Los árboles 2-3 son balanceados … pero

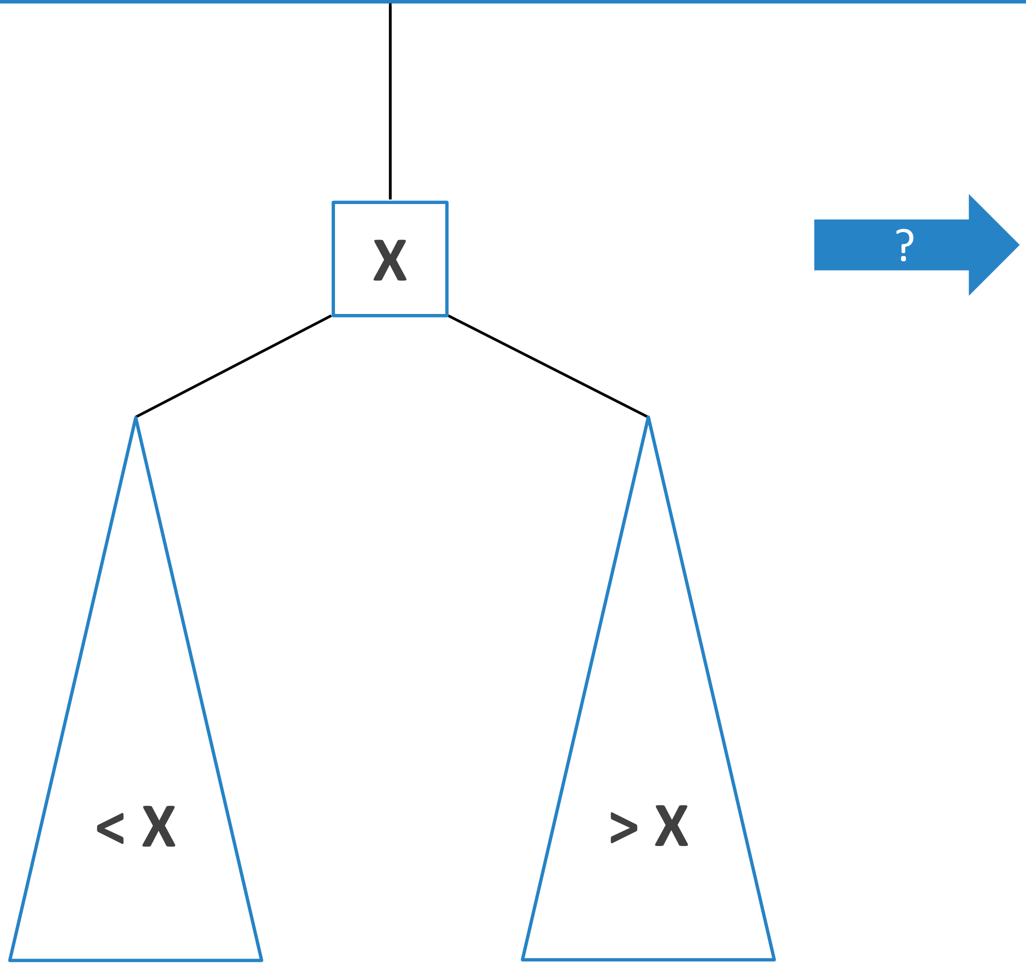
Las operaciones en un árbol 2-3, particularmente al insertar una nueva clave, tienen mucho *overhead*:

- durante el recorrido desde la raíz a la hoja, es posible que haya que hacer dos comparaciones en cada nodo (nodos 3)
- cuando se llega a la hoja, si es un nodo 2, hay que convertirlo en un nodo 3
- si es un nodo 3, hay que convertirlo en dos nodos 2 y hacer subir la clave mediana al nodo padre
- si el nodo padre es un nodo 2, hay que convertirlo en un nodo 3; si es un nodo 3, hay que aplicar recursivamente el paso anterior

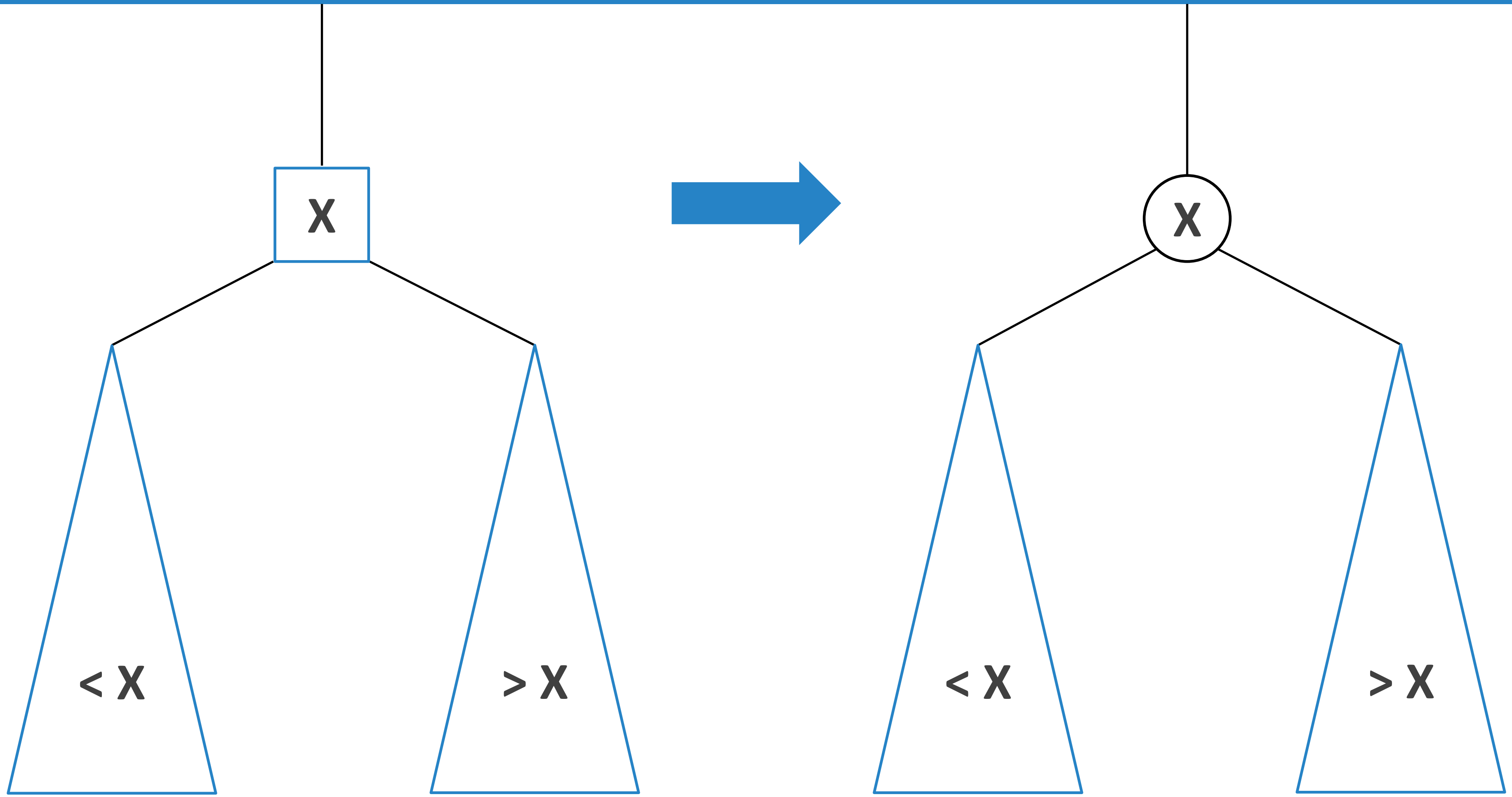
¿Será posible representar un árbol 2-3 como un ABB?

