# *Hashing* y tablas de *hash*

Estructuras de Datos y Algoritmos

2021-2

Yadran Eterovic

## Un **diccionario** es una estructura de datos con las siguientes operaciones

**Asociar** un **valor** (p.ej., un archivo con la solución de la tarea 1) a una **clave** (p.ej., un rut o número de alumno)

… o **actualizar** el valor asociado a la clave (p.ej., cambiar el archivo)

**Obtener** el **valor** asociado a una **clave**

(… y en ciertos casos )

**Eliminar** del diccionario una **clave** y su **valor** asociado

# Así, la idea de un diccionario es …

… si me dan el rut (la clave), entonces yo quiero encontrar el archivo

…. si me dan el rut y me doy cuenta de que ese rut no está en mis registros (el diccionario), entonces ingresar el rut a mis registros

… si me dan el rut y me doy cuenta de que no hay un archivo asociado, entonces asociar un archivo al rut

… si me dan el rut y me doy cuenta de que tiene un archivo asociado, entonces cambiar el archivo por uno más actual

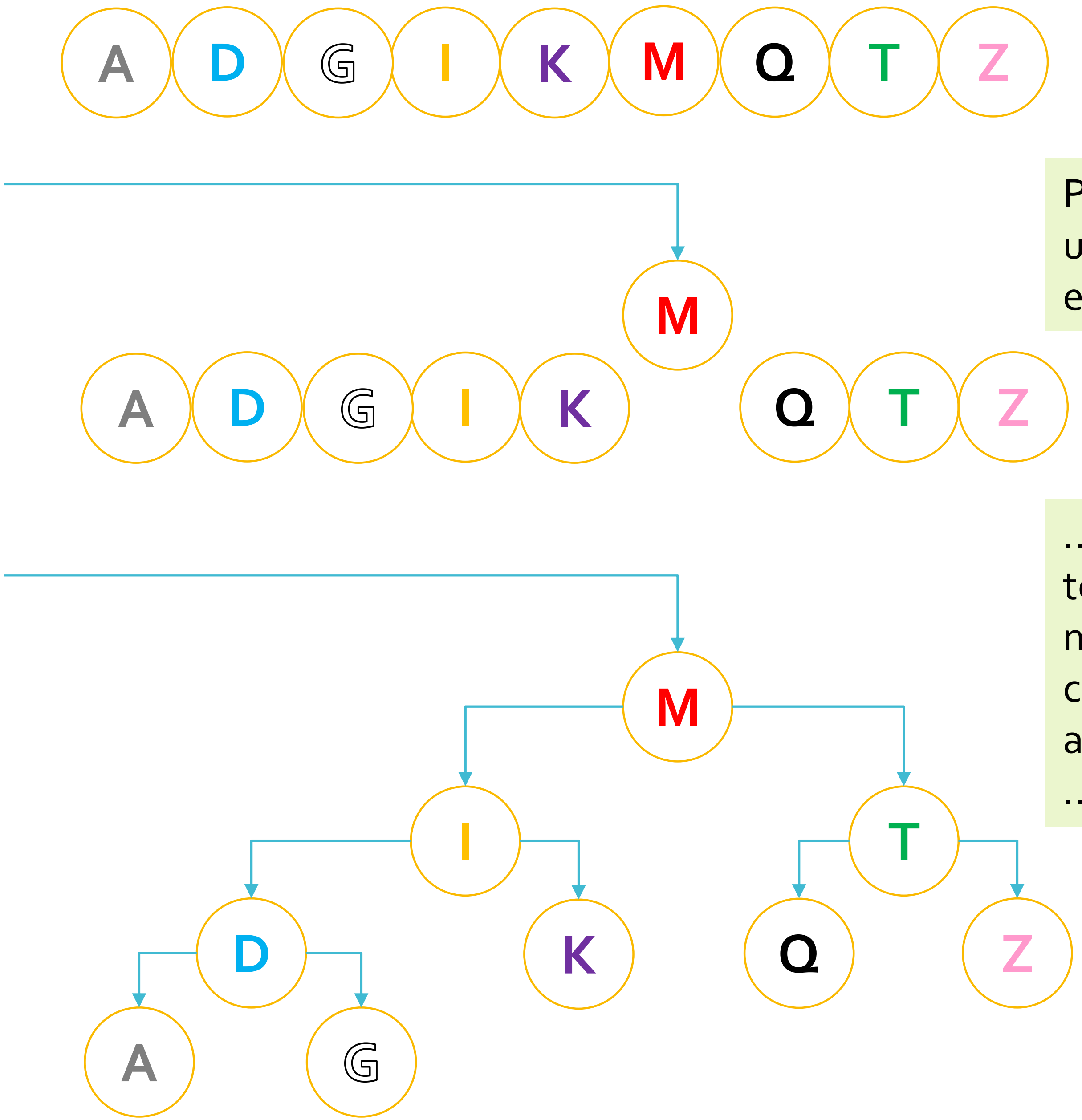
# La búsqueda es lo primero … y, si lo buscado no está, entonces (posiblemente) la inserción es lo segundo

