Programación dinámica

Clase 18

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

Sumario

Programación de charlas 2.0

Consideremos el problema de asignar charlas en una misma sala

- Tenemos n charlas por asignar
- La charla i tiene hora de inicio s_i y de término f_i
- Es decir, se define el intervalo de tiempo $[s_i, f_i)$

Solo se puede realizar **una charla a la vez**

ADEMÁS: si la charla i es realizada, produce una ganancia v_i

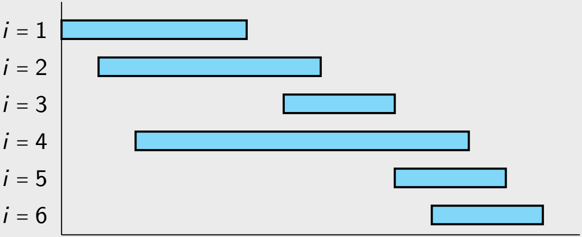
¿Qué charlas asignar de manera que maximicemos la ganancia?

Programación de charlas 2.0

Ejemplo

Sean las siguientes charlas con sus intervalos y ganancias

- $i = 1,\ [0, 5),\ v_1 = 2$
- $i = 2,\ [1, 7),\ v_2 = 4$
- $i = 3,\ [6, 9),\ v_3 = 4$
- $i = 4,\ [2, 11),\ v_4 = 7$
- $i = 5,\ [9, 12),\ v_5 = 2$
- $i = 6,\ [10, 13),\ v_6 = 1$

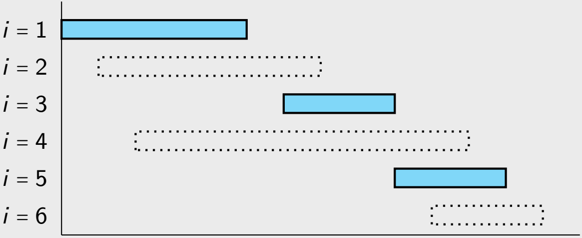


Programación de charlas 2.0

Ejemplo

El caso que sabemos resolver consideraba $v_i = c$ para cada charla

- $i = 1,\ [0, 5),\ v_1 = c$
- $i = 2,\ [1, 7),\ v_2 = c$
- $i = 3,\ [6, 9),\ v_3 = c$
- $i = 4,\ [2, 11),\ v_4 = c$
- $i = 5,\ [9, 12),\ v_5 = c$
- $i = 6,\ [10, 13),\ v_6 = c$



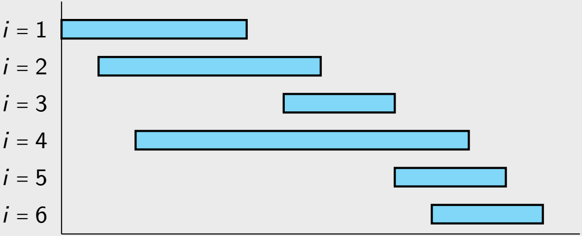
Cuando la ganancia es la misma, la estrategia codiciosa
de **elegir la charla que termina antes** es óptima

Programación de charlas 2.0

Ejemplo

Sean las siguientes charlas con sus intervalos y ganancias

- $i = 1,\ [0, 5),\ v_1 = 2$
- $i = 2,\ [1, 7),\ v_2 = 4$
- $i = 3,\ [6, 9),\ v_3 = 4$
- $i = 4,\ [2, 11),\ v_4 = 7$
- $i = 5,\ [9, 12),\ v_5 = 2$
- $i = 6,\ [10, 13),\ v_6 = 1$

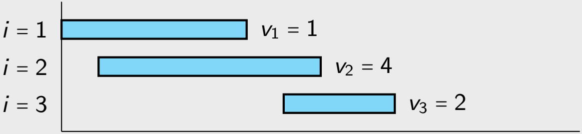


Con ganancias diferentes, el problema
no es equivalente a maximizar el número de charlas

