Segment Tree

EDD

Un problema (muy) sencillo

Imagina que tienes un arreglo de números *A* de largo *n*:

A =

-34	**98**	**50**	**-67**	**71**	**46**	**-4**	**-86**
		L				R	

Y quieres saber la suma de los elementos entre las posiciones *L* y *R*.

¿Cómo harías esto? ¿Qué complejidad tiene?

Un problema (no tan) sencillo

Imagina que tienes un arreglo de números A de largo n:

A =

-34	**98**	**50**	**-67**	**71**	**46**	**-4**	**-86**

Y quieres saber lo mismo pero en m consultas:

$$(L_1, R_1), (L_2, R_2), \ldots , (L_m, R_m)$$

¿Cómo harías esto? ¿Qué complejidad tiene?

Un problema (no tan) sencillo

Hay una forma de resolver esto que toma tiempo $O(n+m)$.

A =

-34	**98**	**50**	**-67**	**71**	**46**	**-4**	**-86**

B =

0	**-34**	**64**	**114**	**47**	**118**	**164**	**160**	**74**

Usamos un arreglo auxiliar B de **sumas acumuladas**.

¿Cuánto tiempo toma generar este arreglo?

Un problema (no tan) sencillo

En el arreglo B, el índice $B[i]$ guarda el valor $A[1] + \ldots + A[i-1]$.

Para la consulta (L, R) podemos responder usando lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
A[L] + A[L+1] + \ldots + A[R] &= A[1] + \ldots + A[R] - (A[1] + \ldots + A[L-1]) \\
&= B[R+1] - B[L]
\end{aligned}
$$

¡Cada consulta toma tiempo $O(1)$!

Un problema (harto menos) sencillo

Imagina que tienes un arreglo de números A de largo n:

A =

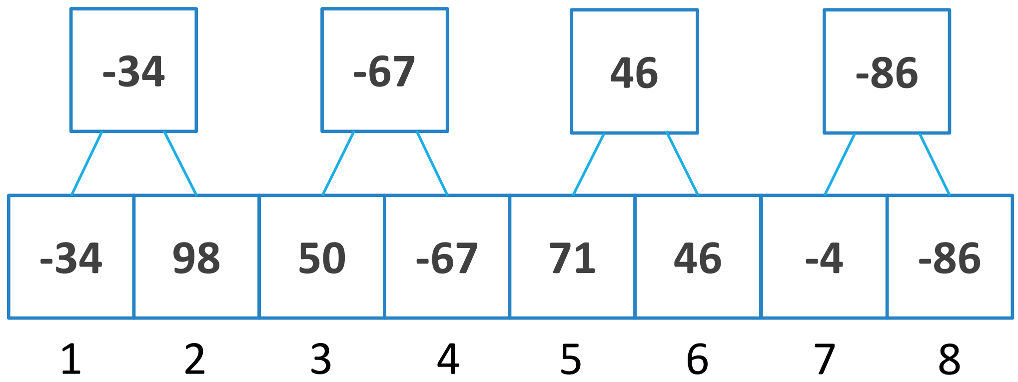
-34	**98**	**50**	**-67**	**71**	**46**	**-4**	**-86**

Tenemos nuestras m consultas $(L_1, R_1), (L_2, R_2), \ldots, (L_m, R_m)$, pero ahora en cada una queremos el **mínimo** de cada rango.

¿Nos sirve la idea anterior? ¿Existe algo mejor que O(n*m)?

Segment Tree – idea

Para empezar, usemos $n/2$ valores auxiliares

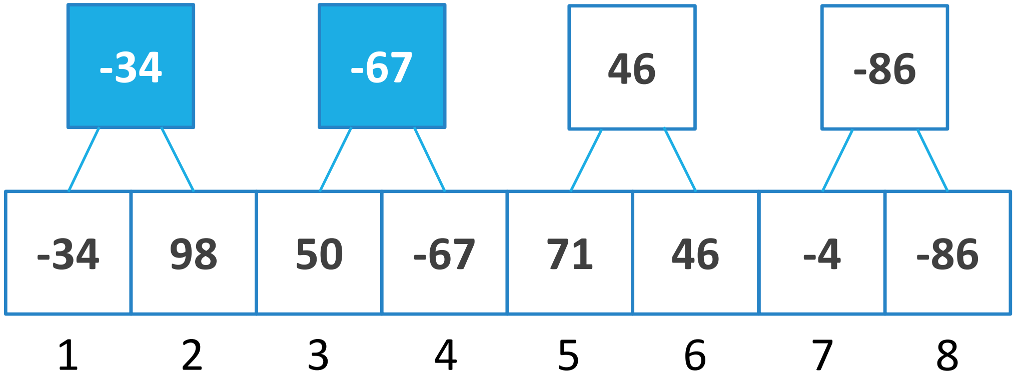


¿Qué información guardan estos valores?

¿Cómo buscarías el mínimo de algún rango aquí?

Segment Tree – idea

Por ejemplo, si el rango es (1,4)

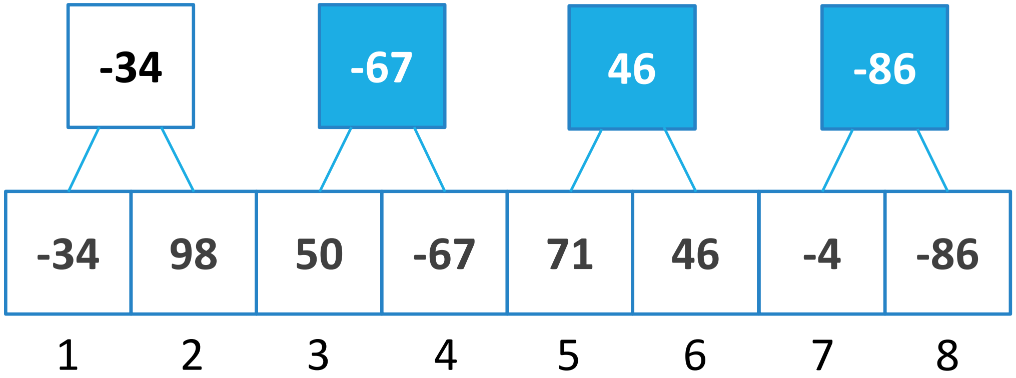


Revisamos estos valores, la respuesta es -67.

¿Por qué nos basta revisar esos dos valores?

Segment Tree – idea

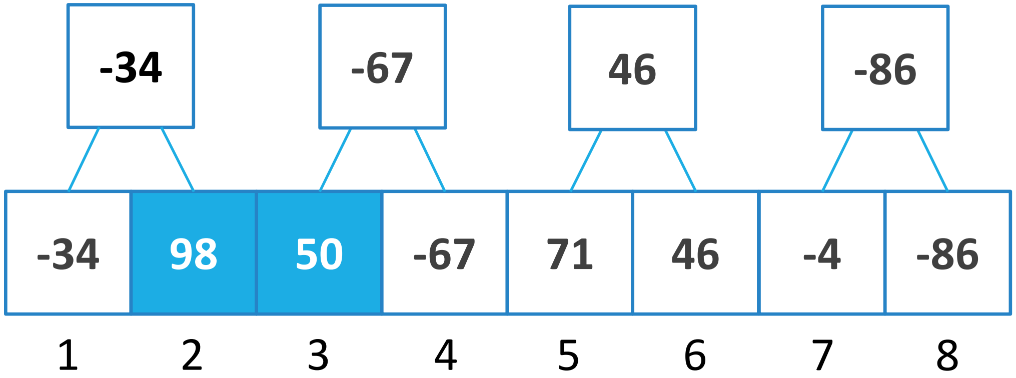
Por ejemplo, si el rango es (3,8)



Revisamos estos valores, la respuesta es -86.

Segment Tree – idea

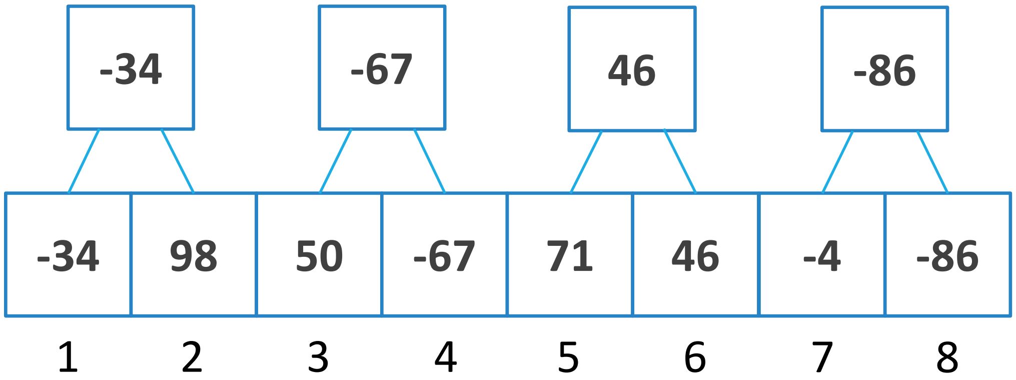
Por ejemplo, si el rango es (2,3)



Revisamos estos valores, la respuesta es 50.

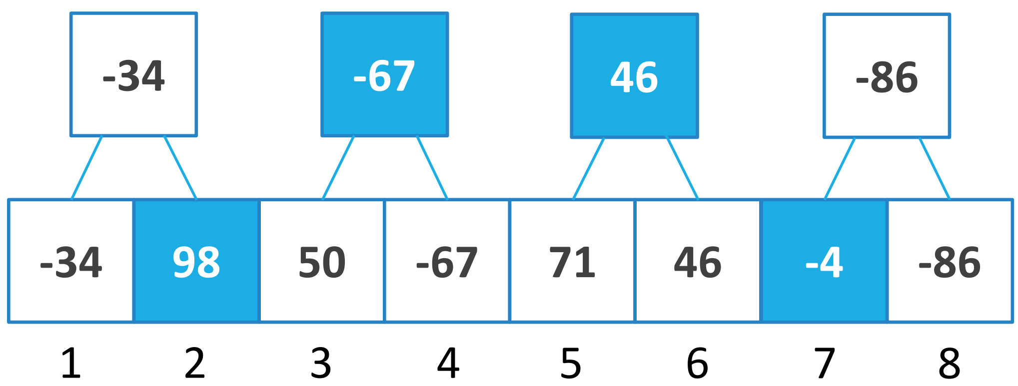
Segment Tree – idea

¿Y si el rango es (2,7)?



Segment Tree – idea

¿Y si el rango es (2,7)?



Revisamos estos.

Segment Tree – idea

Nuestro arreglo tiene tamaño 8, y antes en el peor caso teníamos que revisar 8 valores en una sola consulta.

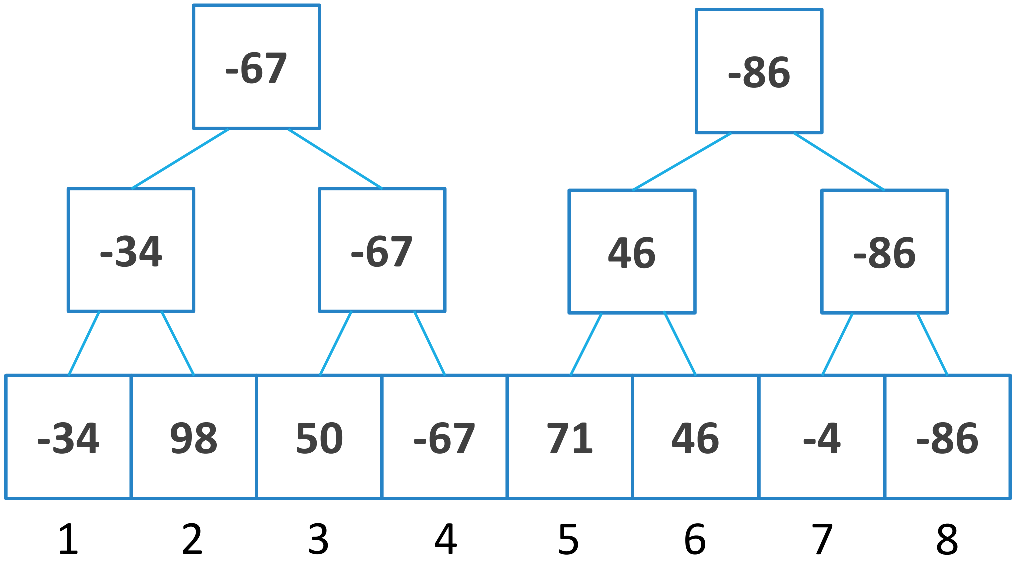
Ahora, en el peor caso vamos a revisar 4 valores.

¿Cómo baja el tiempo de las consultas **grandes**? ¿y las chicas?

¿Podemos mejorar esto?

Segment Tree – idea

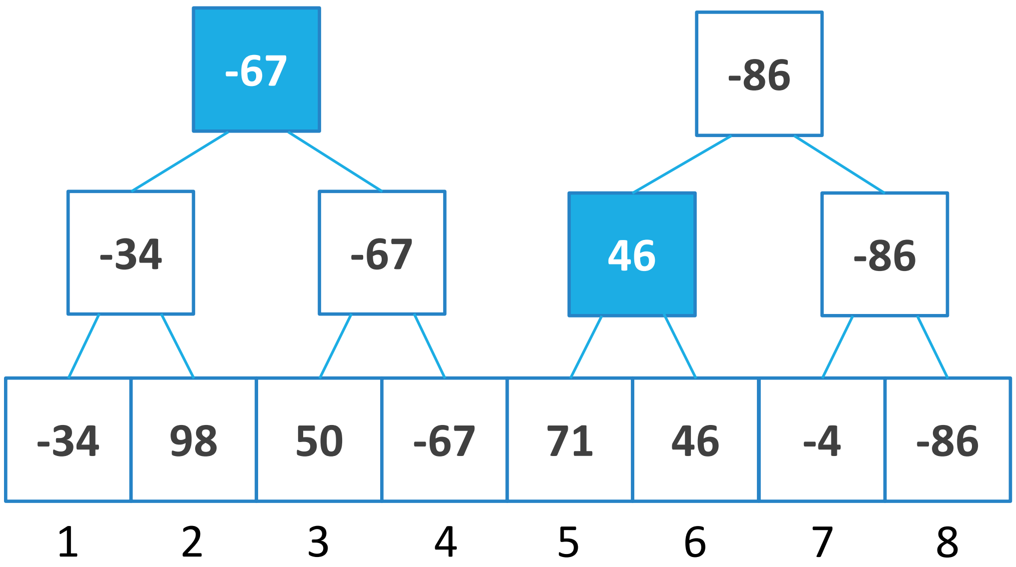
Vamos a armar un nivel más del Segment Tree:



¿Cómo buscarías el mínimo del rango (1,6)? ¿y el (2,8)?

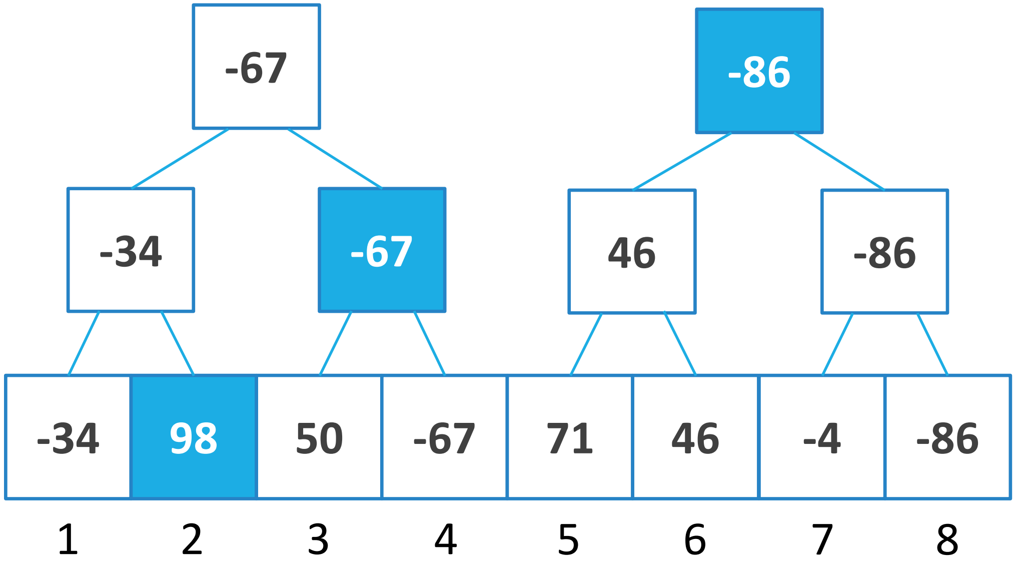
Segment Tree – idea

Para el rango (1,6)



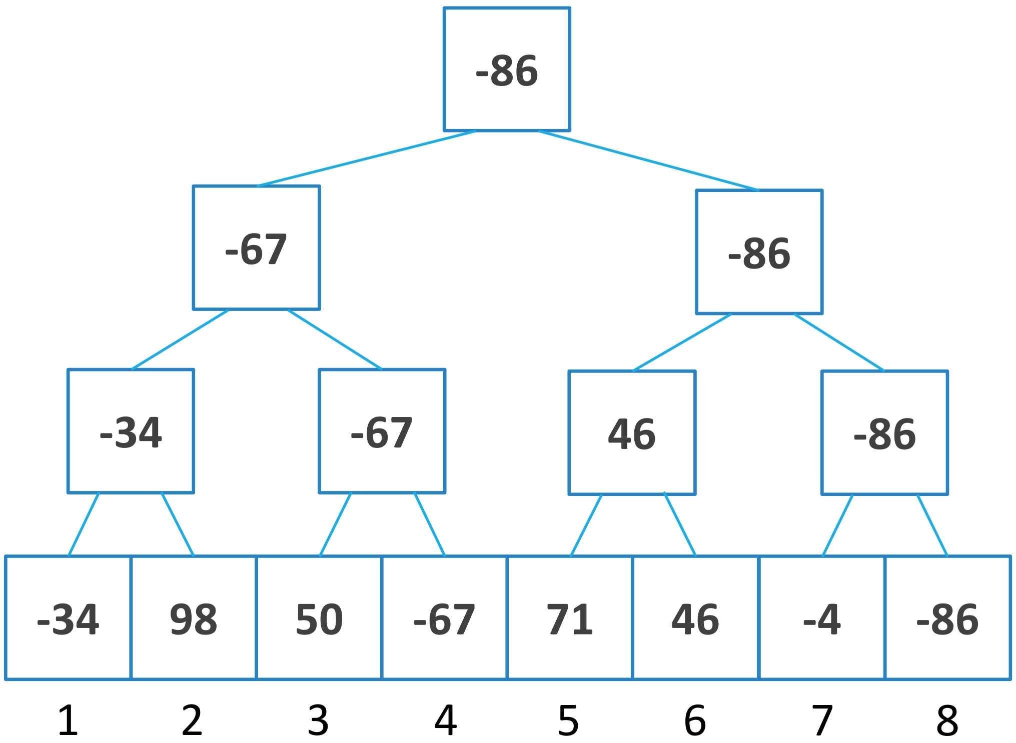
Segment Tree – idea

Y el rango (2,8)



Segment Tree

El Segment Tree completo se ve así:



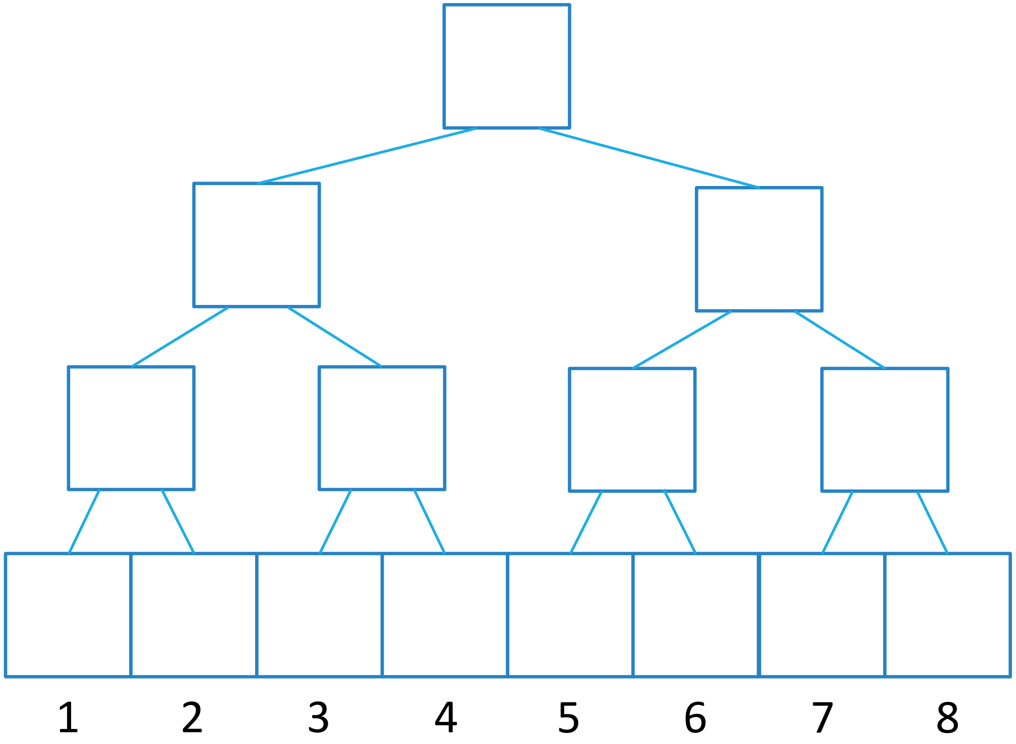
Se puede ver como un *torneo* entre todos los valores.

Segment Tree – Análisis

Asumamos por ahora que $n = 2^k$.

¿Cuántos niveles tiene el Segment Tree?

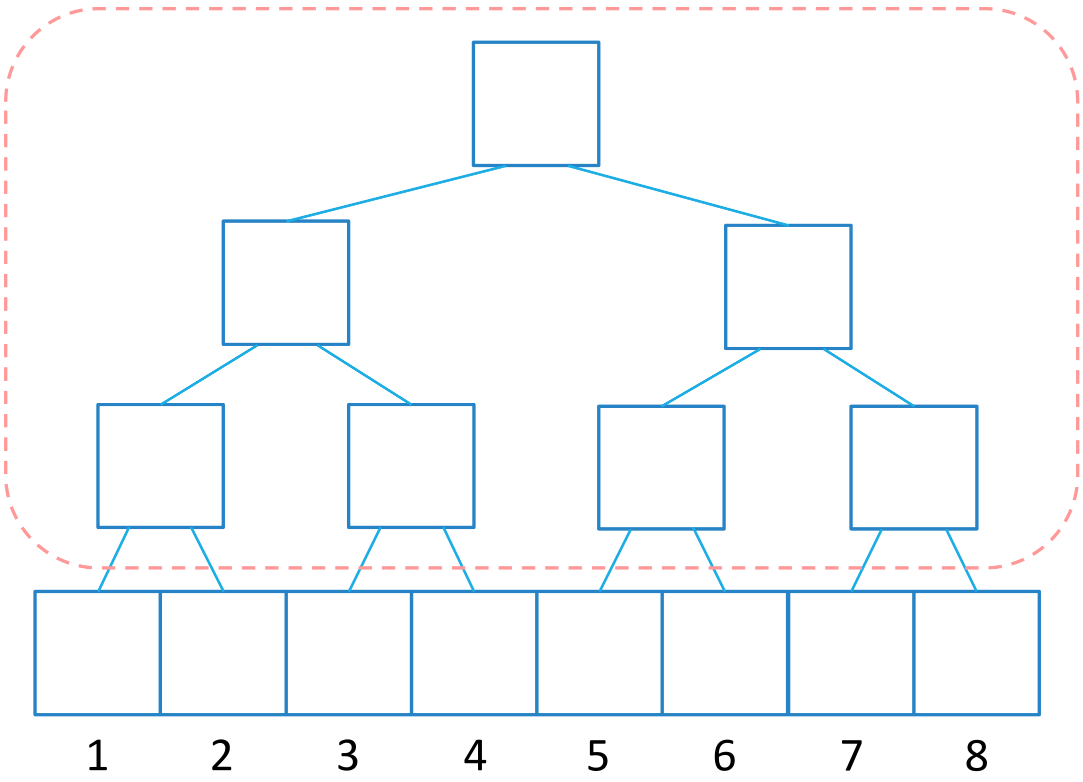
¿Por qué?



Segment Tree – Análisis

Asumiendo que $n = 2^k$.

¿Cuántos valores auxiliares necesito?



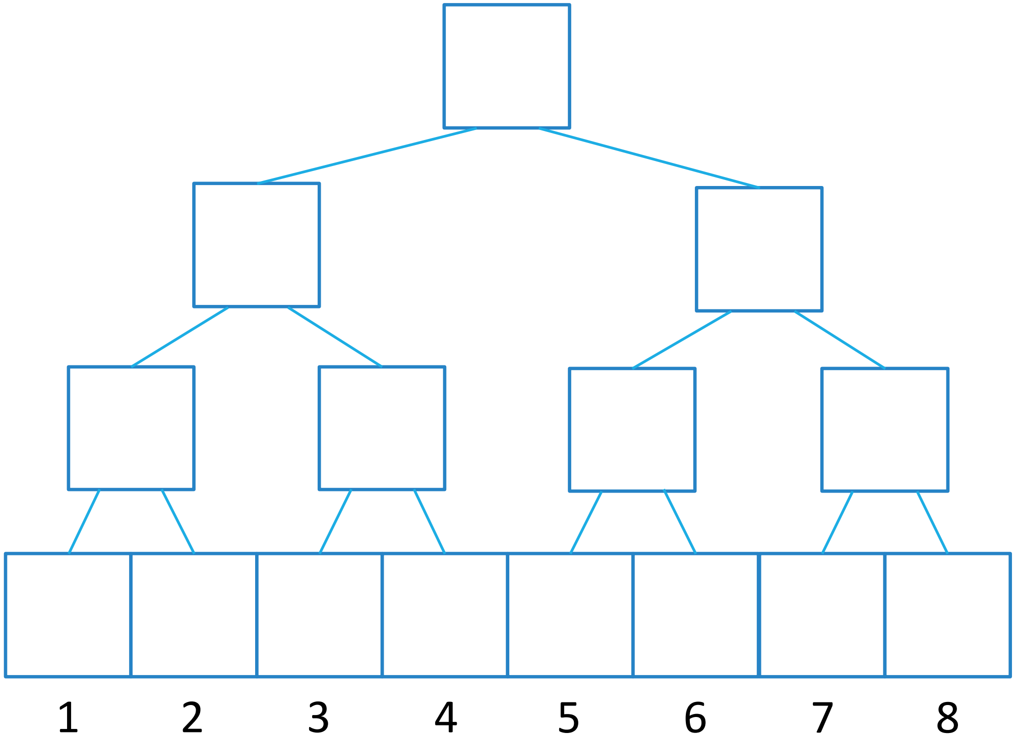
Segment Tree – Análisis

¿Cuántos valores necesito revisar en el peor caso?

Primero vamos a ver cómo es que se <u>ve</u> este peor caso.