O sea, a partir de la clave, lo primero es buscarla (eficiente-mente) en el diccionario

Si la encontramos, entonces ahora tenemos acceso a la información asociada a la clave

… si no la encontramos, entonces, tal vez, queremos ingresarla al diccionario junto al resto de la información correspondiente

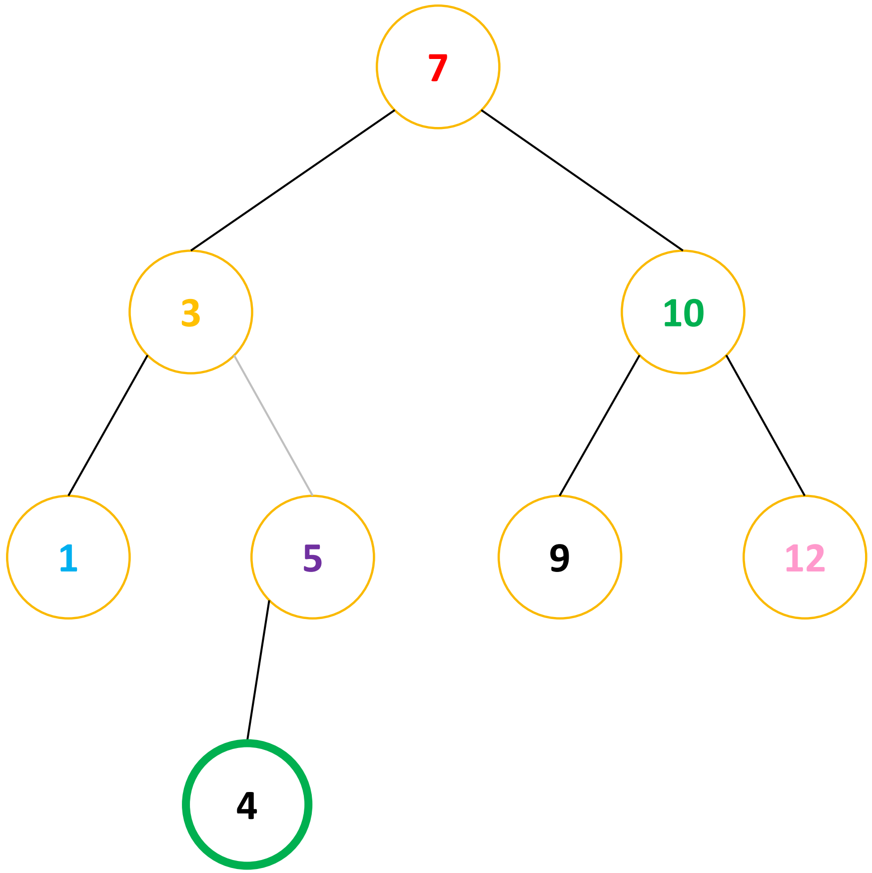
Lo que hicimos anteriormente, a partir de las ventajas y desventajas de arreglos y listas ligadas ...




Podemos tener un puntero a un elemento más o menos en el centro de la lista

... y ese elemento puede tener punteros a elementos más o menos en el centro de cada una de las dos sublistas, a su izquierda y a su derecha; ... y así recursivamente

