# MST y algoritmo de Prim

Clase 21

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

# Sumario

# Conectividad digital

Consideremos el problema de mejorar la conectividad digital de la Región del Maule

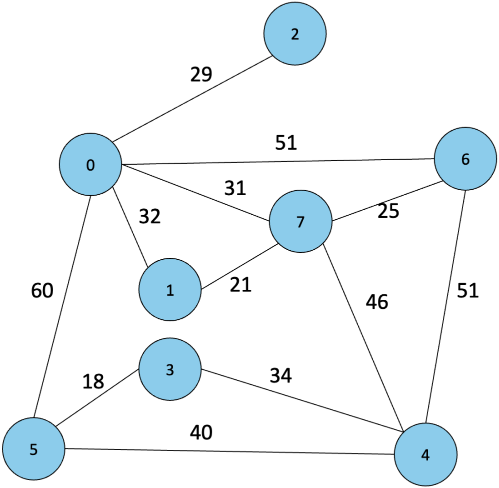
- Objetivo: instalar fibra óptica subterránea entre pares de puntos relevantes
- Cada instalación de ese cableado tiene un costo
- Es prioritario conectar ciudades más pobladas

El desafío es **cubrir** con el menor costo

¿Qué tipo de grafo es más adecuado para representar el problema?

# Conectividad digital

# Conectividad digital




Usamos un grafo **no dirigido con costos**

# Conectividad digital

Usamos un grafo no dirigido con costos

- Cada nodo es un punto a conectar (ciudad, pueblo, etc)
- Cada arista tiene un costo de conexión
- Consideramos que cada nodo presente en el grafo, debe ser conectado

Para resolver el problema seleccionamos un subconjunto de aristas

- La suma de los costos debe ser **mínima**
- El **subgrafo** que solo considera esas aristas, debe ser **conexo**

¿Qué forma tiene el **subgrafo** que buscamos?

# Sumario

# Árboles de cobertura mínimos

## Definición

Dado un grafo no dirigido $G$, un subgrafo $T \subseteq G$ se dice un **árbol de cobertura mínimo** o **MST** de $G$ si

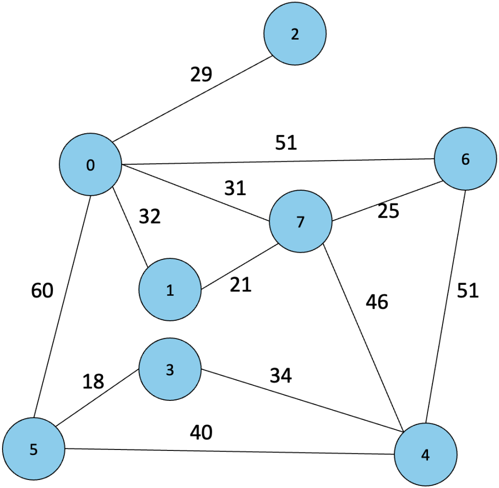
1. $T$ es un árbol
2. $V(T) = V(G)$
3. No existe otro MST $T'$ para $G$ con menor costo total

Es decir, si $T$ es MST de $G$,

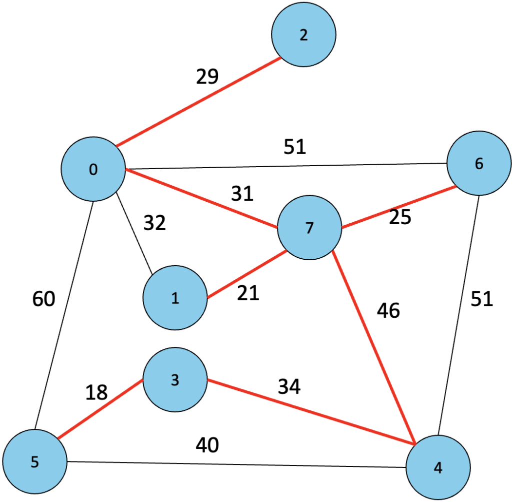
1. no tiene ciclos
2. es una **cobertura** de los nodos de $G$
3. tiene costo mínimo

¿Puede haber más de un MST diferente para $G$?

