QuickSort

Clase 04

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

Sumario

Repaso: Dividir para conquistar

El plan para usar `Merge` en un algoritmo de ordenación sigue la estrategia **dividir para conquistar**

La estrategia sigue los siguientes pasos

1. Dividir el problema original en dos (o más) **sub-problemas** del mismo tipo
2. Resolver **recursivamente** cada sub-problema
3. Encontrar solución al problema original **combinando** las soluciones a los sub-problemas

Los sub-problemas son instancias más pequeñas del problema a resolver

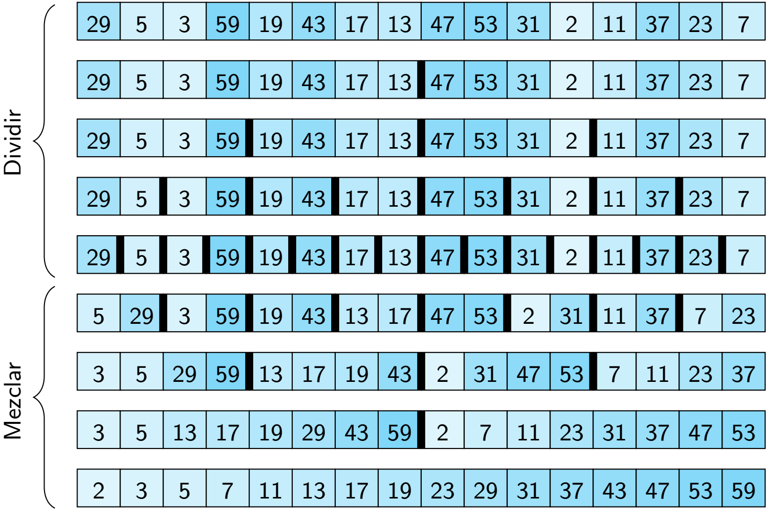
Repaso: El algoritmo `MergeSort`

input : Secuencia A
output: Secuencia ordenada B

`MergeSort` *(A)*:

 if $|A| = 1$ **: return** A
 Dividir A en mitades A_1 y A_2
 $B_1 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_1)$
 $B_2 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_2)$
 $B \leftarrow \texttt{Merge}(B_1, B_2)$
 return B

MergeSort: Ejemplo de ejecución



Repaso: Complejidad de `MergeSort`

Para el análisis de complejidad de tiempo, definimos

$$T(n) := \# \text{ pasos para ordenar } n \text{ elementos}$$

Con esto, consideramos los dos casos posibles al llamar a `MergeSort`

$\texttt{MergeSort}\ (A)$**:**

- **if** $|A| = 1$ **: return** A
- Dividir A en A_1 y A_2
- $B_1 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_1)$
- $B_2 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_2)$
- $B \leftarrow \texttt{Merge}(B_1, B_2)$
- **return** B

- Si $n = 1$, aplica el caso base y solo involucra un paso

$$T(1) = 1$$

- Si $n > 1$, aplican los llamados
  - Dos llamados de tamaño $n/2$
  - Llamado a `Merge`

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Este análisis aplica **para toda** secuencia de input:
Nos entregará el resultado de peor, mejor y caso promedio

Repaso: Complejidad de `MergeSort`

La siguiente relación es una **relación de recurrencia**

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Podemos resolverla notando que la parte recursiva puede ser reescrita como

$$T(n) = 2T(n/2) + n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T(n)}{n} = \frac{T(n/2)}{n/2} + 1$$

La gracia de esta expresión es que numeradores y denominadores incluyen la misma fracción de n

Sin pérdida de generalidad, suponemos que n es potencia de 2

Repaso: Complejidad de MergeSort

Construimos un sistema de ecuaciones reemplazando el argumento del lado izquierdo por $n, n/2, n/4, \ldots, 2$ de forma que el último término contiene $T(1)$ (nuestro caso base)

$$
\begin{array}{lccc}
\text{ecuación } 1 & \dfrac{T(n)}{n} & = & \dfrac{T(n/2)}{n/2} + 1 \\
\text{ecuación } 2 & \dfrac{T(n/2)}{n/2} & = & \dfrac{T(n/4)}{n/4} + 1 \\
 & & \cdots & \\
\text{ecuación } k & \dfrac{T(2)}{2} & = & \dfrac{T(1)}{1} + 1
\end{array}
$$

Como el lado derecho de la i-ésima ecuación considera la potencia 2^i, de la k-ésima ecuación deducimos

$$1 = \frac{n}{2^k} \quad \Rightarrow \quad 2^k = n \quad \Rightarrow \quad k = \log(n)$$