... es que implemen-tamos un diccionario como un ABB




Los nodos del árbol contienen las claves

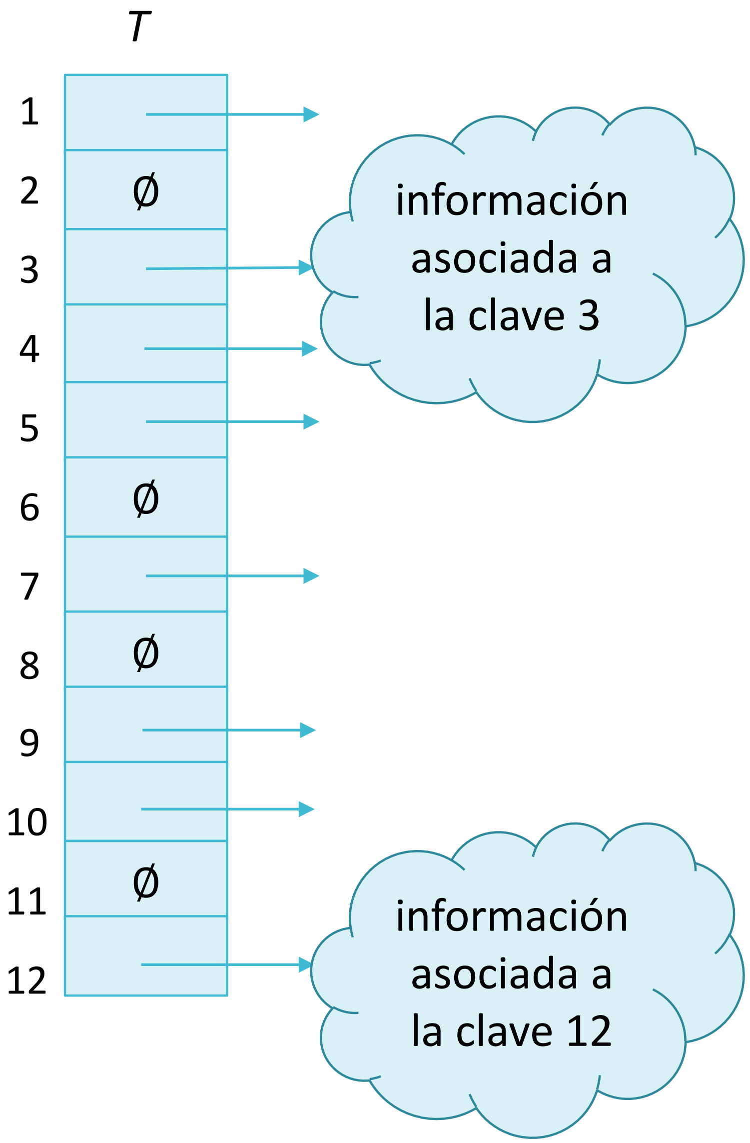
... que están ***totalmente ordenadas***

**(** además, contienen punteros

... tanto para mantener el árbol unido y poder recorrerlo —al buscar—

... como para tener acceso a la información asociada a la clave **)**

Si las claves realmente fueran los números del 1 al 12, podría-mos usar un arreglo *T* (de punteros)




La búsqueda de (el objeto con) la clave $k$ es ahora muy rápida:

- $T[k] = \emptyset \;\Rightarrow\;$ el objeto no está
- $T[k] \neq \emptyset \;\Rightarrow\;$ el objeto está

En principio, no es necesario almacenar las claves:

- son los índices del arreglo

… y no es necesario almacenar punteros a los hijos o al padre:

- sólo a la información asociada a la clave
- para recorrer el arreglo sólo hace falta cambiar el valor del índice

# Esto funciona bien para ciertos tipos de claves

Números enteros (digamos, no negativos) en un rango razonable, tal que puedan ser usadas como índices de arreglos:

- p.ej., en IIC2343 hay 220 estudiantes este semestre

  … si el profesor, los ayudantes y cada uno de los estudiantes supiera su posición en la lista del curso, entonces podríamos usar ese número como clave y como índice del arreglo *T* (de punteros)

- p.ej., en la universidad hay aprox. 25,000 estudiantes este año

  … si a cada uno se le asignara un número único entre 1 y 25,000 y todos los involucrados supiéramos esos números, entonces podríamos usar esos números como claves y como índices del arreglo *T*

# Pero la realidad de las claves …

¿Qué pasa si las claves son los rut’s de las personas?

# Pero la realidad de las claves hace que usarlas directamente como índices del arreglo …

P.ej., en el caso de los estudiantes de la universidad:

- el rango de los rut’s abarca hasta el número 25,000,000

  … pero la universidad sólo tiene 25,000 estudiantes

  … en promedio, sólo una de cada 1,000 casillas del arreglo estaría ocupada

¿Y si las claves son los números de los teléfonos celulares

… o las patentes de los vehículos?