Programación de charlas 2.0

Ejemplo

Podemos pensar en una instancia del problema de forma que la estrategia codiciosa mencionada **no funciona**



En este caso,

estrategia	charlas	ganancia
codiciosa	$\{1, 3\}$	3
óptima	$\{2\}$	4

Nuestra estrategia codiciosa no es óptima
en el caso general del problema con ganancias

Sumario

Una nueva estrategia algorítmica

Utilizaremos una nueva estretegia: **programación dinámica**

- Generalmente usada en problemas de optimización
- Se basa en la existencia de **subproblemas** que permiten resolver el problema original
- Además, los subproblemas se **solapan**, i.e. comparten **sub-subproblemas**

La diferencia con **dividir para conquistar** es que en esta última los subproblemas son disjuntos

La clave de programación dinámica es
recordar las soluciones a los subproblemas

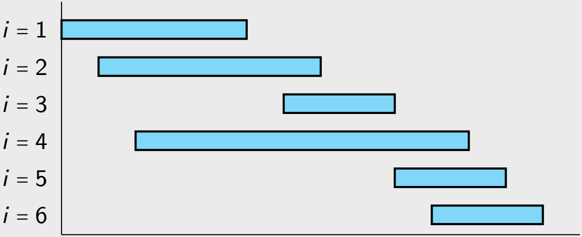
Programación de charlas 2.0

Ejemplo

Dadas las charlas $\{1, 2, \ldots, 6\}$ ordenadas por f_i, añadimos

$$b(i) := \begin{cases} j, & j \text{ es la charla que termina más tarde antes de } s_i \\ 0, & \text{no hay tal charla} \end{cases}$$

- $i = 1,\ [0, 5),\ v_1 = 2,\ b(1) = 0$
- $i = 2,\ [1, 7),\ v_2 = 4,\ b(2) = 0$
- $i = 3,\ [6, 9),\ v_3 = 4,\ b(3) = 1$
- $i = 4,\ [2, 11),\ v_4 = 7,\ b(4) = 0$
- $i = 5,\ [9, 12),\ v_5 = 2,\ b(5) = 3$
- $i = 6,\ [10, 13),\ v_6 = 1,\ b(6) = 3$



Programación de charlas 2.0

Consideremos una instancia con charlas $\{1, \ldots, n\}$ ordenadas por f_i. Supongamos que tenemos una solución óptima Ω para este problema.

Consideremos la última charla, i.e. n. Tenemos dos opciones

- Si $n \notin \Omega$, entonces Ω es solución del **subproblema** que solo considera las charlas $\{1, \ldots, n-1\}$
- Si $n \in \Omega$, entonces no hay charla r tal que $b(n) < r < n$ qu esté en Ω. Además, Ω contiene una solución óptima al **subproblema** con charlas $\{1, \ldots, b(n)\}$

Para encontrar la solución a un problema, necesitamos las soluciones a problemas más pequeños

Programación de charlas 2.0

Formalicemos las ideas anteriores

- Sea Ω_j la solución al problema con charlas $\{1, \ldots, j\}$ y sea $opt(j)$ su ganancia total. **Objetivo final:** obtener Ω_n con valor $opt(n)$
- Para cada $1 \leq j \leq n$, hay dos casos
  - Si $j \in \Omega_j$, entonces $opt(j) = v_j + opt(b(j))$
  - Si $j \notin \Omega_j$, entonces $opt(j) = opt(j-1)$
- Para saber si $j \in \Omega_j$, comparamos las dos opciones

$$\boxed{opt(j) = \max\{v_j + opt(b(j)),\ opt(j-1)\}} \qquad (\bigstar)$$

Programación de charlas 2.0

La ecuación (★) permite plantear el siguiente algoritmo recursivo

input : natural $0 \leq j \leq n$
output: ganancia óptima

```
Opt(j):
    if j = 0 :
        return 0
    else:
        return max{v_j + Opt(b(j)), Opt(j − 1)}
```

Notemos que Opt requiere

- tener ordenadas las charlas por hora de término y conocer $b(j)$
- suponer que $\texttt{Opt}(0) = 0$

¿Cuál es el problema de este algoritmo?