Nos interesa conservar toda la información del 2-3

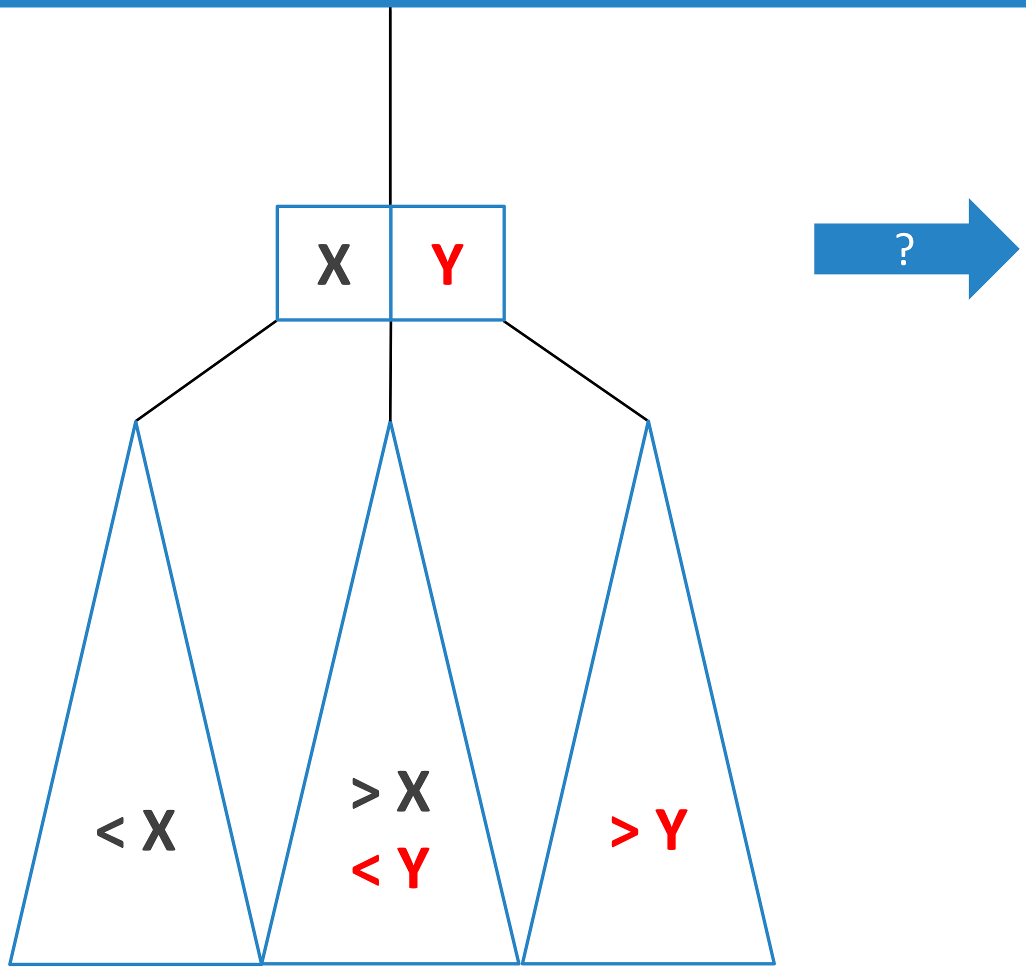
Nodo 2



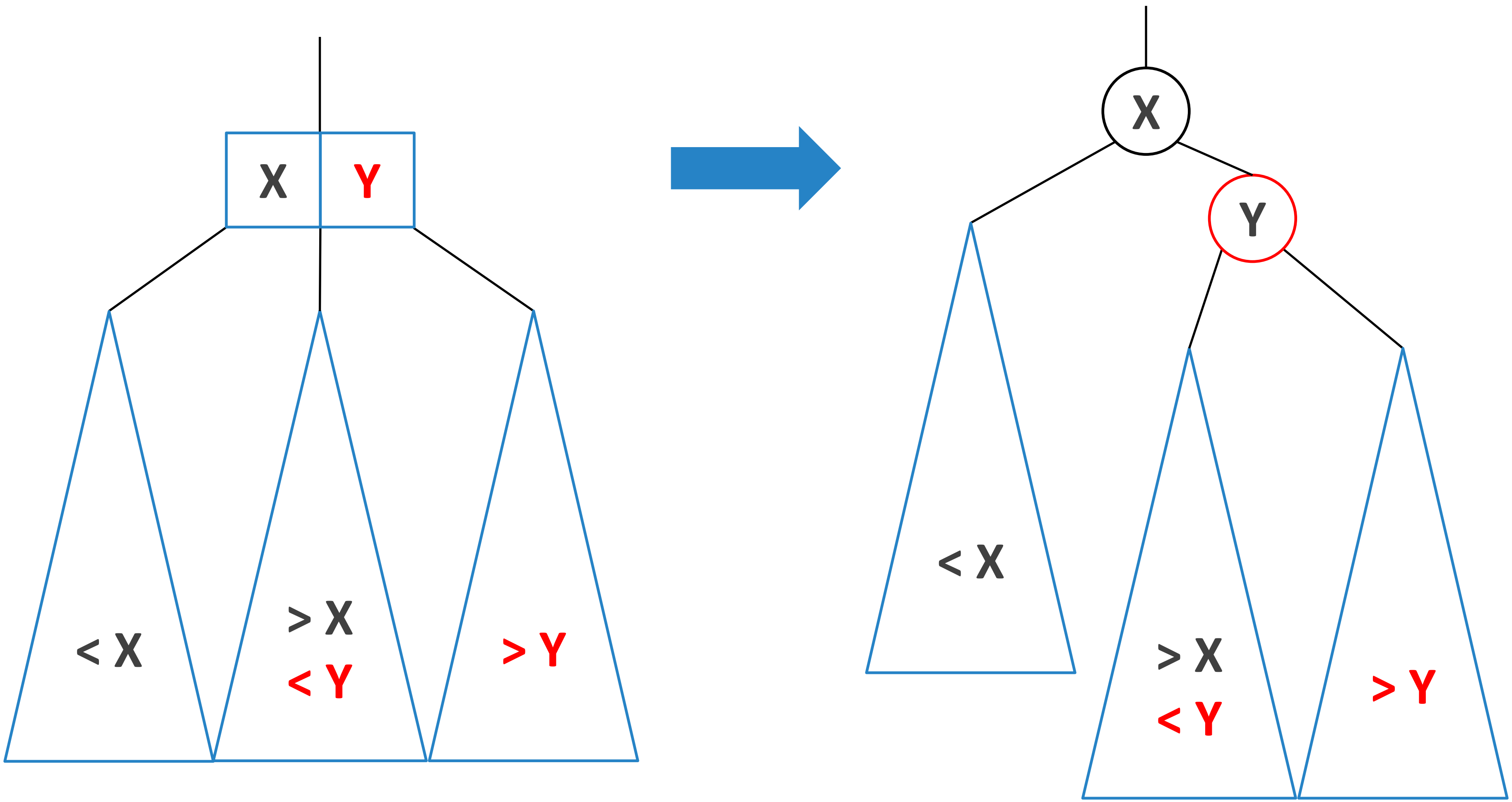
Nodo 2 como **un** nodo en un ABB



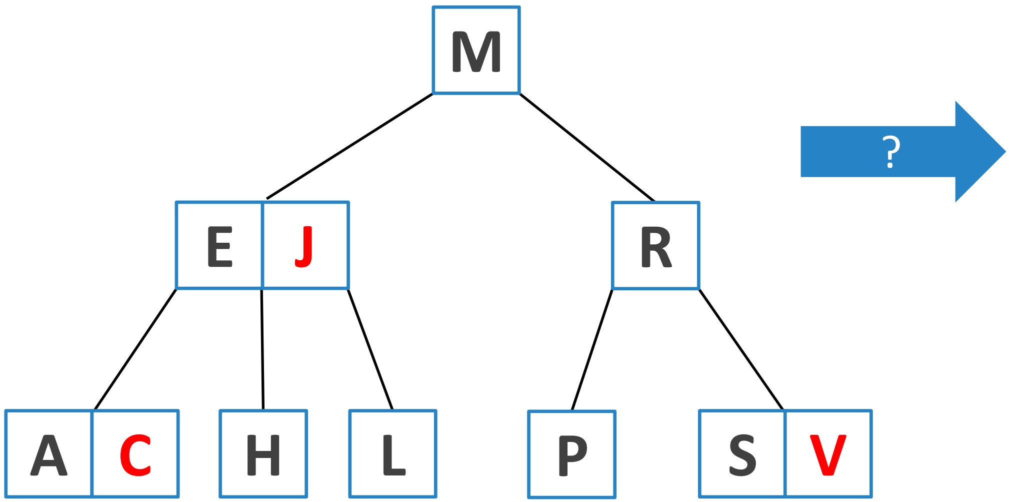
Nodo 3



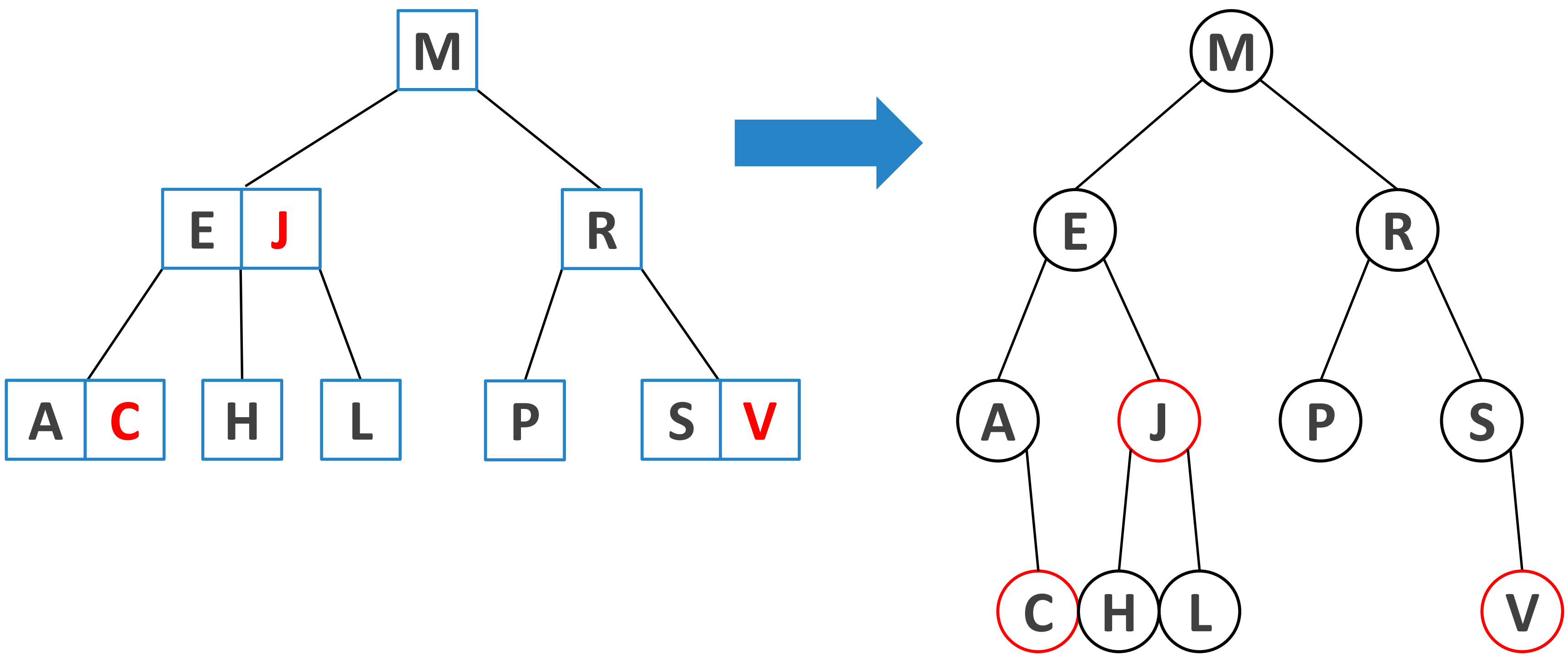
Nodo 3 como **dos** nodos en un ABB



Árbol 2-3 ...



Árbol 2-3 ... como ABB



El árbol resultante se conoce como **árbol rojo-negro**

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple cuatro propiedades:

1) Cada nodo es ya sea **rojo** o **negro**

2) La raíz del árbol es **negra**

3) Si un nodo es **rojo**, sus hijos deben ser **negros**

4) La cantidad de nodos **negros** camino a cada hoja debe ser la misma

Las hojas nulas se consideran como nodos **negros**

Inserción en un árbol rojo-negro

Una inserción puede violar las propiedades del árbol rojo-negro (así como ocurre en un árbol AVL)

Debemos restaurarlas, usando rotaciones (como en un AVL) y **cambios de color** (en lugar de ajustar el balance del nodo)

Es más fácil de ver si nos fijamos en el **árbol 2-3** equivalente

Equivalencia de árboles rojo-negro con los árboles ~~2-3~~ 2-4

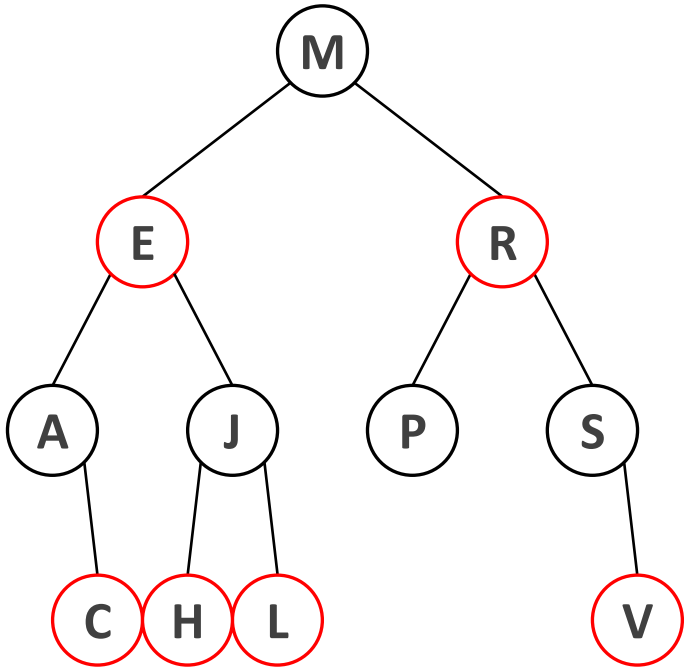
Bueno … no todos los árboles rojo-negro tienen un árbol 2-3 equivalente

…¡pero sí tienen un árbol 2-4 equivalente!

un **árbol 2-4** puede tener nodos 2 y nodos 3 (al igual que un árbol 2-3)

