Propiedades de QuickSort

Clase 05

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

Sumario

Repaso: Versión *in place* de `Partition`

input : Arreglo $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$
$p \leftarrow A[x]$
$A[x] \rightleftarrows A[f]$
$j \leftarrow i$
for $k = i \ldots f - 1$ **:**
  if $A[k] < p$ **:**
    $A[j] \rightleftarrows A[k]$
    $j \leftarrow j + 1$
$A[j] \rightleftarrows A[f]$
return j

Con este cambio, `Quicksort` usa memoria adicional $\mathcal{O}(1)$

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

								p ↓		
7	3	5	2	1	9	7	8	6	4	3

										p ↓
7	3	5	2	1	9	7	8	3	4	6

`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

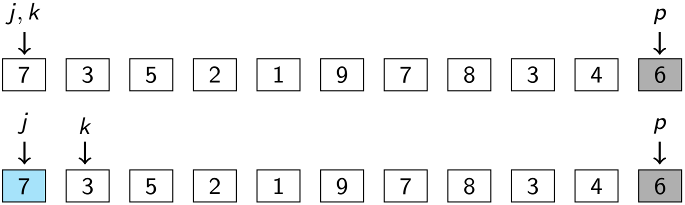
  if $A[k] < p$ **:**

    $A[j] \rightleftarrows A[k]$

    $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

    if $A[k] < p$ **:**

        $A[j] \rightleftarrows A[k]$

        $j \leftarrow j + 1$

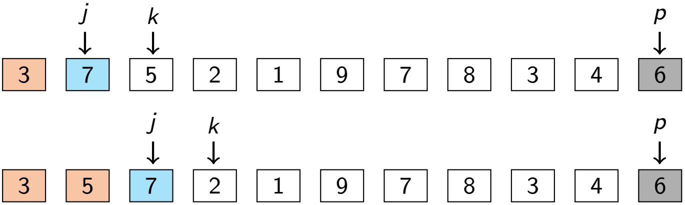
$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j

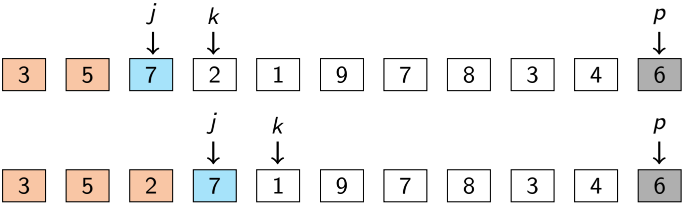
$j \downarrow$	$k \downarrow$									$p \downarrow$
7	3	5	2	1	9	7	8	3	4	6

	$j \downarrow$	$k \downarrow$								$p \downarrow$
3	7	5	2	1	9	7	8	3	4	6

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

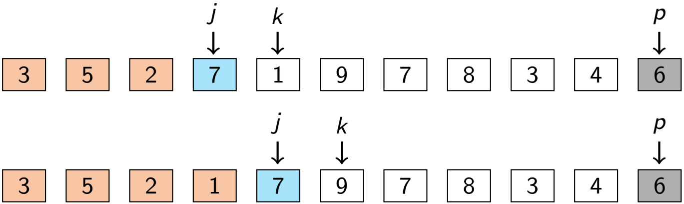


```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



`Partition` (A, i, f):