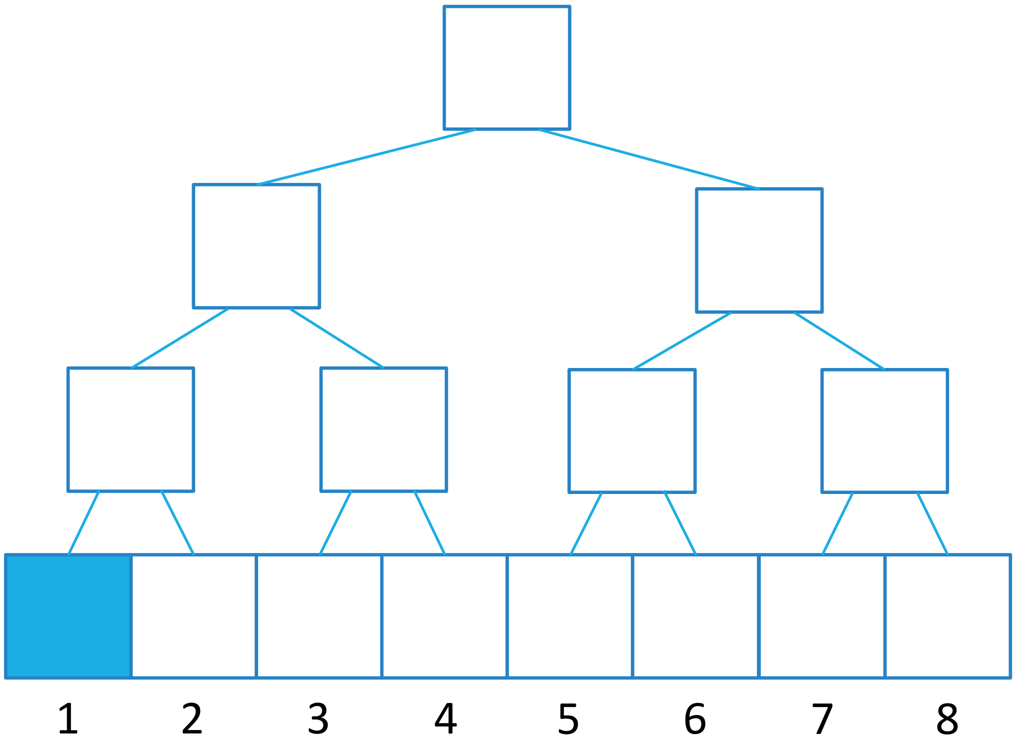
Segment Tree – Análisis

Por ahora consideremos sólo rangos que comienzan en 1, y busquemos el peor caso entre estos.



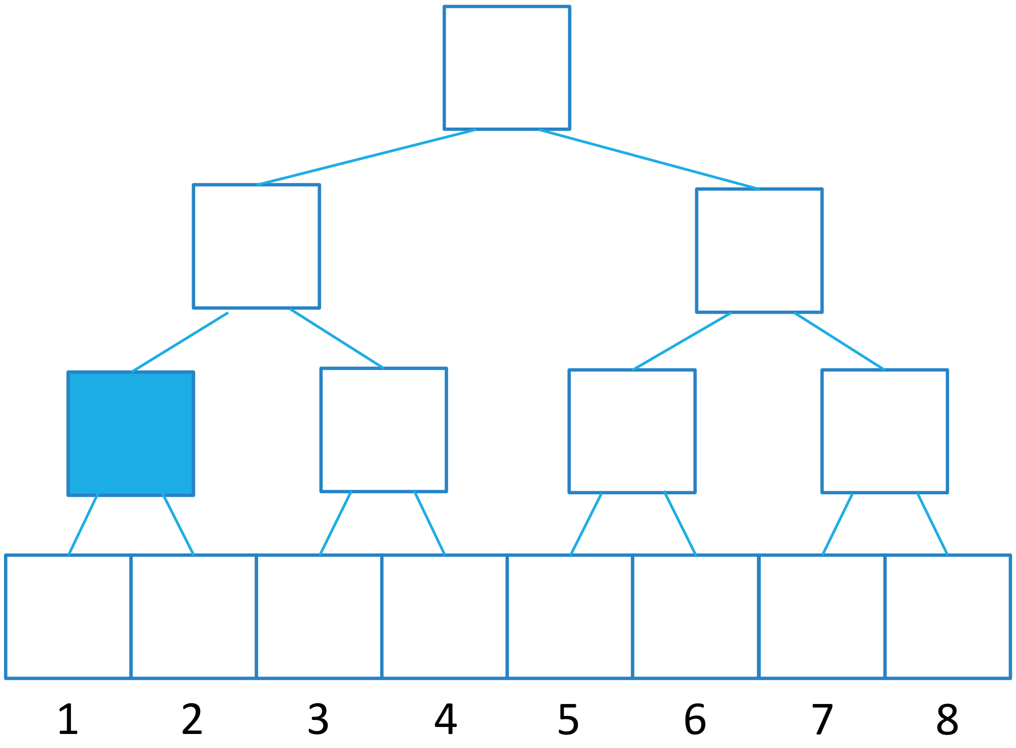
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,1) revisamos 1 valor:



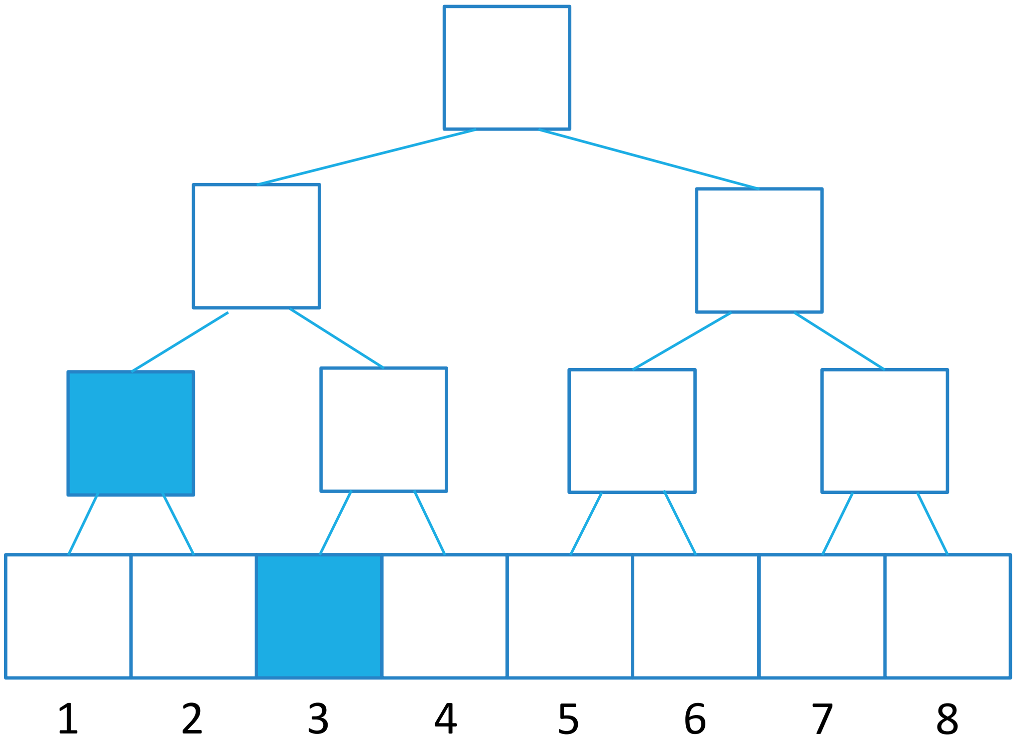
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,2) revisamos 1 valor:



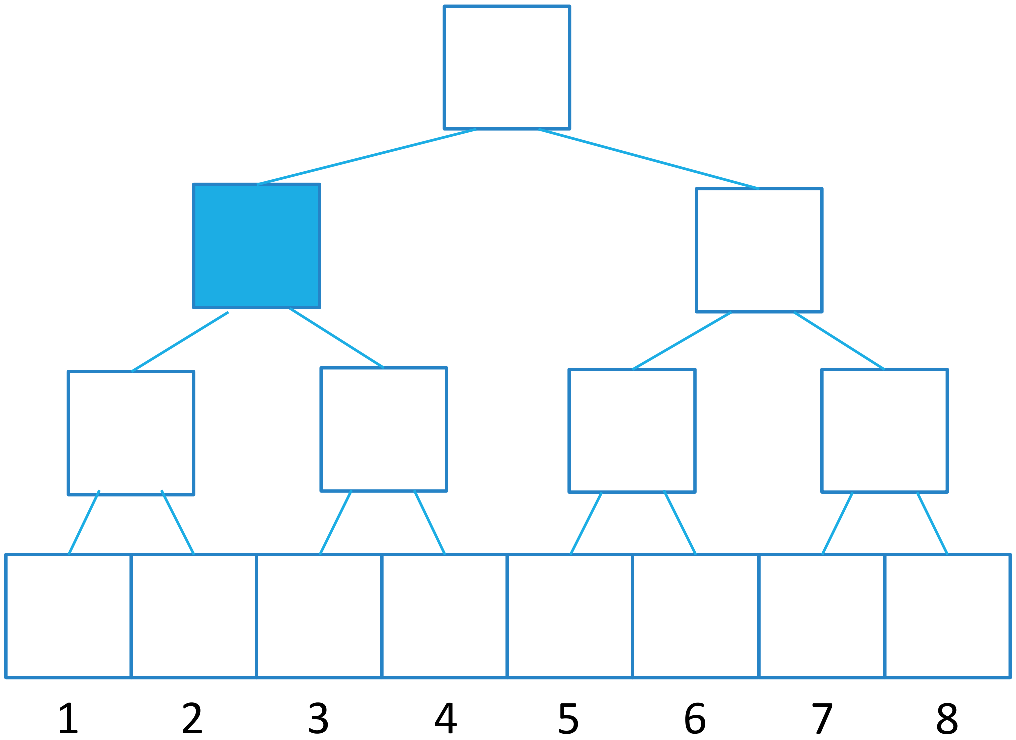
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,3) revisamos 2 valores:



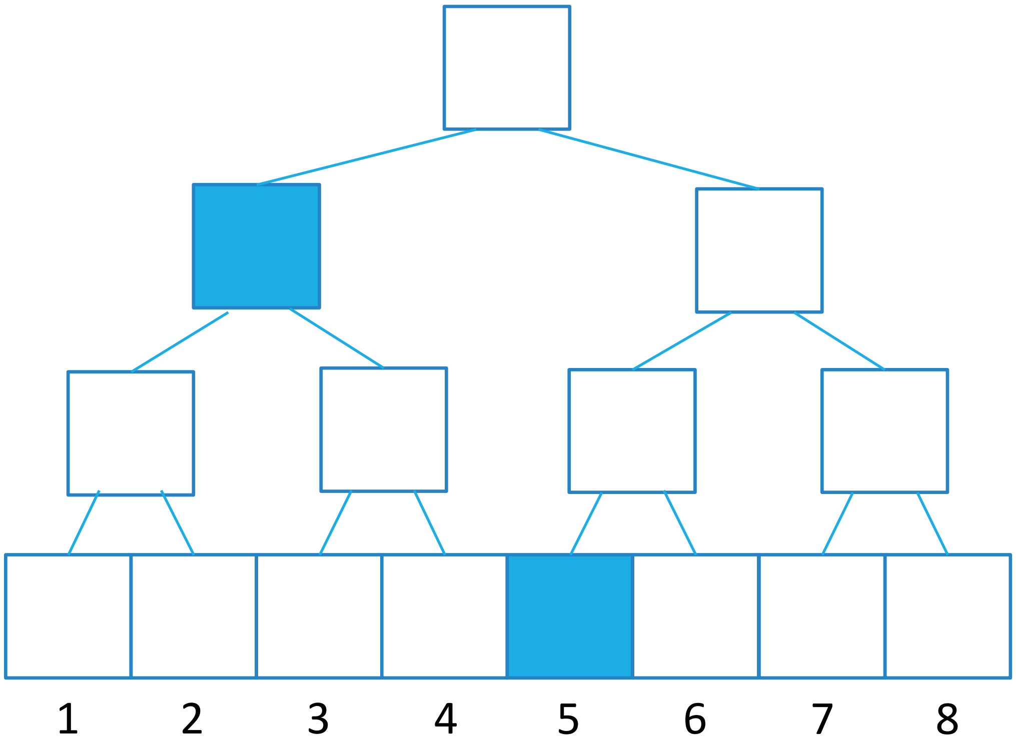
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,4) revisamos 1 valor:



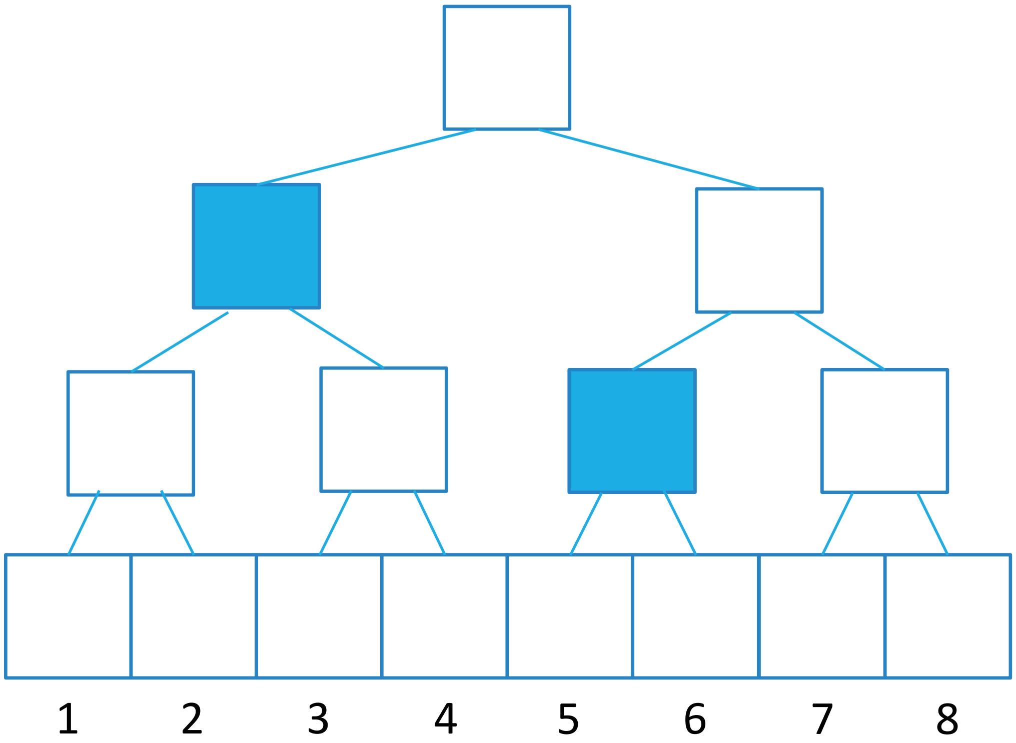
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,5) revisamos 2 valores:



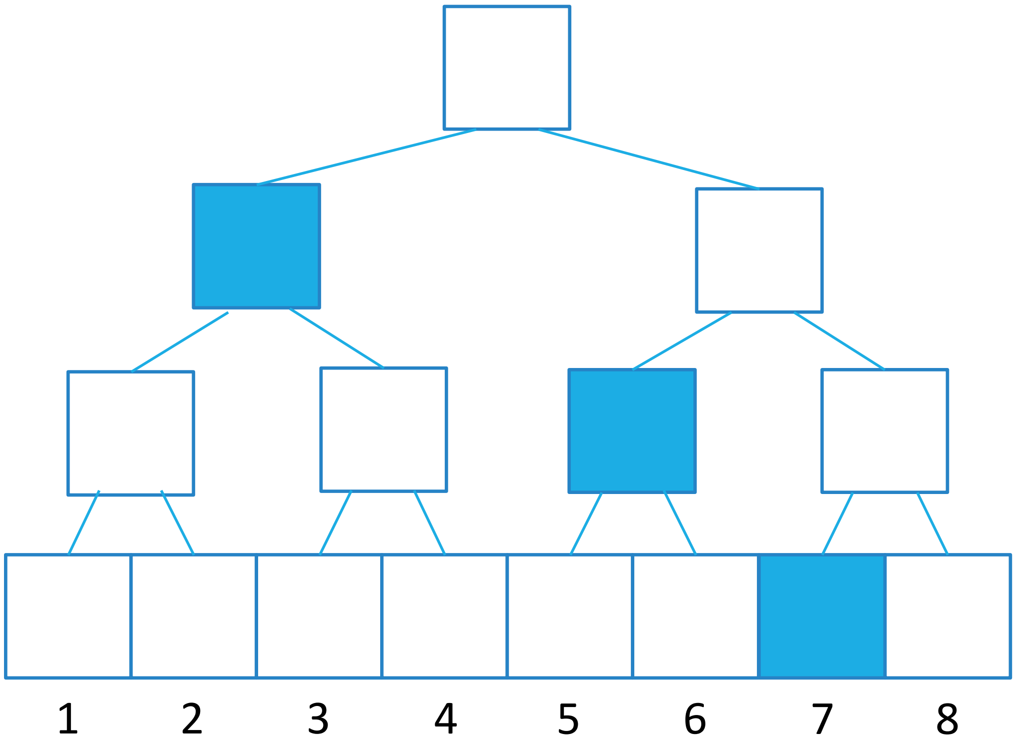
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,6) revisamos 2 valores:



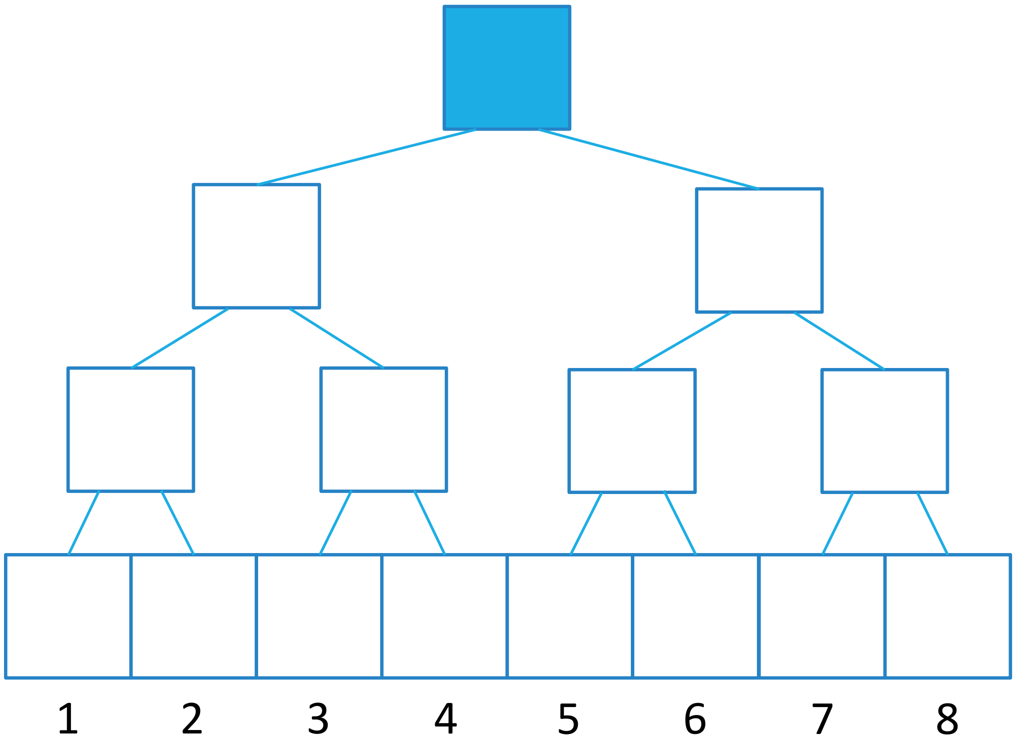
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,7) revisamos 3 valores:



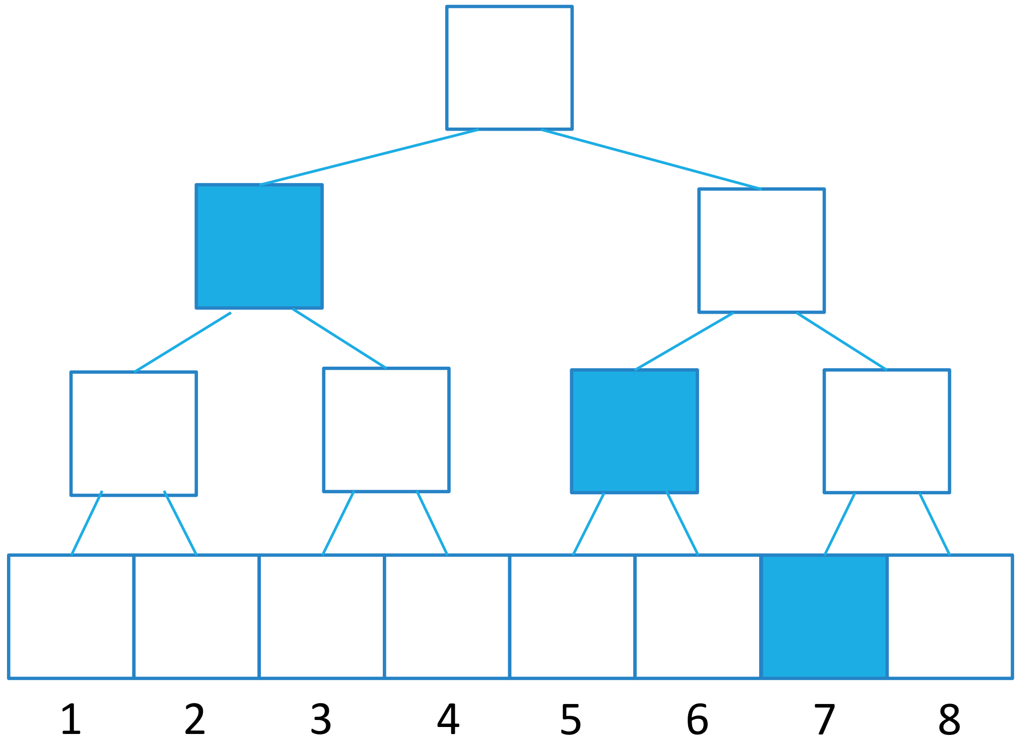
Segment Tree – Peor caso

Para el rango (1,8) revisamos 1 valor:



Segment Tree – Peor caso

Y el ganador es… ¡el rango (1,7)! En ser el peor rango.



Segment Tree – Análisis

Este análisis esconde algo interesante.

¿Qué pueden decir de esta secuencia?

$(1,n)$	Revisiones
1	1
2	1
3	2
4	1
5	2
6	2
7	3
8	1

Segment Tree – Análisis

(1,*n*)	Revisiones	*n* en binario
1	1	1
2	1	10
3	2	11
4	1	100
5	2	101
6	2	110
7	3	111
8	1	1000

Segment Tree – Análisis

(1,*n*)	Revisiones	*n* en binario
1	1	1
2	1	10
3	2	11
4	1	100
5	2	101
6	2	110
7	3	111
8	1	1000

¡Es exactamente la cantidad de 1s!

¿Por qué pasa esto? ¿Cuál es la complejidad asint. de este valor?

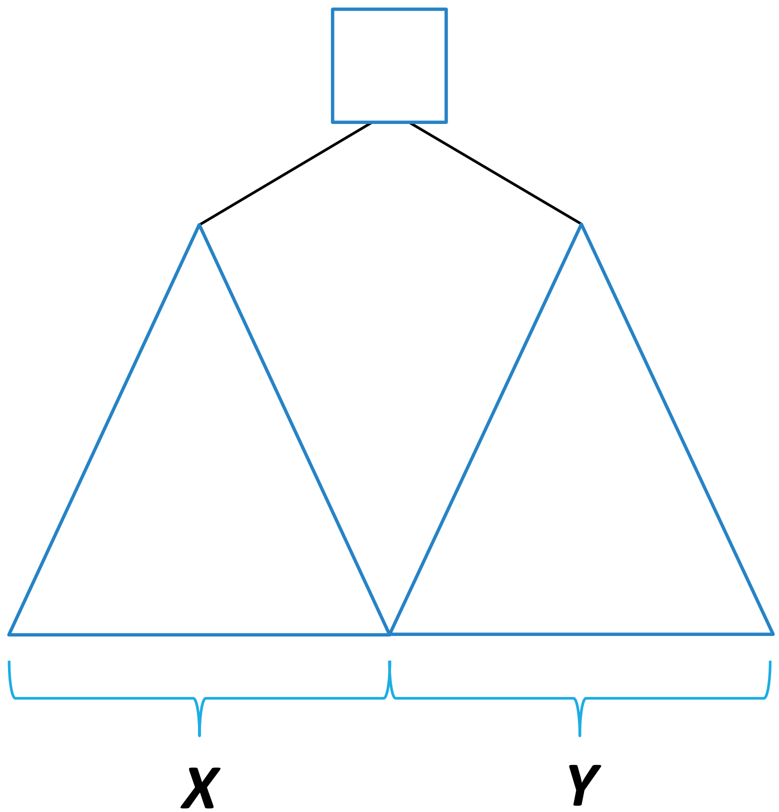
Segment Tree – Peor caso

Nos falta un paso para armar nuestro peor caso.

Llamemos *X* al rango $(1, n/2)$

e *Y* al rango $(n/2 + 1, n)$.

¿Dónde van a estar el *L* y *R* del peor caso?

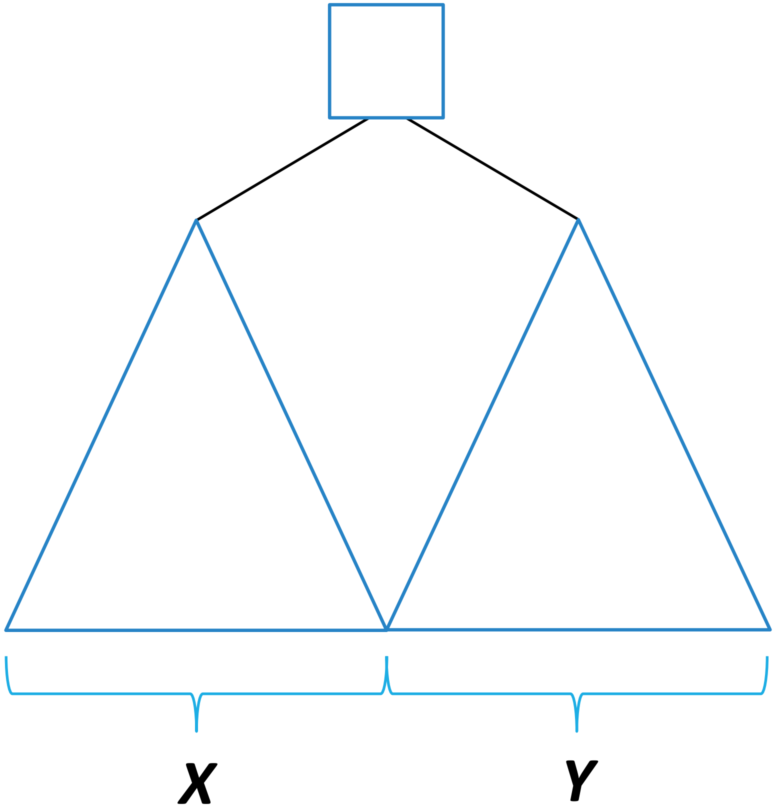


Segment Tree – Peor caso

Si *L* y *R* están en *X*, podemos encontrar un caso peor, ¿por qué?