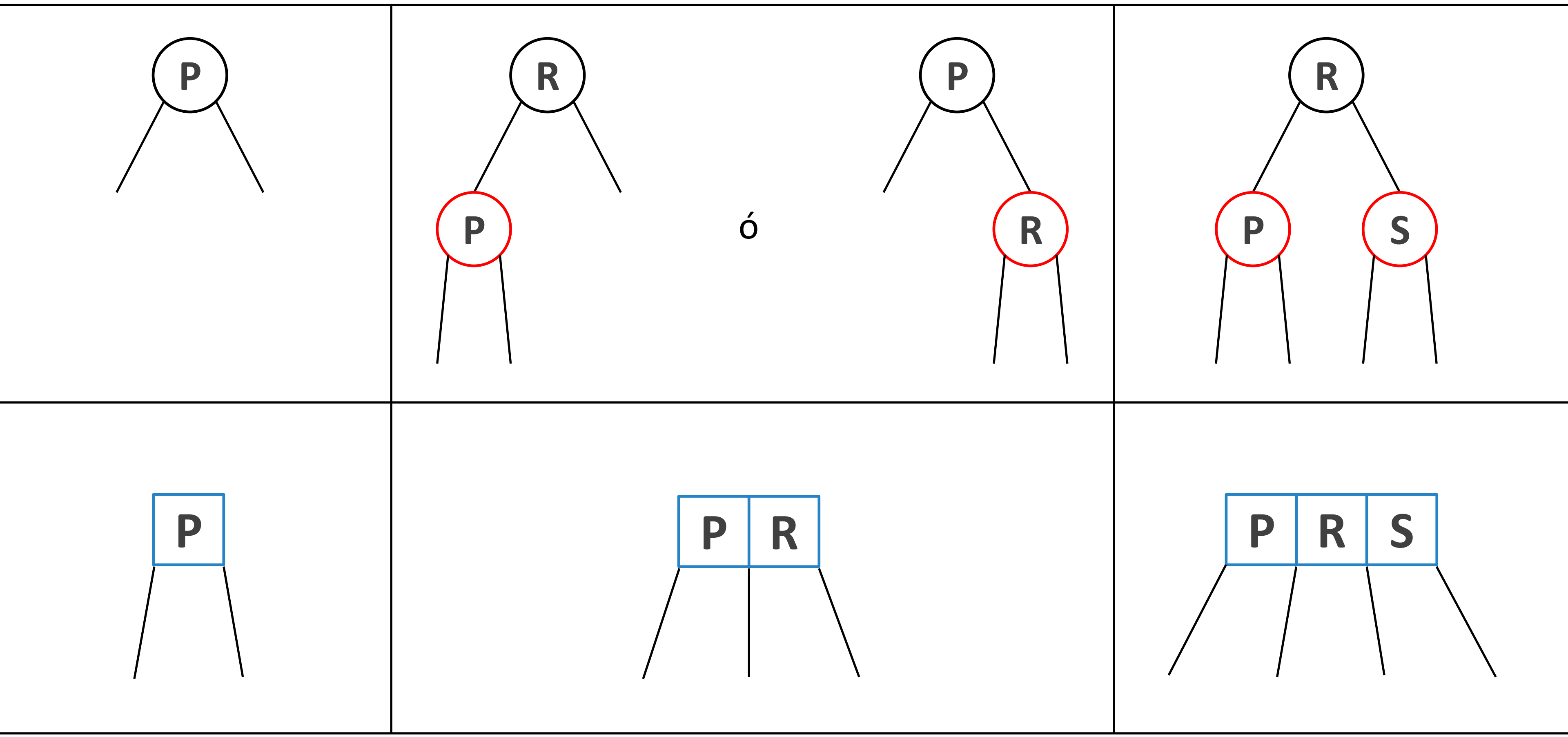
… y además puede tener **nodos 4**:

- 3 claves
- si no es una hoja, entonces 4 hijos



Equivalencia de los árboles rojo-negro con los **árboles 2-4**

Rojo Negro



2-4

¡Entonces hay que fijarse en el **árbol 2-4** equivalente!

(Un paréntesis

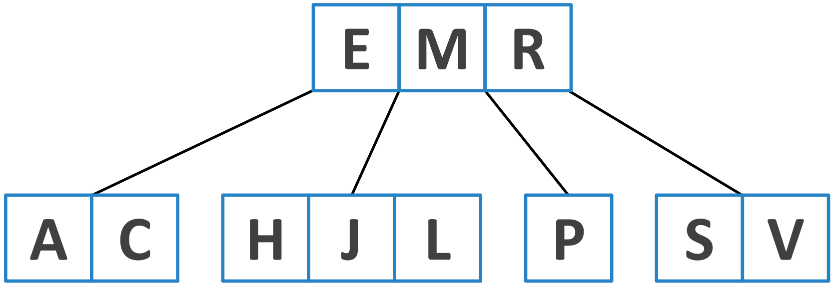
Para estudiar para las pruebas, simplemente revisar las diapositivas usadas en clases está **muy lejos de ser suficiente**:

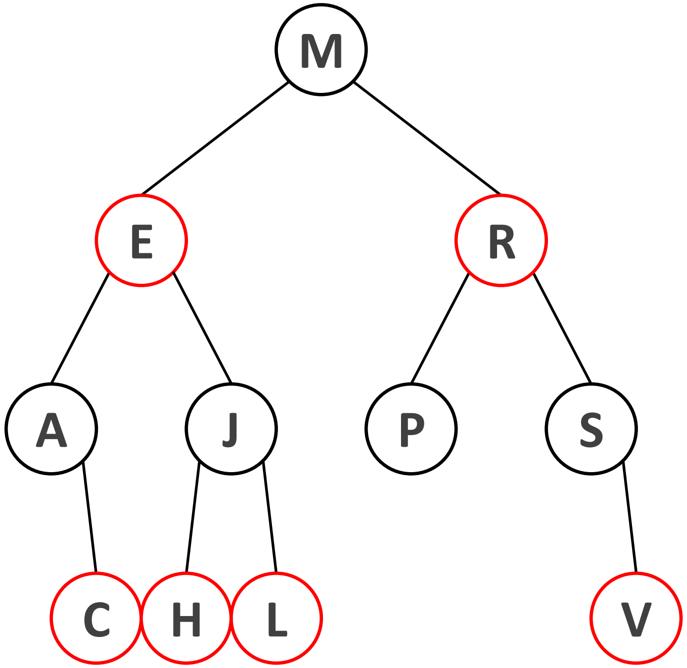
- estudiar los conceptos está bien
- … pero también hay que hacer muchos ejercicios

)

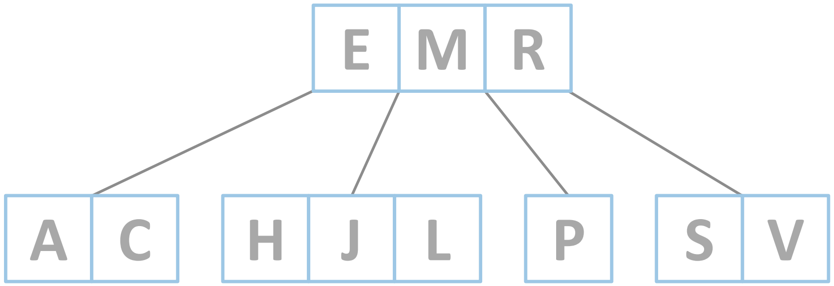
Ejemplo de inserción:

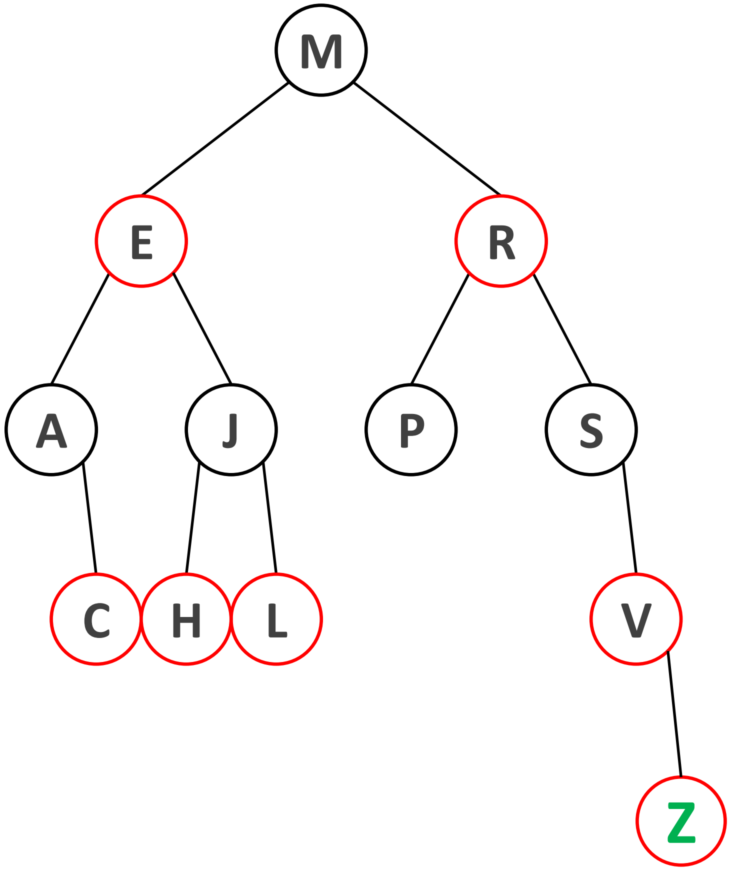
si insertamos la clave *Z*, ¿a dónde va a parar, inicialmente?





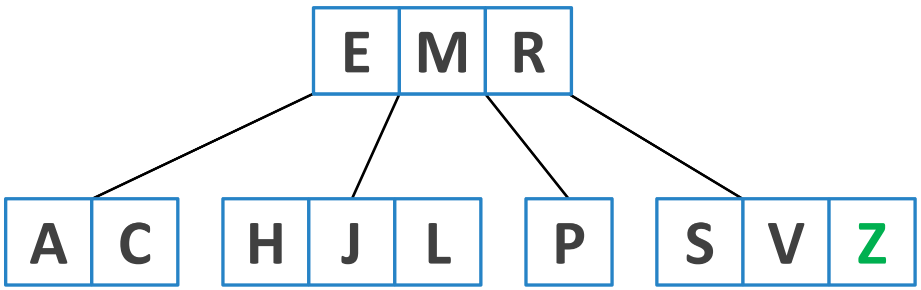
Insertemos la *Z* en el árbol rojo-negro