```
x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
A[x] ⇄ A[f]
j ← i
for k = i ... f − 1 :
    if A[k] < p :
        A[j] ⇄ A[k]
        j ← j + 1
A[j] ⇄ A[f]
return j
```



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

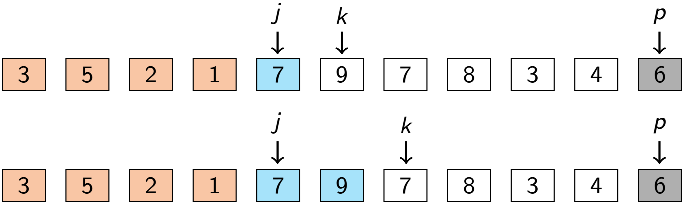
  if $A[k] < p$ **:**

    $A[j] \rightleftarrows A[k]$

    $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

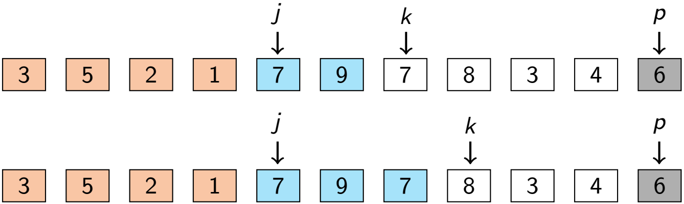
  if $A[k] < p$ **:**

    $A[j] \rightleftarrows A[k]$

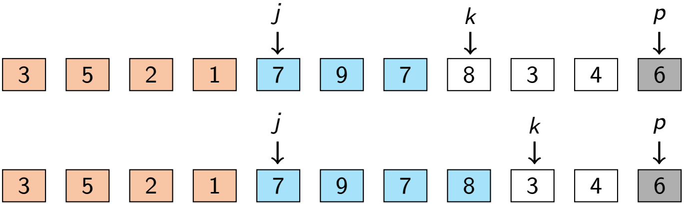
    $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

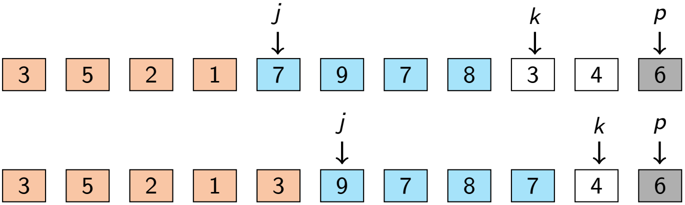
return j



```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, . . . , f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i . . . f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

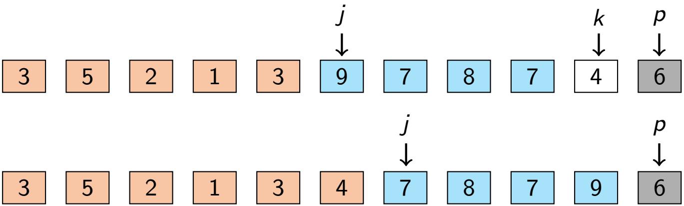
    if $A[k] < p$ **:**

        $A[j] \rightleftarrows A[k]$

        $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

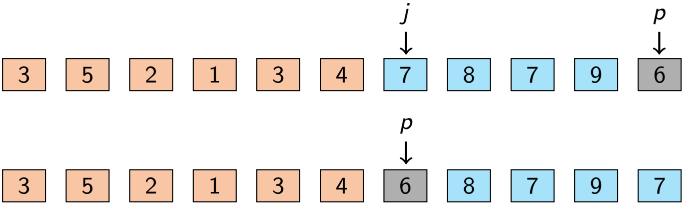
  if $A[k] < p$ **:**

    $A[j] \rightleftarrows A[k]$

    $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j



Repaso: Ordenar con `Partition`

Podemos usar la estrategia dividir para conquistar

1. División del problema en dos sub-problemas con `Partition`
2. Aplicar recursivamente `Partition` para cada sub-secuencia
3. No necesitamos combinar nada: la secuencia queda ordenada