# Pero la realidad de las claves hace que usarlas directamente como índices del arreglo no sea práctico

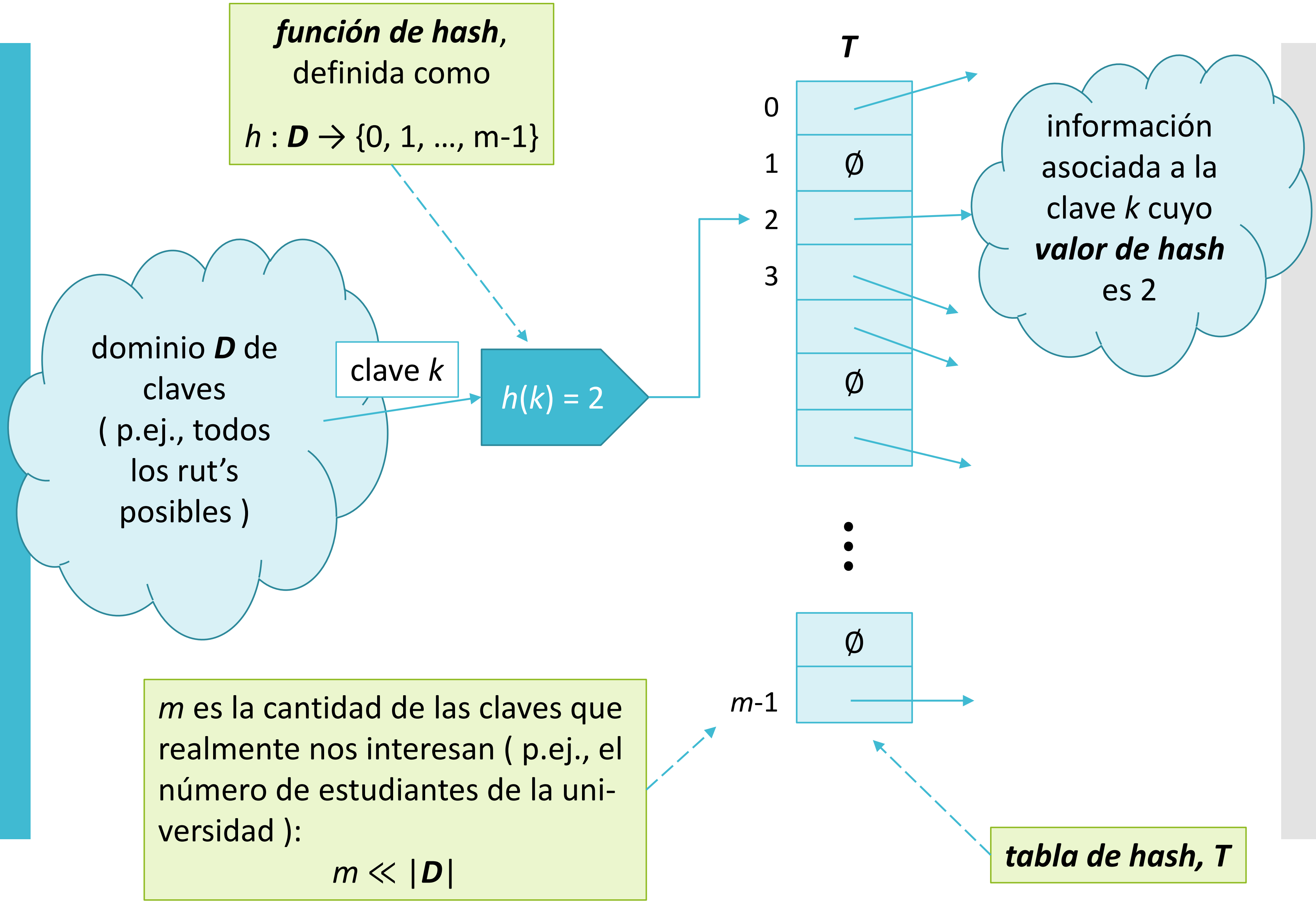
Según la naturaleza de los datos, las claves pueden pertenecer a dominios muy variados

… y de cardinalidades muy grandes en comparación a la cantidad de datos que nos interesan:

- p.ej., si las claves fueran strings de 10 letras mayúsculas

  … entonces habría algo más de 140 millones de millones ($1.4 \times 10^{14}$) claves distintas

La solución es usar ***hashing***:
- la clave no se usa directamente como índice
- el índice **se calcula** a partir de la clave



# Propiedades de hashing: funciona “casi” como un arreglo

Hashing se comporta “casi” como un arreglo:

- en un arreglo, buscar el dato con clave *k* consiste simplemente en mirar $T[k]$ → es O(1) (diap. 7)
- en hashing, buscar el dato con clave *k* consiste en mirar $T[h(k)]$ → es O(1) pero sólo **en promedio**, como vamos a ver

# Propiedades de hashing: el orden de las claves no importa

En hashing el orden relativo de las claves **no importa**:

- comparar claves entre ellas (para determinar cuál es mayor)

  … o, dada una clave, encontrar la clave predecesora

  … **no son** operaciones de diccionario (diap. 2)