Y lo mismo si están los dos en *Y*.

¿Dónde están *L* y *R* entonces?

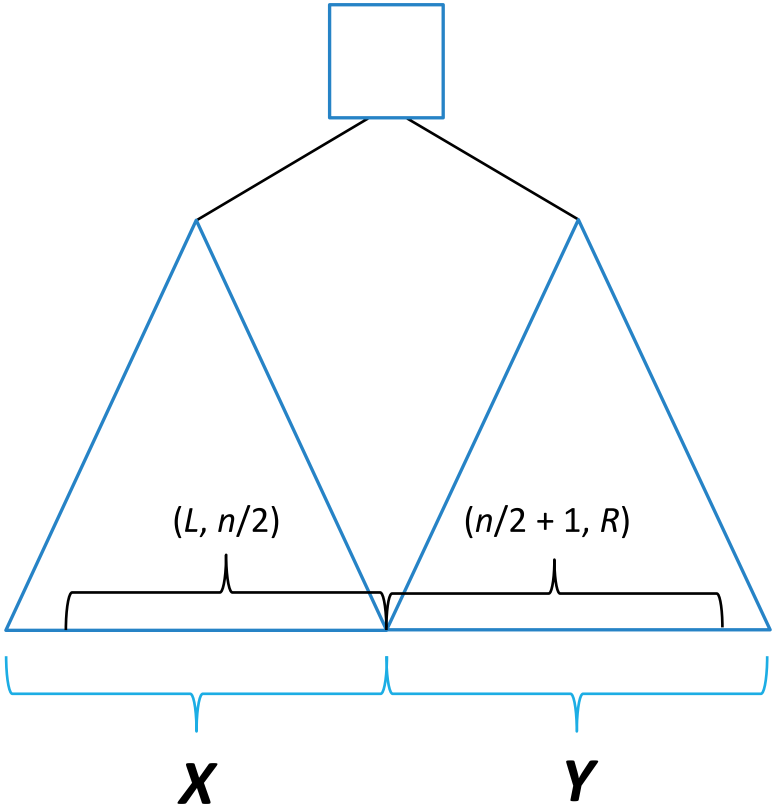


Segment Tree – Peor caso

Nuestro peor caso va a ser un *L* en *X* y un *R* en *Y*.

El rango (*L*, *R*) es igual a la unión de (*L*, *n*/2) con (*n*/2 + 1, *R*).

¡Estos rangos son independientes!



Segment Tree – Peor caso

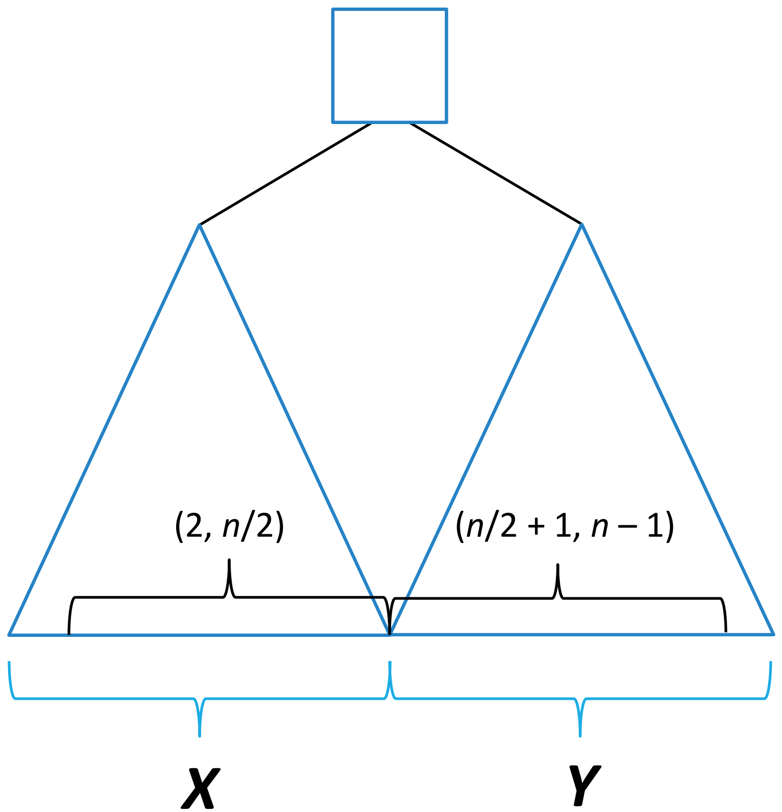
Juntamos el peor rango en B

$(n/2 + 1, R) = (n/2 + 1, n - 1)$

Con el peor rango en A

$(L, n/2) = (2, n/2)$

¿Por qué estos son los peores rangos?



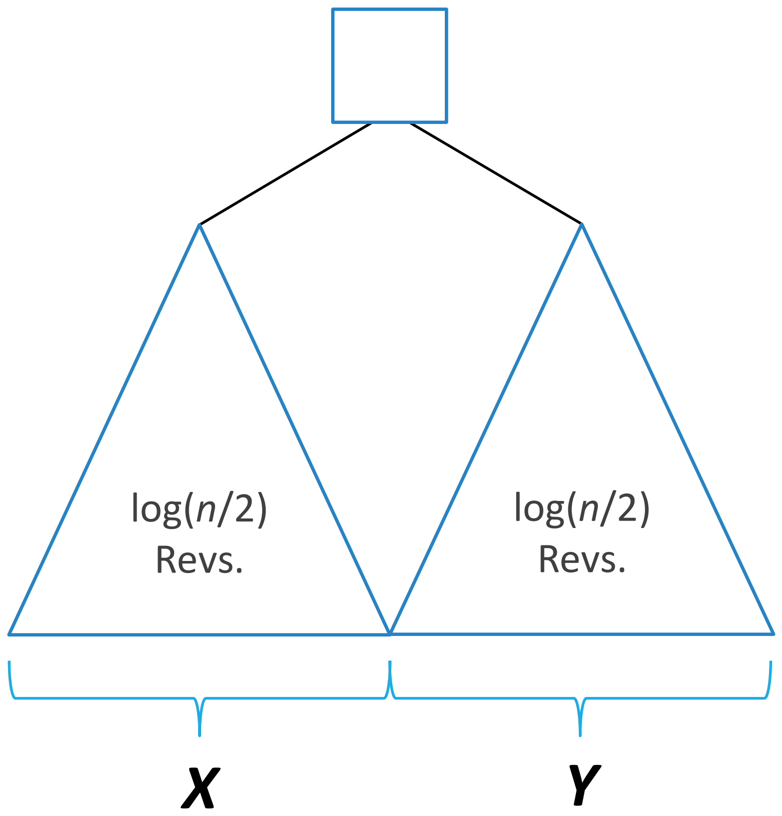
Segment Tree – Peor caso

Finalmente, nuestro peor rango es:

$$(L, R) = (2, n - 1)$$

En cada mitad se hacen **log(*n*/2)** revisiones.

El peor caso son **2*log(*n*/2)** revisiones.

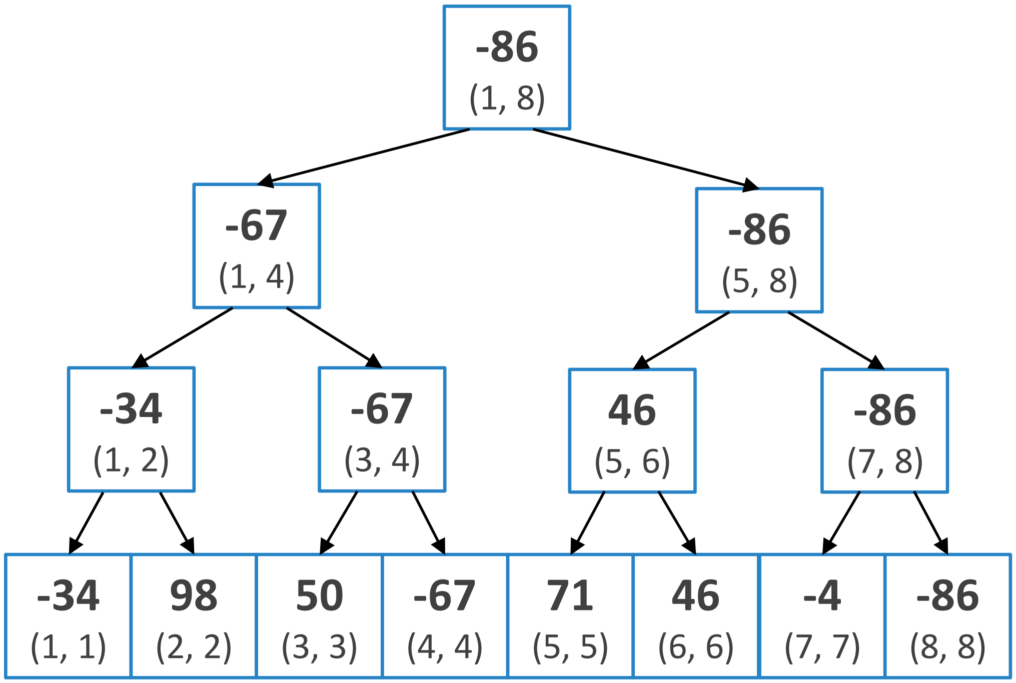


Segment Tree – Implementación

El Segment Tree lo implementamos como un **árbol binario**
(pero no de búsqueda)

Cada nodo ***B*** tiene estos atributos:

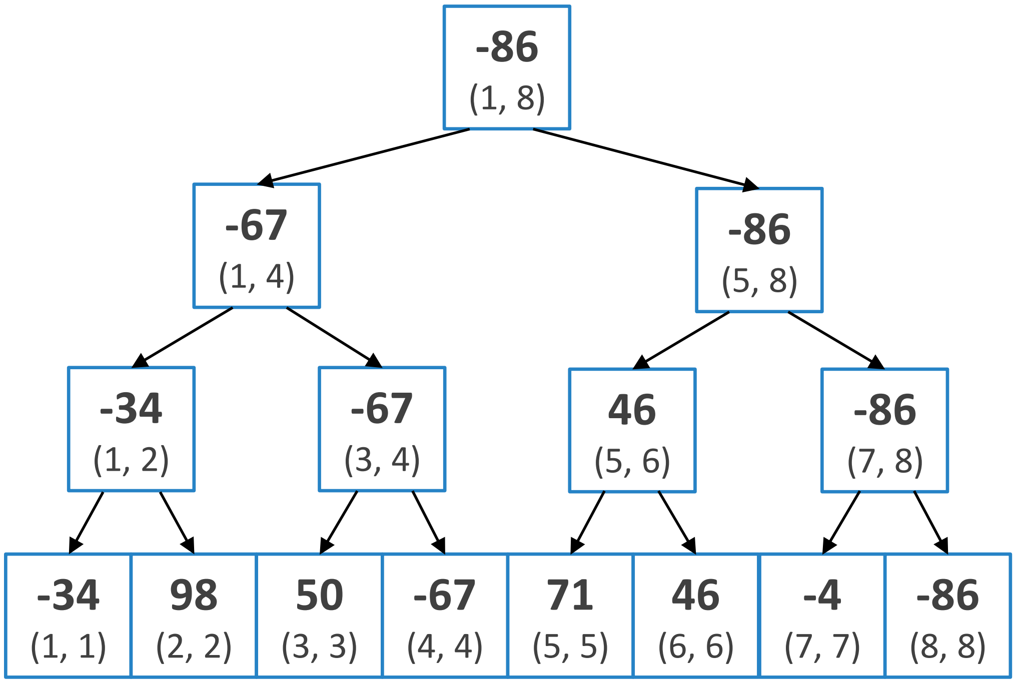
– ***B.left***
– ***B.right***
– ***B.L*** y ***B.R*** (su rango)
– ***B.value***



Segment Tree – Consulta

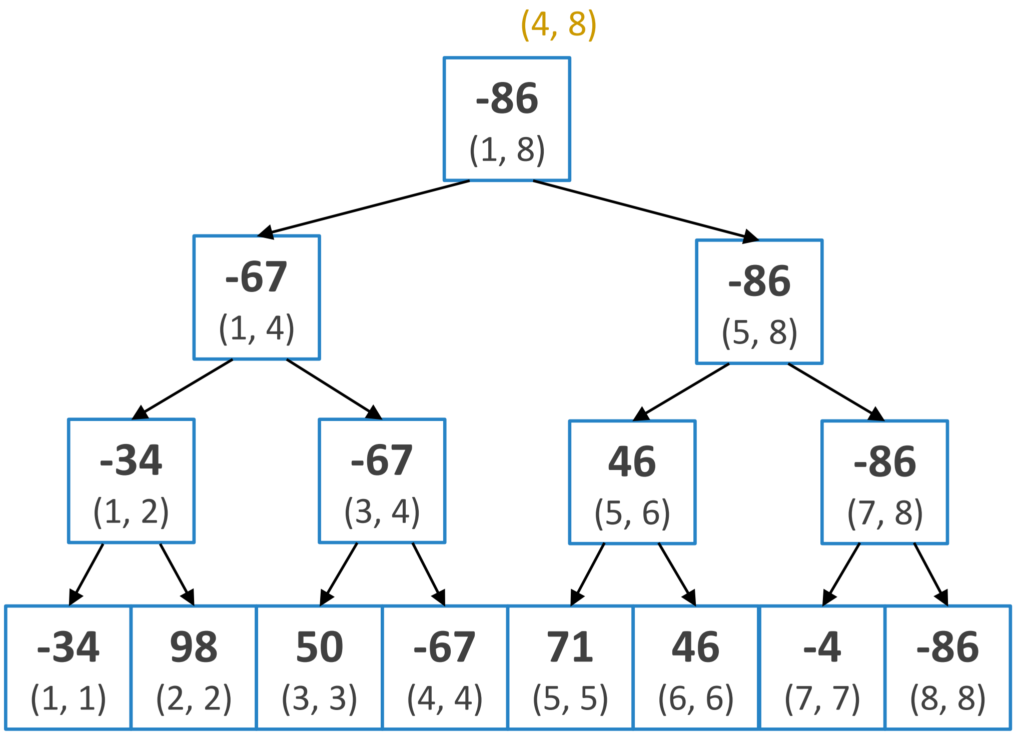
Veremos ahora cómo es que el Segment Tree responde a una consulta.

(O al menos una forma de implmentarlo)



Segment Tree – Consulta

Veamos qué hacemos con el rango (4,8).

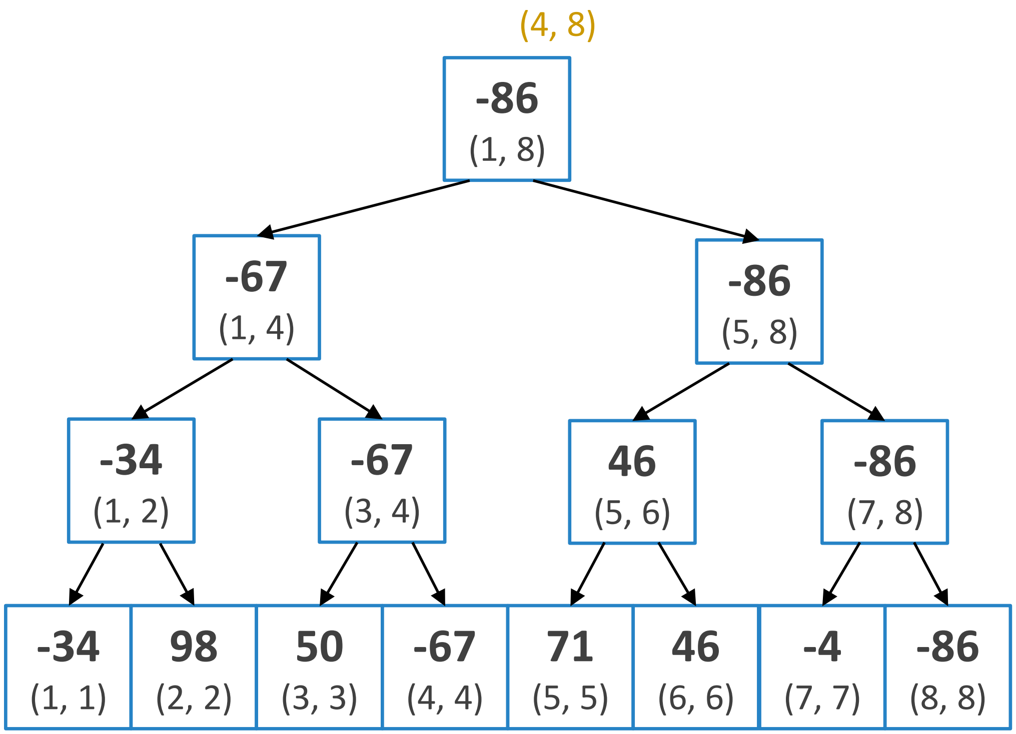


Segment Tree – Consulta

Lo primero que ve el primer nodo es que su valor guardado no le sirve para responder la consulta.

(¿por qué?)

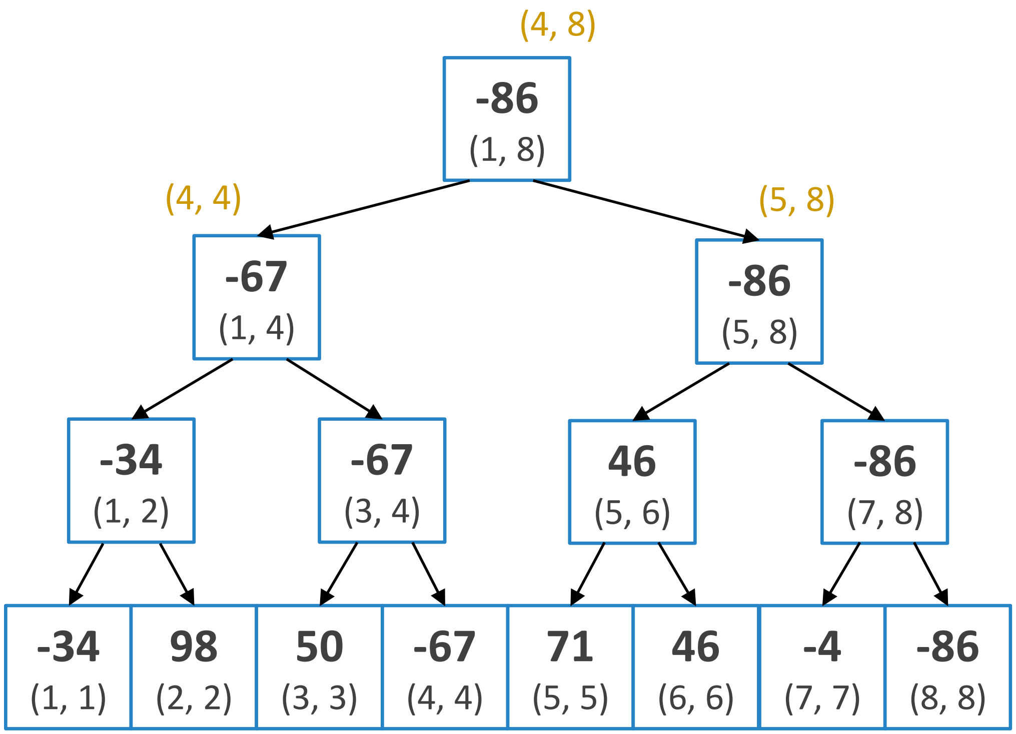
Así que le toca preguntarle a sus hijos.



Segment Tree – Consulta

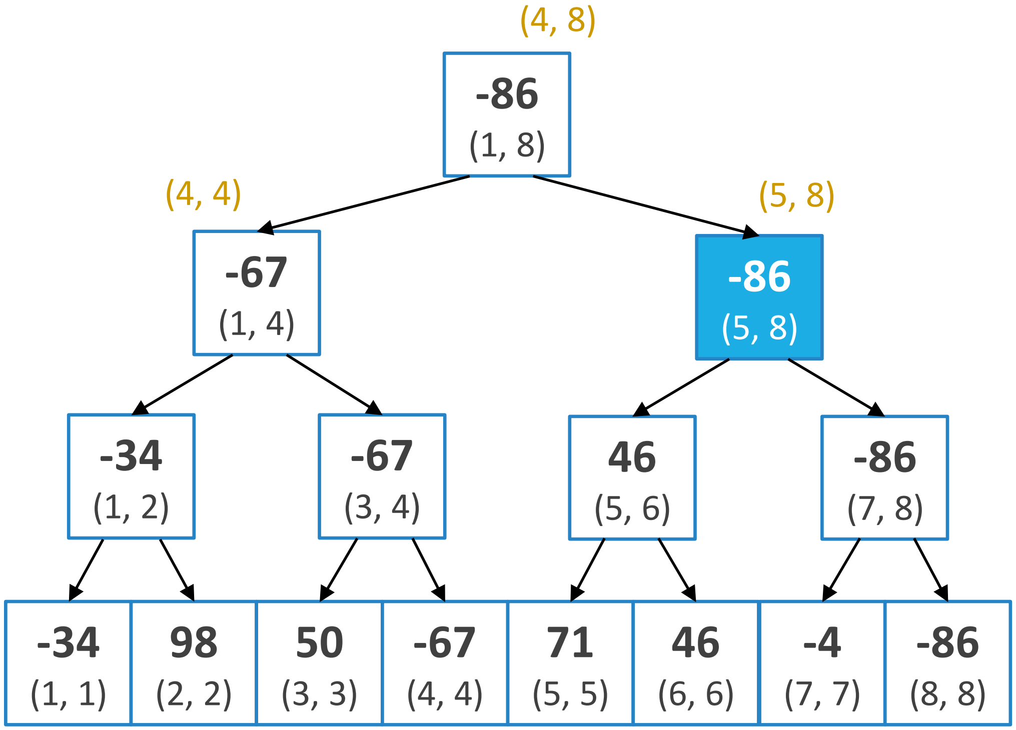
El hijo izquierdo no maneja ningún valor arriba de 4, así que le pregunta por el rango (4,4).

El hijo derecho no maneja ningún valor debajo de 5, así que le pregunta por el rango (5,8).



Segment Tree – Consulta

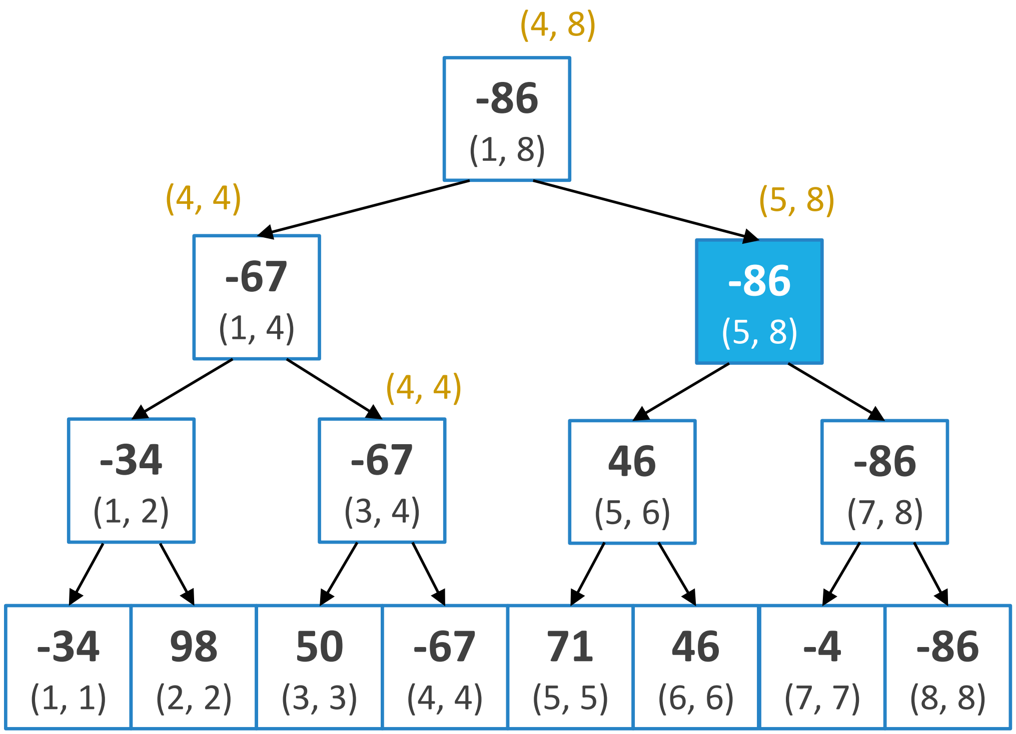
El hijo derecho puede responder a la consulta de inmediato.



Segment Tree – Consulta

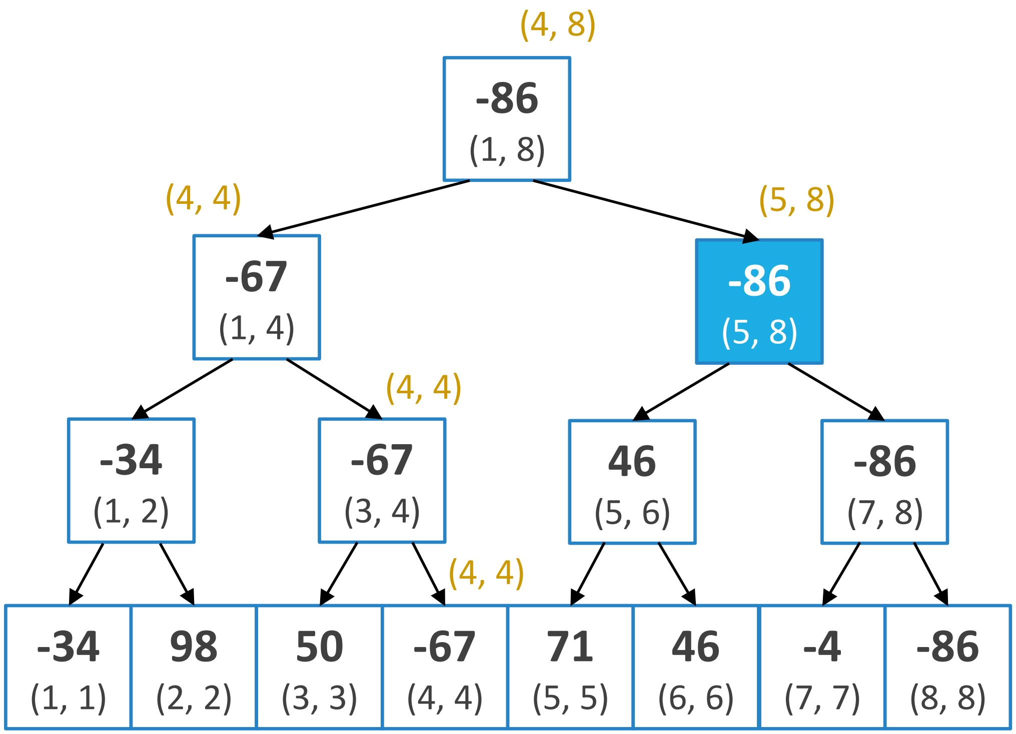
En cambio el hijo izquierdo no, así que le toca preguntarle a sus hijos.

Su hijo izquierdo no maneja ninguno de los valores que necesita, así que solo le pregunta al derecho.