Repaso: Complejidad de `MergeSort`

Sumamos las $\log(n)$ ecuaciones y simplificamos los términos que aparecen a ambos lados

$$\begin{array}{lcccc}
\text{ecuación } 1 & \frac{T(n)}{n} & = & \frac{T(n/2)}{n/2} & +1 \\
\text{ecuación } 2 & \frac{T(n/2)}{n/2} & = & \frac{T(n/4)}{n/4} & +1 \\
 & & \dots & & \\
\text{ecuación } k & \frac{T(2)}{2} & = & \frac{T(1)}{1} & +1 \\
\text{suma} & \frac{T(n)}{n} & = & \frac{T(1)}{1} & +\log(n)
\end{array}$$

Despejando, obtenemos $T(n) = n\log(n) + n$

La complejidad de tiempo de `MergeSort` es $\mathcal{O}(n\log(n))$

Complejidad de `MergeSort`

En términos de memoria adicional

```
MergeSort (A):
1    if |A| = 1 : return A
2    Dividir A en A_1 y A_2
3    B_1 ← MergeSort(A_1)
4    B_2 ← MergeSort(A_2)
5    B ← Merge(B_1, B_2)
6    return B
```

- El paso recursivo no ocupa memoria adicional
- Para $|A| = n$, la línea 5 ocupa $\mathcal{O}(n)$
- Ojo! Los llamados recursivos no van acumulando memoria reservada, por lo que no sumamos $\mathcal{O}(n)$ por llamado

La complejidad de memoria de `MergeSort` es $\mathcal{O}(n)$

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

Notemos la mejora en tiempo con `MergeSort`
a cambio de memoria adicional

Dividir para conquistar

La estrategia sigue los siguientes pasos

1. Dividir el problema original en dos (o más) **sub-problemas** del mismo tipo
2. Resolver **recursivamente** cada sub-problema
3. Encontrar solución al problema original **combinando** las soluciones a los sub-problemas

Búsqueda binaria

El algoritmo de **búsqueda binaria** también está basado en la estrategia dividir para conquistar

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, elemento x, índices i, f
output: Índice $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ o -1

`BinarySearch` (A, x, i, f)**:**

    if $f < i$ **: return** -1
    $m \leftarrow \left\lfloor \frac{i+f}{2} \right\rfloor$
    if $A[m] = x$ **: return** m
    if $A[m] > x$ **:**
        return `BinarySearch` $(A, x, i, m-1)$
    return `BinarySearch` $(A, x, m+1, f)$

Búsqueda binaria

El algoritmo de **búsqueda binaria** también está basado en la estrategia dividir para conquistar

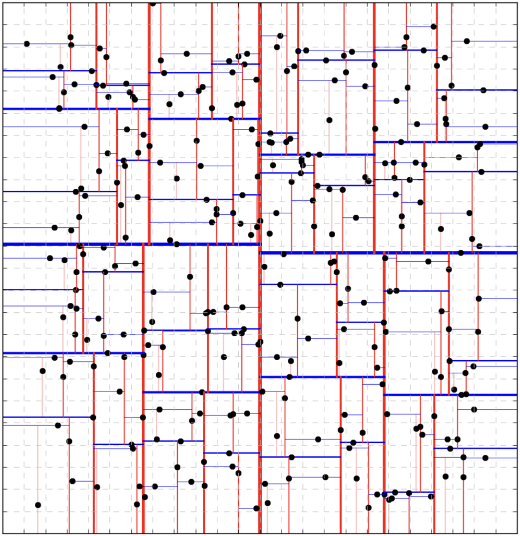
```
BSearch (A, x, i, f):
1    if f < i : return −1
2    m ← ⌊(i + f) / 2⌋
3    if A[m] = x : return m
4    if A[m] > x :
5        return BSearch (A, x, i, m − 1)
6    return BSearch (A, x, m + 1, f)
```

- La división en subproblemas se hace escogiendo un **pivote** central (línea 2)
- La naturaleza de la búsqueda hace que sea necesario resolver **solo uno de los subproblemas**
- Solución al problema es exactamente la solución al llamado recursivo

Un problema para inspirarnos

- Consideremos el problema de procesar un gran conjunto de coordenadas en 2D
- Para repartir la carga, se reparten los datos en zonas rectangulares
- La idea es que los rectángulos **particionen** el espacio 2D
- Además queremos que cada zona tenga la misma cantidad de datos

Un problema para inspirarnos



Objetivos de la clase

- ☐ Comprender la estrategia de elegir pivote para particionar una secuencia
- ☐ Identificar cuándo tal estrategia encuentra la mediana
- ☐ Comprender y analizar el algoritmo `Partition`
- ☐ Comprender el uso de `Partition` en `Median` para encontrar el elemento central
- ☐ Comprender el uso de `Partition` para ordenar secuencias

Sumario

El desafío de encontrar la mediana

- En el contexto de una secuencia de valores
- ¿Cómo encontramos la mediana?
- Si ordenamos la secuencia: es la mitad...
- ¿Podemos hacerlo sin recurrir a ordenar los datos?

