backtracking II

Clase 14

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

Sumario

Backtracking: idea de pseudocódigo

input : Conjunto de variables sin asignar X, dominios D, restricciones R

```
isSolvable(X, D, R):
    if X = ∅ : return true
    x ← alguna variable de X
    for v ∈ D_x :
        if x = v no rompe R :
            x ← v
            if isSolvable(X − {x}, D, R) :
                return true
            x ← ∅
    return false
```

Esto es solo una orientación: las variables, argumentos y estructura dependerá del problema particular

Problema de las 8 reinas

A continuación, un algoritmo para determinar si una asignación parcial de las 8 reinas puede dar lugar a una solución válida

input : Arreglo $T[0 \dots 7]$,
índice $0 \leq i \leq 8$
output: **true** ssi hay solución

`Queens`(T, i):
    if $i = 8$ **: return true**
    for $v = 0 \dots 7$ **:**
        if `Check`(T, i, v) **:**
            $T[i] \leftarrow v$
            if `Queens`$(T, i+1)$ **:**
                return true
    return false

input : Arreglo $T[0 \dots 7]$,
índices $0 \leq i, j \leq 7$
output: **false** ssi es ilegal

`Check`(T, i, v):
    for $j = 0 \dots i-1$ **:**
        if $v = T[i]$ **:**
            return false
        if $|(v - T[j])/(i-j)| = 1$ **:**
            return false
    return true

¿Cómo podemos modificar el algoritmo para obtener una solución?

Complejidad

El análisis de complejidad del *backtracking* involucra el conteo de tuplas posibles

- En un conjunto de n variables $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- con valores posibles en dominios $D = \{D_1, \ldots, D_n\}$
- tenemos $|D_1| \times |D_2| \times \cdots \times |D_n|$ tuplas posibles

Luego, en el caso particular de que $|D_i| = K$ para todo i,

- revisar todas las tuplas es $\mathcal{O}(K^n)$

Complejidad

La complejidad de las posibles soluciones para CSP cumplen,

- la estrategia de fuerza bruta revisa **todas las tuplas** $\mathcal{O}(K^n)$
- el backtracking puede revisar menos tuplas, pero sigue siendo proporcional $\mathcal{O}(K^n)$

Es decir, asintóticamente estas estrategias tienen la misma complejidad

¿Cuál es más rápido en la práctica?

No olvidar: *Backtracking* es igual o más rápido que la fuerza bruta

Otra interpretación del backtracking

Podemos pensar en la estrategia de backtracking como **búsqueda en un grafo implícito**

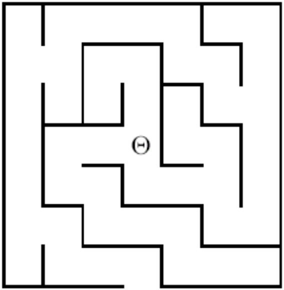
Los CSP generan muchas tuplas posibles como asignaciones para las variables de X

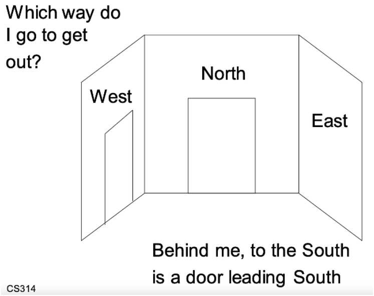
- Cada posible asignación genera un camino
- Las nuevas asignaciones abren nuevos caminos
- A la colección de todas estas alternativas le llamamos **grafo implícito**

El ejemplo por excelencia para visualizar el grafo implícito
es el **problema de recorrer un laberinto**

Recorrido del laberinto

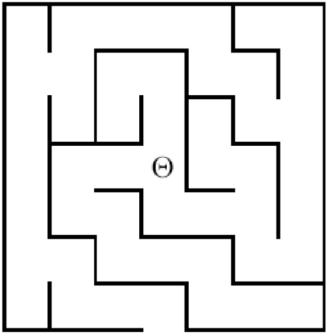
Supongamos que nos interesa salir de un laberinto dado que estamos en Θ