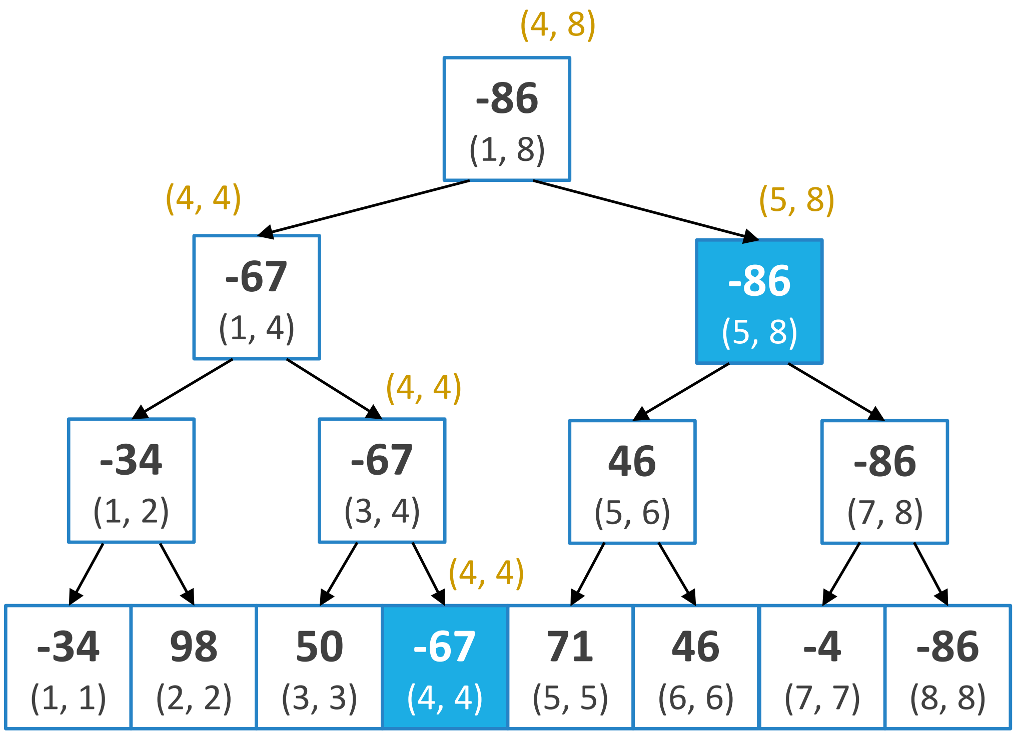
Segment Tree – Consulta

Este hijo, a su vez, hace lo mismo.



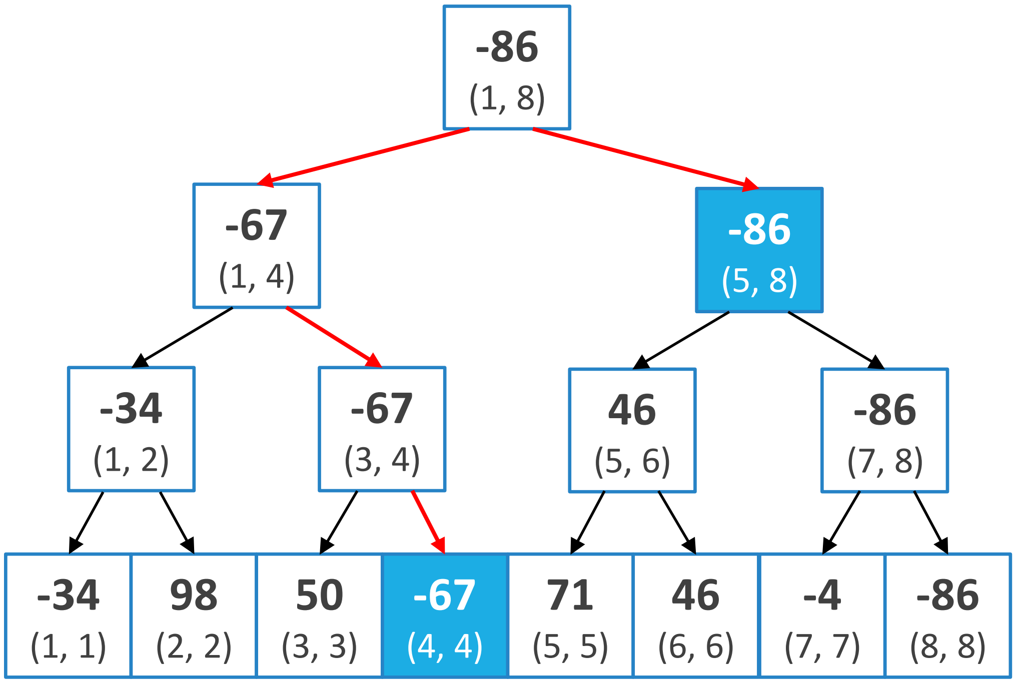
Segment Tree – Consulta

El nodo de la posición 4 puede responder la pregunta.



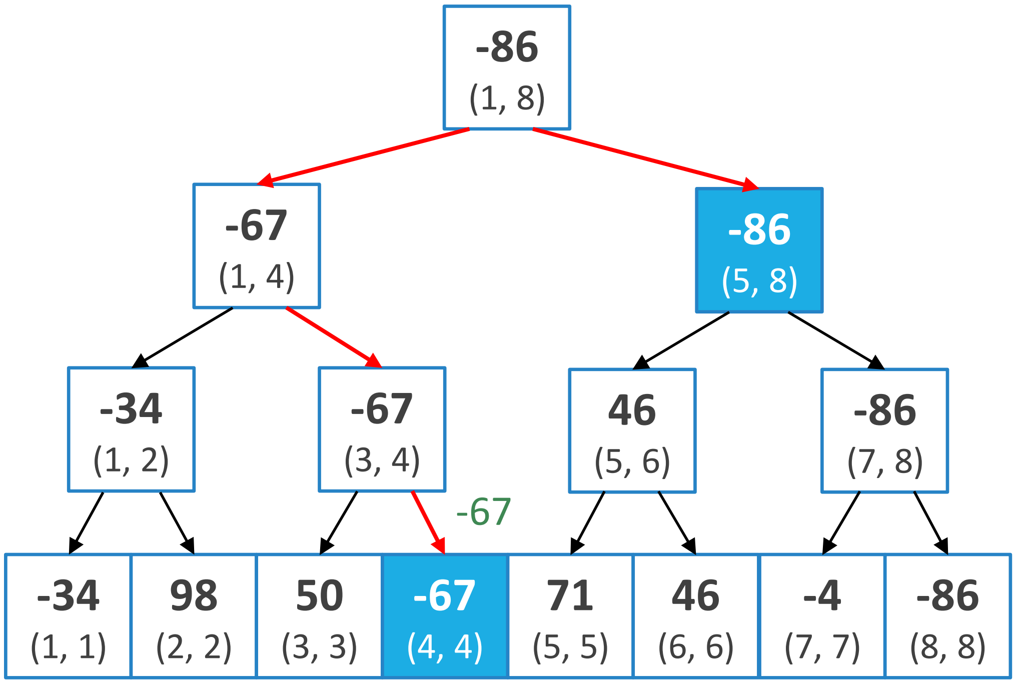
Segment Tree – Consulta

Ahora nos toca comparar todos estos valores.



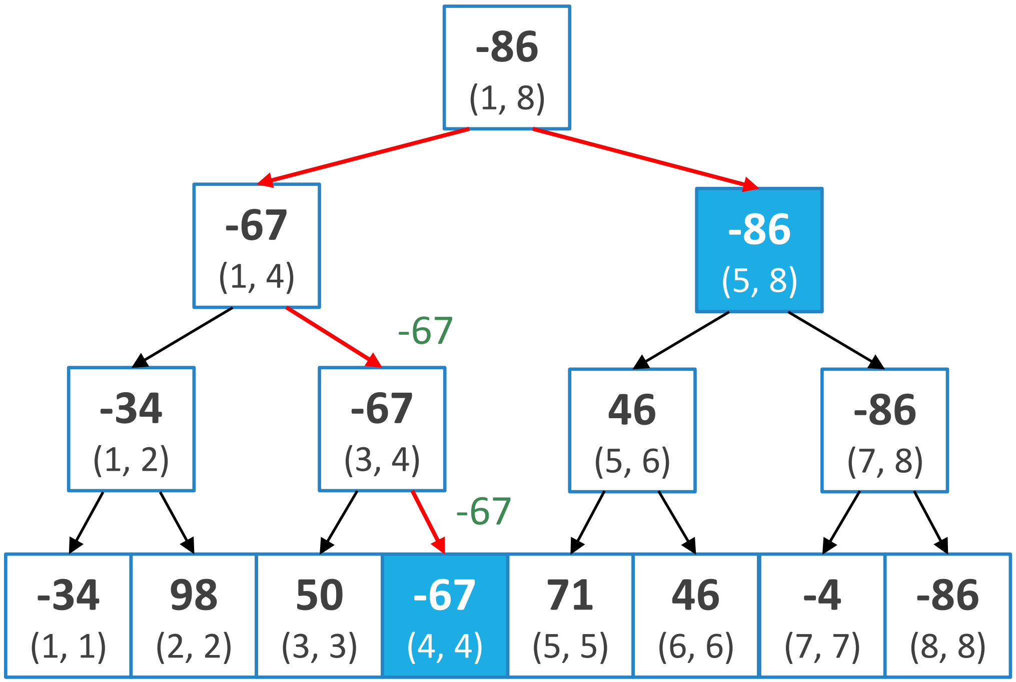
Segment Tree – Consulta

El nodo (4,4) retorna -67.



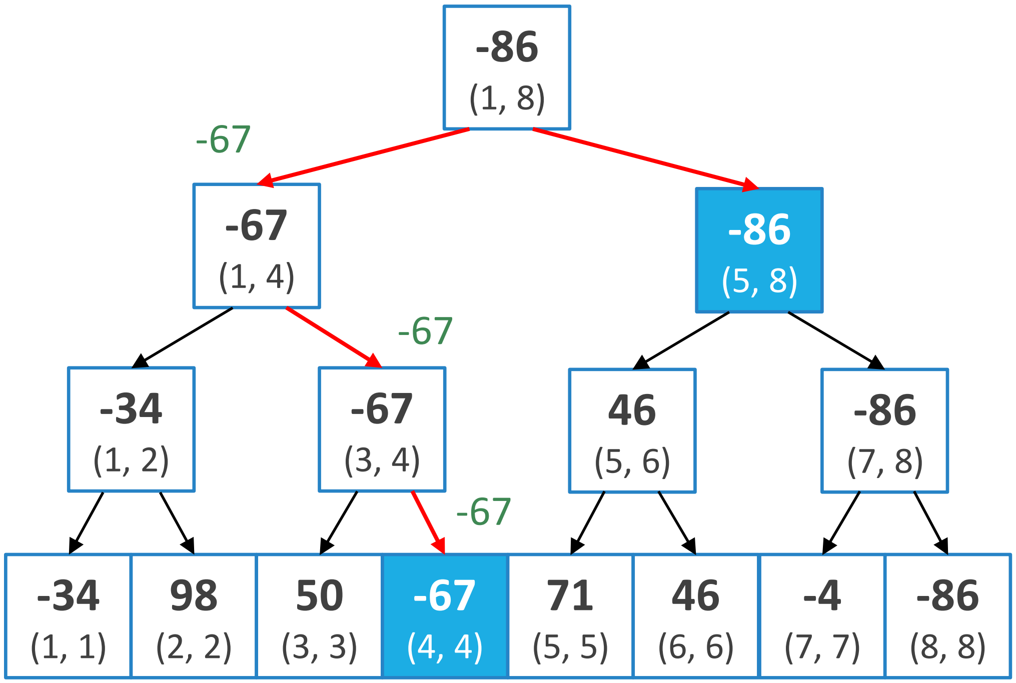
Segment Tree – Consulta

El nodo (3,4) recibe **nada** por la izquierda y -67 por la derecha, así que retorna -67.



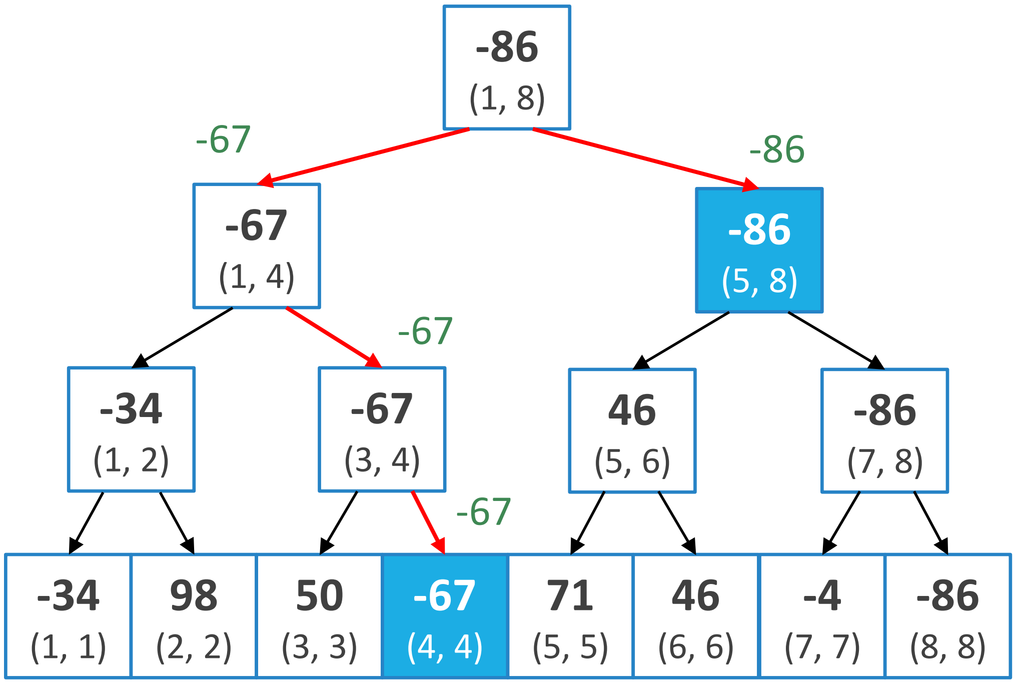
Segment Tree – Consulta

El nodo (1,4) recibe **nada** por la izquierda y -67 por la derecha, así que retorna -67.



Segment Tree – Consulta

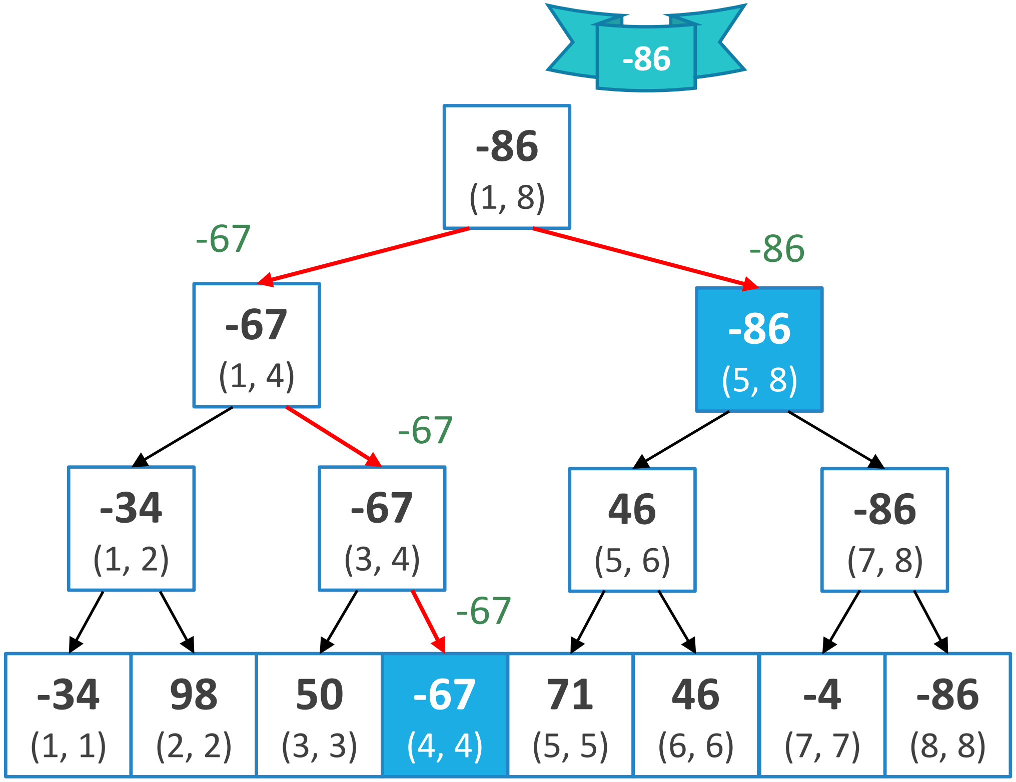
El nodo (5,8) retorna -86.



Segment Tree – Consulta

Finalmente, el nodo (1,8) recibe -67 por la izquierda, y -86 por la derecha.

El resultado es -86.



A esta consulta le llamamos *range minimum query.*

RMQ(***B***, *L*, *R*):

    if (*L*, *R*) = (***B***.***L***, ***B***.***R***):

        return ***A***.***value***

    else:

        $v_{left} = +\infty$, $v_{right} = +\infty$

        if *L* ≤ ***B***.***left***.***R***:

            v_{left} = RMQ(***B***.***left***, *L*, ***B***.***left***.***R***)

        if *R* ≥ ***B***.***right***.***L***:

            v_{right} = RMQ(***B***.***right***, ***B***.***right***.***L***, *R*)

        return min(v_{left} , v_{right})

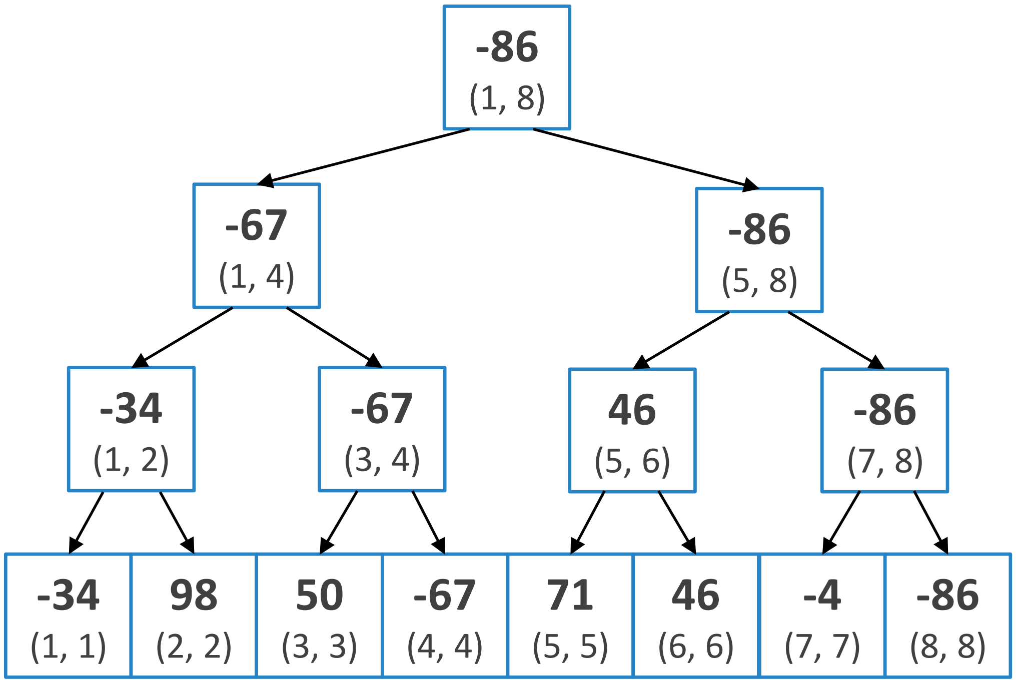
B es un nodo del Segment Tree, y en la llamada inicial es la raíz.
(L, R) es el rango en el cual queremos saber el mínimo.

Segment Tree – Consulta

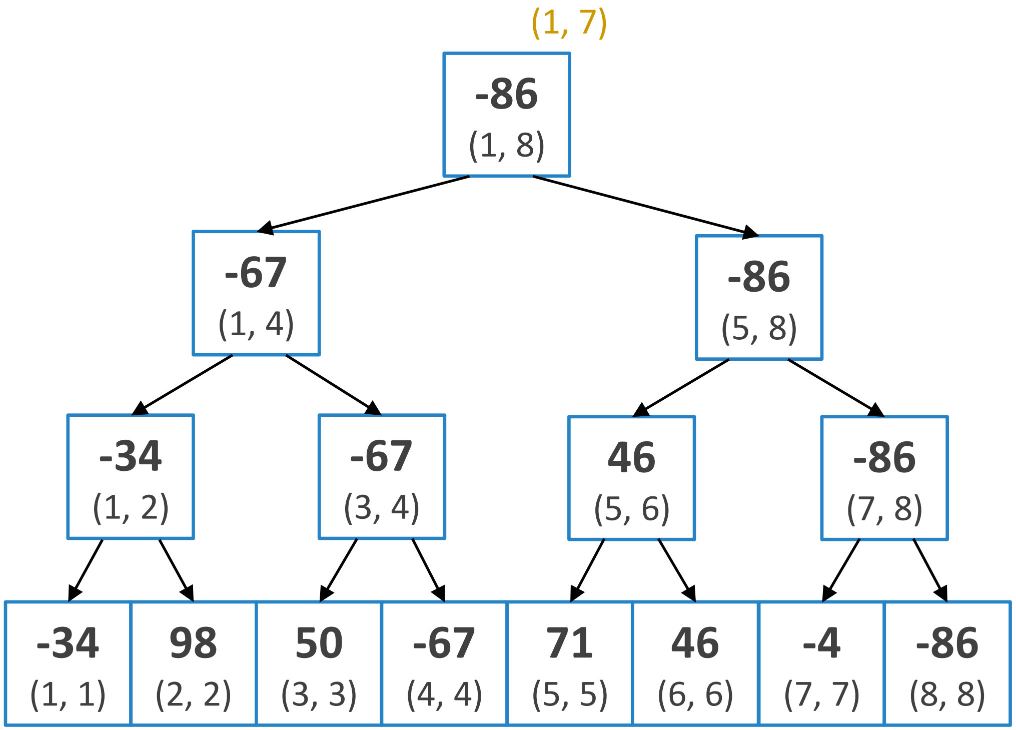
Veamos un segundo ejemplo.

Vamos a ver que pasa con el rango (1,7).

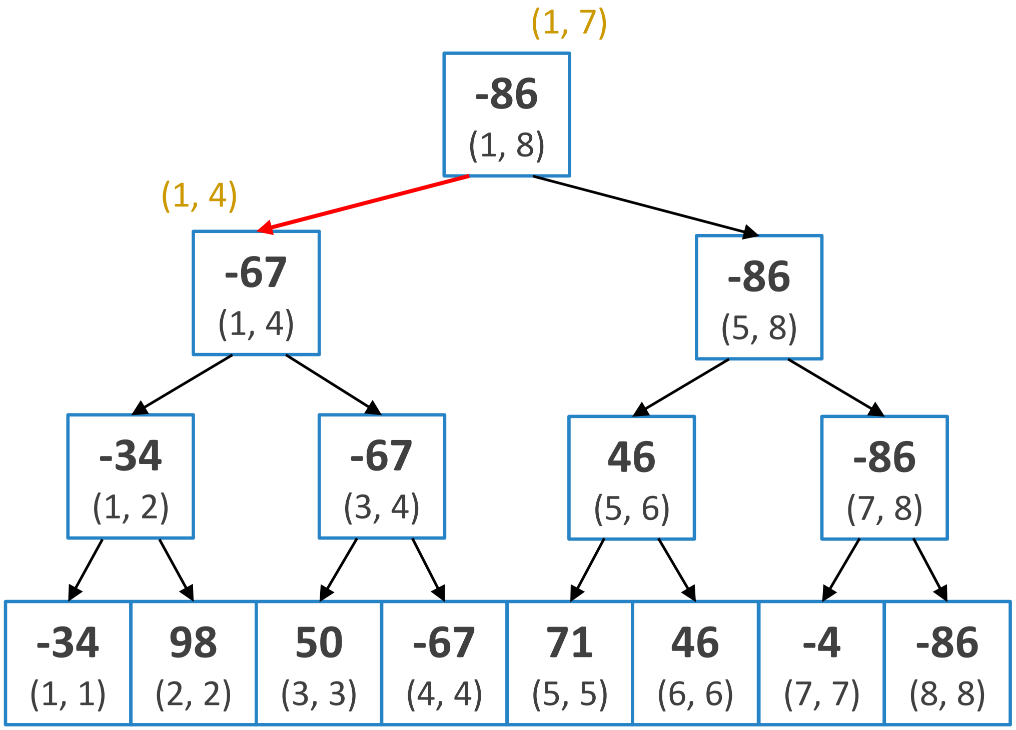
Ahora vamos a seguir el orden **real** que seguiría el programa.



