Árboles 2-3

Clase 08

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

Sumario

Repaso: Complejidad de las rotaciones

Una rotación tiene **costo constante**

- En una rotación simple se cambian 3 punteros: $\mathcal{O}(1)$
- En una rotación doble se cambian 5 punteros: $\mathcal{O}(1)$

Además, al rotar para restaurar balance de X, este se resuelve sin crear un nuevo balance

- No se aumentan las diferencias de altura respecto al resto del árbol
- En el peor caso, se realiza a lo más **una rotación** (simple o doble) **por inserción**

Repaso: Complejidad de las rotaciones

Gracias a esto, para un árbol de altura h, una inserción contempla

- Inserción propiamente tal $\mathcal{O}(h)$
- Detectamos los nodos que participan de la rotación (si aplica) $\mathcal{O}(h)$
- En el peor caso, aplica rotar y se requiere una rotación $\mathcal{O}(1)$
- Estos pasos se realizan consecutivos Total $\mathcal{O}(h)$

¿Cuál es la altura de un árbol AVL en función de n?

Repaso: Altura de un árbol AVL

Antes de atacar el problema, pensemos en la relación inversa: cómo depende n de h.

Para un árbol AVL T

- ¿Cuál es el máximo número de nodos de T si tiene altura h?
- ¿Y el mínimo?

Si probamos un crecimiento exponencial para n en función de h, probaremos que la altura está acotada por $\log(n)$

Repaso: Altura de un árbol AVL

En primer lugar, consideremos el número máximo en un árbol AVL

Esto ocurre cuando el árbol está **lleno**, es decir, para cada nivel del árbol existe la máxima cantidad de nodos posible. Este caso claramente es un árbol AVL

Si k es el nivel de los nodos (recordando que la raíz está en el nivel 0 y que la altura es # niveles), la cantidad de nodos total es

$$n = \sum_{k=0}^{h-1} 2^k = 2^h - 1$$

con lo cual

$$n \in \Theta(2^h) \quad \Leftrightarrow \quad 2^h \in \Theta(n)$$

Como se trata de funciones crecientes

deducimos que $h \in \Theta(\log(n))$

Repaso: Altura de un árbol AVL

En segundo lugar, consideramos el número mínimo $m(h)$ de nodos que puede tener un árbol AVL de altura h

Plantearemos una recurrencia que defina m

- Observamos que $m(1) = 1$ y $m(2) = 2$
- Para el caso general, nos interesa minimizar el número de nodos
- Nos concentramos en el caso en que los hijos difieren su altura en 1
- Además, dado que el árbol principal tiene altura h, uno de los hijos debe tener $h - 1$ y el otro $h - 2$
- Finalmente, exigimos que cada uno de estos hijos también tenga el mínimo posible. Con esto, planteamos una ecuación de recurrencia

$$m(h) = m(h-1) + m(h-2) + 1$$

Repaso: Altura de un árbol AVL

Esta recurrencia es similar a la recurrencia de Fibonacci

$$F(0) = 0, F(1) = 1, \quad F(h) = F(h-1) + F(h-2), h \geq 2$$

cuyo término general satisface la aproximación $F(h) \approx \frac{\varphi^h}{\sqrt{5}}$. Con esto, se puede probar por inducción que

$$m(h) = F(h+3) - 1$$

y utilizando la aproximación se obtiene

$$m(h) = F(h+3) - 1 \approx \frac{\varphi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1$$

y deducimos que

$$h + 3 \approx \log_{\varphi}(\sqrt{5}(m(h) + 1))$$

Concluimos que $h \in \mathcal{O}(\log(n))$

Repaso: Altura de un árbol AVL

Teorema

Todo árbol AVL con n nodos tiene altura h tal que

$$h \in \mathcal{O}(\log(n))$$

El problema del balance

Tenemos una primera definición de *balance* para **árboles binarios**

- Propiedad AVL definida recursivamente
- Esto es: diferencia de alturas entre hermanos a lo más 1

Pero podemos dar otra definición: todas las hojas están a la misma profundidad y que sea $\mathcal{O}(\log(n))$

¿Es posible conseguir esto con árboles binarios?