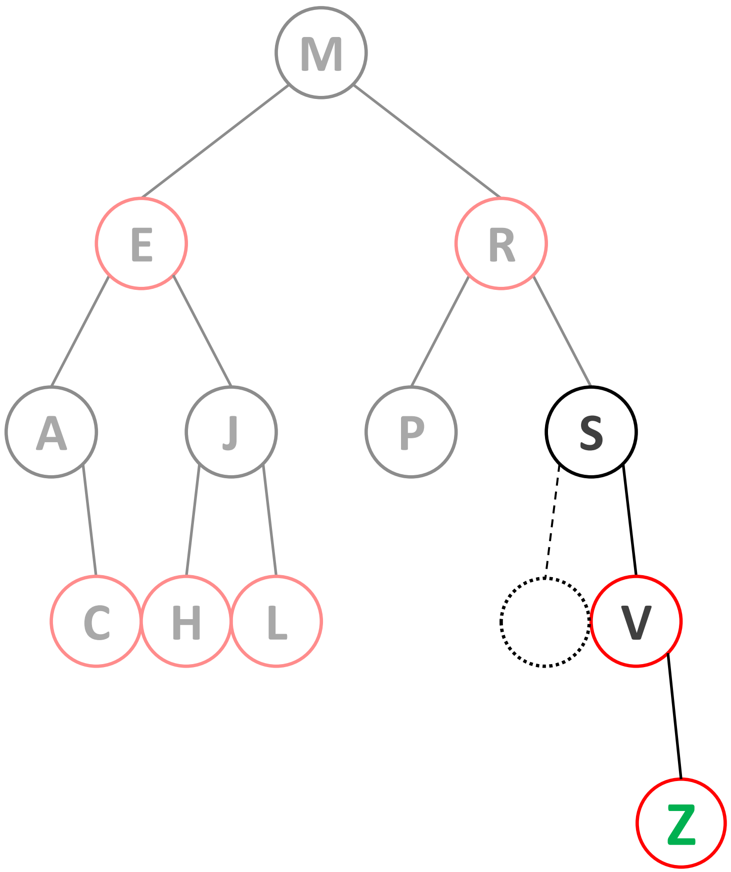




El nodo se inserta **rojo** (para no quebrantar la propiedad 4)

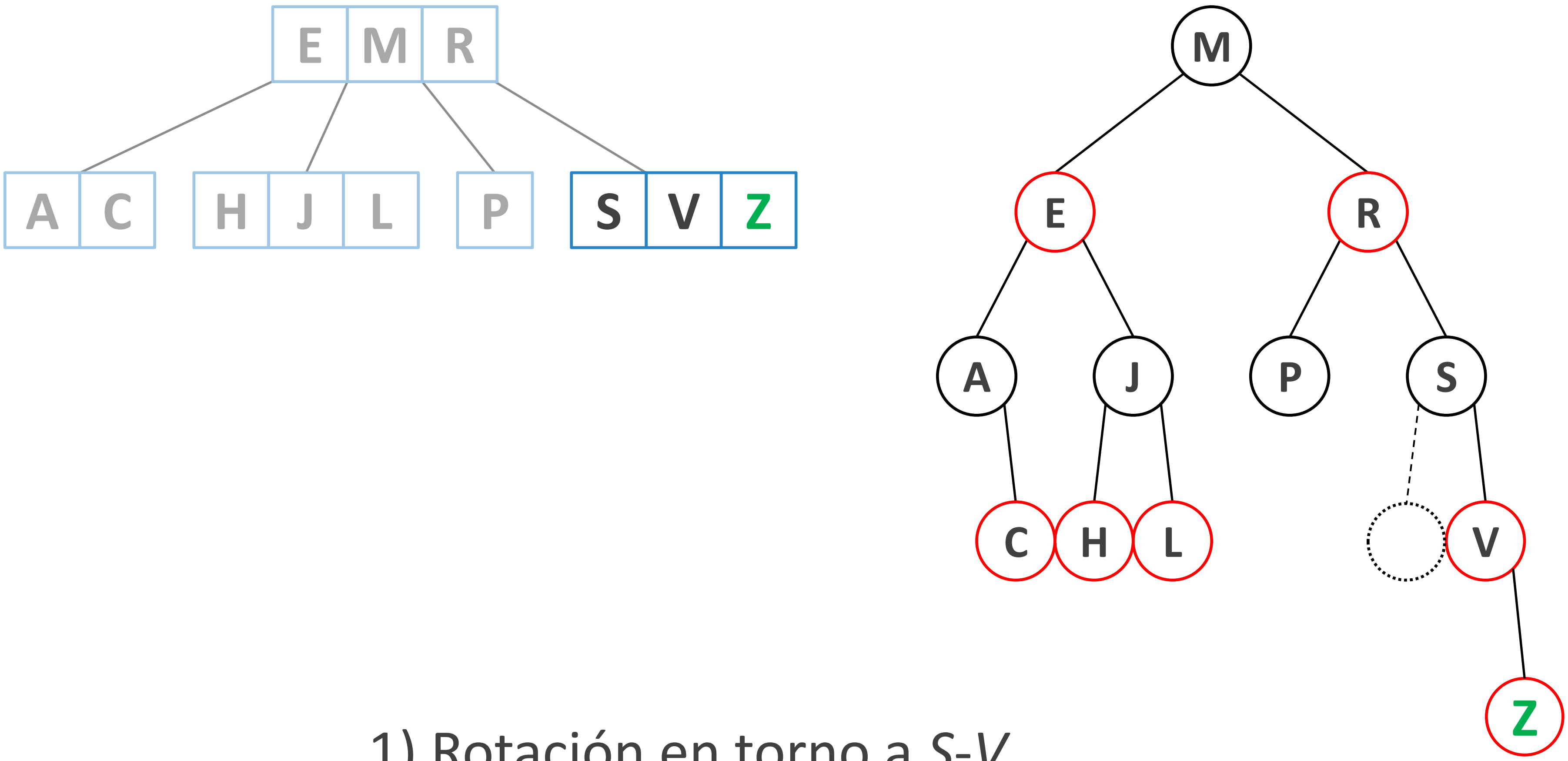
… y en el árbol 2-4





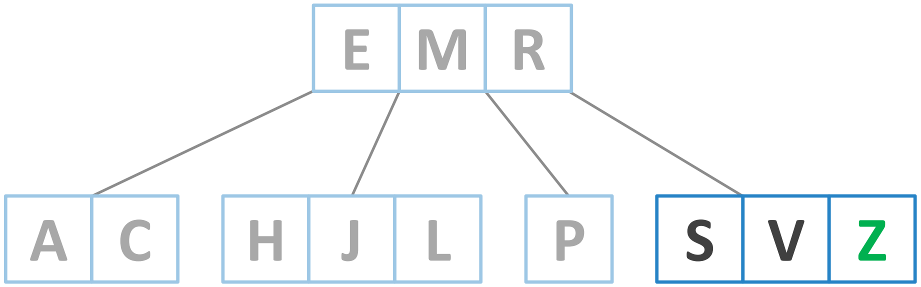
Observamos que el “tío” del nodo insertado es **negro**

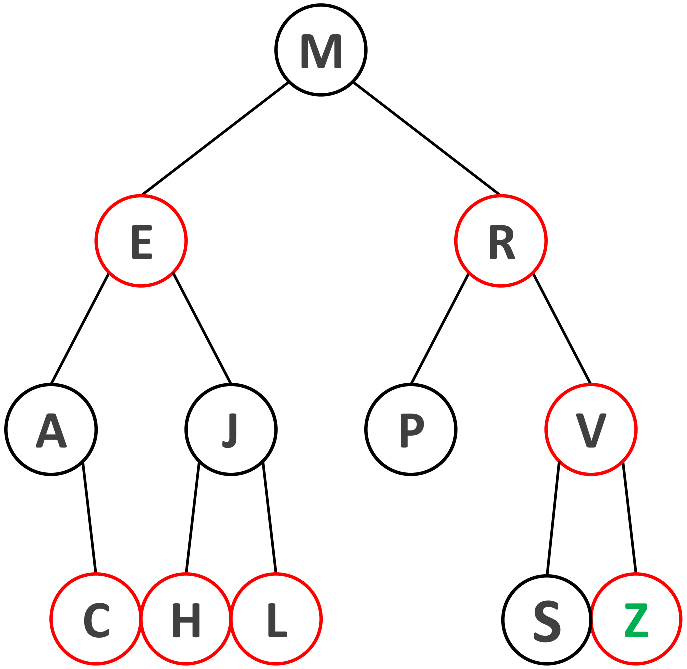
La configuración del nodo 4 "*S V Z*" nos sugiere qué hacer en el árbol rojo-negro



1) Rotación en torno a *S-V* ...