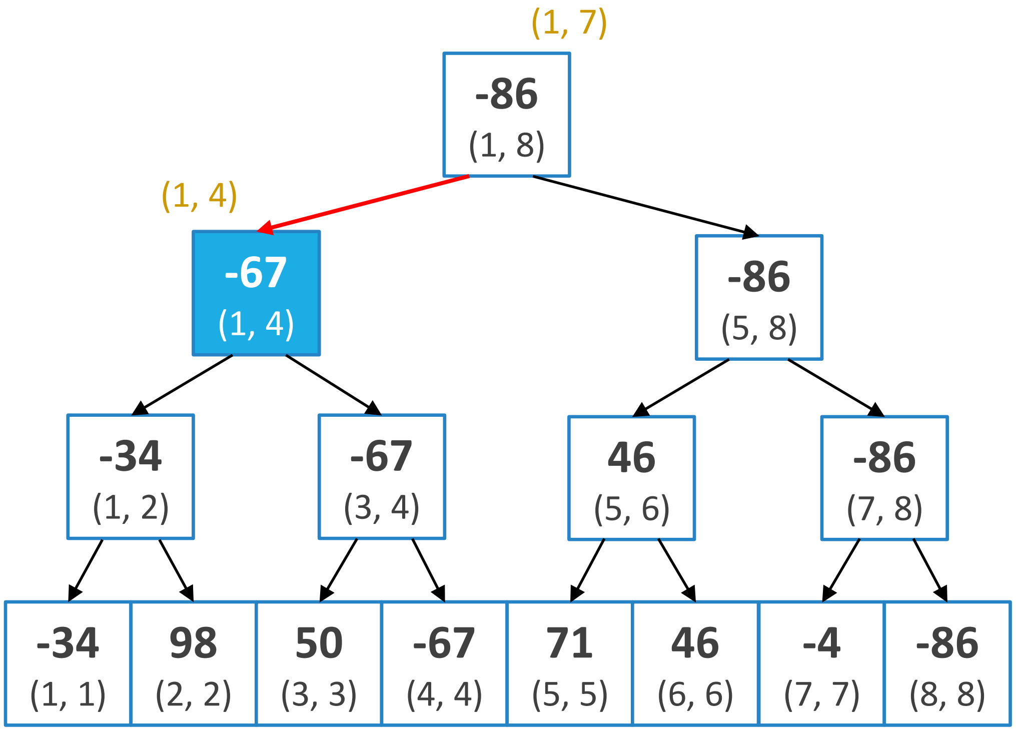
Segment Tree – Consulta



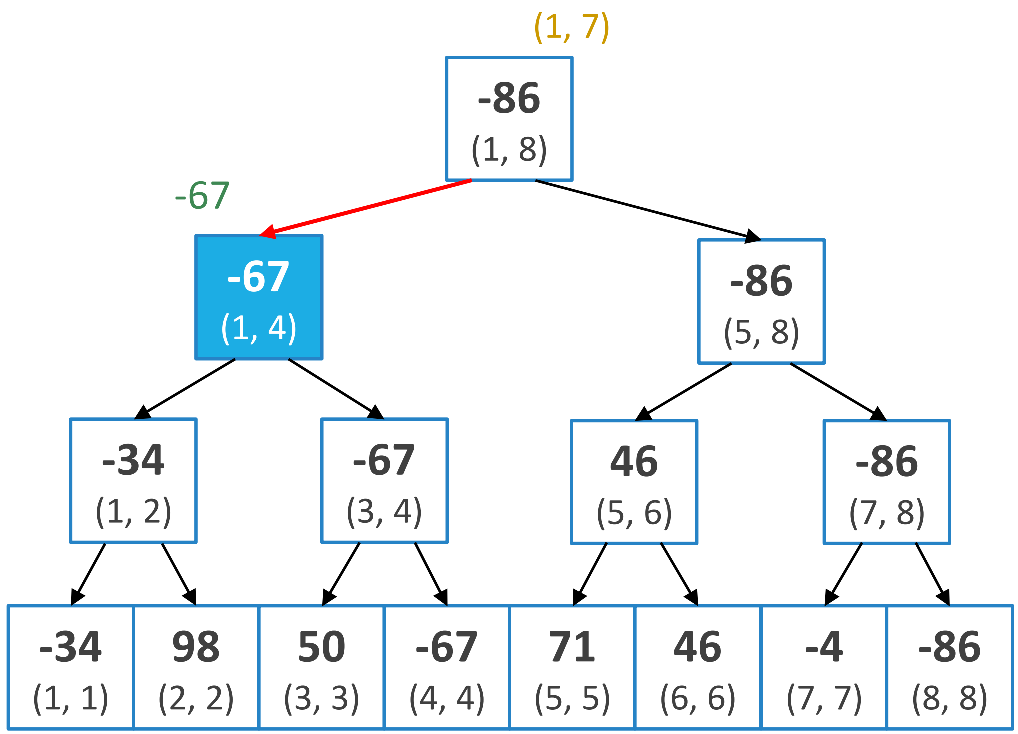
Segment Tree – Consulta



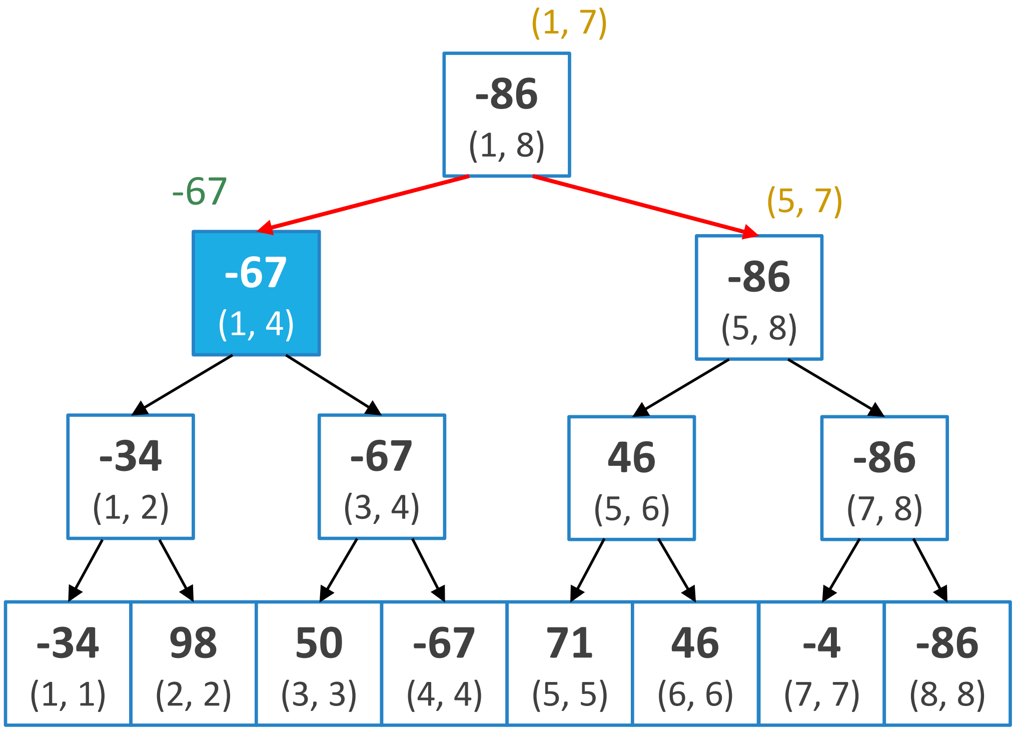
Segment Tree – Consulta



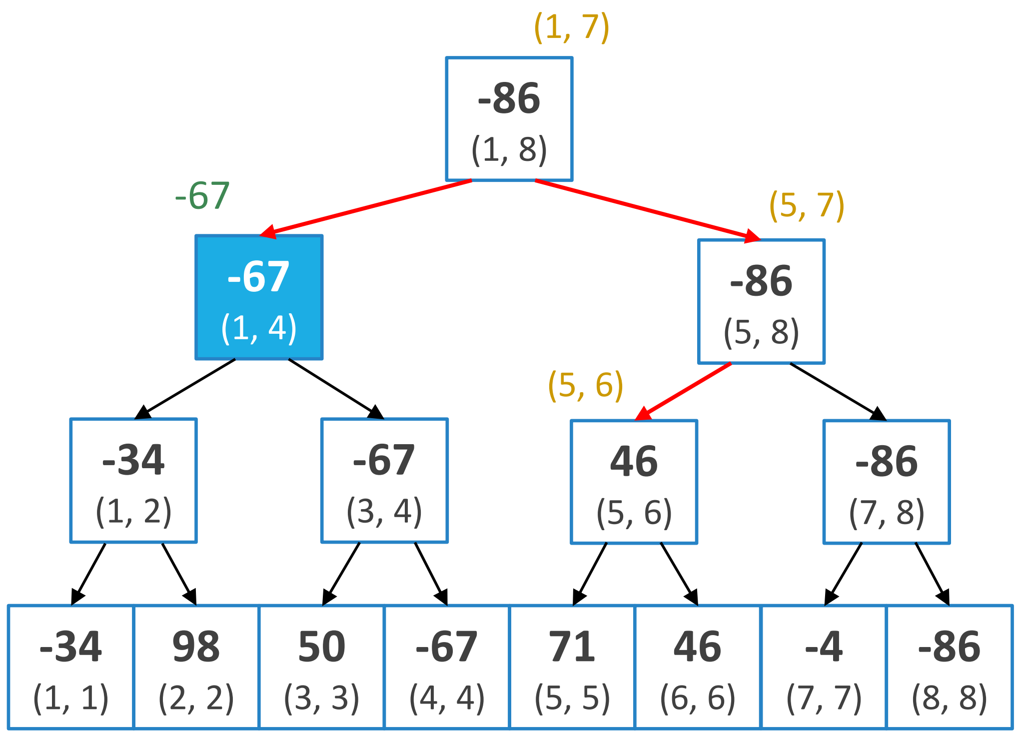
Segment Tree – Consulta



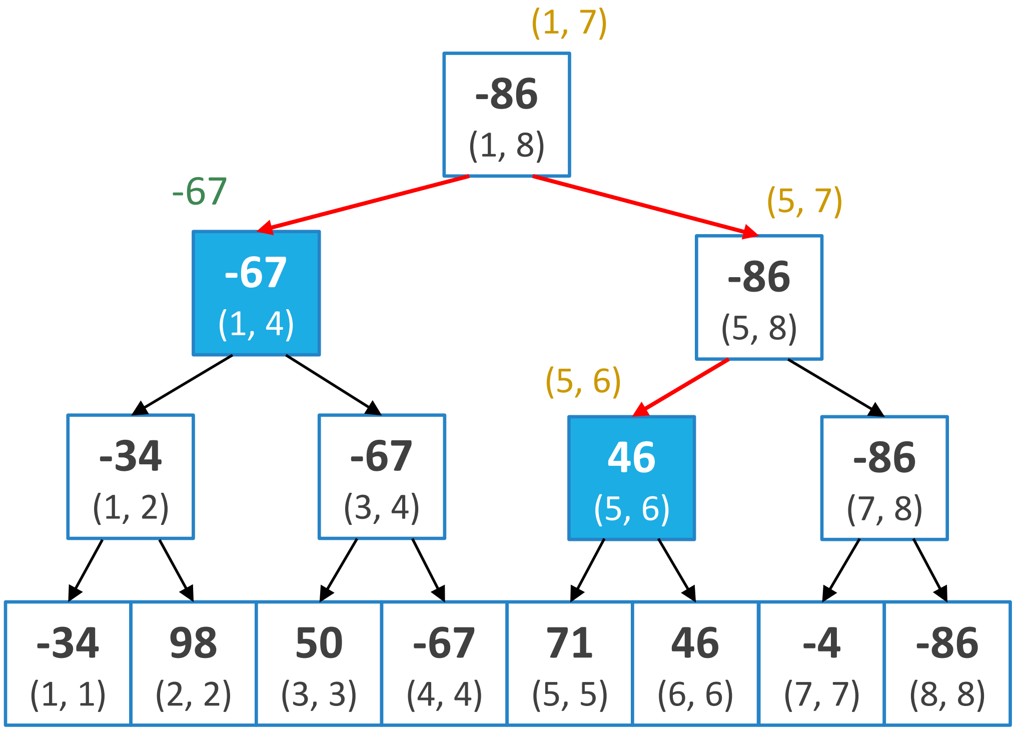
Segment Tree – Consulta



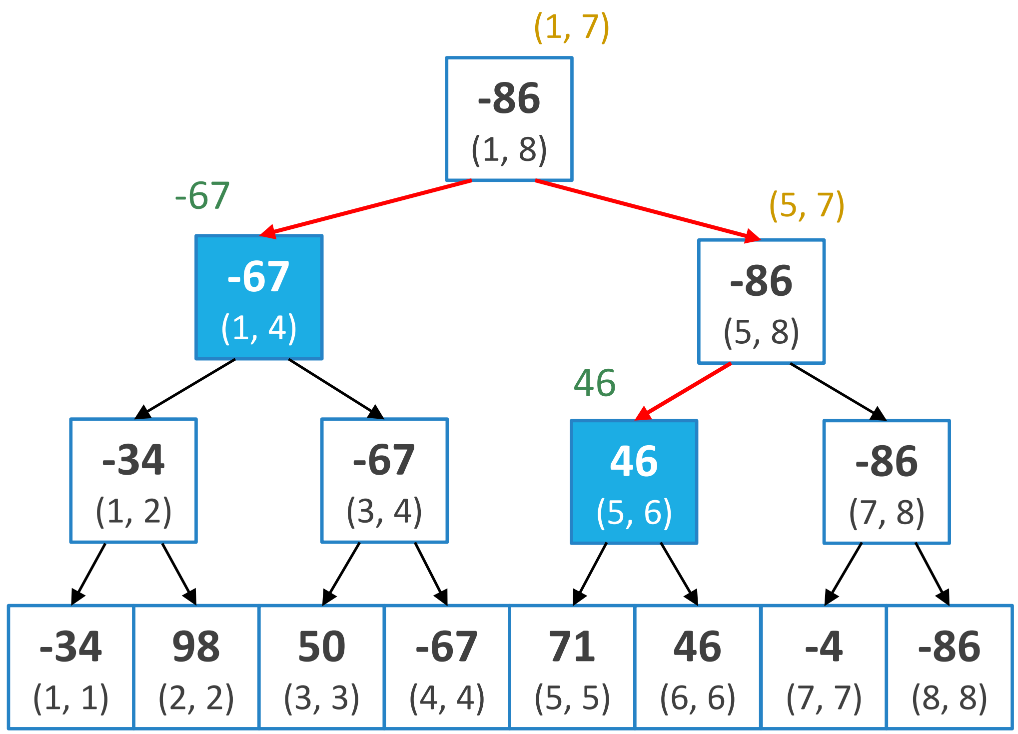
Segment Tree – Consulta



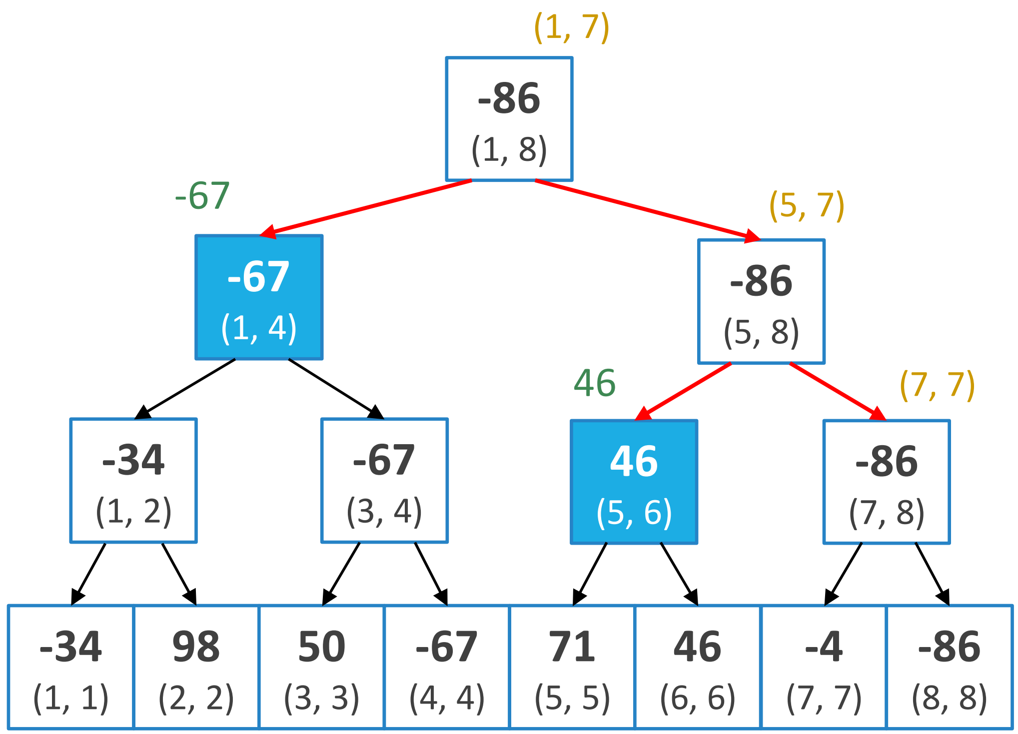
Segment Tree – Consulta



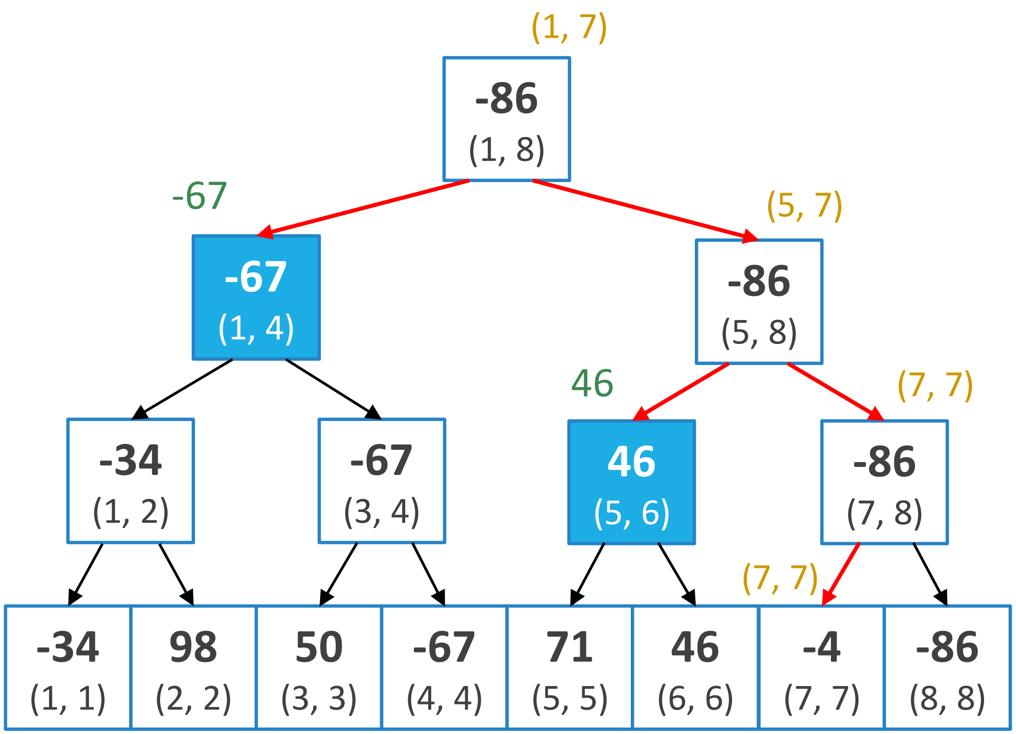
Segment Tree – Consulta



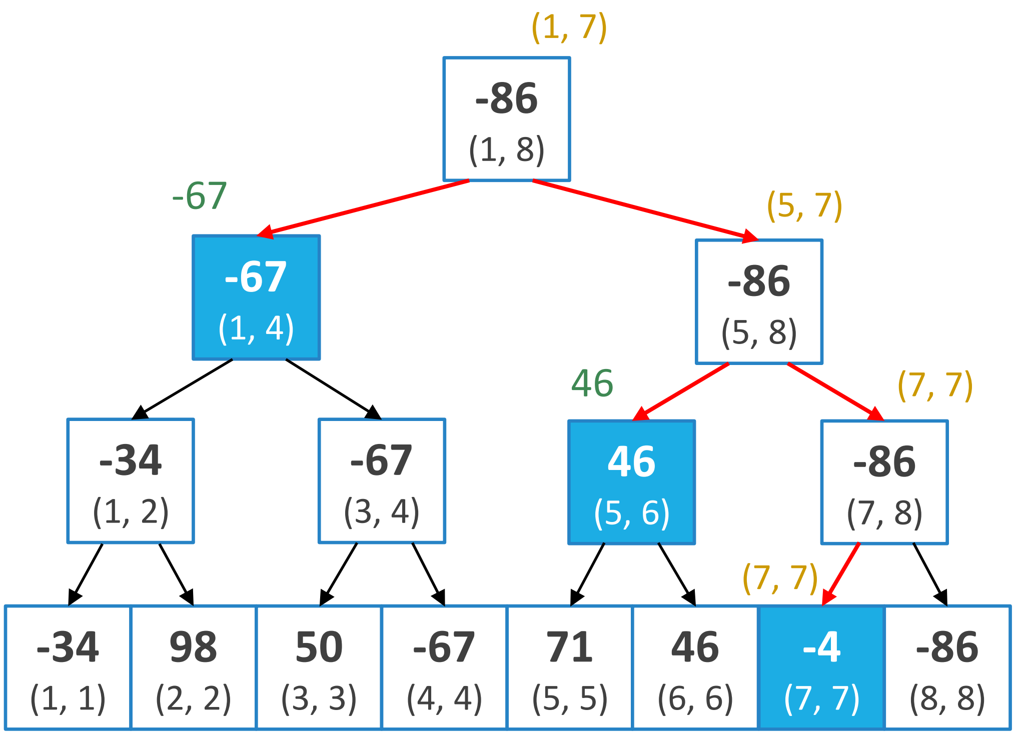
Segment Tree – Consulta



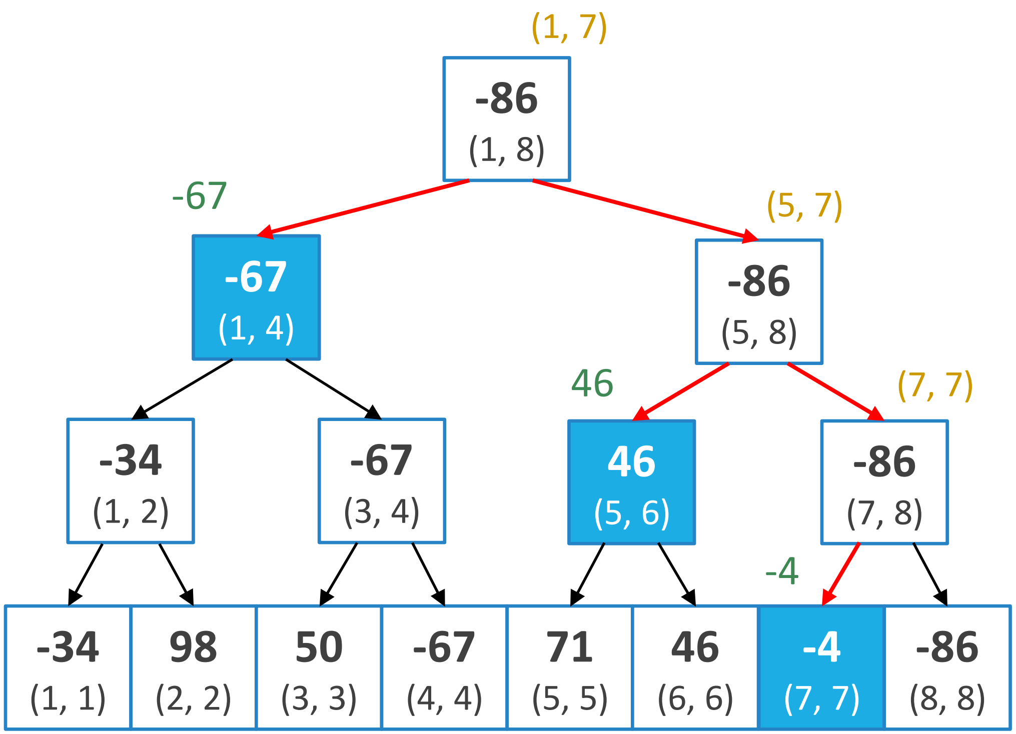
Segment Tree – Consulta



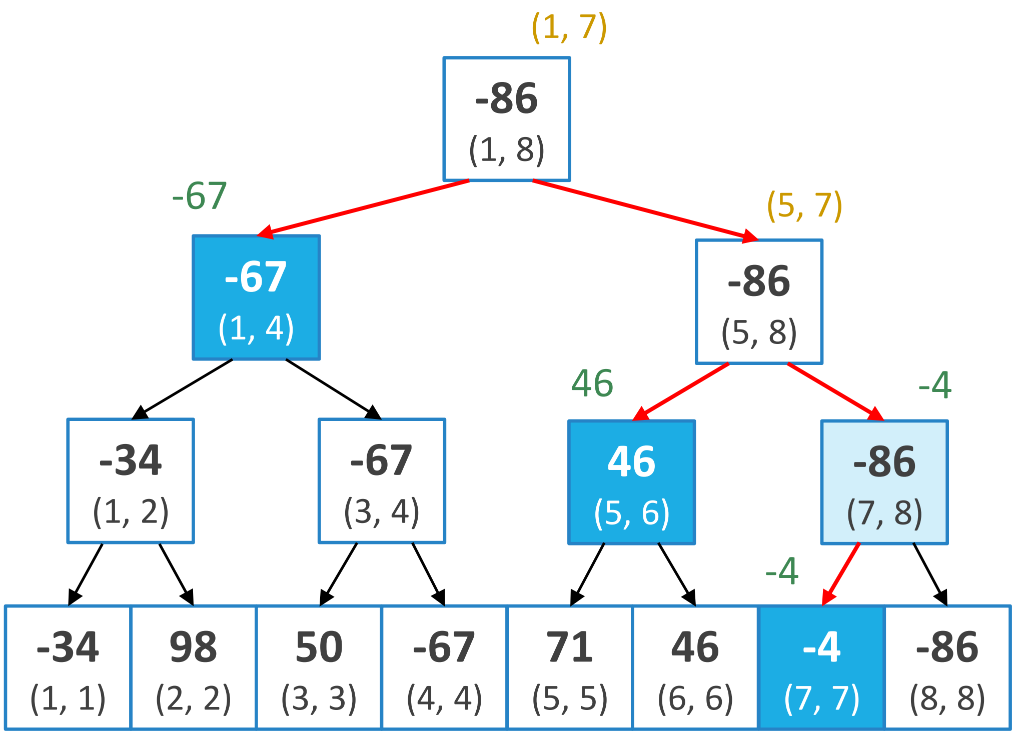
Segment Tree – Consulta



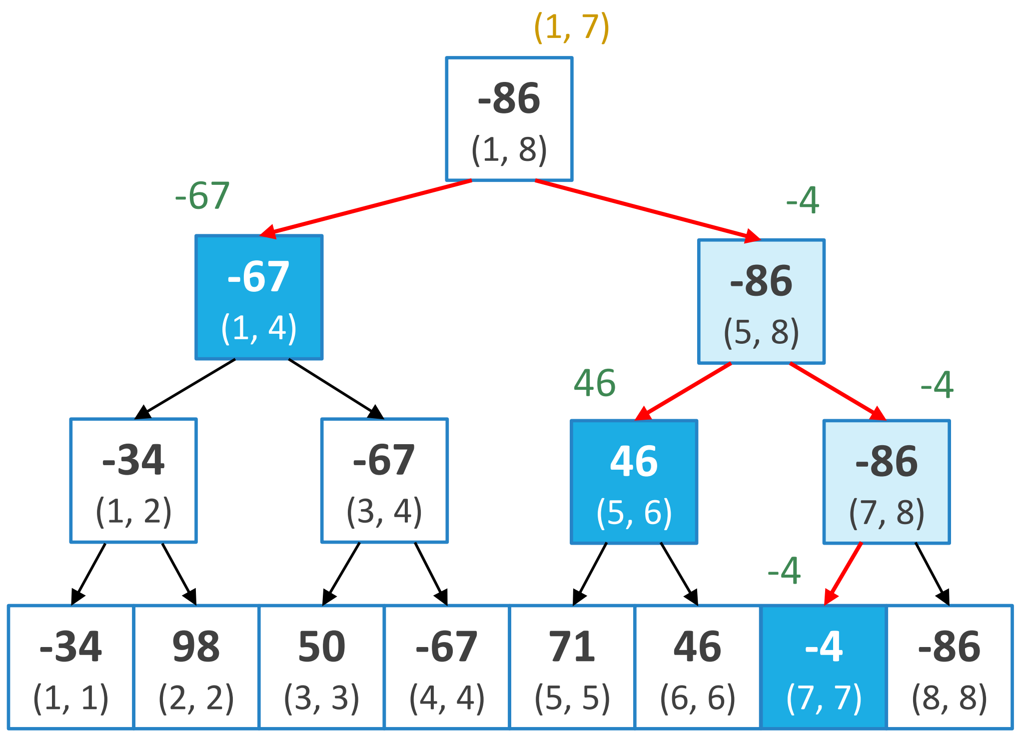
Segment Tree – Consulta



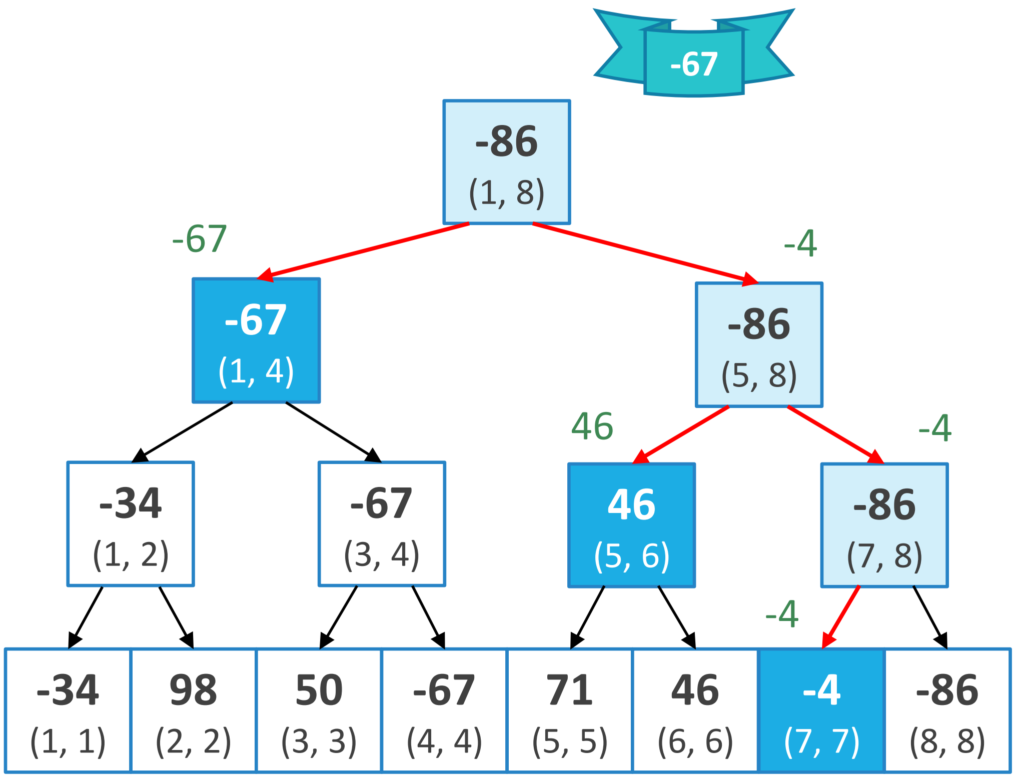
Segment Tree – Consulta



Segment Tree – Consulta



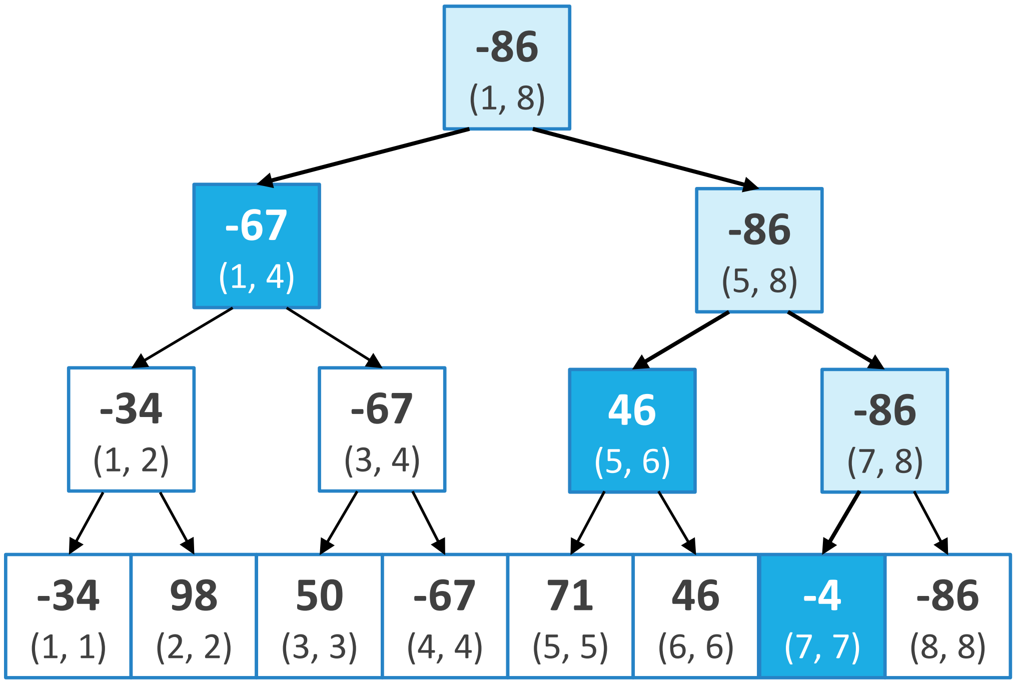
Segment Tree – Consulta



Segment Tree – Más análisis

Sabemos que en cada consulta solo revisamos los valores de O(log *n*) nodos.

Pero aún no podemos decir que la consulta completa toma siempre O(log *n*).

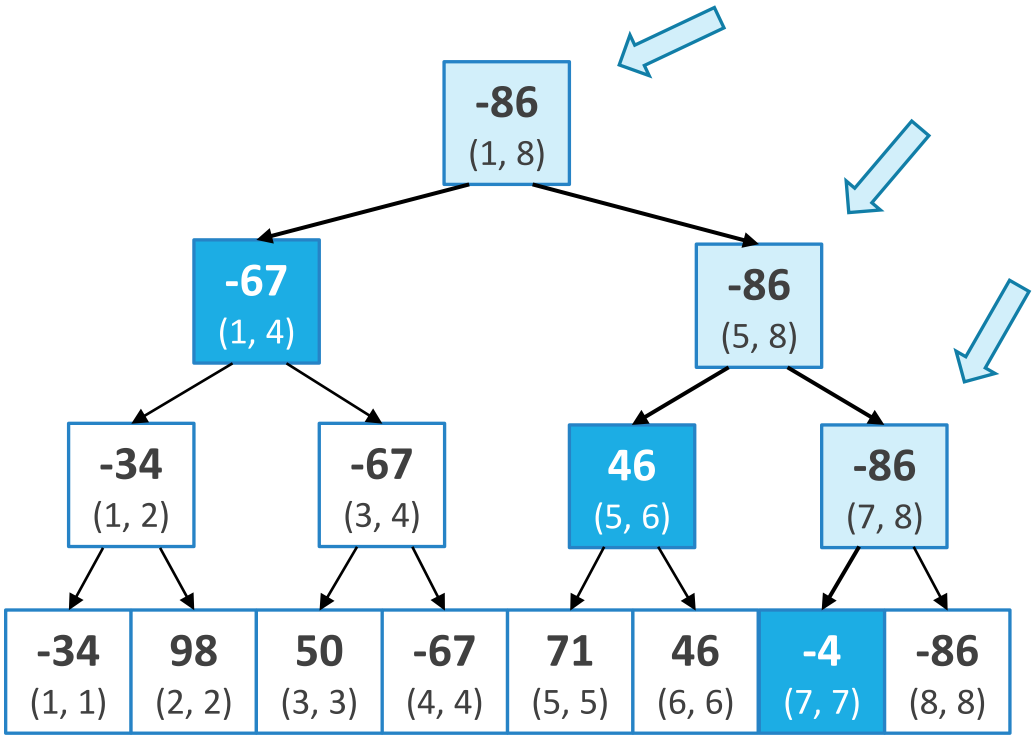


Segment Tree – Más análisis

Sabemos que en cada consulta solo revisamos los valores de O(log *n*) nodos.

Pero aún no podemos decir que la consulta completa toma siempre O(log *n*).

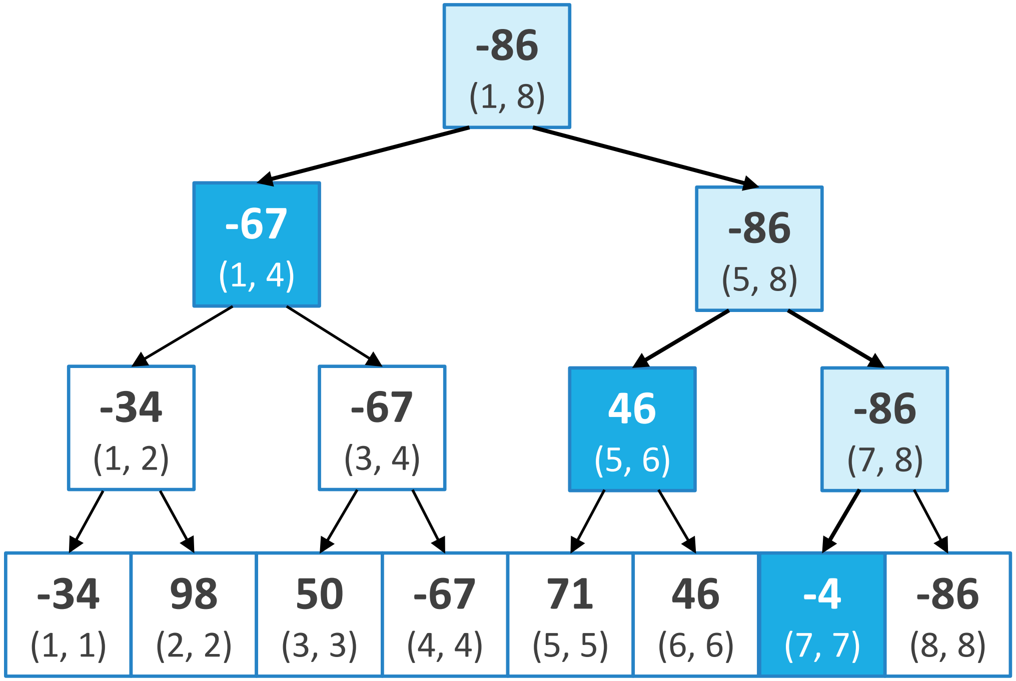
¿Qué hay de estos nodos?



Segment Tree – Análisis

Vamos a separar la consulta en nodos de *valor* y nodos de *búsqueda*.

Los nodos de valor son aquellos en que revisamos su **valor**, y los nodos de búsqueda son los que no.