**(** En este sentido, los ABBs son en realidad diccionarios con operaciones adicionales:

- ABB = diccionario + *cola de prioridades* **)**

## Una típica fun-ción de hash:

## ***h*(*k*) = *k* mod *m***

## hashing modular

… es decir, **el resto de la división (entera) de *k* por *m***

… que efectivamente es un valor entre 0 y $m$–1

En el ej. a la derecha, el dominio son los números entre 000 y 999

… y se muestran los valores de hash para algunas claves cuando $m$ = 100 y cuando $m$ = 97

| $k$ | $h(k)$ $m$=100 | $h(k)$ $m$=97 |
|---|---|---|
| 212 | 12 | 18 |
| 618 | 18 | 36 |
| 302 | 2 | 11 |
| 940 | 40 | 67 |
| 702 | 2 | 23 |
| 704 | 4 | 25 |
| 612 | 12 | 30 |
| 606 | 6 | 24 |
| 772 | 72 | 93 |
| 304 | 4 | 13 |
| 423 | 23 | 35 |
| 650 | 50 | 68 |
| 317 | 17 | 26 |
| 907 | 7 | 34 |
| 507 | 7 | 22 |

## Si $k_1 \neq k_2$, pero $h(k_1) = h(k_2)$, entonces tenemos una **colisión** (en la tabla de hash)

Como vemos en el ej. anterior, en particular en la columna para *m* = 100, en hashing pueden ocurrir **colisiones**:

$h(212) = 12$ y $h(612) = 12$

$h(907) = 7$ y $h(507) = 7$

Es decir, para datos con distintas claves, su ubicación en la tabla es (o debería ser) la misma:

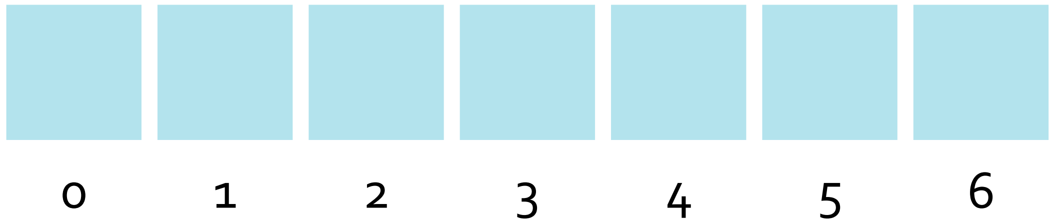
- ¿cómo podemos guardar ambos datos en la tabla?
- nos interesa poder buscarlos en el futuro

Como la cardinalidad del dominio, $|\boldsymbol{D}|$, es mucho mayor que el tamaño *m* de la tabla, las colisiones potenciales son inevitables

En los ejemplos que siguen:
- las claves son números enteros pequeños
- la tabla tiene $m$ = 7 casillas (con índices 0 a 6)

Insertemos la clave 15:

$$h(15) = 15 \bmod 7 \; = \; 1$$



(el dato con) la clave 15 queda en la casilla con índice 1

Insertemos la clave 15:

$$h(15) = 15 \bmod 7 \; = \; 1$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Similarmente para la clave 37 y la casilla con índice 2

Insertemos la clave 37:

$$h(37) = 37 \bmod 7 \;= 2$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

¿Qué hacemos si una nueva clave debería quedar en una casilla que ya está ocupada?
→**Colisión**: dos posibilidades

Insertemos la clave 51:

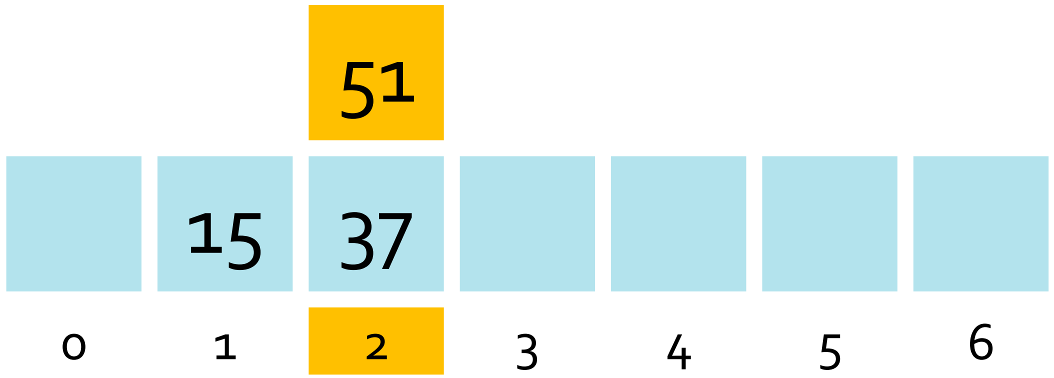
$$h(51) = 51 \bmod 7 \;= 2$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Una posibilidad es usar **enca-denamiento**: hacer una lista con las claves que van a una misma casilla