Programación de charlas 2.0

El problema con el algoritmo presentado es su complejidad

- Cada llamada a `Opt`, en el peor caso da origen a dos llamados `Opt`
- Complejidad $\mathcal{O}(2^n)$

Ejemplo (llamados recursivos)

`Opt(6)`

- $\texttt{Opt}(b(6)) = \texttt{Opt}(3)$
  - $\texttt{Opt}(b(3)) = \texttt{Opt}(1)$
  - $\texttt{Opt}(3-1) = \texttt{Opt}(2)$
    - $\texttt{Opt}(2-1) = \texttt{Opt}(1)$
- $\texttt{Opt}(6-1) = \texttt{Opt}(5)$
  - $\texttt{Opt}(b(5)) = \texttt{Opt}(3)$
    - $\texttt{Opt}(b(3)) = \texttt{Opt}(1)$
    - $\texttt{Opt}(3-1) = \texttt{Opt}(2)$...
  - $\texttt{Opt}(5-1) = \texttt{Opt}(4)$
    - $\texttt{Opt}(4-1) = \texttt{Opt}(3)$...

Programación de charlas 2.0

A pesar de hacer una cantidad exponencial de llamados, realmente se resuelven solo $n + 1$ subproblemas

$$\texttt{Opt}(0), \texttt{Opt}(1), \ldots, \texttt{Opt}(n)$$

En este problema, un mismo llamado puede aparecer varias veces en el árbol de recursión

¿Podríamos hacerlo mejor?

Programación de charlas 2.0

Agregaremos un arreglo global M donde almacenaremos cada $\texttt{Opt}(j)$ la primera vez que lo calculamos

$\texttt{RecOpt}(j)$:

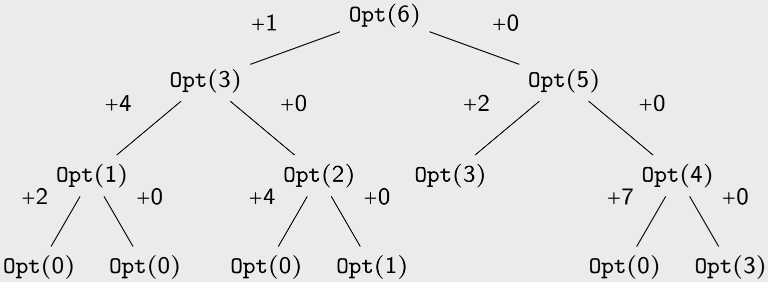
    if $j = 0$ **:**
        return 0
    else:
        if $M[j] \neq \varnothing$ **:**
            return $M[j]$
        else:
            $M[j] \leftarrow \max\{v_j + \texttt{RecOpt}(b(j)),\ \texttt{RecOpt}(j-1)\}$
            return $M[j]$

El algoritmo $\texttt{RecOpt}$ toma tiempo $\mathcal{O}(n)$

Programación de charlas 2.0

Ejemplo

- $i = 1,\ [0,5),\ v_1 = 2,\ b(1) = 0$
- $i = 2,\ [1,7),\ v_2 = 4,\ b(2) = 0$
- $i = 3,\ [6,9),\ v_3 = 4,\ b(3) = 1$
- $i = 4,\ [2,11),\ v_4 = 7,\ b(4) = 0$
- $i = 5,\ [9,12),\ v_5 = 2,\ b(5) = 3$
- $i = 6,\ [10,13),\ v_6 = 1,\ b(6) = 3$



Programación de charlas 2.0

Ejemplo

Utilizando `RecOpt`, obtenemos la matriz de ganancias

$$M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Podemos **deducir la asignación** a partir de M, suponiendo que cada $v_j > 0$.