Segment Tree – Más análisis

La gran pregunta es:

¿Cuántos nodos de búsqueda vemos en el peor caso?

Vamos a argumentar que en cada nivel no podemos ver muchos nodos de búsqueda.

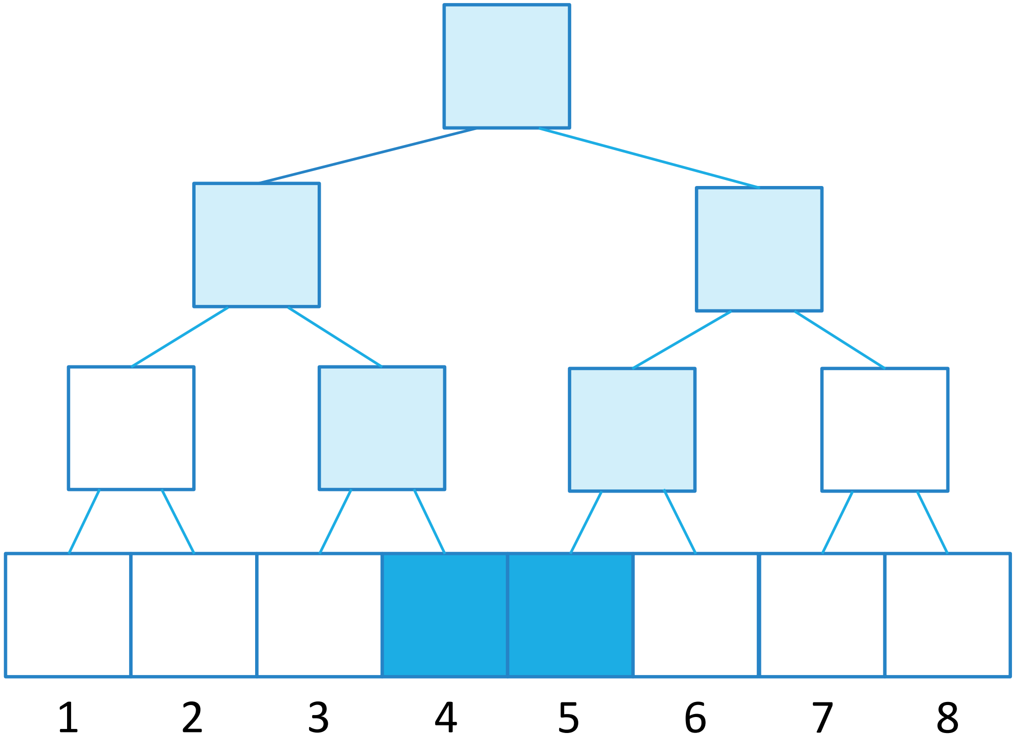
Segment Tree – Análisis

¿Podemos tener **dos** nodos de búsqueda en el mismo nivel?

Segment Tree – Análisis

¿Podemos tener **dos** nodos de búsqueda en el mismo nivel?

Perfectamente.



Segment Tree – Análisis

¿Podemos tener **tres**?

Segment Tree – Análisis

¿Podemos tener **tres**?

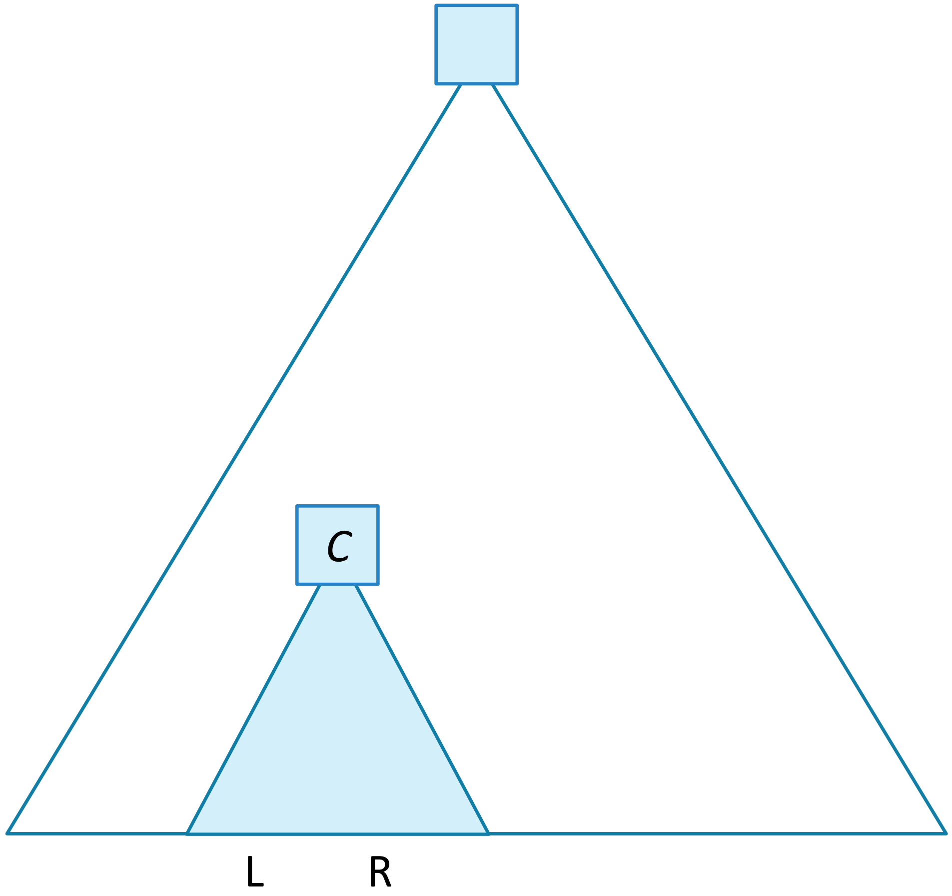
Acá la respuesta es no.

Primero veamos cómo es que se ve una consulta cualquiera.

Segment Tree – Análisis

Pensemos en el nodo más profundo de la consulta cuyo rango contiene a (L, R).

¿Cómo se ve el camino que va de la raíz hacia él?

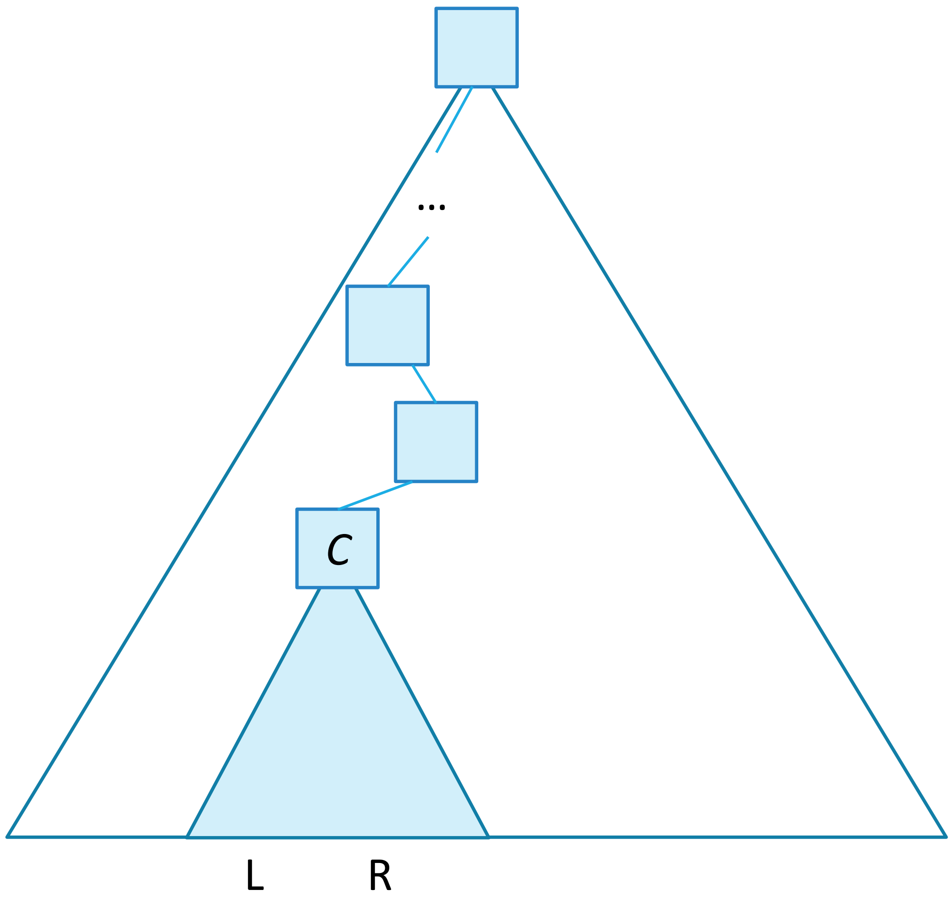


Segment Tree – Análisis

Pensemos en el nodo más profundo de la consulta cuyo rango contiene a (L, R).

¿Cómo se ve el camino que va de la raíz hacia él?

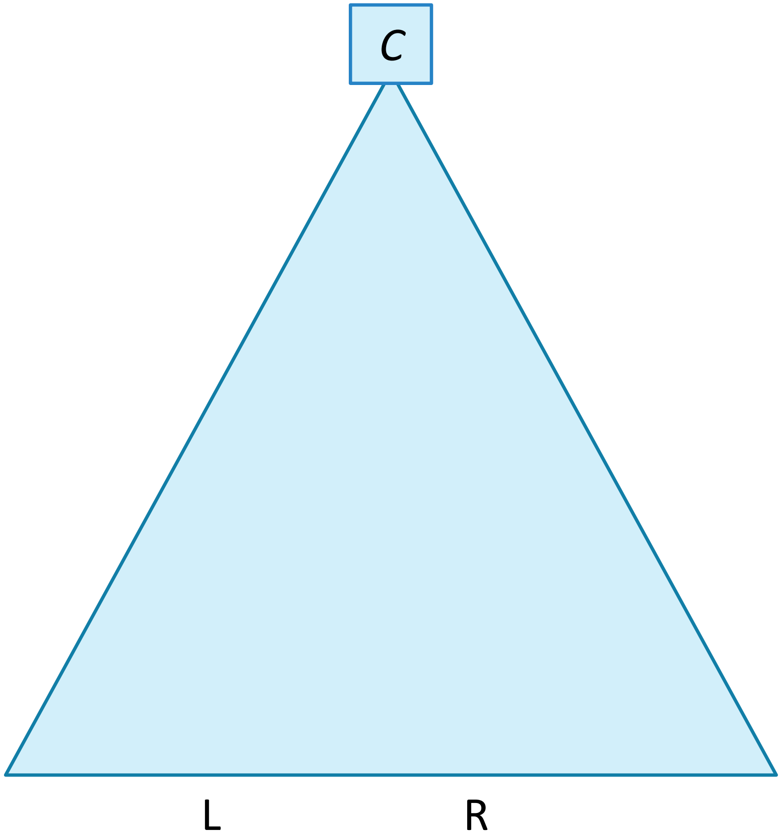
¡Cada nodo solo llama a uno de sus hijos!



Segment Tree – Análisis

Pensemos ahora en el árbol que sale de este nodo.

Tenemos dos opciones.

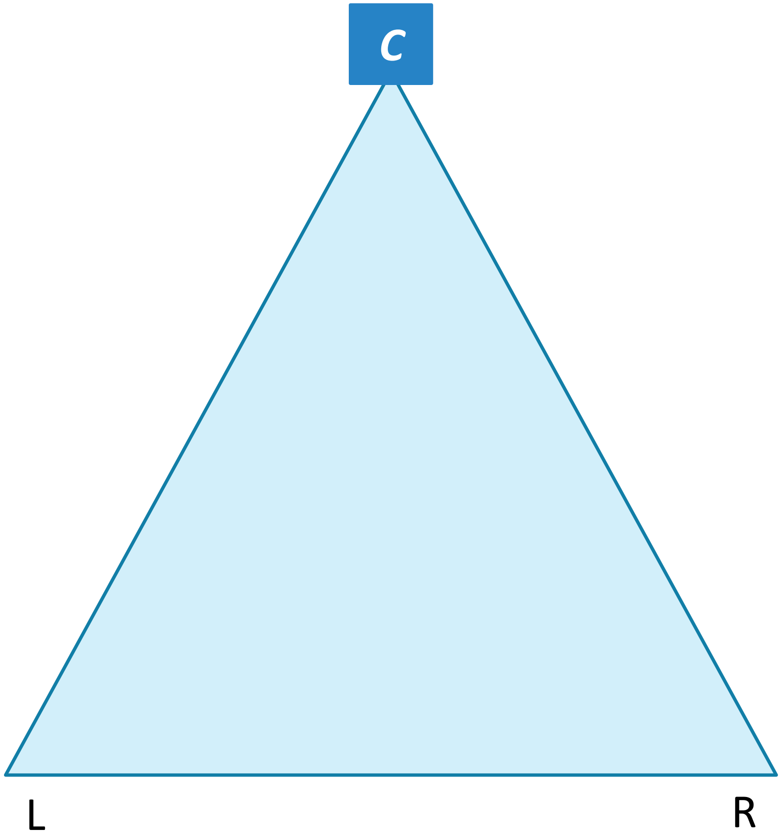


Segment Tree – Análisis

La primera es que el nodo corresponda exactamente al rango completo.

En este caso ya no hay más nodos de búsqueda.

Concluimos que efectivamente, no hay más de dos por nivel.

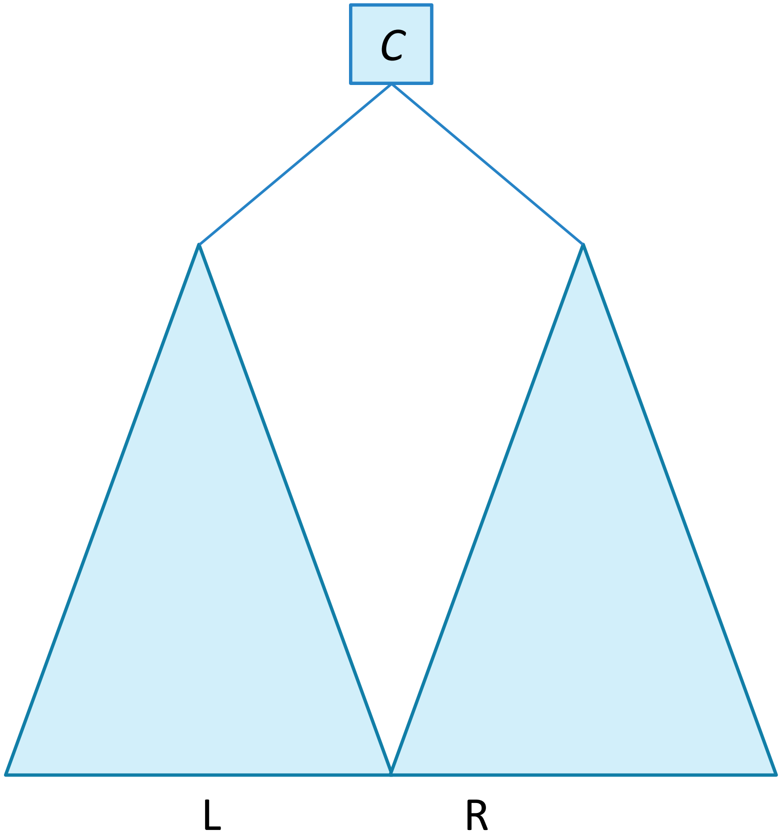


Segment Tree – Análisis

La segunda es que no, así que el nodo *C* tiene que llamar a sus dos hijos.

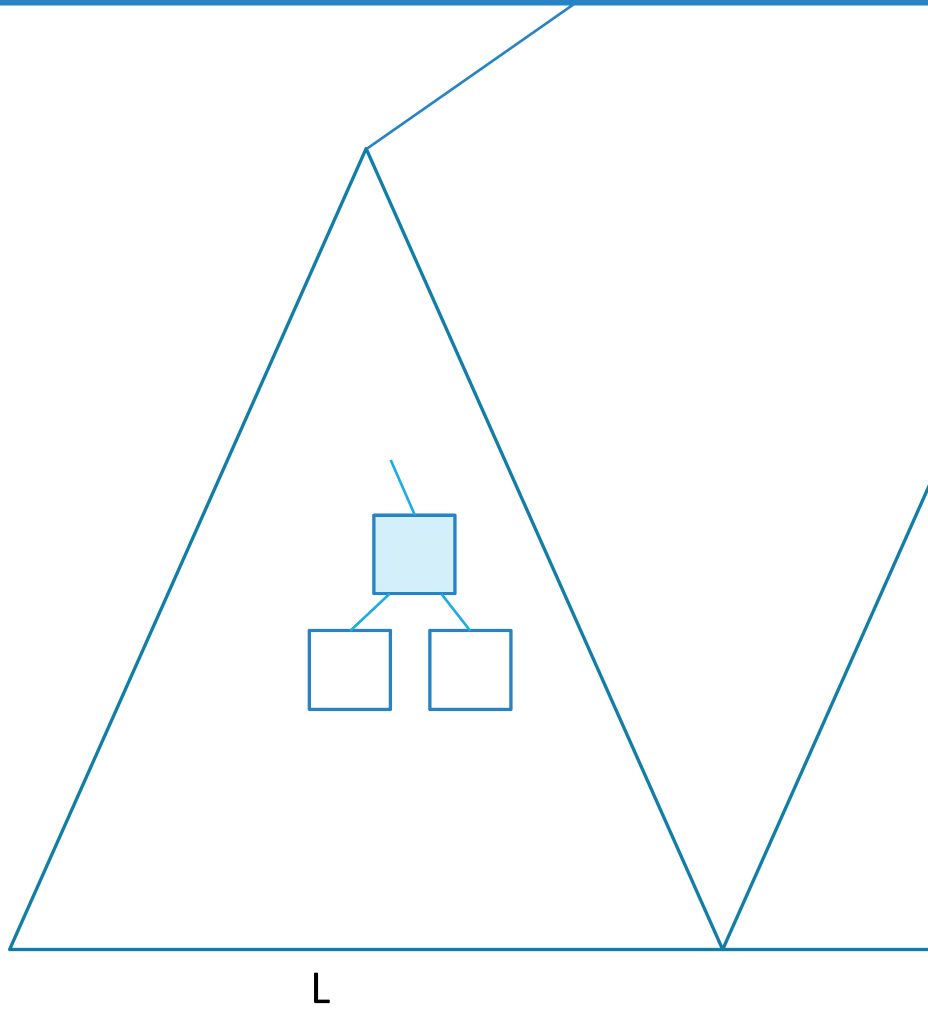
(¿Por qué a los dos?)