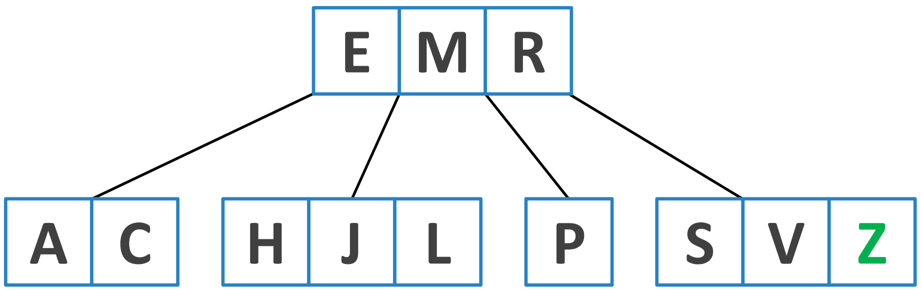
La sola rotación no es suficiente

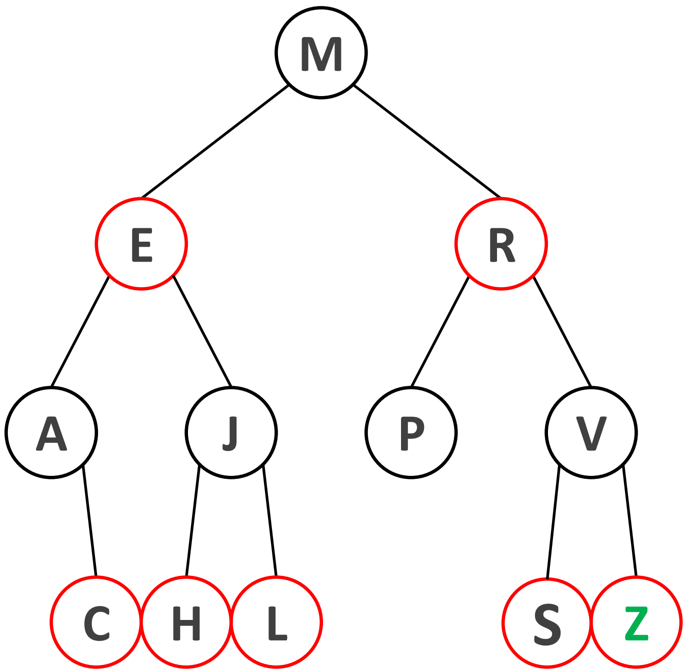




2) Cambio de color a *S* y *V* …

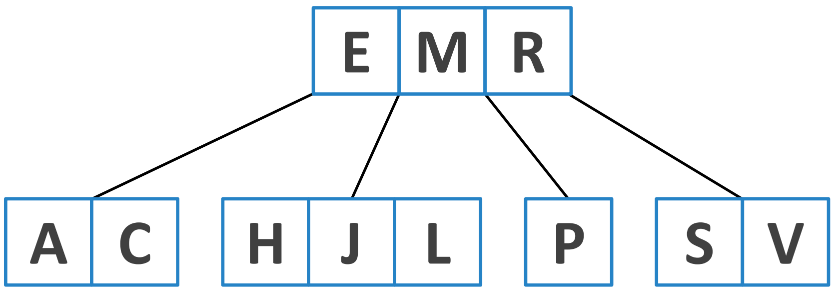
… también hay que cambiar colores

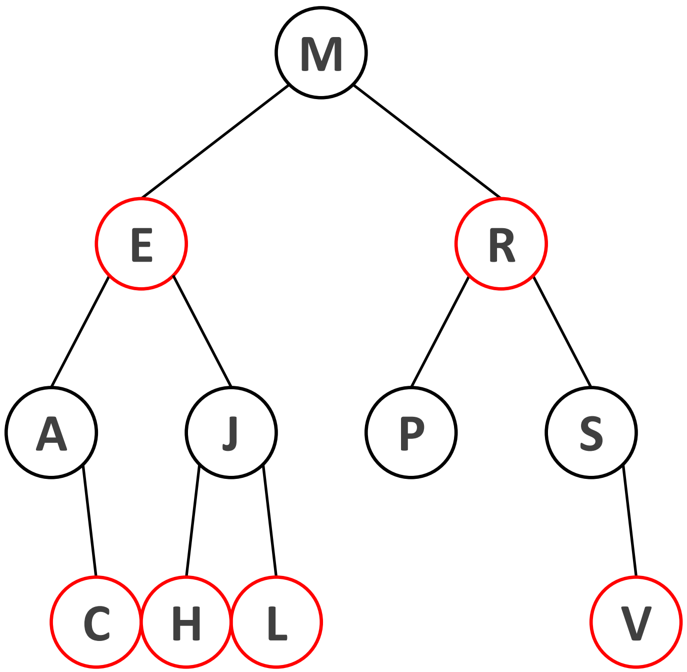




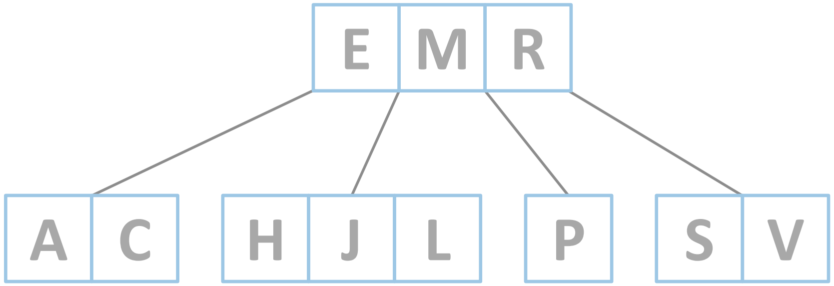
¡Listo!

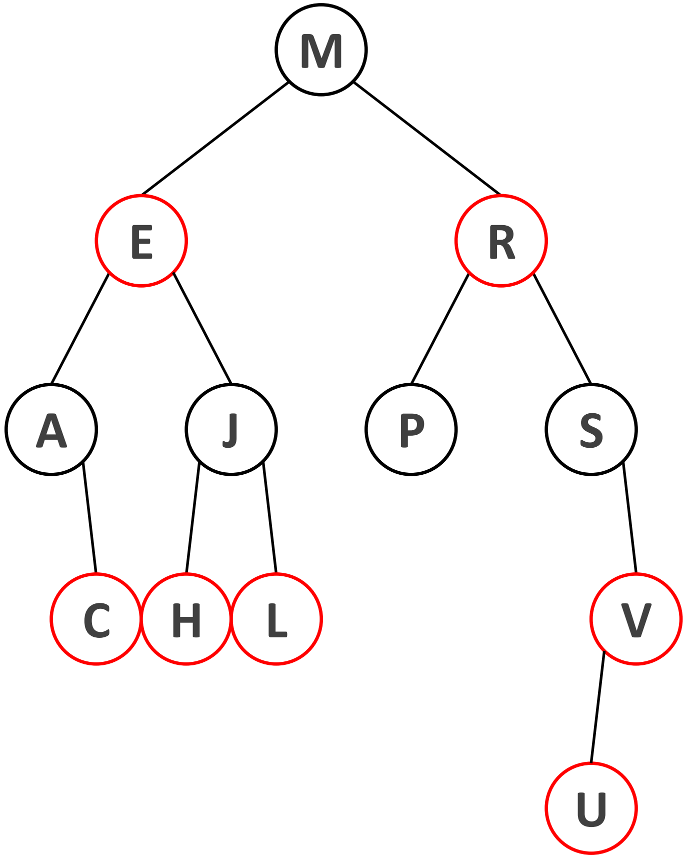
Veamos otra inserción en el árbol original: la clave *U*





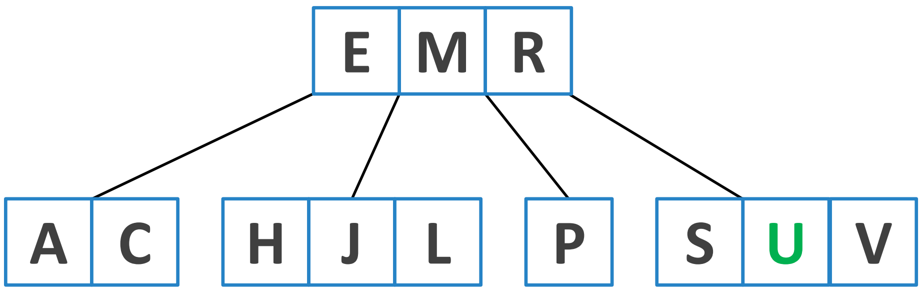
Insertemos la *U* en el rojo-negro

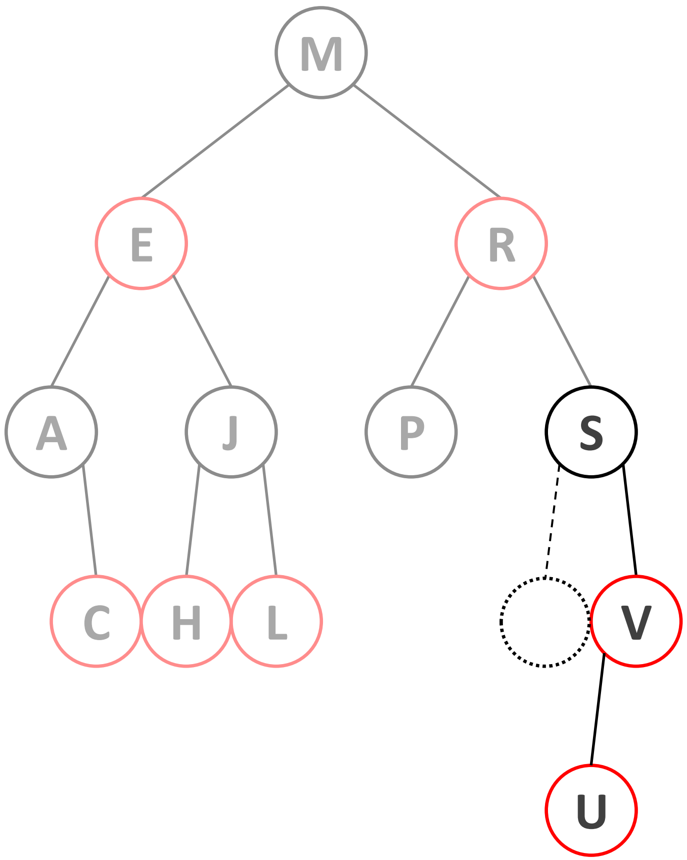




Nuevamente, el nodo recién insertado se pinta **rojo**

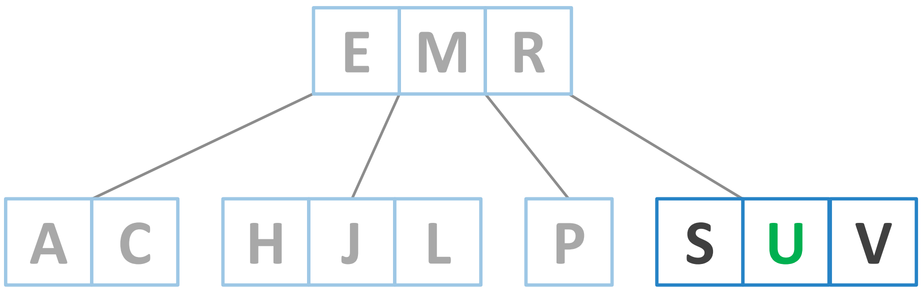
… y también en el 2-4

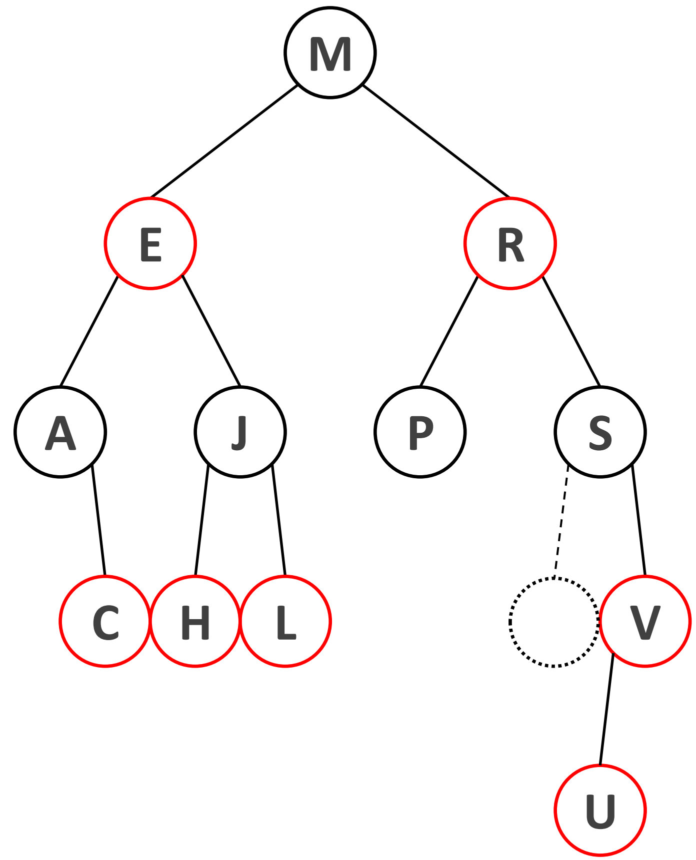




Nuevamente, el tío del nodo insertado es **negro**

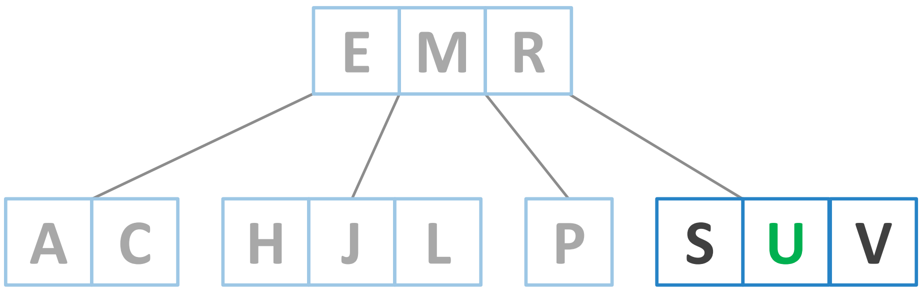
La configuración del nodo “*S U V*” nos sugiere qué hacer en el árbol rojo-negro