Podemos resolver este problema con *backtracking*

Recorrido del laberinto



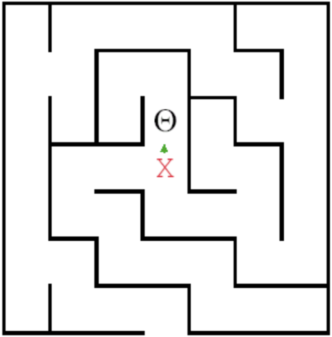
Planteamos el problema como un CSP

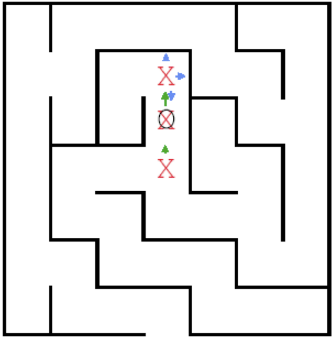
- Variables?
- Dominios?
- Restricciones?
- Qué define el *éxito*?

Caracterizamos por Θ la posición actual

Recorrido del laberinto

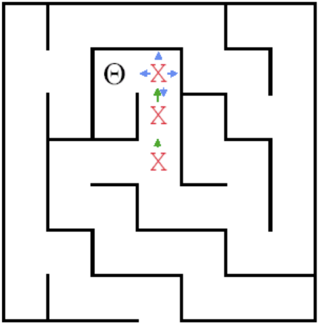
En cada nueva posición Θ solo podemos elegir dar un paso en las direcciones libres y distintas de aquella de la cual venimos

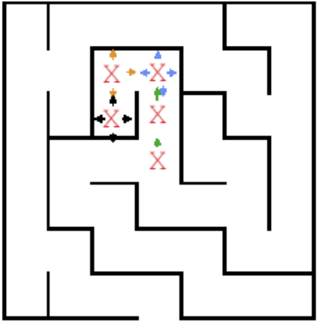




Recorrido del laberinto

Debemos hacer backtrack cuando llegamos a un camino sin salida: solo muros y celdas ya visitadas

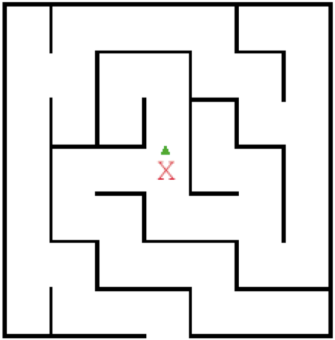


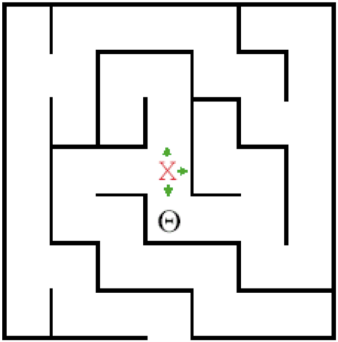


No hay más opciones: ¿hasta dónde nos *arrepentimos* con el backtrack?

Recorrido del laberinto

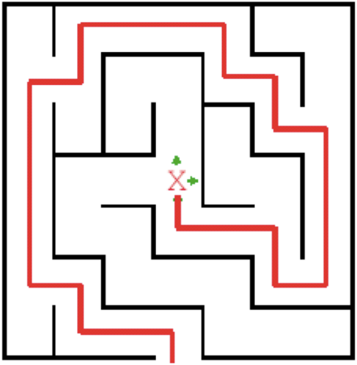
Sabemos que ir al norte no funcionó. Probamos otra opción yendo al sur.