Analicemos las llamadas dentro del árbol izquierdo.



Segment Tree – Análisis

Si un nodo de **búsqueda** de acá **sí** llama al hizo izquierdo, ¿qué sabemos de su hijo derecho?

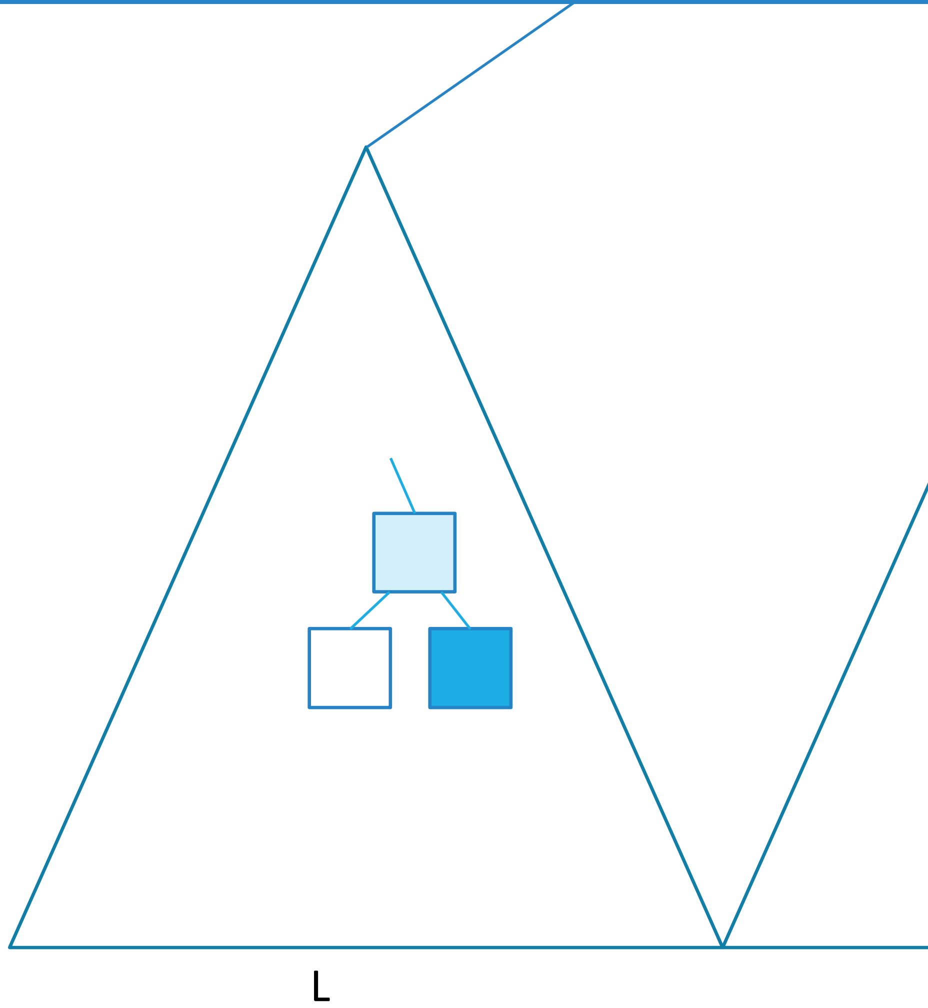


Segment Tree – Análisis

Si un nodo de **búsqueda** de acá **sí** llama al hizo izquierdo, ¿qué sabemos de su hijo derecho?

¡Necesariamente es un nodo de valor!

¿Y el hijo izquierdo?



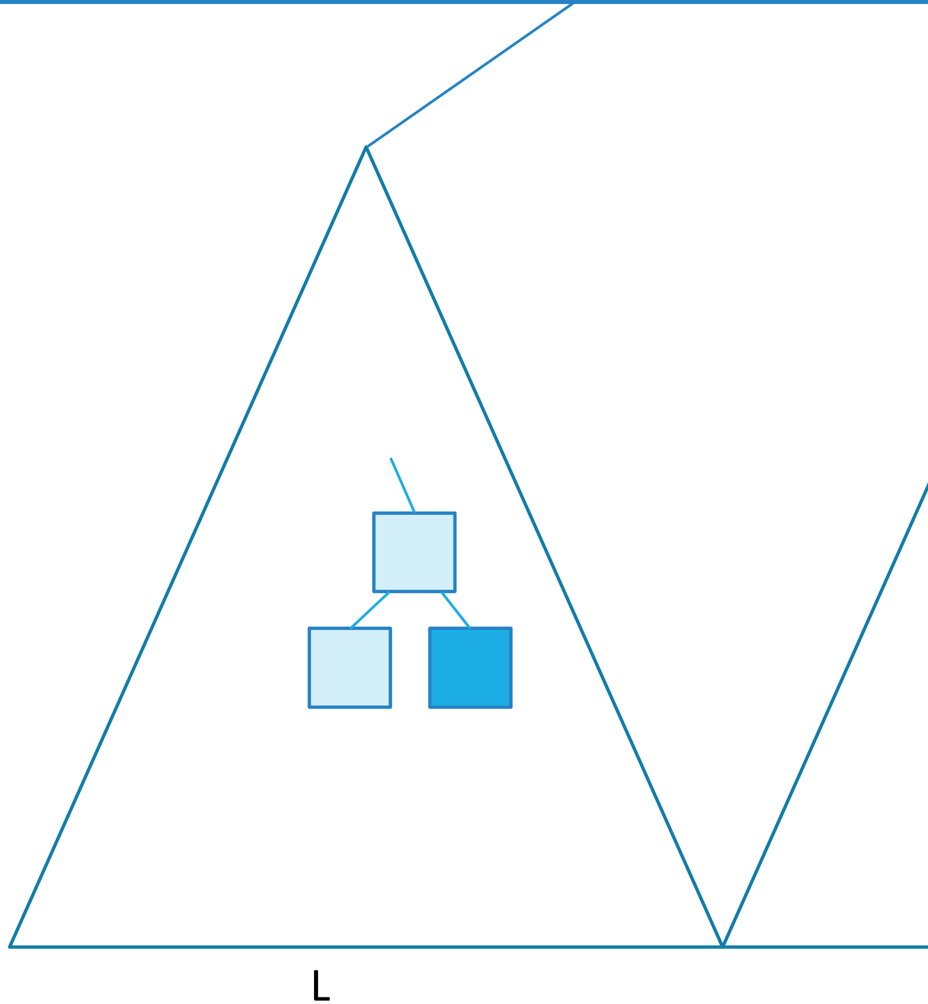
Segment Tree – Análisis

Si un nodo de **búsqueda** de acá **sí** llama al hizo izquierdo, ¿qué sabemos de su hijo derecho?

¡Necesariamente es un nodo de valor!

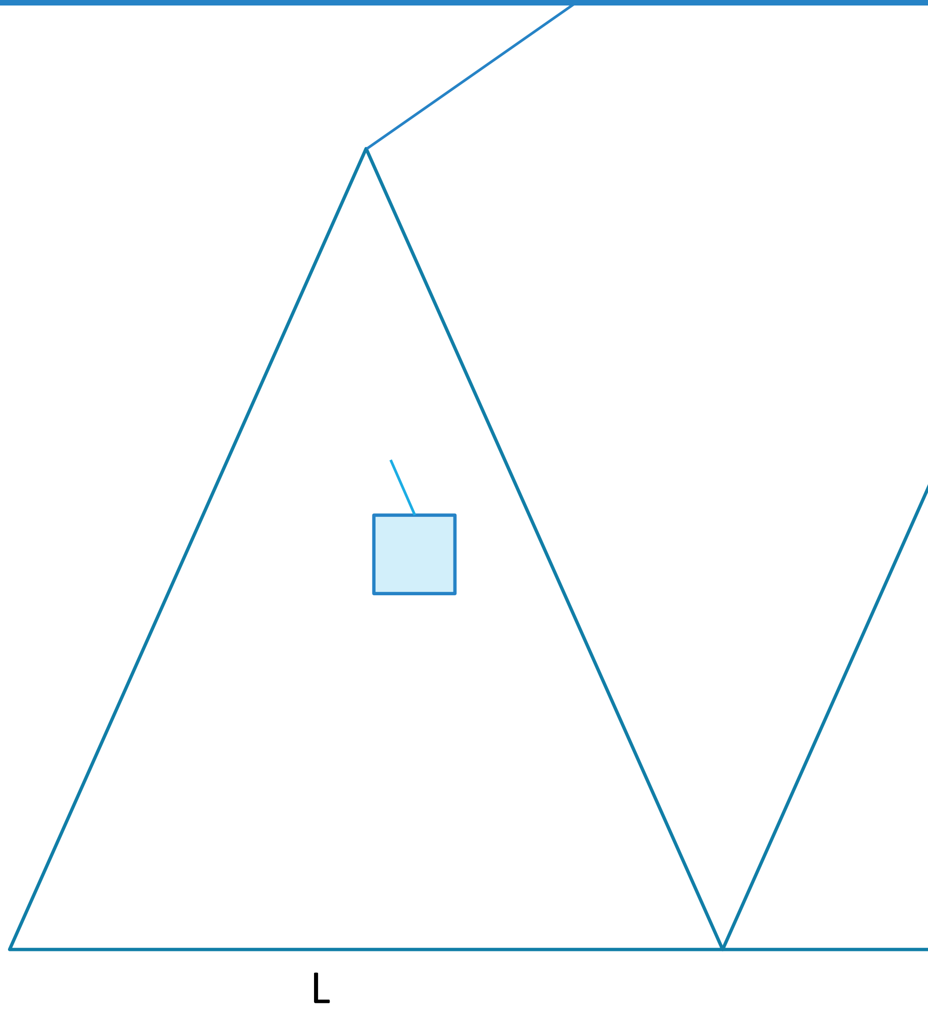
¿Y el hijo izquierdo?

Siempre es de búsqueda.



Segment Tree – Análisis

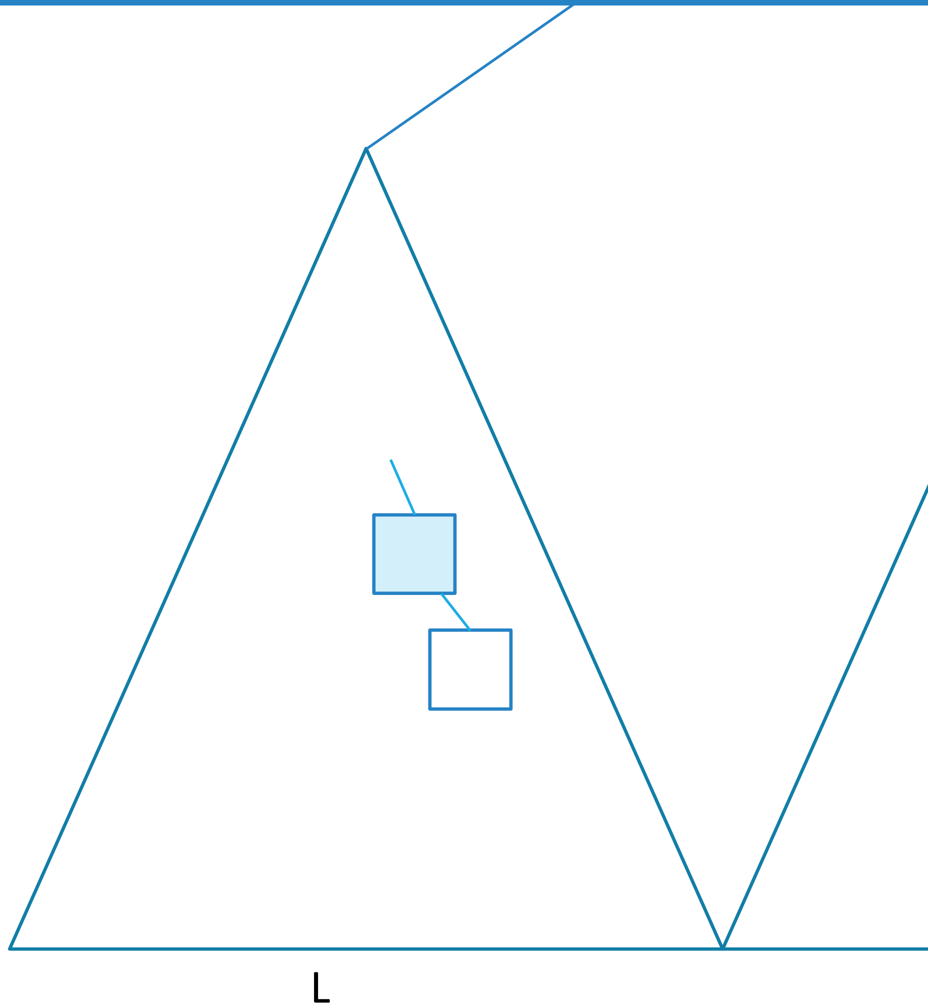
¿Qué otras opciones hay?



Segment Tree – Análisis

¿Qué otras opciones hay?

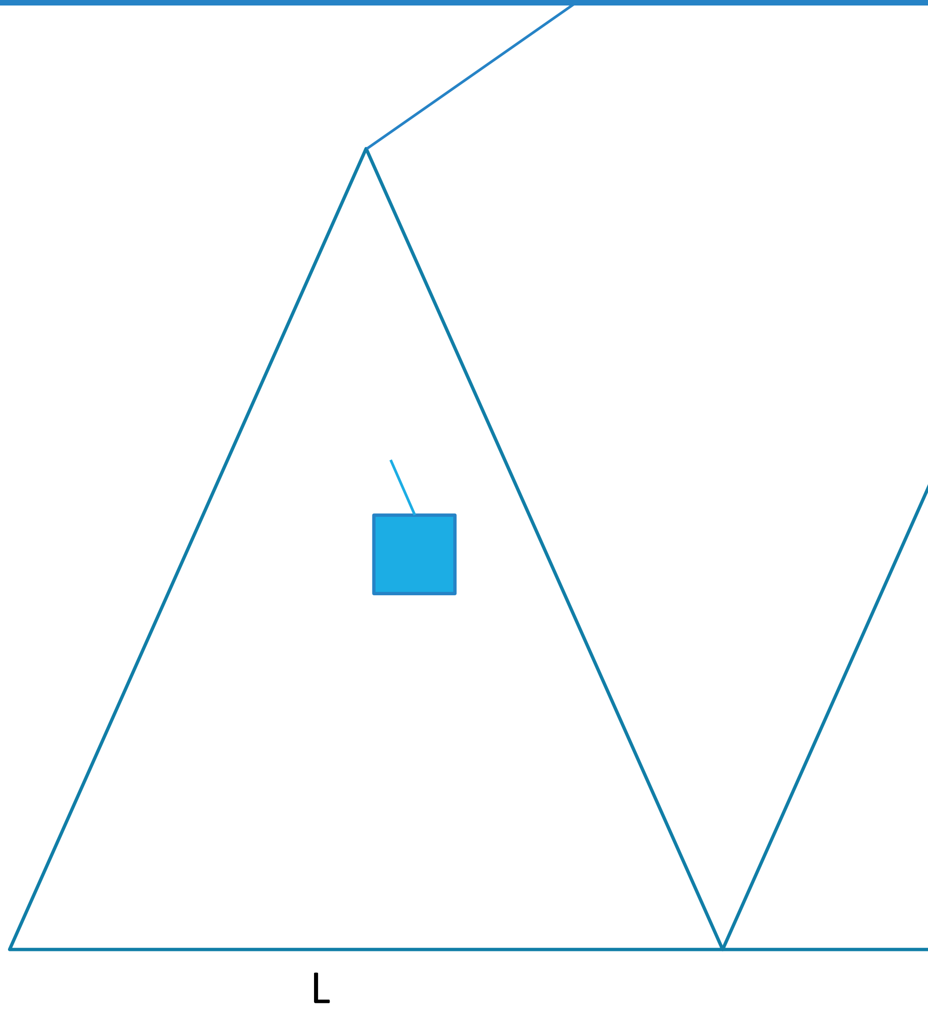
Que solo llame a su hijo derecho.



Segment Tree – Análisis

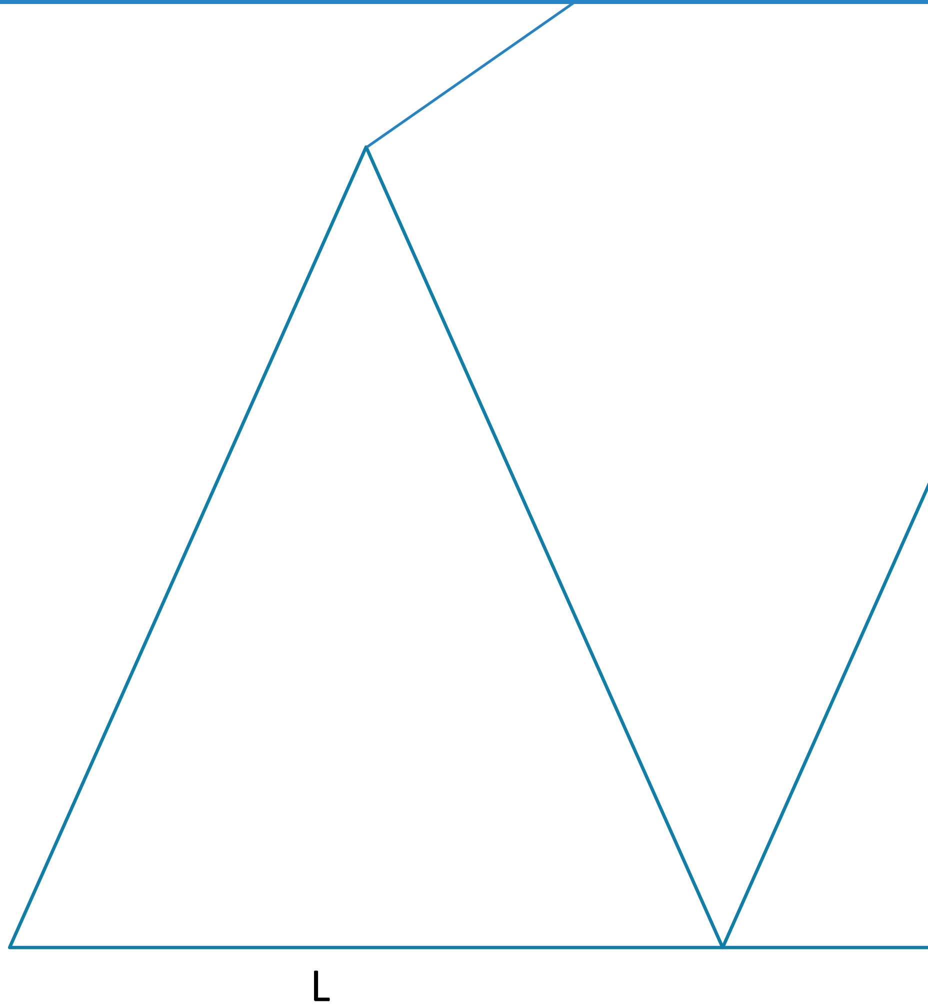
¿Qué otras opciones hay?

O bien, que sea un nodo de valor.



Segment Tree – Análisis

Viendo estos tres casos ya podemos caracterizar completamente la ruta que toma la consulta.

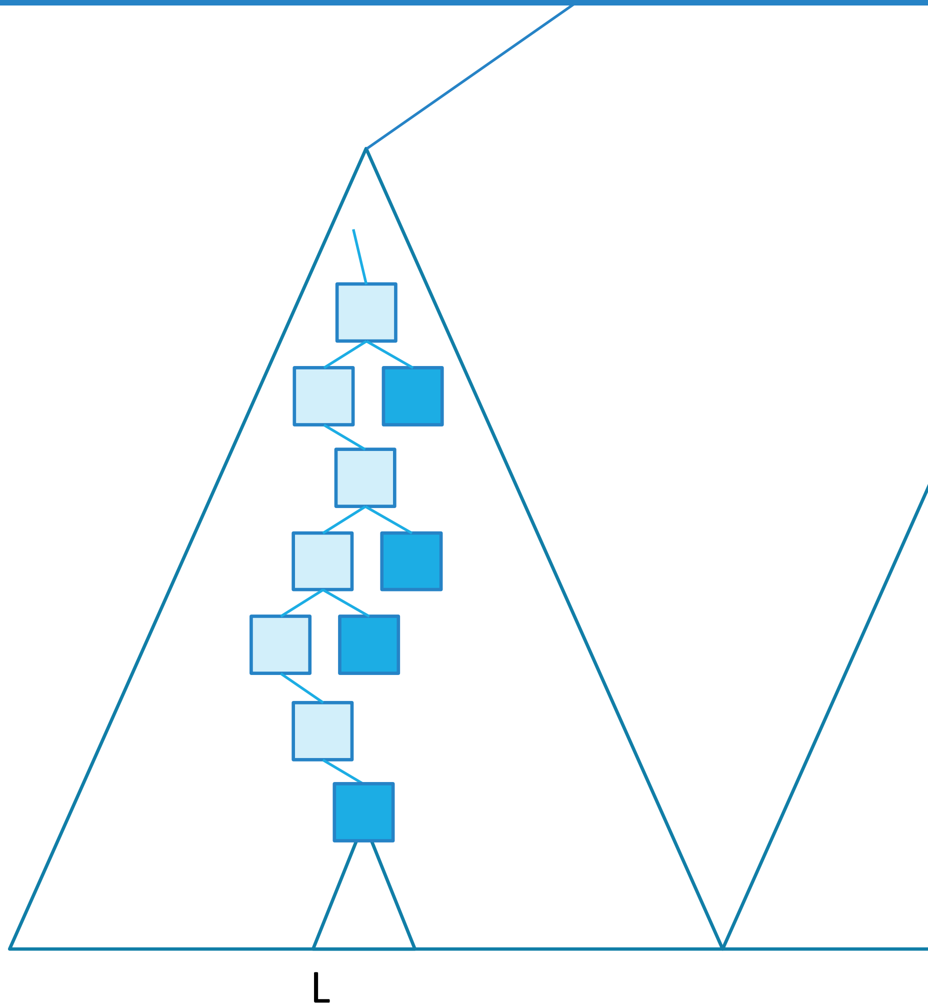


Segment Tree – Análisis

Viendo estos tres casos ya podemos caracterizar completamente la ruta que toma la consulta.

Se va a ver más o menos así.

Entonces, **en esta mitad del árbol,** ¿cuántos nodos de búsqueda va a haber por nivel?



Segment Tree – Análisis

Ahora podemos responder la pregunta

¿Cuántos nodos de búsqueda vemos en el peor caso?

Como son a lo más dos por nivel, la respuesta va a ser ~2*log(*n*).

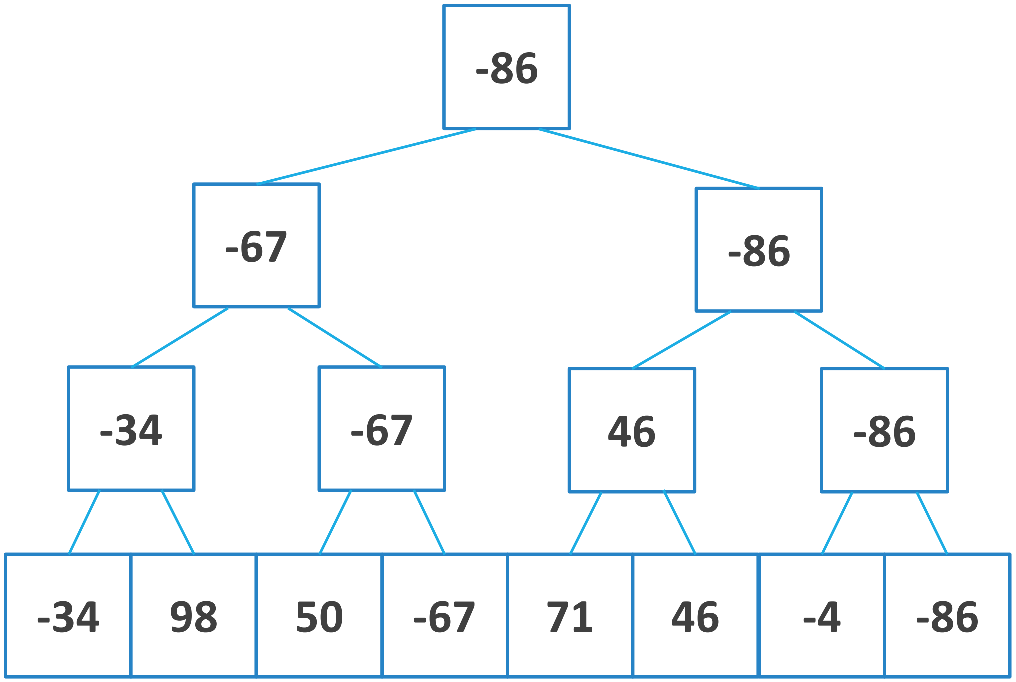
El último paso es notar que cada nodo hace una cantidad constante de operaciones.

Concluimos que la consulta toma tiempo total **O(log *n*)**.