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el modelo de árboles 2-3
- ☐ Distinguir el impacto de este modelo en la altura del árbol
- ☐ Convertir árboles 2-3 en árboles binarios
- ☐ Comprender el modelo de árbol rojo-negro

Sumario

Un nuevo acercamiento al problema

En lugar de utilizar árboles binarios o ternarios, usaremos una mezcla de ellos

La idea de esta **nueva estructura** incluye

- Tener dos tipos de nodos
- **2-Nodos** que tendrán una llave, y si no son hojas tendrán **2 hijos**
- **3-Nodos** que tendrán **dos llaves** distintas y ordenadas, y si no son hojas tendrán **3 hijos**

Esta estrategia permitirá tener las hojas a la misma profundidad

Además garantizará profundidad $\mathcal{O}(\log(n))$ al almacenar n llaves

Árboles de búsqueda 2-3

Definición

Un **árbol de búsqueda 2-3** es una EDD que almacena **(llave, valor)** según

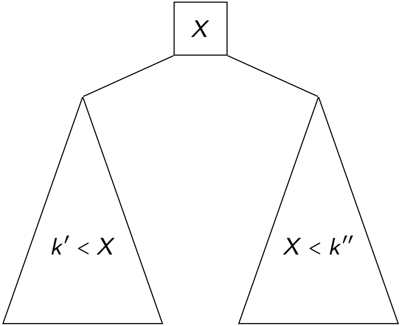
1. Un árbol 2-3 tiene una nodo que puede ser un **2-nodo** (con una llave) o un **3-nodo** (con 2 llaves distintas y ordenadas)
2. El nodo puede no tener hijos o tener exactamente
   - 2 hijos árboles 2-3 si es un 2-nodo
   - 3 hijos árboles 2-3 si es un 3-nodo

y que además, satisface la **propiedad de árboles 2-3**

- Si es 2-nodo con llave k
  - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k$
  - las llaves k'' del hijo derecho son $k < k''$
- Si es 3-nodo con llaves $k_1 < k_2$
  - las llaves k' del hijo izquierdo son $k' < k_1$
  - las llaves k'' del hijo central son $k_1 < k'' < k_2$
  - las llaves k''' del hijo derecho son $k_2 < k'''$

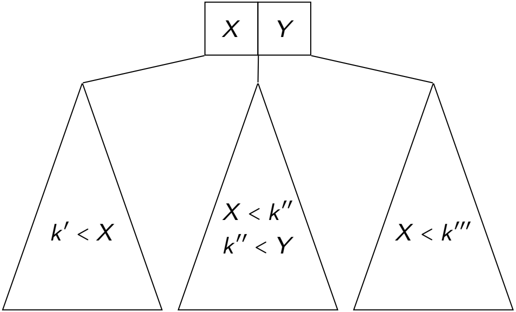
Árboles de búsqueda 2-3

Un 2-nodo con llave X que no es hoja tiene la siguiente estructura



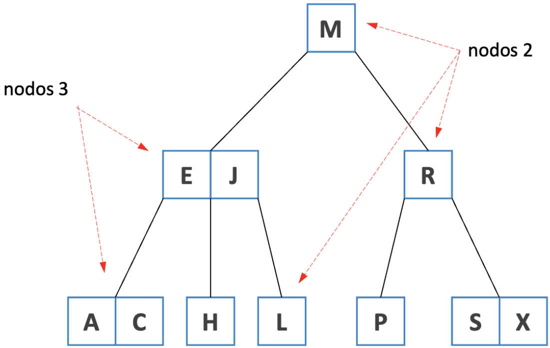
Árboles de búsqueda 2-3

Un 3-nodo con llaves $X < Y$ que no es hoja tiene la siguiente estructura



Árboles de búsqueda 2-3

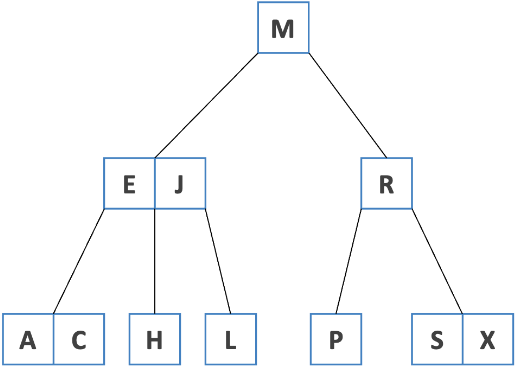
Un ejemplo de árbol 2-3 con llaves alfabéticas