Insertemos la clave 51:

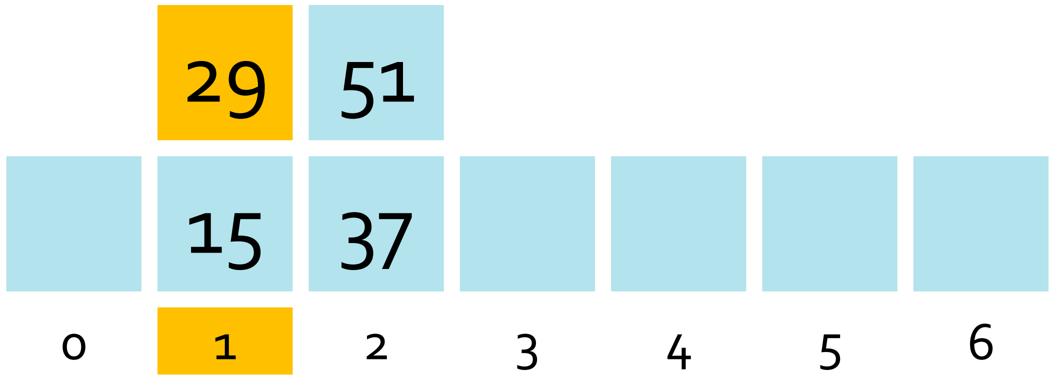
$$h(51) = 51 \bmod 7 = 2$$



# Similarmente para la clave 29 y la casilla con índice 1

Insertemos la clave 29:

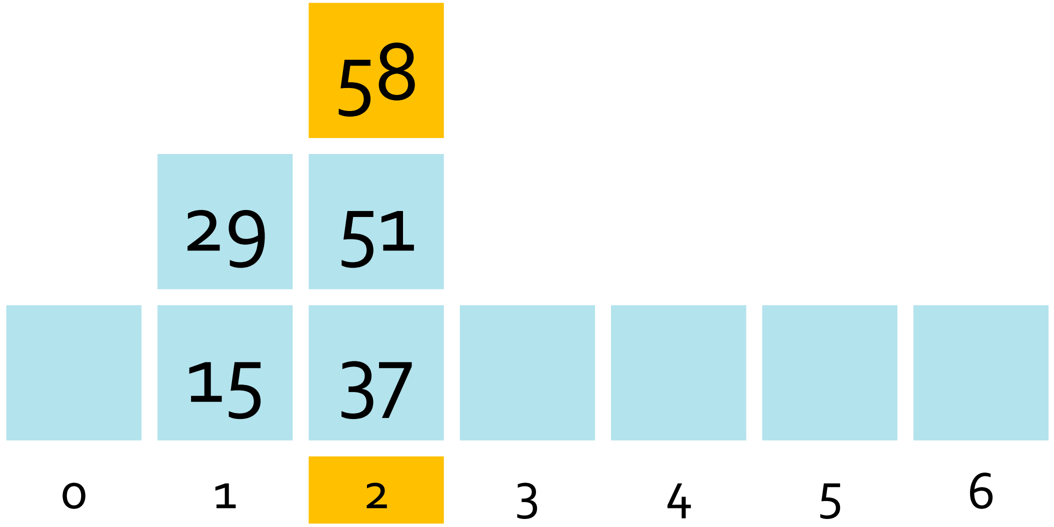
$$h(29) = 29 \bmod 7 \ = 1$$



Y similarmente para la clave 58 y nuevamente la casilla con índice 2

Insertemos la clave 58:

$$h(58) = 58 \bmod 7 \ = 2$$



# ¿Cómo buscamos una clave en una tabla de hash con encade-namiento?

Para buscar (el dato con) la clave $k$, primero calculamos el valor de hash $h(k)$ y miramos la casilla $\boldsymbol{T}[h(k)]$ :

- si $\boldsymbol{T}[h(k)]$ está vacía, entonces la clave $k$ no está en $\boldsymbol{T}$
- si $\boldsymbol{T}[h(k)]$ no está vacía, entonces apunta a una lista ligada de una o más claves, todas distintas entre ellas, pero que tienen el mismo valor de hash que la clave $k$

  … por lo tanto, buscamos $k$ en esta lista, p.ej., secuencialmente ($k$ puede estar o no en la lista)

# ¿Cómo eliminamos en una tabla de hash con encadenamiento?

Para eliminar la clave $k$ —suponiendo que la buscamos y la encontramos— simplemente la sacamos de la lista ligada en la que se encuentra

Otra forma de manejar colisiones es **direccionamiento abierto:** buscar sistemáticamente una casilla vacía