Segment Tree – Otro caso de uso

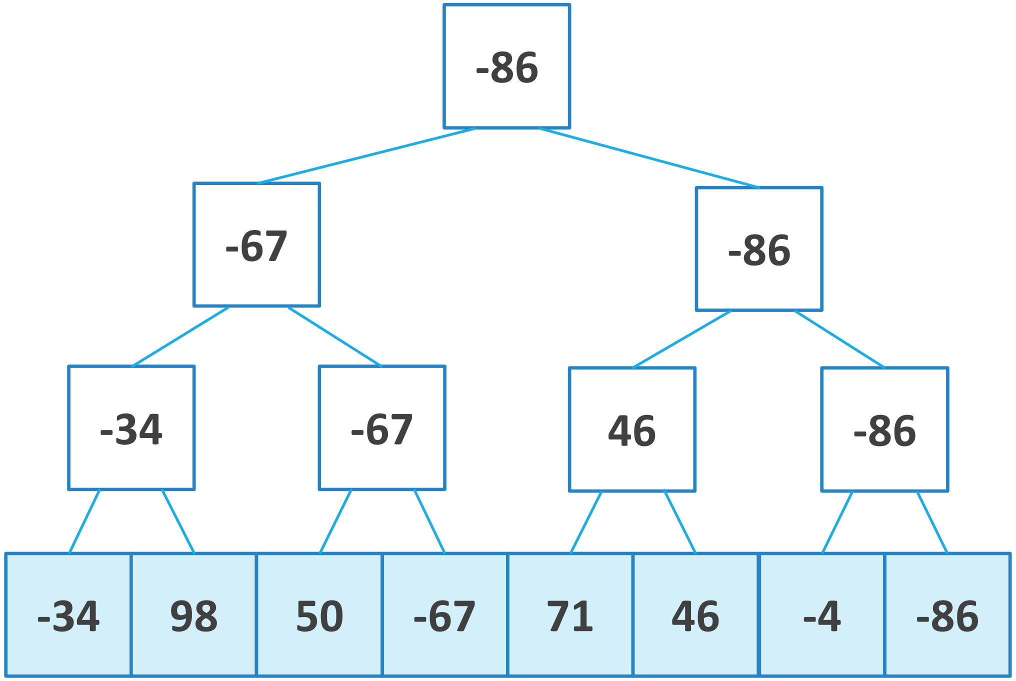
Sabemos cómo hacer consultas en un Segment Tree y sabemos cuánto se demoran.

Pero nos falta un caso de uso muy importante.



Segment Tree – Otro caso de uso

Sabemos cómo hacer consultas en un Segment Tree y sabemos cuánto se demoran.



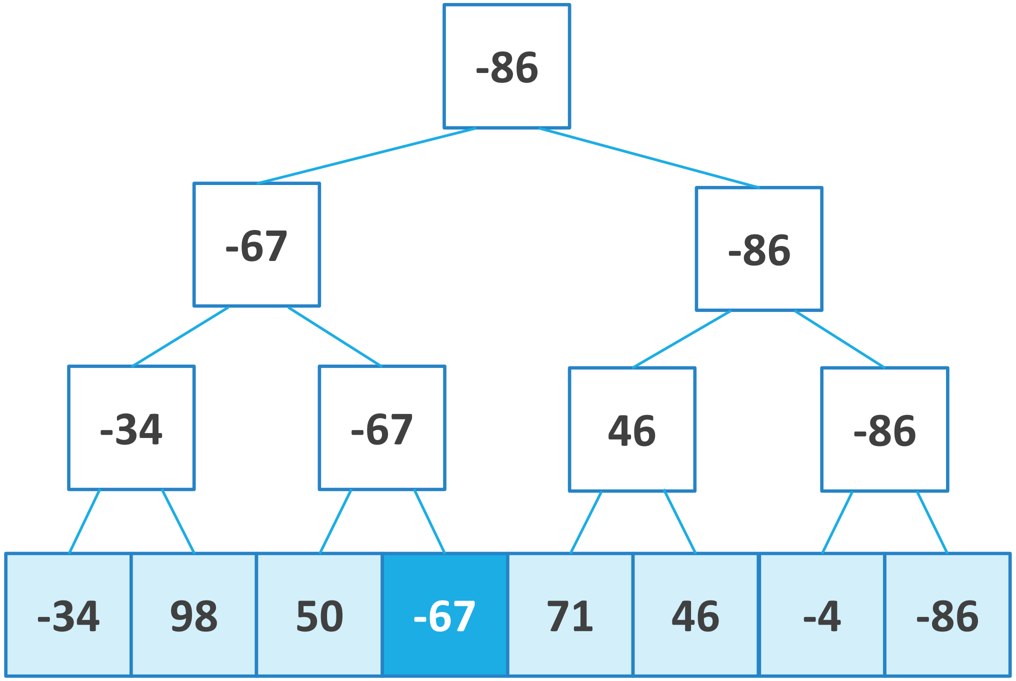
Pero nos falta un caso de uso muy importante.

¿Qué pasa si queremos cambiar un valor del arreglo original?

Segment Tree – Actualización

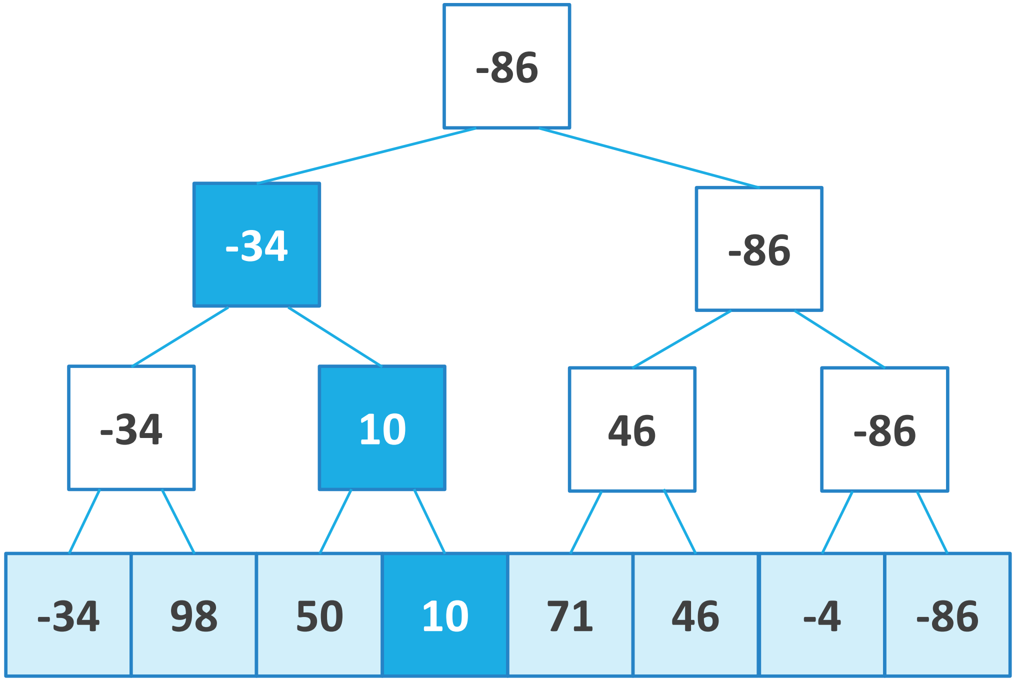
¡Lo podemos hacer rápido!

¿Cómo cambiarías el -67 del arreglo original por un 10?



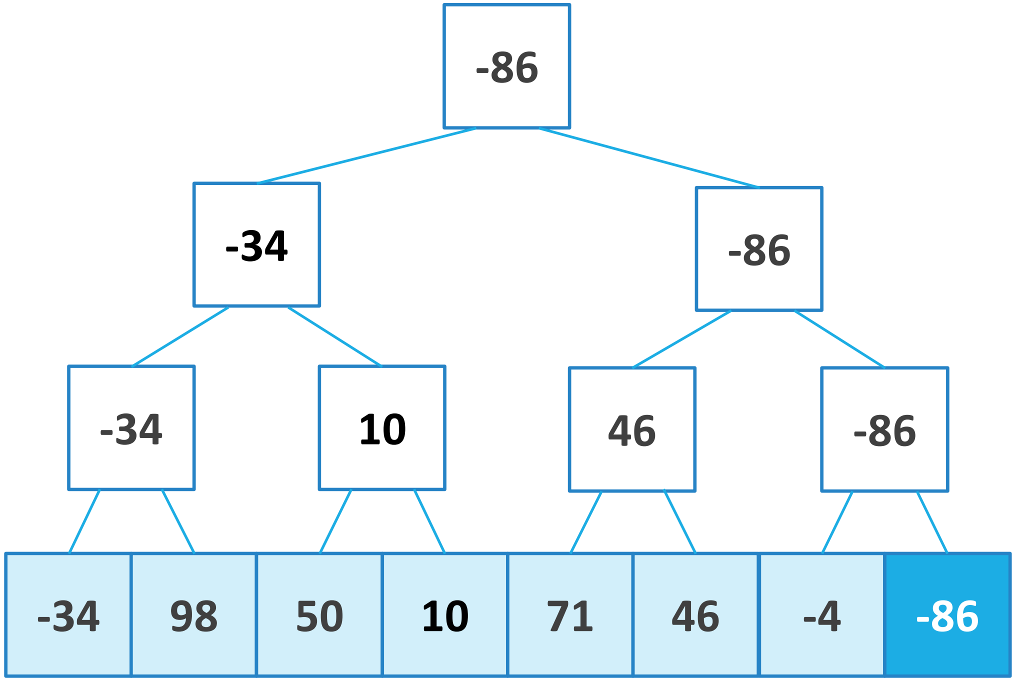
Segment Tree – Actualización

Solo tenemos que cambiar estos valores.



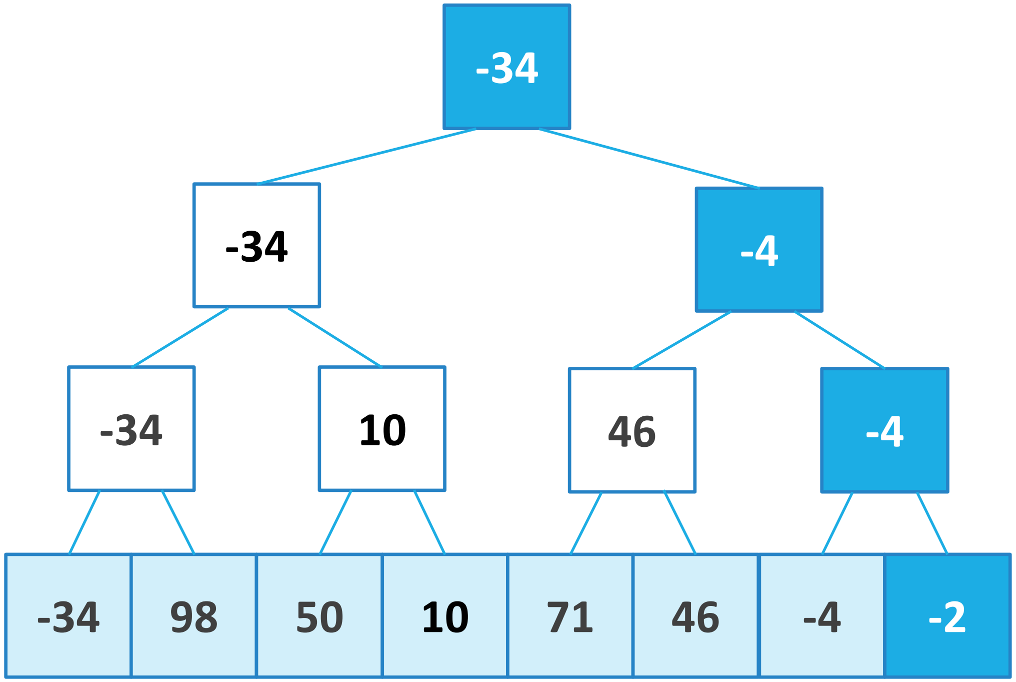
Segment Tree – Actualización

¿Y si cambiamos el -86 por un -2?



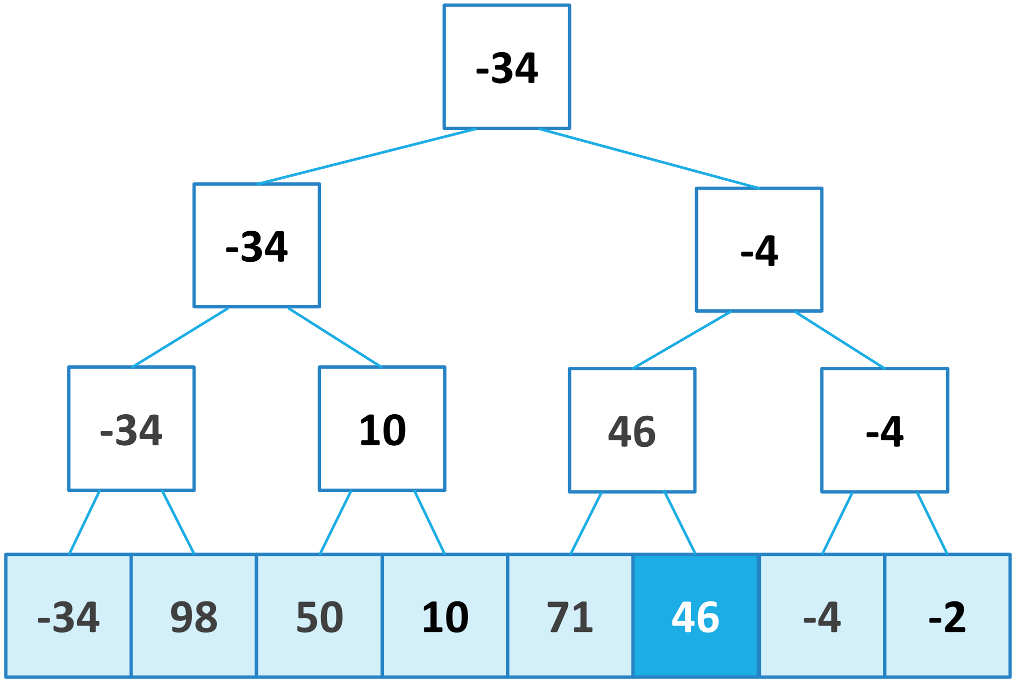
Segment Tree – Actualización

Así.



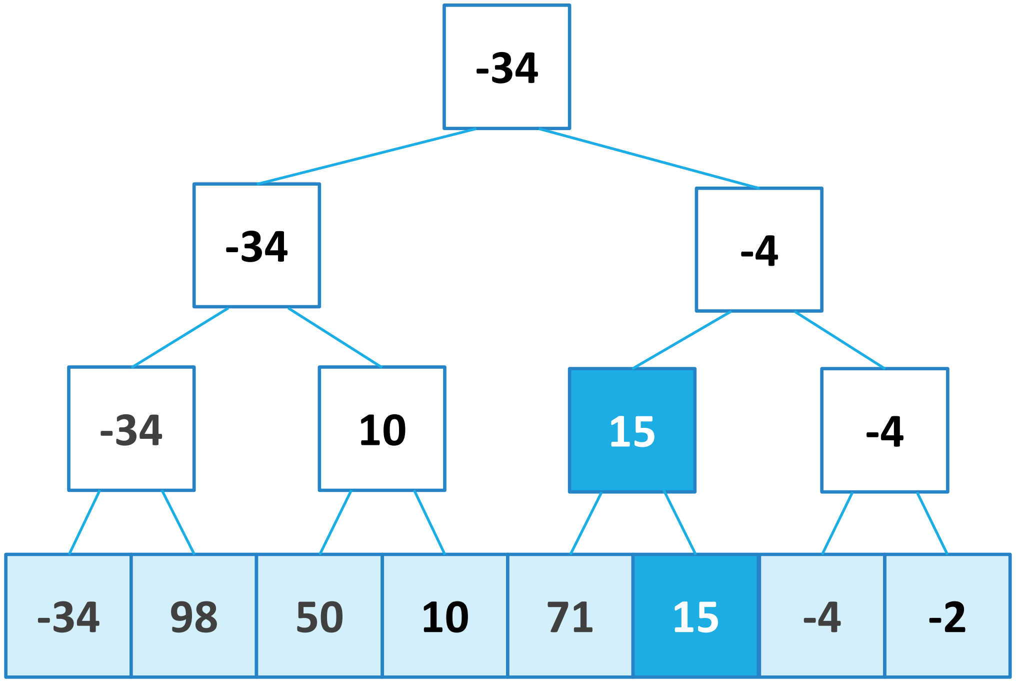
Segment Tree – Actualización

¿Y si cambiamos el 46 por un 15?



Segment Tree – Actualización

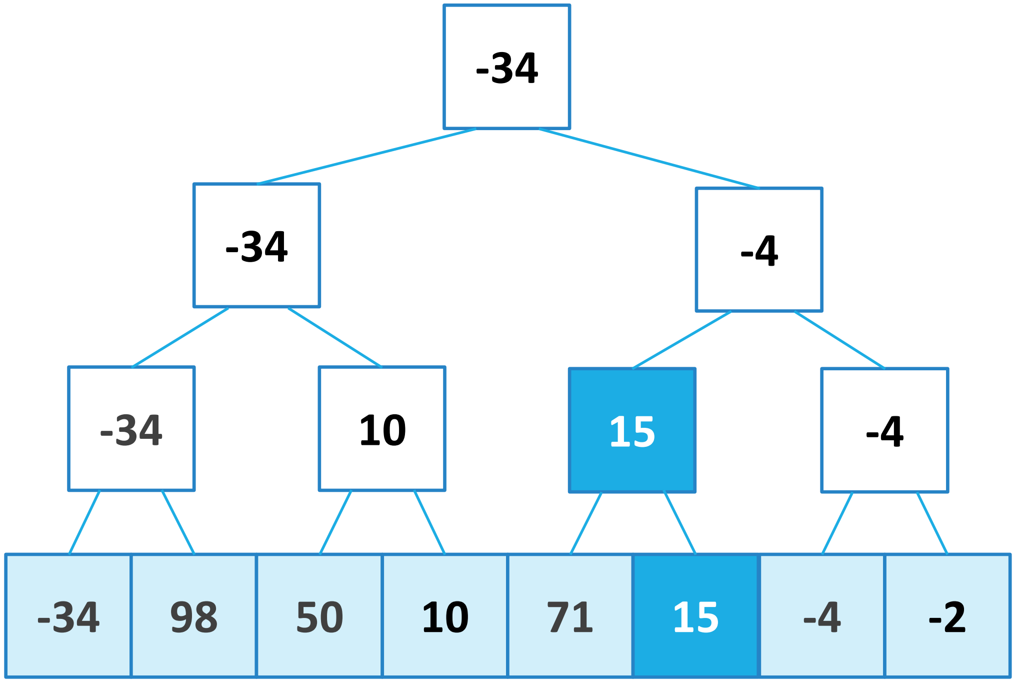
Se entiende la idea.



Segment Tree – Actualización

En cualquier caso, vamos a cambiar a lo más un nodo por nivel.

¡La actualización también toma tiempo **O(log *n*)**!



Segment Tree – Actualización

Ejercicio:

Escribe un pseudocódigo del método **Update**(***A***, *i*, *val*).

El nodo.
En la llamada inicial va a ser la raíz.

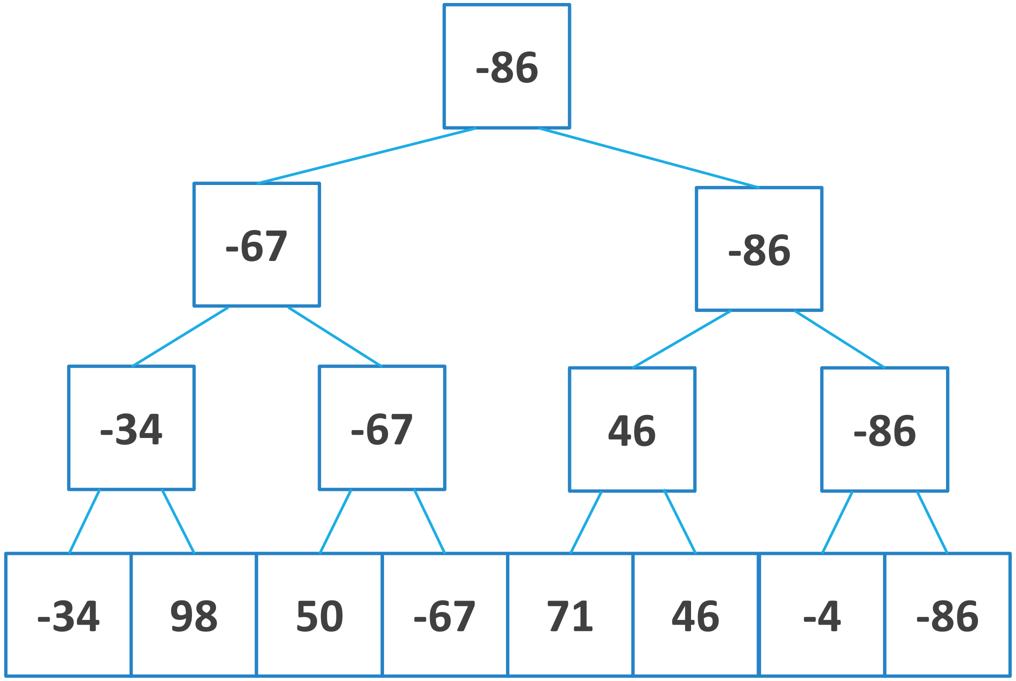
La posición del arreglo que se va a actualizar.

El nuevo valor.

Hint: Parte por el código del RMQ.

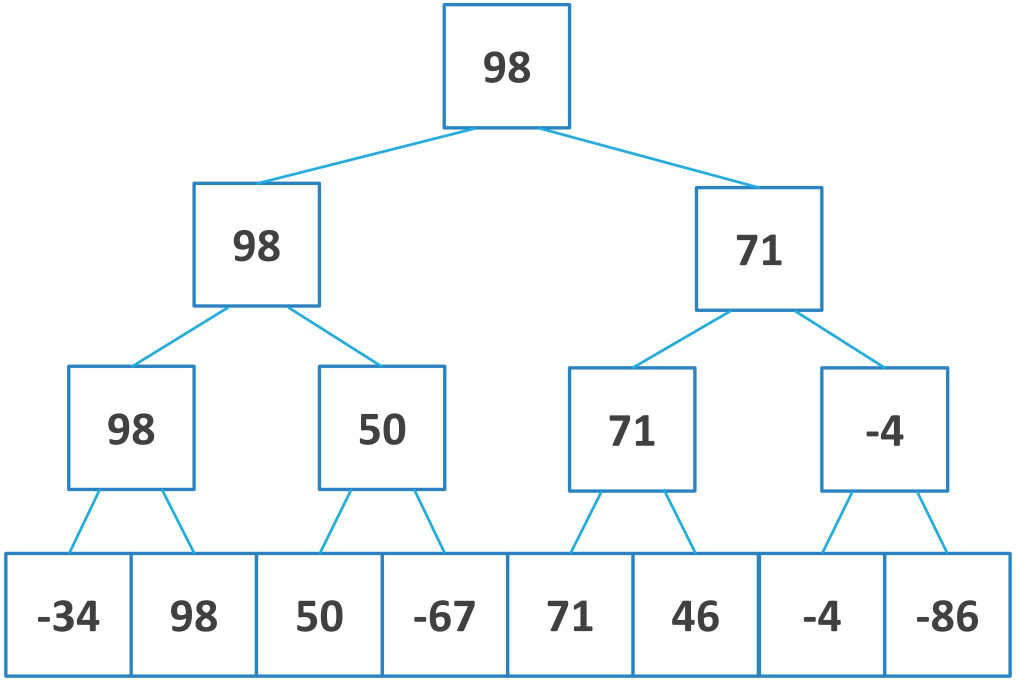
Segment Tree – Más utilidades

Lo último que vamos a notar es que el Segment Tree no sirve solo para encontrar el **mínimo** de cada rango.



Segment Tree – Más utilidades

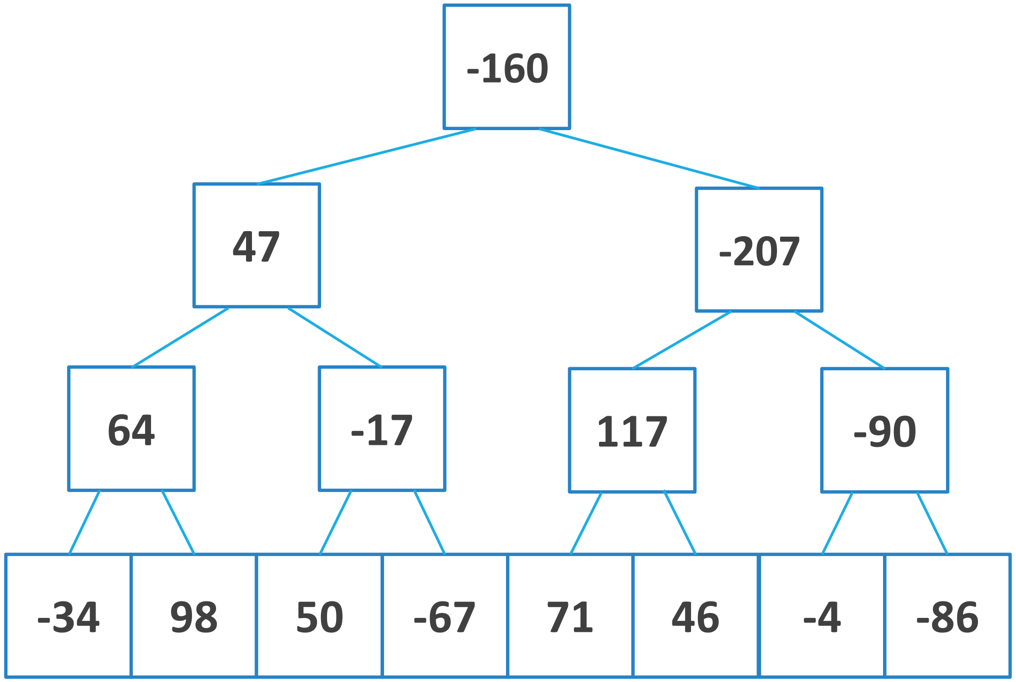
Podemos usarlo para encontrar el **máximo**.



Segment Tree – Más utilidades

O incluso la **suma**.

¿Por qué querríamos usar un Segment Tree para consultar sumas por rangos?



Si la consulta es sobre el máximo, lo implementamos así.

RMaxQ(***B***, *L*, *R*):

if $(L, R) = (\boldsymbol{B.L}, \boldsymbol{B.R})$:

return ***B.value***

else:

$v_{left} = -\infty$, $v_{right} = -\infty$

if $L \leq \boldsymbol{B.left.R}$:

v_{left} = RMaxQ(***B.left***, *L*, ***B.left.R***)

if $R \geq \boldsymbol{B.right.L}$:

v_{right} = RMaxQ(***B.right***, ***B.right.L***, *R*)

return max(v_{left} , v_{right})

Si es sobre la suma, así.

RSumQ(***B***, *L*, *R*):

  if (*L*, *R*) = (***B***.***L***, ***B***.***R***):

    return ***B***.***value***

  else:

    $v_{left} = 0$, $v_{right} = 0$

    if $L \leq$ ***B***.***left***.***R***:

      v_{left} = RSumQ(***B***.***left***, *L*, ***B***.***left***.***R***)

    if $R \geq$ ***B***.***right***.***L***:

      v_{right} = RSumQ(***B***.***right***, ***B***.***right***.***L***, *R*)

    return $v_{left} + v_{right}$

Anexo – Construcción de un Segment Tree (de mínimos)

build(A): //retorna la raíz del ST a hecho partir de un arreglo A

n = largo de A

return build(A, 1, n)

build(A, L, R):

if $L = R$:

return nodo(L, R, $A[L]$, **null**, **null**) // crea un nodo con el rango

else: // (L, R) valor A[L] y sin hijos

$\boldsymbol{B_{left}}$ = build(A, L, $(L + R)/2$)

$\boldsymbol{B_{right}}$ = build(A, $(L + R)/2 + 1$, R)

$v = \min(\boldsymbol{B_{left}.value}, \boldsymbol{B_{right}.value})$

return nodo(L, R, v, $\boldsymbol{B_{left}}$, $\boldsymbol{B_{right}}$)