Recorrido del laberinto

En este caso, logramos llegar a una solución que encuentra la salida



Recorrido del laberinto

Le agregamos etiquetas a las posiciones, de modo que sabemos cuáles hemos visitado (visited). Todas comienzan como nonvisited y la salida se marca como exit

input : Conjunto de variables sin asignar X, posición x, dominios D, restricciones R

```
isSolvable(X, x, D, R):
    if x = exit : return true
    if visited : return false
    x ← visited
    for v ∈ {N, E, S, W} :
        if x + v ≠ wall :
            x ← x + v
            if isSolvable(X, x, D, R) :
                return true
            x ← nonvisited
    return false
```

Otros problemas habituales

Hay varios problemas clásicos que se resuelven mediante backtracking

- Recorrido del caballo de ajedrez (*Knight's tour problem*)
- Problema de la mochila (capacidad versus número de items)
- Balance de carga
- Coloreo de mapas (Sudoku es un caso particular)

En general, puzzles NP-completos podemos atacarlos
con alguna idea de backtracking

Sumario

Primera extensión de Backtracking

Consideremos ahora el problema de determinar **todas** las soluciones a un CSP

- Nos interesan las soluciones explícitamente
- O solo queremos contarlas

En ambos casos, necesitamos que el algoritmo **no se detenga** al encontrar la primera solución

Encontrar todas las soluciones

input : Conjunto de variables sin asignar X, dominios D, restricciones R

```
isSolvable(X, D, R):
    if X = ∅ : return true
    x ← alguna variable de X
    for v ∈ D_x :
        if x = v no rompe R :
            x ← v
            if isSolvable(X − {x}, D, R) :
                return true
            x ← ∅
    return false
```

¿Cómo modificar el algoritmo genérico para encontrar **todas** las soluciones?

Encontrar todas las soluciones

input : Conjunto de variables sin asignar X, dominios D, restricciones R

`isSolvableAll`(X, D, R):

if $X = \varnothing$ **: return true**

$x \leftarrow$ alguna variable de X

for $v \in D_x$ **:**

  if $x = v$ *no rompe* R **:**

    $x \leftarrow v$

    if `isSolvableAll`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**

      Se marca $x \leftarrow v$ como solución

    $x \leftarrow \varnothing$

return false

Incluso en este escenario, Backtracking es mejor que fuerza bruta

Mejoras de desempeño de Backtracking

Ahora, nos interesa poder **informar mejor** al Backtracking

- Gracias a las características del problema, sabemos que hay caminos que ya no es necesario revisar
- El dominio para x_i quizás no es D_i completo
- Puede haber *mejores* elementos de D_i para elegir primero

Estos casos nos permiten proponer las siguientes mejoras que detallaremos

- Podas
- Propagación
- Heurísticas

Podas

Backtracking es capaz de determinar si una asignación puede terminar en solución

- Las soluciones inviables se **descartan** según las restricciones R del CSP
- Requiere llamados recursivos
- Posiblemente, **muchos** llamados

¿Podemos hacerlo mejor?

Agregaremos nuevas restricciones que se deducen de las iniciales

Podas

Llamaremos **podas** a estas nuevas restricciones y se revisan junto a las originales

`isSolvable`(X, D, R)**:**

  if $X = \varnothing$ **: return true**

  $x \leftarrow$ alguna variable de X

  for $v \in D_x$ **:**

    if $x = v$ *no rompe* R **:**

      $x \leftarrow v$

      if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**

        return true

      $x \leftarrow \varnothing$

  return false

Podas

Llamaremos **podas** a estas nuevas restricciones y se revisan junto a las originales

`isSolvable`(X, D, R):

    if $X = \varnothing$ **: return true**
    $x \leftarrow$ alguna variable de X
    for $v \in D_x$ **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$
            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                return true
            $x \leftarrow \varnothing$
    return false

Pueden ser más costosas de checkear,
pero vale la pena en la práctica

Dominios

Consideremos el siguiente tablero de Sudoku parcialmente completado

								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Dominios

Si asignamos el valor 1 a la posición $(0, 0)$, ¿cambió el dominio válido para alguna variable?