# Árboles de cobertura mínimos



# Árboles de cobertura mínimos



# Árboles de cobertura mínimos

Los MST están presentes en la solución de múltiples problemas de conectividad

- Redes de distribución eléctrica
- Redes telefónicas
- Comunicaciones, computacionales, tráfico aéreo...
- Incluso redes biológicas, químicas y físicas

# Árboles de cobertura mínimos

Para atacar el problema algorítmicamente, dado $G$ no dirigido

- Llamamos **corte** a una **partición** $(V_1, V_2)$ de $V(G)$

$$V_1, V_2 \neq \varnothing, \qquad V_1 \cup V_2 = V(G), \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

- Diremos que una arista **cruza el corte** si uno de sus extremos está en $V_1$ y el otro en $V_2$

¿Qué podemos afirmar respecto a los MST y las aristas que cruzan un corte dado?

# Árboles de cobertura mínimos

Si $T$ es un MST de $G$, y $P = (V_1, V_2)$ es un corte de $G$

- Sabemos que al menos una arista que cruza $P$ está incluida en $T$
- De lo contrario, no habría camino entre nodos de $V_1$ y $V_2$
- Por lo tanto: $T$ no sería de cobertura

Si $P = (V_1, V_2)$ es un corte de $G$

- Sabemos que cada arista de corte tiene un costo asociado
- La arista más barata **siempre** se incluye en **algún** MST

¿Cómo podemos usar estos hechos para construir un MST desde cero?

# Sumario

# Algoritmo de Prim

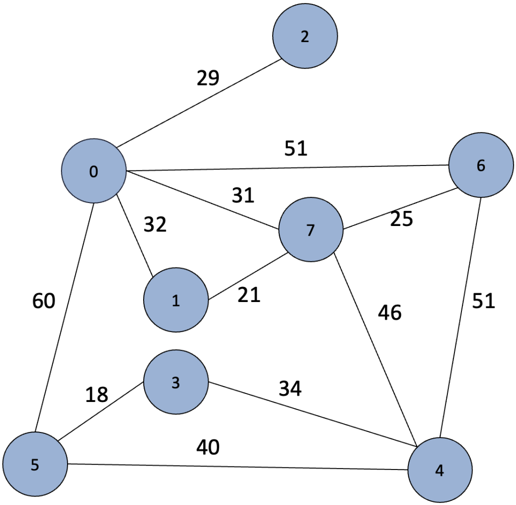
La idea detrás del **algoritmo de Prim** es utilizar las aristas que cruzan cortes para guiar la construcción

Para un grafo $G = (V, E)$ y un nodo inicial $v$

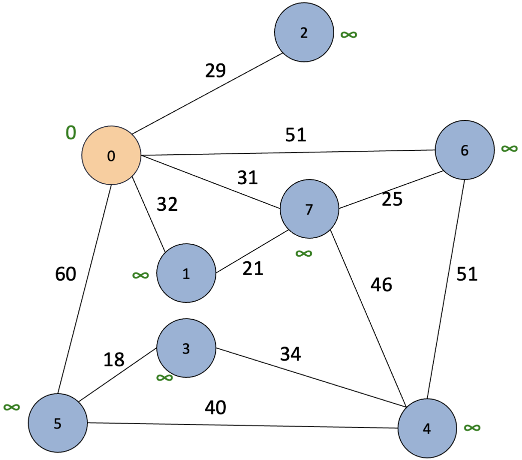
1. Sean $R = \{v\}$ y $\bar{R} = V - R$
2. Sea $e$ la arista de menor costo que cruza de $R$ a $\bar{R}$
3. Sea $u$ el nodo de $e$ que pertenece a $\bar{R}$
4. Agregar $e$ al MST. Eliminar $u$ de $\bar{R}$ y agregarlo a $R$
5. Si quedan elementos en $\bar{R}$, volver al paso 2.

¿Cómo hacer eficiente el paso 2?