- Como $M[6] = M[6-1]$, no se incluye la charla 6
- Como $M[5] = v_5 + M[b(5)]$, se incluye la charla 5
- Como $M[3] = v_3 + M[b(3)]$, se incluye la charla 3
- Como $M[1] = v_1 + M[b(1)]$, se incluye 1

Con esto, las charlas asignadas son $\{1, 3, 5\}$

Programación de charlas 2.0

También podemos plantear una solución **iterativa** para este problema, computando los subproblemas en orden de tamaño

`ItOpt`:

$M[0] \leftarrow 0$

for $j = 1, \ldots, n$ **:**

$\quad M[j] \leftarrow \max\{v_j + M[b(j)],\ M[j-1]\}$

Al terminar, `ItOpt` deja en M las ganancias óptimas

El algoritmo `ItOpt` también toma tiempo $\mathcal{O}(n)$

Programación dinámica

A partir de este ejemplo, planteamos la estrategia de **programación dinámica** para resolver un problema

1. El número de subproblemas es (idealmente) polinomial
2. La solución al problema original puede calcularse a partir de subsoluciones
3. Hay un **orden natural** de los subproblemas (*del más pequeño al más grande*) y una recurrencia *sencilla* (★)
4. Recordamos las soluciones a subproblemas

La recurrencia es la clave para plantear el algoritmo base

Sumario

Problema de la mochila 0/1

Consideremos el problema de la mochila con n objetos **no fraccionables** (cada uno se incluye o no se incluye)

- El objeto k tiene un valor v_k y un peso w_k
- La mochila tiene capacidad de peso W tal que

$$W < \sum_k w_k$$

El **objetivo** es maximizar la suma de valores incluídos

Usaremos la variable $x_k \in \{0, 1\}$ para indicar si el objeto k se incluye o no

Resolveremos este problema con programación dinámica

Problema de la mochila 0/1

Denotaremos por $knap(p, q, \omega)$ al problema de maximizar

$$\sum_{k=p}^{q} v_k x_k$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=p}^{q} w_k x_k & \leq & \omega \\ x_k & \in & \{0, 1\} \end{array}$$

Nuestro problema a resolver es $knap(1, n, W)$

Problema de la mochila 0/1

Sea $\Omega = y_1, y_2, \ldots, y_n$ una elección óptima de valores binarios para las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$

En particular, y_1 tiene dos opciones

- Si $y_1 = 0$, entonces el objeto 1 no está en la solución. Luego, $y_2, \ldots, y_n$ debe ser solución óptima para

  $$knap(2, n, W)$$

  De lo contrario, $y_2, \ldots, y_n$ no sería solución óptima de $knap(1, n, W)$

Problema de la mochila 0/1

En particular, y_1 tiene dos opciones

- Si $y_1 = 1$, entonces $y_2, \ldots, y_n$ debe ser solución óptima para

  $$knap(2, n, W - w_1)$$

  De lo contrario, habría otra selección $z_2, \ldots, z_n$ binaria tal que

  $$\sum_{k=2}^{n} w_k z_k \leq W - w_1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=2}^{n} v_k z_k > \sum_{k=2}^{n} v_k y_k$$

  por lo que $y_1, z_2, \ldots, z_n$ sería una elección mejor para $knap(1, n, W)$.
  Esto contradice que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es óptima

Problema de la mochila 0/1

Con este análisis de casos, planteamos nuestra estrategia recursiva de **subproblemas**

Sea $g_k(\omega)$ el valor de una solución óptima para $knap(k+1, n, \omega)$

- $g_0(W)$ es el valor óptimo de $knap(1, n, W)$
- Como hay decisión binaria para x_1,

$$g_0(W) = \max\{g_1(W),\ g_1(W - w_1) + v_1\}$$

- Podemos generalizar para un $0 \leq k < n$

$$g_k(\omega) = \max\{g_{k+1}(\omega),\ g_{k+1}(\omega - w_1) + v_{k+1}\}$$

donde

$$g_n(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \geq 0 \\ -\infty, & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$$