Insertemos las claves 15 y 37:

$$h(15) = 15 \bmod 7 \;=\; 1$$
$$h(37) = 37 \bmod 7 \;= 2$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

La clave 51 debería ir a parar a la casilla con índice 2, que ya está ocupada

Insertemos la clave 51:

$$h(51) = 51 \bmod 7 \ = 2$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

... entonces la ponemos en la *primera casilla desocupada a la derecha*: ***sondeo lineal***

Insertemos la clave 51:

$$h(51) = 51 \bmod 7 \ = 2$$

**Sondeo lineal**: a partir de la casilla identificada por el valor de hash de la clave (en este ej., la casilla 2)

... vamos mirando una por una las casillas a la derecha

... hasta que encontremos la primera casilla desocupada, y ahí ponemos la clave (en este ej., la casilla 3)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Ahora, la clave 29 debería ir a la casilla con índice 1, que también ya está ocupada

Insertemos la clave 29:

$$h(29) = 29 \bmod 7 \; = 1$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

## … empleando sondeo lineal, ponemos la clave 29 en la primera casilla desocupada a la derecha

Insertemos la clave 29:

$$h(29) = 29 \bmod 7 \ = 1$$

Empleando sondeo lineal, después de mirar la casilla 1, que está ocupada, miramos las casillas 2, que también está ocupada, y 3, lo mismo

… así que llegamos hasta la casilla 4, que está vacía, y ponemos ahí la clave 29

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | 29 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

# La búsqueda bajo sondeo lineal sigue la misma secuencia de comparaciones que al insertar

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | 29 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Buscamos la clave 29:

$$h(29) = 29 \bmod 7 = 1$$

Por lo tanto, miramos primero la casilla 1, y de ahí hacia la derecha las casilla 2, 3 y 4, donde finalmente encontramos la clave 29

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | 29 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Si durante una búsqueda llegamos a una casilla vacía, significa que la clave que buscamos no está en la tabla

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | 29 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Buscamos la clave 10:

$$h(10) = \ 10 \bmod 7 \ = 3$$

Por lo tanto, miramos primero la casilla 3, y de ahí hacia la derecha las casillas 4 y 5; como la casilla 5 está vacía, deducimos que la clave 10 **no está almacenada** en la tabla, porque de lo contrario, tendría que haber estado en esta casilla

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | 29 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

La eliminación es problemática: si es necesario poder eliminar claves, entonces es mejor usar encadenamiento

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | 51 | 29 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Eliminamos primero la clave 51
… y buscamos luego la clave 29:

$$h(29) = 29 \bmod 7 \ = 1$$

Miramos primero la casilla 1, y luego las casillas 2 y 3; como la casilla 3 está ahora vacía, deducimos **erróneamente** que la clave 29 no está almacenada en la tabla

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 37 | | 29 | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

# Con direcciona-miento abierto, podemos emplear otras políticas de sondeo

Sondeo lineal (el que vimos recién): si $h(k) = H$, entonces

- buscamos en $H$, $H + 1$, $H + 2$, $H + 3$, …
- también puede ser $H$, $H + d$, $H + 2d$, $H + 3d$, …, en que $d$ no tiene factores comunes con $m$

Sondeo cuadrático: si $h(k) = H$, entonces

- buscamos en $H$, $H + 1$, $H + 4$, $H + 9$, …

Doble hashing:

- ocupamos dos funciones de hash, $h_1(k)$ y $h_2(k)$
- buscamos en $h_1(k)$, $h_1(k) + h_2(k)$, $h_1(k) + 2h_2(k)$, $h_1(k) + 3h_2(k)$, …
- p.ej., $h_1(k) = k \bmod m$ y $h_2(k) = 1 + k \bmod (m–2)$, con $m$ y $m$-2 primos gemelos

En cualquiera de estos casos, el problema al eliminar claves se manifiesta igual

# ¿Qué tan llena está la tabla?

Si una tabla de $m$ casillas tiene almacenados $n$ datos

… entonces definimos el **factor de carga** $\lambda$ como

$$\lambda = \frac{n}{m}$$

- con encadenamiento, es aceptable $\lambda \approx 1$ (o incluso un número entero pequeño)
- con direccionamiento abierto, $\lambda > 0.5$ resulta en inserciones y búsquedas muy lentas

# *Rehashing*

Cuando la tabla se empieza a llenar demasiado —las búsquedas e inserciones se empiezan a demorar más de lo aceptable—

… hay que construir otra tabla —aproximadamente el doble de grande— y definir una nueva función de hash para esta tabla

… y pasar todos los datos de la tabla original a la nueva tabla —calculando el nuevo valor de hash para cada uno