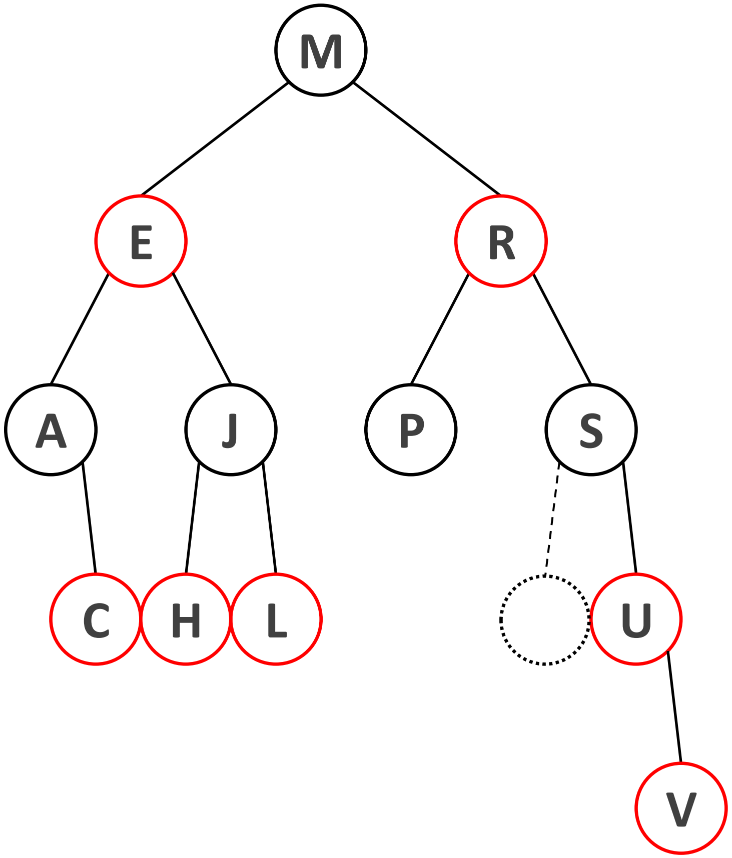




1) Rotación en torno a *U-V*

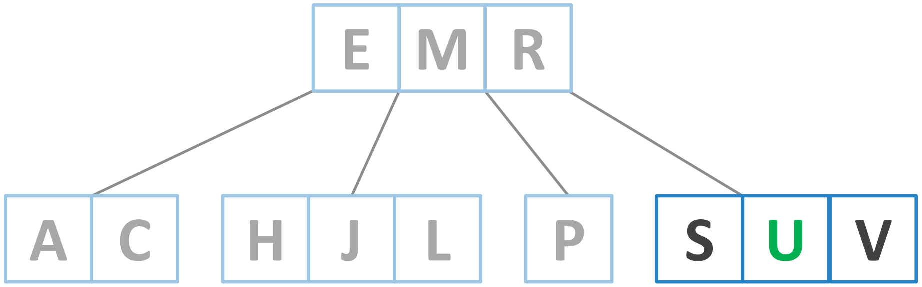
Una rotación no basta

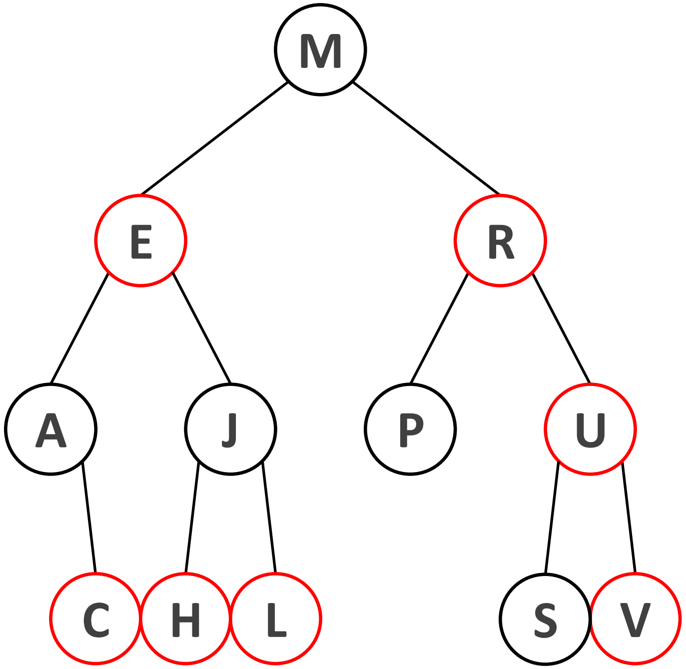




2) Segunda rotación, en torno a *S-U*

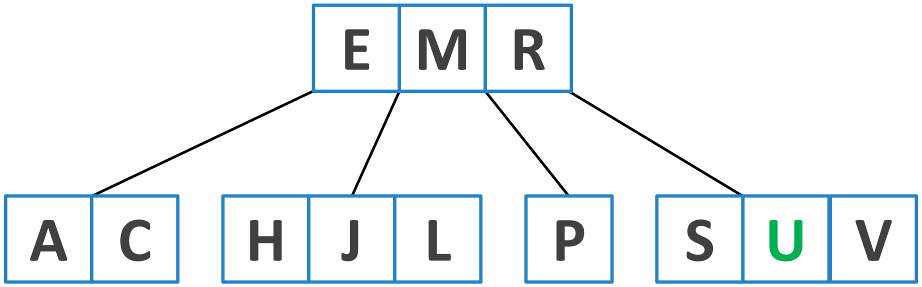
… hacemos una segunda rotación

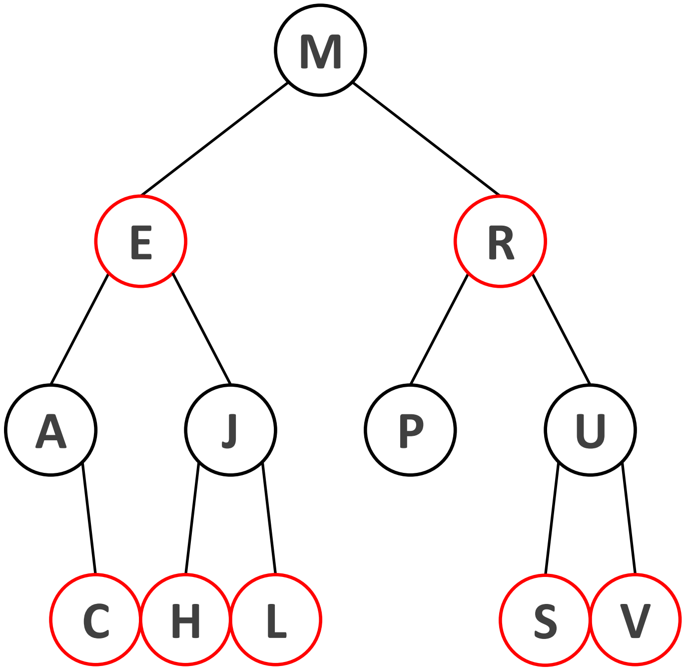




3) Cambio de color de *S* y *U*

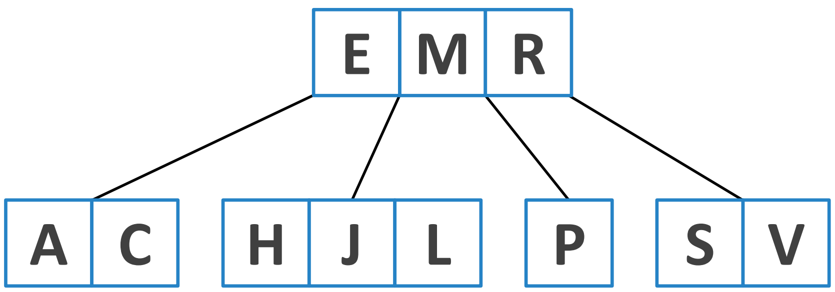
… y también cambiamos colores

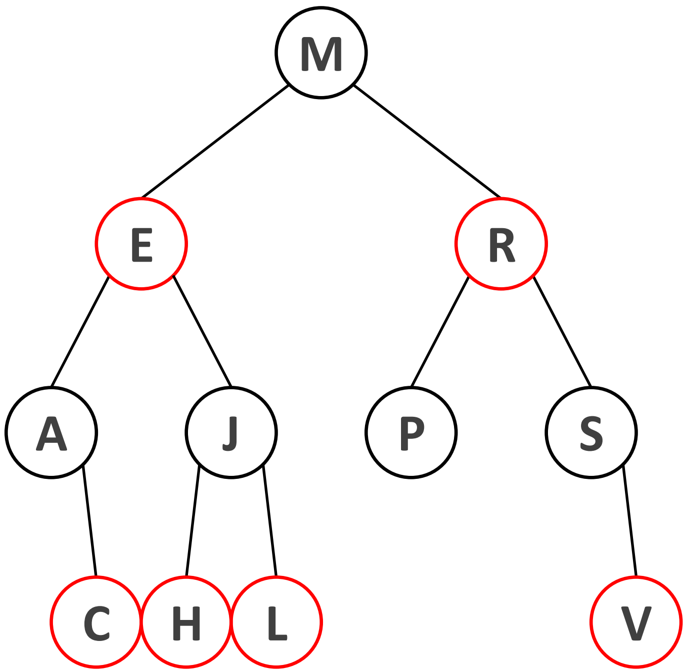




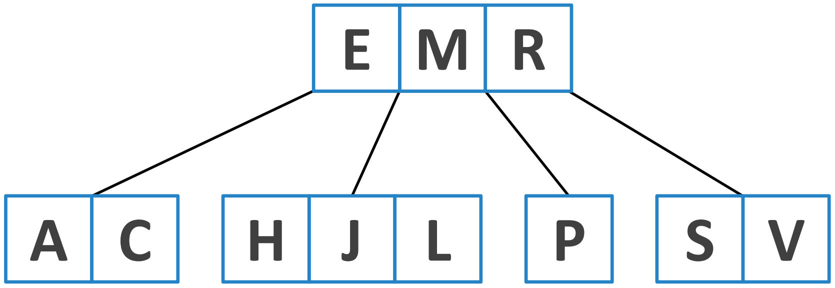
¡Listo!

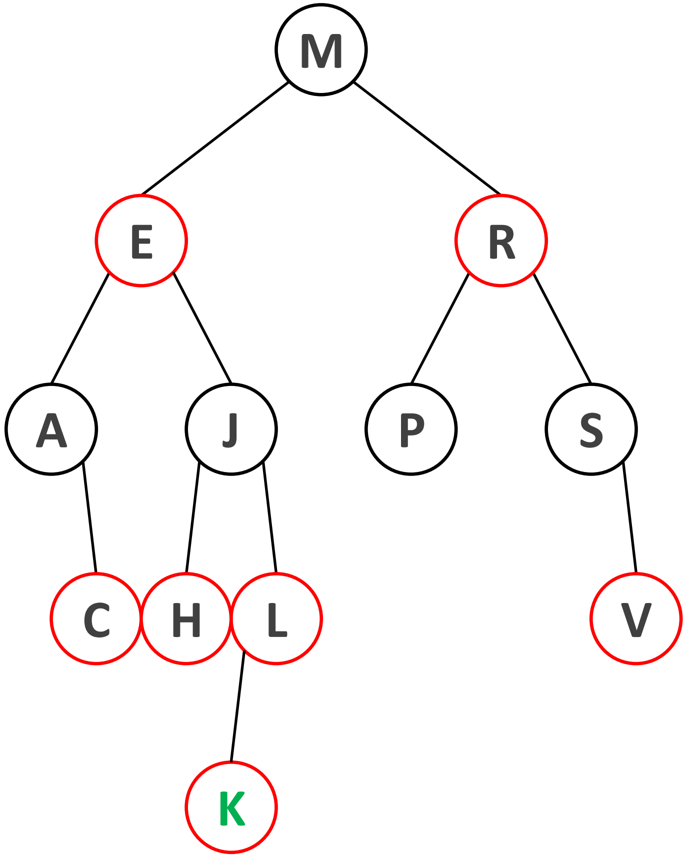
Hagamos una tercera inserción en el árbol original: la clave *K*