Observemos que tal como en los ABB,
el orden de las llaves está implícito

Árboles de búsqueda 2-3

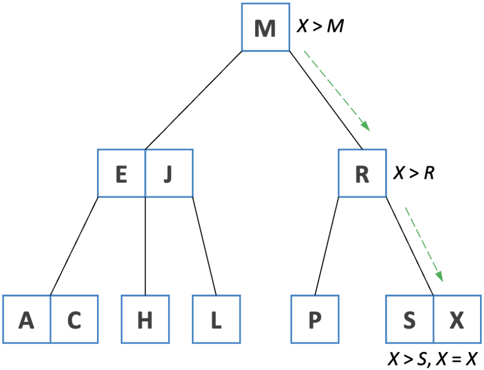
No olvidemos que los árboles 2-3 son **árboles de búsqueda**



Podemos buscar elementos comparando llaves recursivamente

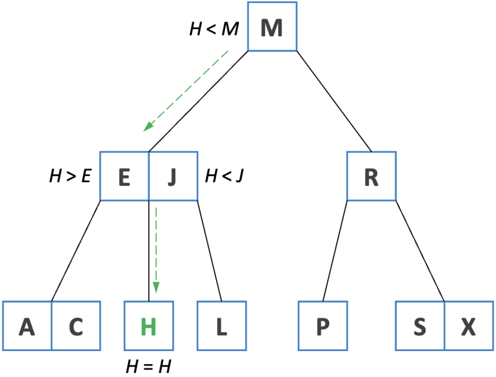
Árboles de búsqueda 2-3

Buscamos la llave X



Árboles de búsqueda 2-3

Buscamos la llave H



Observemos que en el peor caso, tenemos que comparar dos llaves por nodo

Sumario

Operaciones en árboles 2-3

Nos planteamos el mismo desafío que en los ABB: implementar operaciones

- Queremos que sean eficientes
- Recordemos que al insertar podría cambiar la altura
- El objetivo de los árboles 2-3 es que las hojas estén en el mismo nivel
- **Ojo:** esto no significa que la profundidad no cambie

¿Cómo insertar llaves manteniendo la profundidad pareja?

Inserciones en árboles 2-3

Al insertar llaves seguiremos la siguiente estrategia

- Se inserta como llave *múltiple* en una hoja existente
- Si la hoja era 2-nodo, queda como 3-nodo y terminamos
- Si la hoja era 3-nodo, queda como 4-nodo (con 3 llaves) por ahora
- La llave central del 4-nodo sube como llave múltiple al padre (**split**)
- Se repite la modificación de forma recursiva hacia la raíz

El árbol solo crece en altura cuando la raíz se llena
al recibir una llave desde un hijo

Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave D que será la raíz inicial

$$\boxed{D}$$

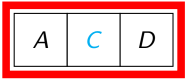
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave A

A	D

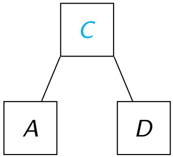
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave C, produciendo un nodo no válido



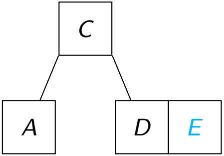
Inserciones en árboles 2-3

Efectuamos un **split** para subir la llave central como nueva raíz



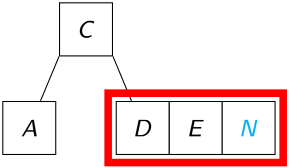
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave E



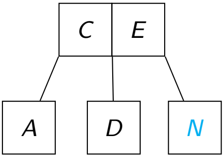
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave N, produciendo un nodo no válido



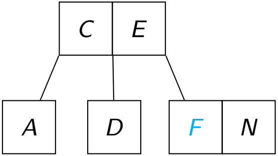
Inserciones en árboles 2-3

Efectuamos un **split** subiendo la llave E e insertándola ordenadamente



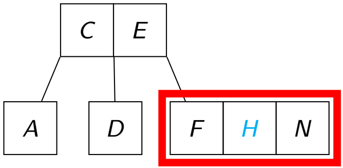
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave F



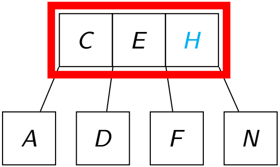
Inserciones en árboles 2-3

Insertamos la llave H y se produce un nodo no válido



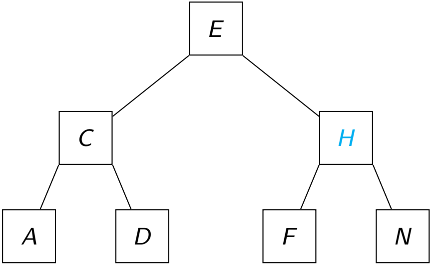
Inserciones en árboles 2-3

Subimos la llave H y se produce un nuevo nodo no válido



Inserciones en árboles 2-3

Hacemos **split** de la raíz actual, subiendo la llave E como nueva raíz



Sumario

Complejidad de las operaciones

Una búsqueda o inserción requiere ir *bajando* por el árbol

- Un trayecto de raíz a hoja depende de la altura $\mathcal{O}(h)$
- En el peor caso, hay 2 comparaciones de llave por nodo $\times 2$
- El paso completo incorpora el doble de comparaciones Total: $\mathcal{O}(h)$