Esta es una operación cara —O($n$)— pero infrecuente:

- tienen que haber habido O($n$) inserciones en la tabla original

  … por lo que en esencia estamos agregando un costo constante a cada inserción (por eso la nueva tabla es el doble de grande)

# Funciones de hash

Claves numéricas:

- la función de hash debe convertir la clave a un número entero entre 0 y $m$–1
- las claves pueden ser números enteros o bien números reales

Claves no numéricas:

- la función de hash debe, primero, convertir la clave a un número (entero)
- … y, luego, convertir este número a un número entero entre 0 y $m$–1

# La función de hash debe ser fácil de calcular y debe distribuir las claves uniformemente en la tabla

Si las claves $k$ son número enteros, entonces

$$h(k) = k \bmod m$$

—llamado *hashing modular*— en que $m$ es el tamaño de la tabla, es generalmente una función razonable:

- es conveniente que $m$ sea un número primo

Si las claves son (idealmente) números aleatorios

… entonces esta función no sólo es simple de calcular

… sino que también distribuye las claves uniformemente a lo largo de la tabla

# Para mejorar la distribución, conviene que la función dependa de todos los dígi-tos de la clave

Como vemos en el ej., si $m$ = 100 (= $10^2$), entonces el valor de la función depende sólo de (y es igual a) los dos dígitos menos significativos de la clave

… y si, p.ej., $m$ = 128 (= $2^7$), entonces el valor de la función dependería sólo de los 7 bits menos significativos de la clave

Más en general, si $m$ es simplemente un múltiplo de 2, 3, 5 o cualquiera otra constante pequeña

… entonces la distribución de las claves en la tabla no va a ser muy uniforme, al menos para ciertos conjuntos de claves

| $k$ | $h(k)$ $m$=100 | $h(k)$ $m$=97 |
|---|---|---|
| 212 | 12 | 18 |
| 618 | 18 | 36 |
| 302 | 2 | 11 |
| 940 | 40 | 67 |
| 702 | 2 | 23 |
| 704 | 4 | 25 |
| 612 | 12 | 30 |
| 606 | 6 | 24 |
| 772 | 72 | 93 |
| 304 | 4 | 13 |
| 423 | 23 | 35 |
| 650 | 50 | 68 |
| 317 | 17 | 26 |
| 907 | 7 | 34 |
| 507 | 7 | 22 |

# Otra posibilidad para números enteros: el método de la multiplicación

Sea $A$ un número entre 0 y 1:

$$h(k) = \lfloor m \cdot (A \cdot k \bmod 1) \rfloor$$

Es decir, multiplicamos *k* por *A* y extraemos la parte fraccional del producto (lo que queda a la derecha del punto decimal)

… éste valor lo multiplicamos por *m* y finalmente tomamos el piso del resultado

En este caso (a diferencia del anterior), el valor de *m* no es crítico

… y, de hecho, una forma de simplificar el cálculo es que *m* sea una potencia de 2

# Precaución: la intuición nos puede jugar malas pasadas

Si las claves son números reales entre 0 y 1, intuitivamente podríamos multiplicar la clave por *m* y redondear al entero más cercano para obtener un índice entre 0 y *m*–1:

- $h(k) = \lfloor km \rfloor$
- el problema es que esto da más peso a los dígitos más significativos de la clave

  … los dígitos menos significativos (los que están más a la derecha) no influyen

Para resolver esto, podemos usar hashing modular sobre la representación binaria de la clave:

- (bit de signo &) 8 bits de exponente & 23 bits de fracción

# Las claves no siempre son números enteros

Si las claves son strings $s$, entonces

… primero hay que convertir $s$ a un número entero $k$

… y luego ajustar $k$ al tamaño $m$ de la tabla

# Un posibilidad común es interpretar *s* como un número entero escrito en una base apropiada

Si $s = ch_0ch_1...ch_p$

… entonces una forma común de convertirlo a un número $k$ (llamado *el valor de hash de s*) es

$$k = \#(ch_p) + \#(ch_{p-1})\times R + \#(ch_{p-2})\times R^2 + \dots + \#(ch_0)\times R^p$$

en que #(ch) es el valor ASCII del carácter *ch*

… y $R$ es 31 o 37 (un número primo permite que los bits de todos los caracteres jueguen un rol):

- interpretamos $s$ como un número entero de $p$+1 dígitos en base $R$

Finalmente, hay que convertir $k$ a un índice $i$ válido para la tabla, es decir, un número entre 0 y $m$–1: $i = k \bmod m$

# Otros temas, que no vamos a ver

hashing universal

hashing perfecto