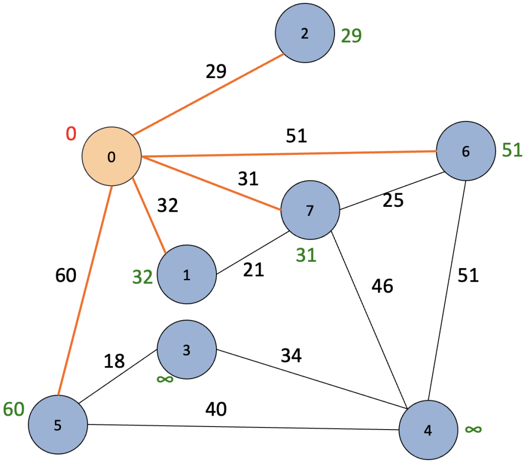
# Árboles de cobertura mínimos



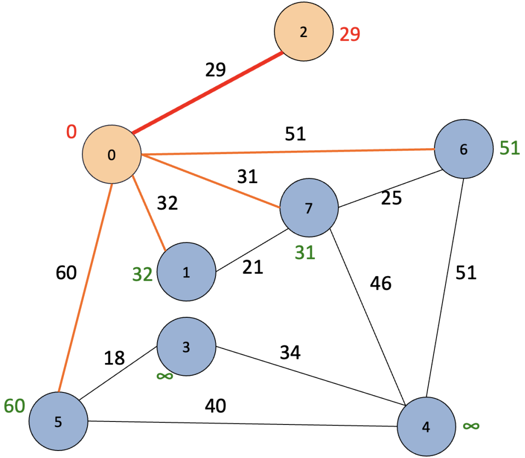
# Árboles de cobertura mínimos



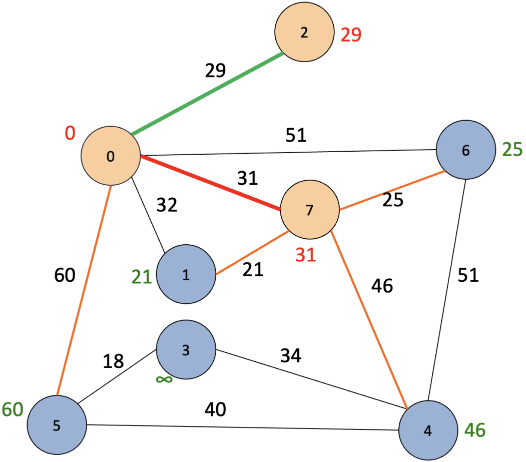
# Árboles de cobertura mínimos



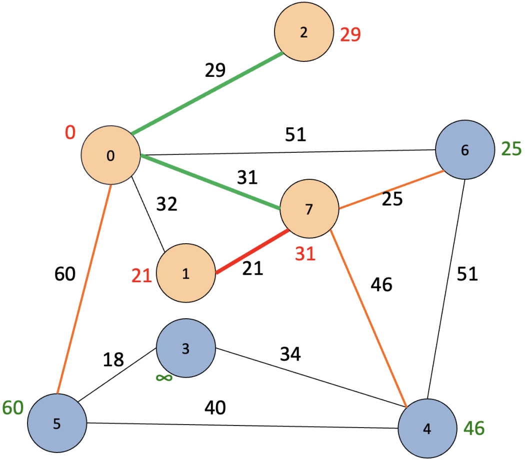
# Árboles de cobertura mínimos



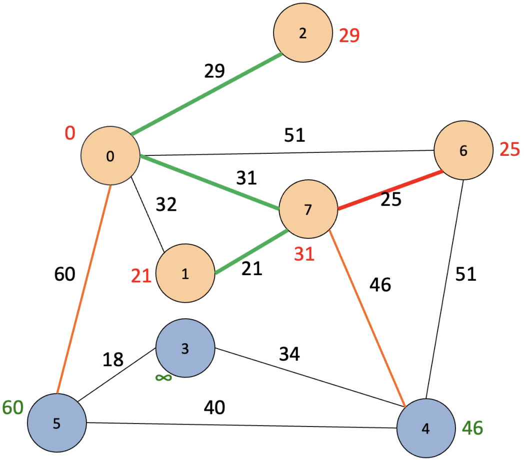
# Árboles de cobertura mínimos



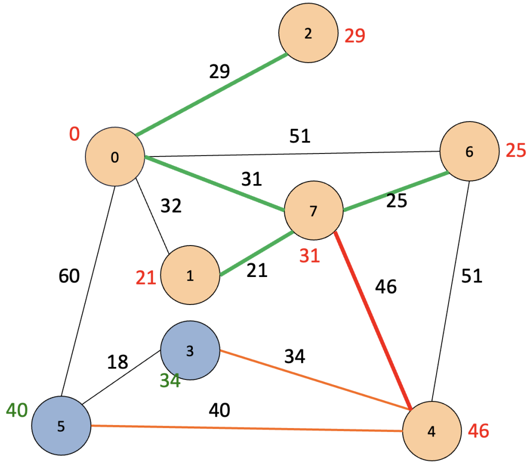
# Árboles de cobertura mínimos



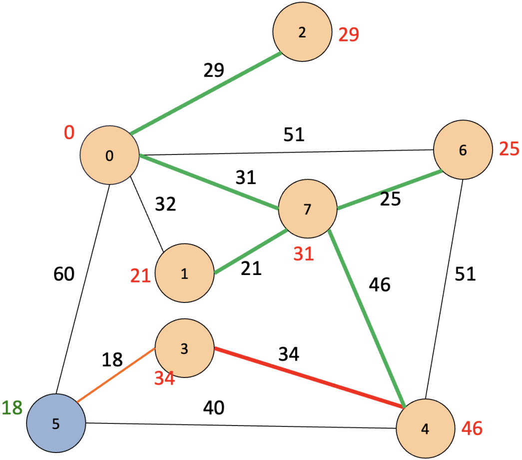
# Árboles de cobertura mínimos



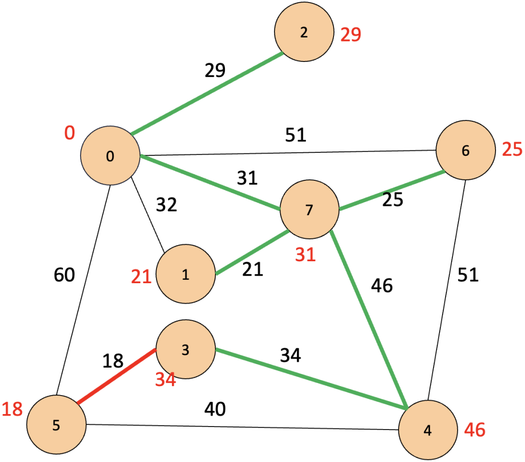
# Árboles de cobertura mínimos



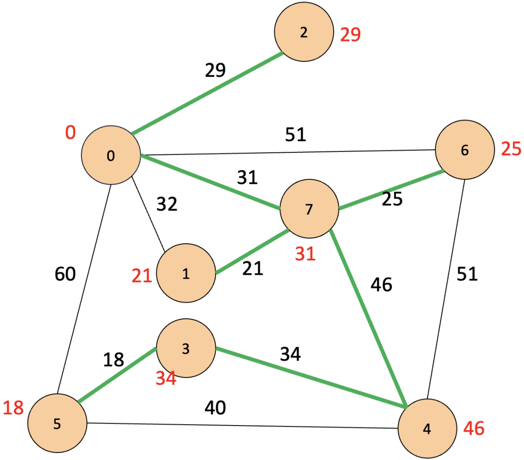
# Árboles de cobertura mínimos



# Árboles de cobertura mínimos



# Árboles de cobertura mínimos



# Algoritmo de Prim

```
Prim(s):
    Q ← cola de prioridades vacía
    T ← lista vacía
    for u ∈ V − {s} :
        d[u] ← ∞;   π[u] ← ∅;   Insert(Q, u)
    d[s] ← 0;   π[s] ← ∅;   Insert(Q, s)
    while Q no está vacía :
        u ← Extract(Q)
        T ← T ∪ {(π[u], u)}
        for v ∈ α[u] :
            if v ∈ Q :
                if d[v] > cost(u, v) :
                    d[v] ← cost(u, v)
                    π[v] ← u
    return T
```

Importante: la cola de prioridades usa $d[v]$ como prioridad de $v$

# Correctitud

## Demostración

**Finitud.** Mismo argumento que en Dijkstra.

**Correctitud.** Fijaremos nuestra atención en la línea 8 del algoritmo, justo luego de agregar a $T$ una nueva arista. Denotaremos por $G_n$ al subgrafo de $G$ tal que considera solo los primeros $n$ nodos extraídos de $Q$ con todas sus aristas de $G$.