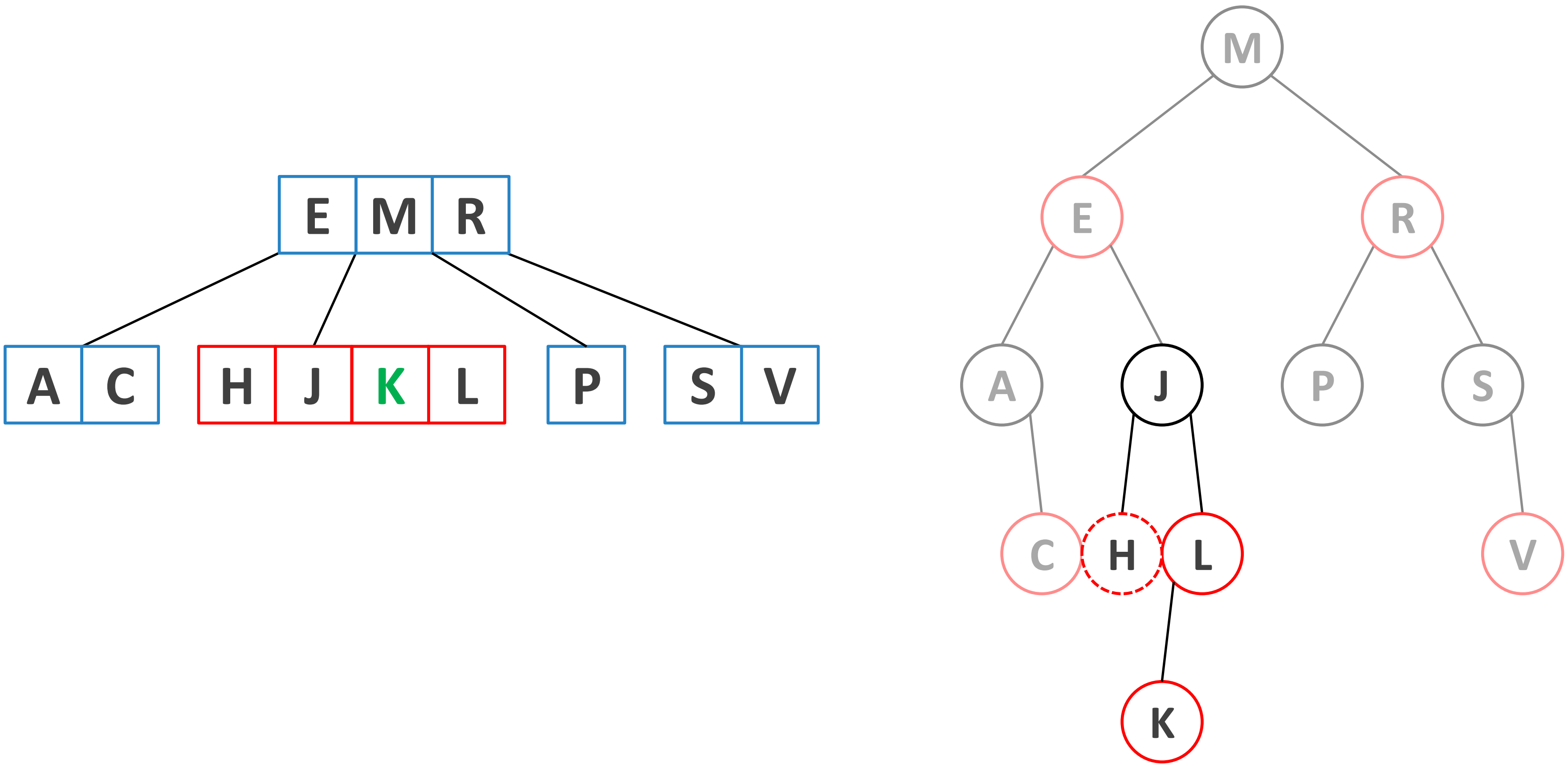
Insertemos la *K* en el árbol rojo-negro





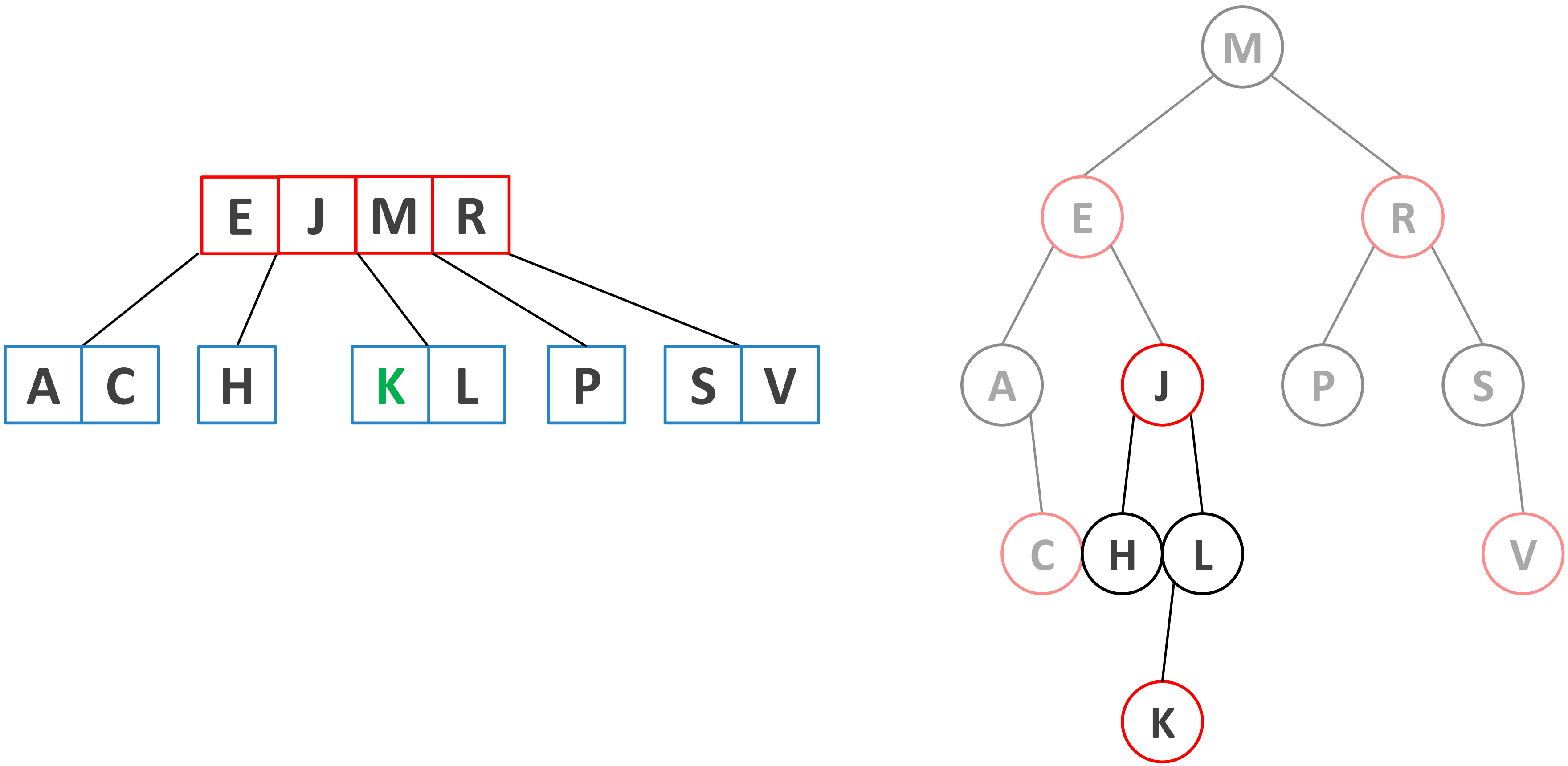
El nodo se inserta **rojo**

… y también en el árbol 2-4



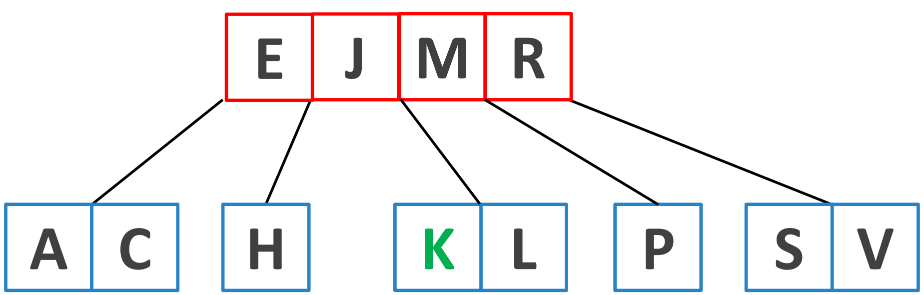
El tío del nodo insertado es **rojo**

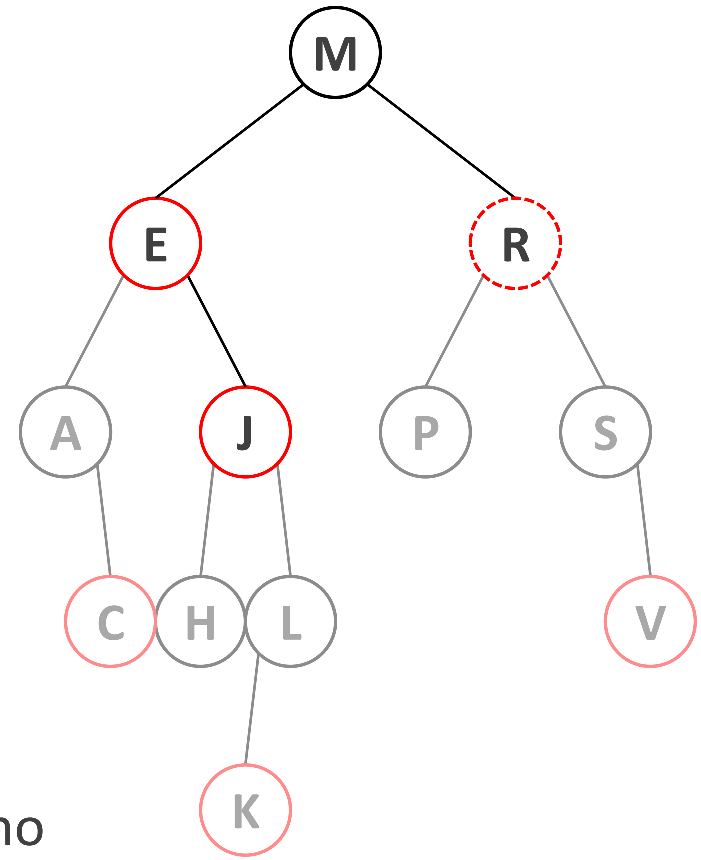
¿Qué pasa en el árbol 2-4
y cómo se refleja en el árbol rojo-negro?