Ahora nuestro objetivo es expresar h en término del número de nodos n para árboles 2-3

OJO: n representa el número de nodos, no el de llaves...
en los árboles 2-3 dichos números no necesariamente coinciden

Complejidad de las operaciones

En este caso, el análisis de h vs n es más sencillo que en los ABB

El mejor caso cumple

- El árbol tiene la mayor ramificación posible
- Esto ocurre cuando todos los nodos son 3-nodos, i.e. $h = \log_3(n) + 1$

El peor caso cumple

- El árbol tiene la menor ramificación posible
- Esto ocurre cuando todos los nodos son 2-nodos, i.e. $h = \log_2(n) + 1$

Concluimos que las operaciones son $\mathcal{O}(\log(n))$

Complejidad de las operaciones

Si bien la complejidad asintótica es $\mathcal{O}(\log(n))$, hay un gran **overhead**

- Al buscar se compara con más de una llave
- Si se inserta en un 3-nodo, hay que hacer split
- Esto puede gatillar varios splits sucesivos

Si el árbol fuera binario con llaves únicas y además tuviera las hojas *a una profundidad cercana*, no habría problema

¿Podemos representar un árbol 2-3 como un ABB?

Sumario

Convirtiendo un 2-3 en binario

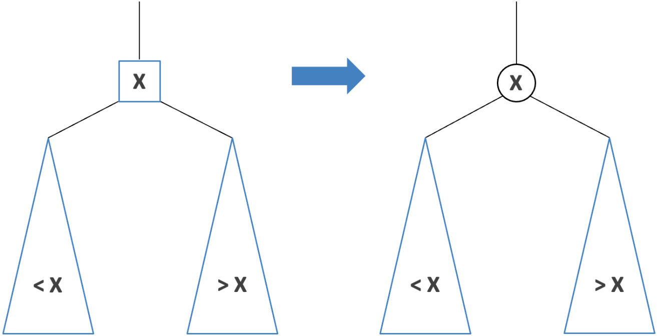
Para transformar un árbol 2-3 en un ABB nos centramos en los dos tipos de nodos

- Un **2-nodo** se puede representar como un nodo de un ABB sin problemas
- Un **3-nodo** no se puede representar de esa forma... necesitamos separar las llaves y los hijos

¿Cómo llevamos estos nodos a representación en ABB?

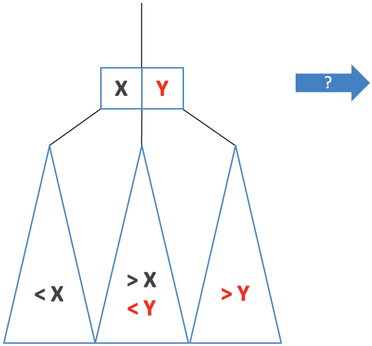
Convirtiendo un 2-3 en binario

Los 2-nodos se representan igual



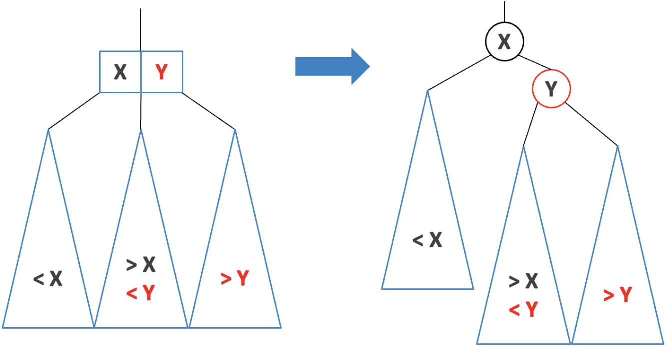
Convirtiendo un 2-3 en binario

¿Cómo separamos las llaves de un 3-nodo?