1								
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Propagación

Backtracking chequea todos los valores posibles en el dominio D_i de la variable x_i

- Existen restricciones que invalidan ciertos valores de D_i
- Backtracking clásico los revisa igual
- Esas soluciones parciales nunca serán válidas

¿Podemos hacerlo mejor?

Cambiaremos los dominios de las demás variables luego de una asignación

Propagación

Llamaremos **propagación** a la acción de modificar dominios luego de una asignación

`isSolvable`(X, D, R)**:**

- **if** $X = \varnothing$ **: return true**
- $x \leftarrow$ alguna variable de X
- **for** $v \in D_x$ **:**
  - **if** $x = v$ *no rompe* R **:**
    - $x \leftarrow v$
    - **if** `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
      - **return true**
    - $x \leftarrow \varnothing$
- **return false**

Propagación

Llamaremos **propagación** a la acción de modificar dominios luego de una asignación

```
isSolvable(X, D, R):
    if X = ∅ : return true
    x ← alguna variable de X
    for v ∈ D_x :
        if x = v no rompe R :
            x ← v, propagar
            if isSolvable(X − {x}, D, R) :
                return true
            x ← ∅, propagar
    return false
```

Ojo al deshacer asignaciones,
pues hay que reestablecer dominios propagados

Orden

Consideremos el siguiente tablero de Sudoku parcialmente completado: ¿por qué celda partimos llenando?

								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Nos interesa minimizar la posibilidad de fracasar

Orden

¿Será mejor la $(0,8)$?

1								
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Orden

¿Ahora cuál sería razonable escoger?

								1
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
					9			5

Orden

¿Ahora cuál sería razonable escoger?

								1
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
								6
					9			5

Heurísticas

Backtracking chequea los valores válidos en el dominio D_i de la variable x_i en un orden arbitrario

- No solo puede afectar el orden en que se asignan valores
- También puede afectar el orden en que se itera sobre las variables disponibles

De hecho, si dispusiéramos de un **oráculo** que nos dice el mejor orden de asignación, el problema se vuelve **lineal**!

Guiaremos la búsqueda según algunos criterios (falibles)

Heurísticas

Llamaremos **heurísticas** a las estrategias para catalogar variables y valores según *qué tan buenos son*

```
isSolvable(X, D, R):
    if X = ∅ : return true
    x ← alguna variable de X
    for v ∈ D_x :
        if x = v no rompe R :
            x ← v
            if isSolvable(X − {x}, D, R) :
                return true
            x ← ∅
    return false
```

Heurísticas

Llamaremos **heurísticas** a las estrategias para catalogar variables y valores según *qué tan buenos son*

`isSolvable`(X, D, R):
    if $X = \varnothing$ **: return true**
    $x \leftarrow$ la mejor variable de X
    for $v \in D_x$ *de mejor a peor* **:**
        if $x = v$ *no rompe* R **:**
            $x \leftarrow v$
            if `isSolvable`$(X - \{x\}, D, R)$ **:**
                return true
            $x \leftarrow \varnothing$
    return false

Las heurísticas tratan de aproximar la realidad, pueden equivocarse

Heurísticas

Posible heurística: partir por la variable con dominio más pequeño

								1
								9
	7					6		8
						1		4
				3				2
		1			5	3		7
	5							3
								16
					9			5

Heurísticas

Posible heurística: partir por el valor con menos apariciones

4				2				
8							1	
7			4					
3 2 5								
3 2					5			
3 5		8						2
1						3		
9			5					
6								

Backtracking mejorado

Podemos incorporar estas mejoras según convenga en un problema particular

$\texttt{isSolvable}(X, D, R)$:

if $X = \varnothing$ **: return true**

$x \leftarrow$ la mejor variable de X

for $v \in D_x$ *de mejor a peor* **:**

  if $x = v$ *no rompe* R **:**

    $x \leftarrow v$, propagar

    if $\texttt{isSolvable}(X - \{x\}, D, R)$ **:**

      return true

    $x \leftarrow \varnothing$, propagar

return false