Problema de la mochila 0/1

Ejercicio

Usando la recurrencia anterior, muestre los llamados recursivos que permiten resolver la siguiente instancia del problema de la mochila 0/1

- $n = 3, \ W = 6$
- $[w_1, w_2, w_3] = [2, 2, 3]$
- $[v_1, v_2, v_3] = [1, 2, 5]$

Problema de dar vuelto

Consideremos ahora el problema de dar S pesos de vuelto usando el menor número posible de monedas

- Suponemos que los valores de las monedas, ordenados de mayor a menor, son $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$
- Tenemos una cantidad ilimitada de monedas de cada valor

Posible estrategia codiciosa:

Asignar tantas monedas *grandes* como sea posible, antes de avanzar a la siguiente moneda *grande*

Ejemplo

Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{10, 5, 2, 1\}$, la estrategia codiciosa **siempre** produce el menor número de monedas para un vuelto S cualquiera

Problema de dar vuelto

Ejemplo

Sin embargo, la estrategia no funciona para un conjunto de valores cualquiera. Si $\{v_1, v_2, v_3\} = \{6, 4, 1\}$ y $S = 8$, entonces la estrategia produce

$$8 = 6 + 1 + 1$$

pero el óptimo es

$$8 = 4 + 4$$

Lo atacamos con programación dinámica

Problema de dar vuelto

Dado un conjunto de valores ordenados $\{v_1, \ldots, v_n\}$, definimos $z(S, n)$ como el problema de encontrar el menor número de monedas para totalizar S

Ejercicio

Proponga una recurrencia para resolver el problema $z(S, n)$ y plantee un algoritmo a partir de ella.

Problema de dar vuelto

Ejercicio

Sea $Z(S,n)$ la solución óptima al problema $z(S,n)$. Para buscar intuición, notamos que hay dos opciones respecto a las monedas de valor v_n

- Si se incluye una moneda de valor v_n,

$$Z(S,n) = Z(S - v_n, n) + 1$$

- Si no se usan monedas de valor v_n,

$$Z(S,n) = Z(S, n-1)$$

Problema de dar vuelto

Ejercicio

Luego, generalizamos esta idea

- Para las monedas de de valor v_n,

$$Z(S, n) = \min\{Z(S - v_n, n) + 1,\ Z(S, n-1)\}$$

- Luego, generalizamos para el subconjunto de los primeros k valores de monedas

$$Z(T, k) = \min\{Z(T - v_k, n) + 1,\ Z(T, k-1)\}$$

donde $Z(T, 0) = +\infty$ si $T > 0$, y $Z(0, k) = 0$

Problema de dar vuelto

Ejercicio

Luego, generalizamos esta idea

- Para las monedas de de valor v_n,

$$Z(S,n) = \min\{Z(S - v_n, n) + 1,\ Z(S, n-1)\}$$

- Luego, generalizamos para el subconjunto de los primeros k valores de monedas

$$Z(T,k) = \min\{Z(T - v_k, n) + 1,\ Z(T, k-1)\}$$

donde $Z(T,0) = +\infty$ si $T > 0$, y $Z(0,k) = 0$

Problema de dar vuelto

Ejercicio

Con esto, podemos plantear el siguiente algoritmo iterativo

$\texttt{Change}(S)$**:**

    for $T = 1, \ldots, S$ **:**

        $Z[T][0] \leftarrow +\infty$

    for $k = 0, \ldots, n$ **:**

        $Z[0][k] \leftarrow 0$

    for $k = 1, \ldots, n$ **:**

        for $T = 1, \ldots, S$ **:**

            $Z[T][k] \leftarrow Z[T][k-1]$

            if $T - v_k \geq 0$ **:**

                $Z[T][k] \leftarrow \min\{Z[T][k],\ Z[T - v_k, k]\}$