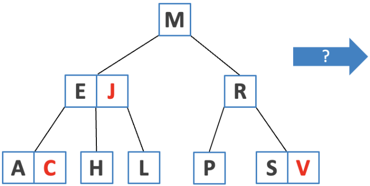
Convirtiendo un 2-3 en binario

Reasignamos dos de los hijos a un nuevo nodo



Notemos que la diferencia de alturas entre los subárboles es 1

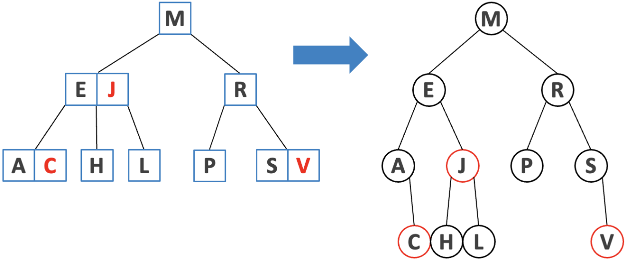
Convirtiendo un 2-3 en binario



Ejercicio

Convierta el árbol 2-3 anterior en un ABB

Convirtiendo un 2-3 en binario



Esta coloración motiva una nueva idea de balance en ABBs

Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros

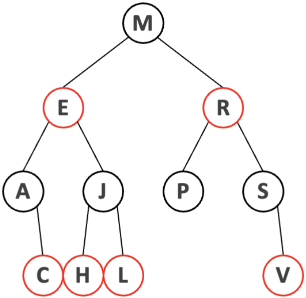
Árboles rojo-negro

Definición

Un **árbol rojo-negro** es un ABB que cumple

1. Cada nodo es rojo o negro
2. La raíz del árbol es negra
3. Si un nodo es rojo, sus hijos deben ser negros
4. La cantidad de nodos negros camino a cada hoja desde un nodo cualquiera debe ser la misma

Adicionalmente, las hojas vacías se consideran nodos negros



Esta es una nueva noción de balance en ABBs

Árboles rojo-negro

Al igual que en los árboles AVL, los cambios en el árbol pueden romper la propiedad de balance

- Tendremos una estrategia de restauración (rotaciones)
- En lugar de usar $x.balance$ usaremos $x.color$

Para facilitar la comprensión del rebalanceo, notamos que

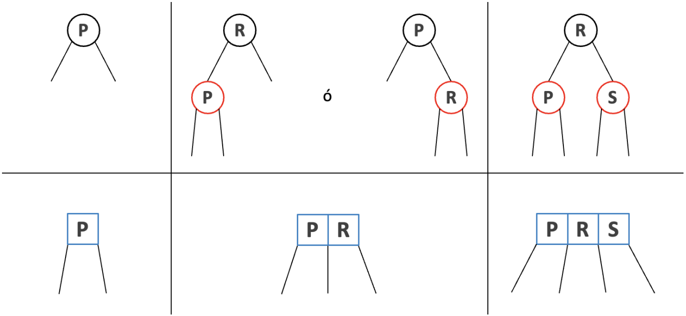
- Los árboles 2-3 son fáciles de visualizar
- No todo árbol rojo-negro tiene un árbol 2-3 equivalente
- Pero sí tiene un **árbol 2-4 equivalente**

Árboles rojo-negro y árboles 2-4

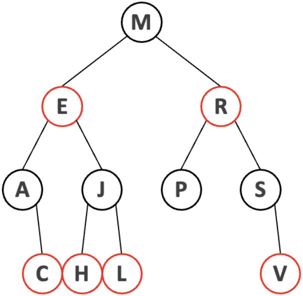
Un **árbol 2-4** es un árbol 2-3 que además puede tener **4-nodos**

- tiene 3 llaves ordenadas distintas
- si no es hoja, tiene 4 hijos

Con este nuevo modelo, podemos tener árboles equivalentes según



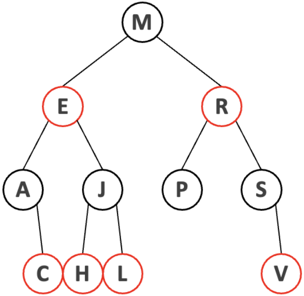
Árboles rojo-negro y árboles 2-4

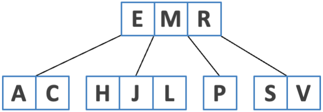


Ejercicio

Obtenga un árbol 2-4 equivalente al árbol rojo-negro anterior

Árboles rojo-negro y árboles 2-4





Sumario

Ideas al cierre

- Es posible obtener hojas a profundidad común usando árboles 2-3
- La operación de inserción solo hace crecer la altura cuando ocurre un split
- Las operaciones siguen siendo logarítmicas en este modelo
- No obstante, se agregan operaciones que en la práctica impactan en el tiempo
- Podemos construir un nuevo modelo a partir de los 2-3: los árboles rojo-negro