Llamaremos **Quicksort** a este algoritmo

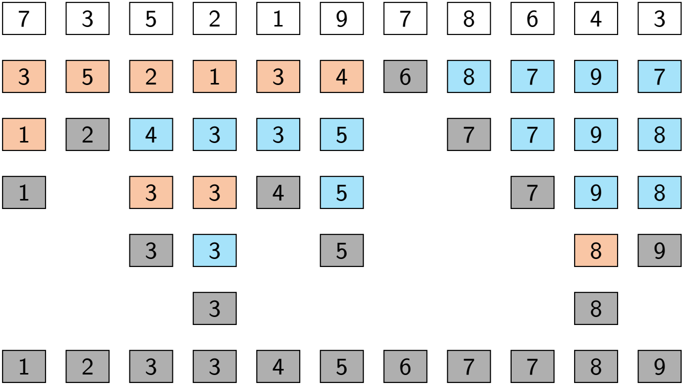
Repaso: `Quicksort`

input : Secuencia $A[0,\ldots,n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

```
QuickSort (A, i, f):
    if i ≤ f :
        p ← Partition(A, i, f)
        Quicksort(A, i, p − 1)
        Quicksort(A, p + 1, f)
```

El llamado inicial es $\texttt{Quicksort}(A, 0, n-1)$

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de `Partition`
- ☐ Demostrar correctitud de `Quicksort`
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de `Quicksort`
- ☐ Comprender posibles mejoras para `Quicksort`

Sumario

Correctitud de `Partition`

Ejercicio

Demuestre que `Partition` es correcto

input : Arreglo $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

`Partition` (A, i, f)**:**

    $x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$
    $p \leftarrow A[x]$
    $A[x] \rightleftarrows A[f]$
    $j \leftarrow i$
    for $k = i \ldots f-1$ **:**
        if $A[k] < p$ **:**
            $A[j] \rightleftarrows A[k]$
            $j \leftarrow j + 1$
    $A[j] \rightleftarrows A[f]$
    return j

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada $\texttt{Partition}(A, i, f)$ se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. $\square$

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia. Para esto, dado que en la línea final se pone el pivote en la posición j, demostraremos la siguiente propiedad para un pivote p dado

$\mathbf{P(n)}$:= Luego de la n-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo elementos mayores o iguales a p

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$ es el estado de $A[i \ldots k-1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
   - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \ldots j-1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \ldots k-1]$ no tiene elementos pues $j = k$.
   - Si $A[i] \geq p$, no se aumenta j y sí k, por lo tanto $A[i \ldots j-1]$ considera 0 elementos y $A[j \ldots k-1]$ tiene un elemento mayor o igual a p.

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p. Además, como los datos de $A[j \dots k-1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
   - Si $A[k] \geq p$, no se aumenta j y no se hacen intercambios. Por **H.I.** los elementos en $A[i \dots j-1]$ son menores a p y como $A[k]$ al igual que los elementos de $A[j \dots k-1]$ son mayores o iguales, luego de aumentar k el rango $A[j \dots k-1]$ sigue cumpliendo la propiedad. $\square$

Correctitud de `Quicksort`

Ejercicio

Demuestre que `Quicksort` es correcto

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

`QuickSort` (A, i, f)**:**

if $i \leq f$ **:**
    $p \leftarrow \texttt{Partition}(A, i, f)$
    $\texttt{Quicksort}(A, i, p-1)$
    $\texttt{Quicksort}(A, p+1, f)$

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de `Quicksort` se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada $\texttt{Quicksort}(A, i, f)$ establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

- Si $d < 0$, `Quicksort` termina sin hacer más llamados recursivos

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

  $$d_1 = p - 1 - i < d \qquad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

  Es decir, con cada llamado resursivo d disminuye al menos en 1.

Con ambos casos, tenemos que en cada llamado se reduce al menos en 1 el tamaño de la instancia y el algoritmo termina al llegar a tamaño 0.

Como el llamado inicial es $\texttt{Quicksort}(A, 0, n - 1)$, la profundidad máxima de la recursión es $n - 1$ y por lo tanto, el algoritmo termina. □

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \ldots, n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado $\texttt{Quicksort}(A, i, f)$ verifica si hay elementos en el rango $i \ldots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i > 0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f - i - 1$ elementos

Dado que en cada llamado no vacío se escoge un pivote, los llamados siempre reducen su tamaño y el algoritmo solo deja de hacer recursión cuando el llamado es vacío, todo elemento es escogido pivote en algún llamado. Como `Partition` es correcto, todo elemento queda ordenado. □