1) Cambio de color

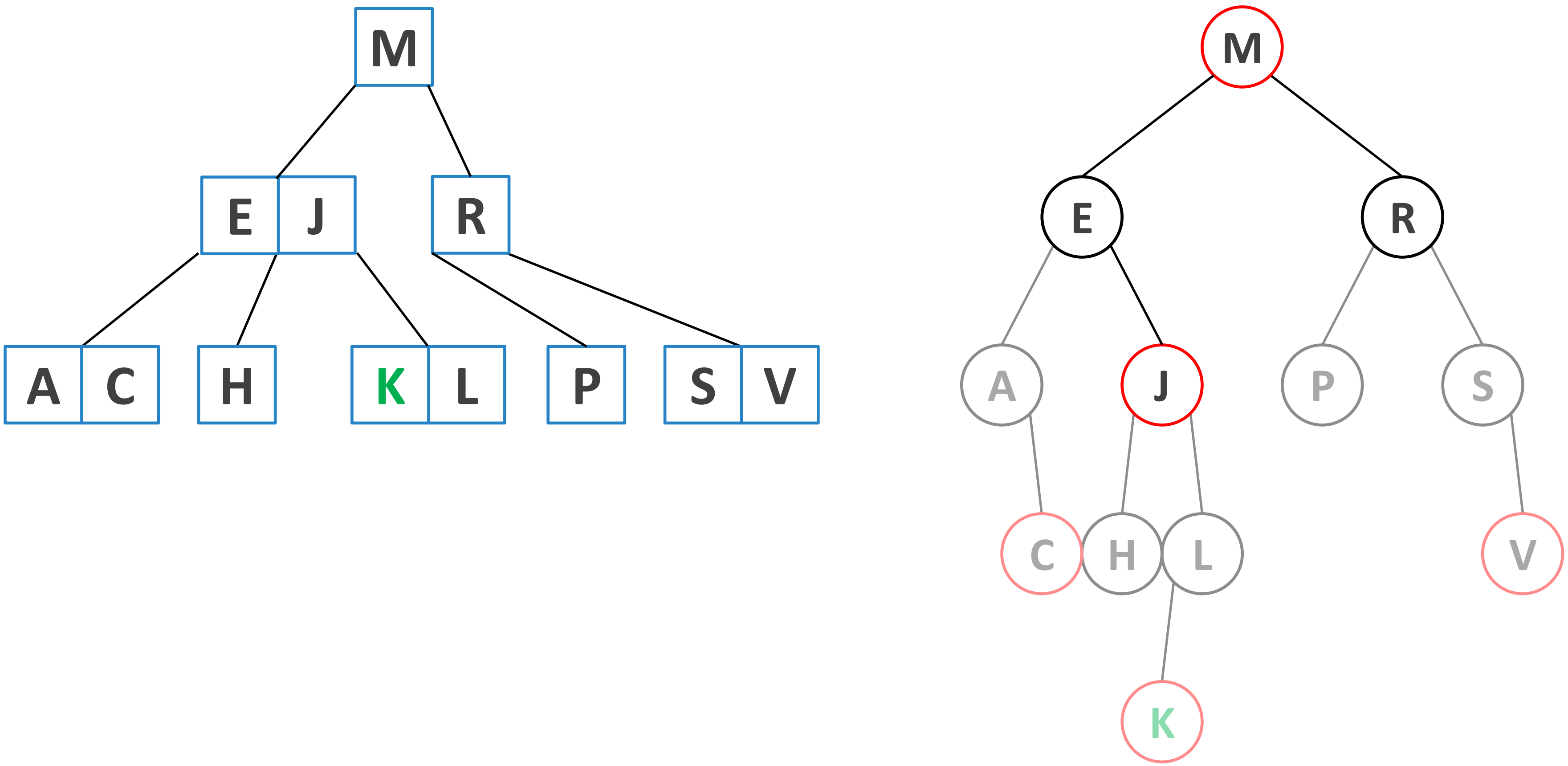
“Subimos” el problema de un nodo rojo con un hijo rojo





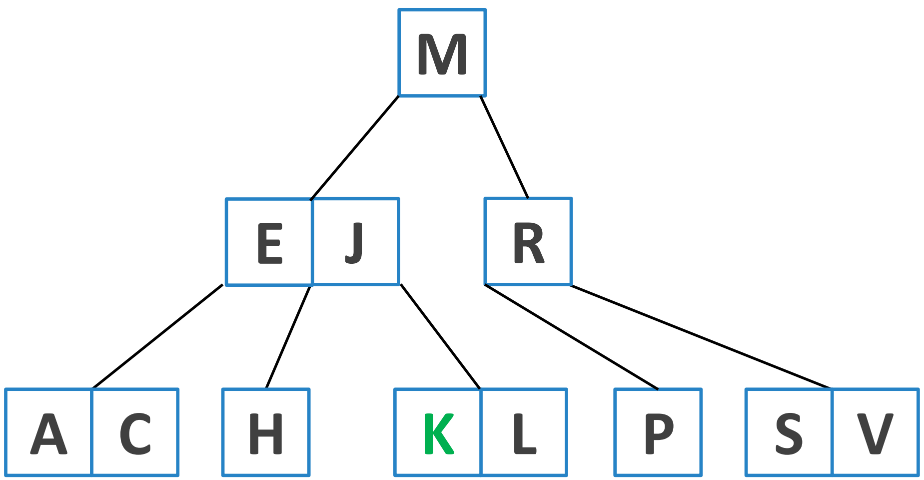
(en este caso) Volvemos a enfrentar el mismo problema: El tío del nodo con clave *J* es **rojo**

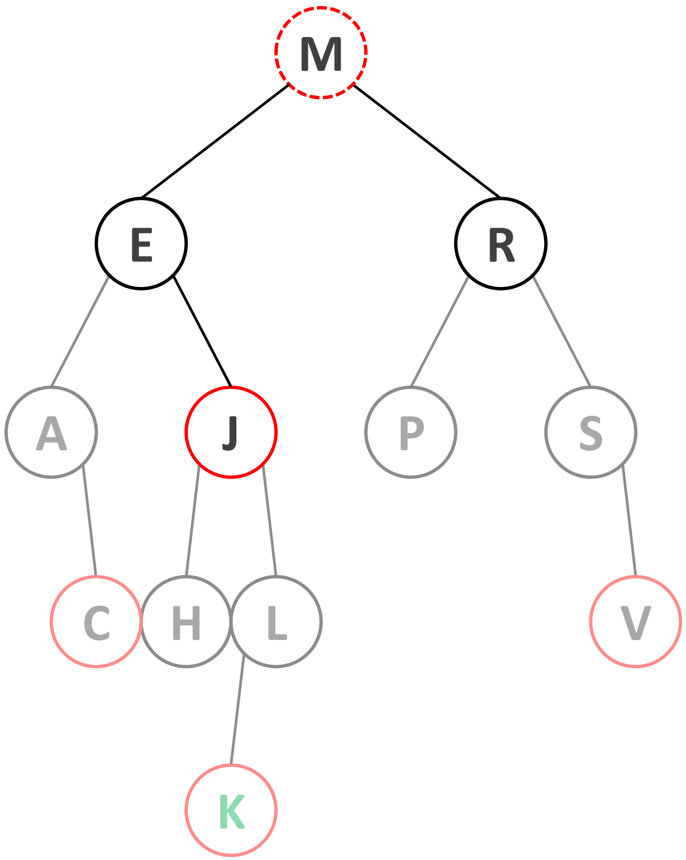
En el árbol 2-4 creamos una nueva raíz “arriba” de la que había



2) (recursivamente) Cambio de color

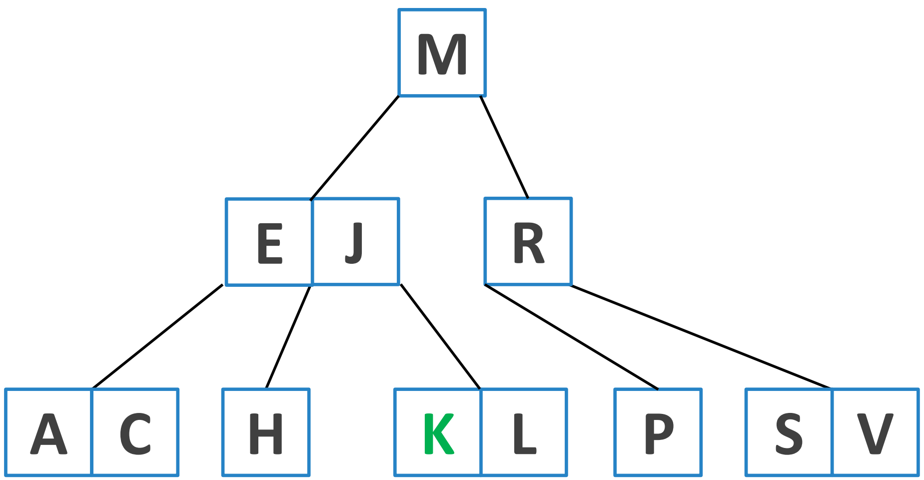
En el árbol rojo-negro, si la raíz se vuelve roja …

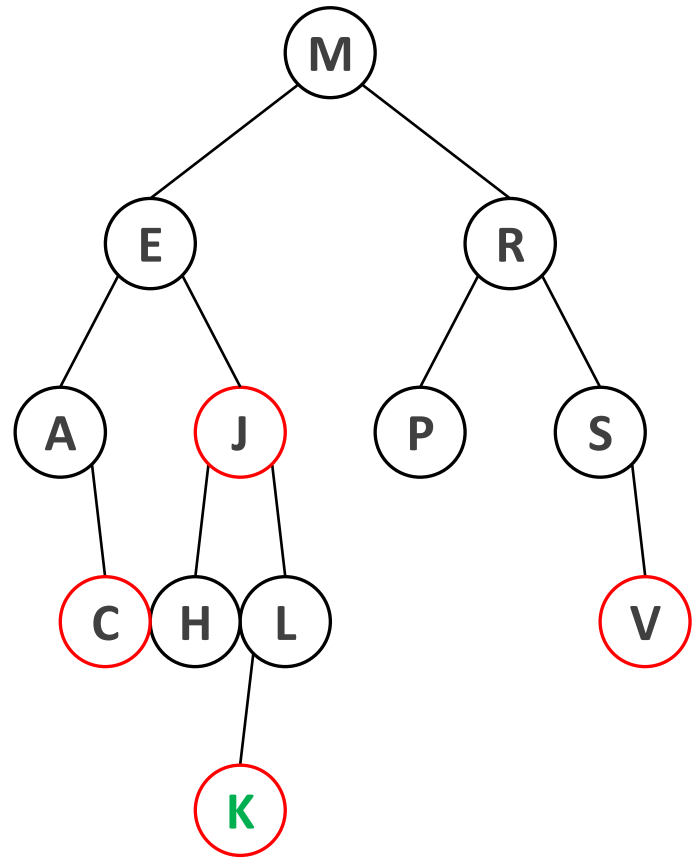




3) La raíz es roja: se cambia a negro

… simplemente la pintamos de negro





¡Listo!

Inserción en árboles rojo-negros

Los nodos siempre se insertan rojos

Si su padre es rojo, hay dos casos según el color del tío:

- Si el tío es negro, tenemos el aumento de grado en el nodo del 2-4
  - Se soluciona con rotaciones y cambios de color. No genera más conflictos.
- Si el tío es rojo, tenemos el caso en que el nodo del 2-4 rebalsa
  - Se soluciona cambiando colores. Puede generar el mismo caso hacia arriba.

Ejercicio propuesto

Demuestra que la altura de un árbol rojo-negro con n nodos es $O(\log n)$