Probaremos por inducción sobre el número de iteraciones la propiedad

$$P(n) := \begin{array}{l}\text{En la iteración } n\text{-ésima, la línea 8 guarda} \\ \text{en } T \text{ un MST para el subgrafo } G_n\end{array}$$

# Correctitud

## Demostración

**C.B.** Para $n = 1$, extraemos de $Q$ el nodo inicial y agregamos una arista *dummy*. Como el grafo que debemos cubrir es $G_1 = (\{s\}, \varnothing)$ y $T$ no cubre nada más que el nodo inicial, es efectivamente un MST para $G_1$.

**H.I.** Suponemos que en la iteración $n$, $T$ tiene guardado un MST para cubrir el subgrafo $G_n$ con costo mínimo.

**T.I.** Sea $u$ el $(n+1)$-ésimo nodo extraído de la cola $Q$. Sea además $T$ la variable guardado en la iteración anterior.

- Como $u$ fue extraído en la iteración $n+1$, significa que es el nodo con la arista más barata para conectar directamente con **algún nodo** de $G_n$.
- A saber, dicho nodo es $\pi[u]$.
- Al agregar la arista $(\pi[u], u)$ a $T$, obtenemos un nuevo conjunto $T'$ de $G_{n+1}$. Basta argumentar sus propiedades.

# Correctitud

## Demostración

$T'$ es **cubrimiento**

- Como $T$ es MST para $G_n$ por **H.I.**, entonces conecta todos los nodos de $G_n$ (incluyendo a $\pi[u]$).
- Al agregar $(\pi[u], u)$, se conecta también a $u$. Por lo tanto, $T'$ cubre todo $G_{n+1}$

$T'$ es **árbol**

- Por **H.I.**, $T$ es árbol.
- Al agregar $(\pi[u], u)$, se conecta un nodo ya incluído en $G_n$ con uno **no incluído**, de forma que no se producen ciclos y $T'$ no es árbol

$T'$ es de **costo mínimo**

- Por **H.I.**, $T$ es de costo mínimo para $G_n$.
- La elección de $u$ asegura que se agrega la arista más barata para conectar $u$ a $G_n$. Se concluye que $T'$ es de costo mínimo.

# Correctitud

## Demostración

De lo anterior se concluye que $P(n)$ es cierta. En particular, como $G_{|V|} = G$

$$P(|V|) \text{ verdadera} \quad \Leftrightarrow \quad \texttt{Prim} \text{ entrega MST para } G$$

$\square$

No olvidar: no necesariamente hay un único MST para $G$

# Complejidad

Considerando que usamos una cola de prioridad implementada como heap

- Extracción del más prioritario $\mathcal{O}(\log(V))$
- Actualización de prioridad cuando cambia el costo $\mathcal{O}(\log(V))$

La complejidad en el peor caso viene dada por las iteraciones del **while**

- El loop ocurre $|V|$ veces $\mathcal{O}(V)$
- En cada loop se extrae un nodo $\mathcal{O}(\log(V))$
- Cada arista se revisa exactamente una vez $\mathcal{O}(E)$
- Por cada revisión se hace una actualización de costo $\mathcal{O}(\log(V))$
- Total $\mathcal{O}((V + E)\log(V))$

Podemos simplificar este último resultado

# Complejidad

Recordemos que para grafos conexos existe una relación entre $|V|$ y $|E|$

- Si $G$ es un árbol, $E = V - 1$
- Si $G$ es conexo cualquiera, $E \geq V - 1$

Concluímos que $V \in \mathcal{O}(E)$ para grafos conexos

- Luego, $(V + E) \in \mathcal{O}(E)$

El algoritmo de Prim toma tiempo $\mathcal{O}(E \log(V))$

# Algoritmo de Prim: una versión más concreta

```
Prim(s):
    Q ← cola de prioridades con s
    T ← lista vacía
    x.key ← 0;   x.parent ← ∅
    while Q no está vacía :
        u ← Extract(Q);   u.color ← negro
        if u.parent ≠ ∅ :
            T ← T ∪ {(u.parent, u)}
        for v ∈ α[u] ∧ v.color ≠ negro :
            if v ∈ Q :
                Insert(Q, v)
            if v.key > cost(u, v) :
                v.key ← cost(u, v)
                v.parent ← u
    return T
```

Suponemos que inicialmente $v.key \leftarrow \infty$ para todo $v$