Sumario

Quicksort

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f

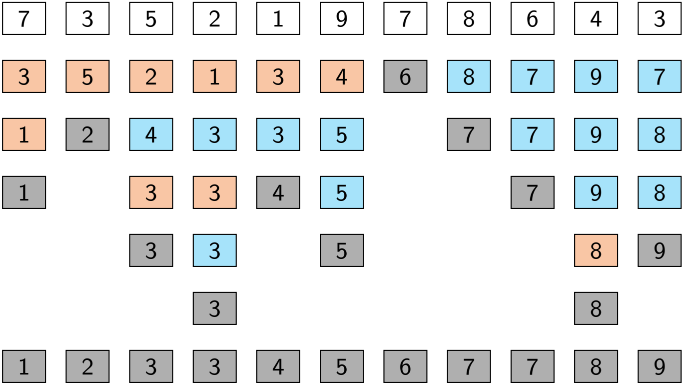
output: $\varnothing$

`QuickSort` (A, i, f)**:**

```
if i ≤ f :
    p ← Partition(A, i, f)
    Quicksort(A, i, p − 1)
    Quicksort(A, p + 1, f)
```

¿Cuál es la complejidad de `Quicksort` en los distintos casos?

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- `Partition` genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n - 1)$
- Complejidad $\mathcal{O}(n^2)$

¿Qué hay del caso promedio?

Caso promedio de `Quicksort`

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

```
  Partition (A, i, f):
1     x ← índice aleatorio en
        {i, . . . , f};    p ← A[x]
2     A[x] ⇄ A[f]
3     j ← i
4     for k = i . . . f − 1 :
5         if A[k] < p :
6             A[j] ⇄ A[k]
7             j ← j + 1
8     A[j] ⇄ A[f]
9     return j
```

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de `Partition`, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Definimos

$$C(n) := \quad \# \text{ comp. } A[k] < p \text{ en } \texttt{Quicksort}$$

Encontraremos una ecuación de recurrencia para $C(n)$

Caso promedio de `Quicksort`

`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$
$A[x] \rightleftarrows A[f]$
$j \leftarrow i$
for $k = i \ldots f - 1$ **:**
  if $A[k] < p$ **:**
    $A[j] \rightleftarrows A[k]$
    $j \leftarrow j + 1$
$A[j] \rightleftarrows A[f]$
return j

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que `Partition` termina retornando q, i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de `Quicksort` se harán sobre los
  - q elementos a la izq
  - $n - q - 1$ elementos a la der
- Los llamados recursivos aportan

$$C(q) + C(n - q - 1)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) \; = \; n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(C(q) + C(n - q - 1) \right)$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) \;\; = \;\; C(n - 1) + C(n - 2) + \cdots + C(0) \;\; = \;\; \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

obtenemos la regla simplificada

$$C(n) \; = \; n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) \;=\; n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de `Quicksort`
- $C(1) = 0$, pues `Partition` no itera si hay un solo elemento

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$\begin{aligned} nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\ (n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q) \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{C(n)}{n+1} &= \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} \\ &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Caso promedio de Quicksort

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\dots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{2}{x} dx = 2\log(n)
\end{aligned}
$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

$$C(n) \leq 2(n+1)\log(n)$$

Quicksort es $\mathcal{O}(n\log(n))$ en el caso promedio

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
  - Mejora para caso con datos repetidos
  - Evita que `Partition` particione innecesariamente sub-secuencias en que todos los valores son iguales

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Heap Sort	?	?	?	?

Sumario

Ideas al cierre

- No todo algoritmo dividir para conquistar busca resolver todos los sub-problemas
- Particionar uan secuencia con un pivote nos informa de su posición ordenada
- `Partition` puede ser usado para encontrar estadísticos de orden en `Median`
- `Partition` puede ser usado para ordenar en `Quicksort`
- `Median` y `Quicksort` siguen la estrategia dividir para conquistar