El desafío de encontrar la mediana

Definición

Dada una secuencia ordenada de n valores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, llamaremos **mediana** al valor M_e dado por

- Si n es impar,

$$M_e = a_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

- Si n es par,

$$M_e = \frac{a_{n/2} + a_{n/2-1}}{2}$$

La mediana es tal que en la secuencia hay la
misma cantidad de elementos mayores y menores a ella

Primera estrategia

Dado un elemento de la secuencia al cual llamaremos **pivote**

1. ¿El pivote es la mediana?
2. Si no, ¿la mediana es mayor o menor al pivote?

Si escogemos el pivote de manera aleatoria, ¿cómo respondemos a estas preguntas?

Necesitamos el número de elementos menores y mayores que el pivote

Primera estrategia...

Ejemplo

Dada la siguiente secuencia de datos (de largo impar)

7	3	5	2	1	9	7	8	6	4	3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

y el **pivote** aleatorio 6

- Elementos menores: 3 5 2 1 4 3
- Elementos mayores: 7 9 7 8

Con esta información, ¿es 6 la mediana? ¿dónde se ubica esta?

Primera estrategia... recursiva

Moviendo los elementos según si son mayores o menores que el pivote,

3	5	2	1	4	3	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Como la posición de la mediana debiera ser $\lfloor 11/2 \rfloor = 5$ y el pivote quedó en la posición 6, revisamos el tramo a la izquierda del pivote

3	5	2	1	4	3	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Primera estrategia... recursiva

Tomando aleatoriamente el pivote 2

3	5	2	1	4	3	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Elementos menores: 1
- Elementos mayores: 3 5 4 3

Reordenamos el tramo analizado para ver si el pivote es la mediana

Primera estrategia... recursiva

Ubicamos los elementos según el pivote 2, obteniendo

1	2	3	5	4	3	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Nuevamente, como la posición del pivote es 1, nos concentramos recursivamente en el sub-tramo derecho del último pivote

1	2	3	5	4	3	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Primera estrategia... recursiva

Con el pivote $\boxed{5}$

1	2	3	5	4	3	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

- Elementos menores: $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{3}$
- Elementos mayores:$\varnothing$

Reubicamos los elementos para ver la posición del pivote actual

1	2	3	4	3	5	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Como el pivote está en la posición $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor 11/2 \rfloor = 5$,**es la mediana**

Particiones

Si suponemos que no hay elementos iguales al pivote, elegir un pivote p **particiona** la secuencia en

- Elementos mayores al pivote, $M = \{a_i \mid a_i > p\}$
- Elementos menores al pivote, $m = \{a_i \mid a_i < p\}$

Luego, si reubicamos los elementos de la secuencia de forma que

- Primero se colocan los elementos de m
- Luego se coloca p
- Finalmente se colocan los elementos de M

es claro que p está en su posición ordenada

Partition

Supongamos que no hay elementos repetidos en la secuencia

input : Secuencia $A[0, \dots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

`Partition` (A, i, f):

  $p \leftarrow$ pivote aleatorio en $A[i, f]$
  $m, M \leftarrow$ secuencias vacías
  Insertar p en M
  for $x \in A[i, f]$ **:**
    if $x < p$ **:** Insertar x en m
    elif $x > p$ **:** Insertar x en M
  $A[i, f] \leftarrow \texttt{Concat}(m, M)$
  return $i + |m|$

Notemos que `Partition` retorna y además reordena los elementos de A

Partition

Supongamos que no hay elementos repetidos en la secuencia

Partition (A, i, f):

$p \leftarrow$ pivote aleatorio en $A[i, f]$
$m, M \leftarrow$ secuencias vacías
Insertar p en M
for $x \in A[i, f]$ **:**
  if $x < p$ **:** Insertar x en m
  elif $x > p$ **:** Insertar x en M
$A[i, f] \leftarrow \texttt{Concat}(m, M)$
return $i + |m|$

- Se ubican los menores, el pivote y luego los mayores
- i: # elems. a la izq. de $A[i]$
- $|m|$: # menores a p en $A[i, f]$
- Por lo tanto, se retorna la posición correcta de p

Su retorno es la cantidad de elementos a la izquierda de p

Complejidad de `Partition`

```
Partition (A, i, f):
    p ← pivote aleatorio en A[i, f]
    m, M ← secuencias vacías
    Insertar p en M
    for x ∈ A[i, f] :
        if x < p : Insertar x en m
        elif x > p : Insertar x en M
    A[i, f] ← Concat(m, M)
    return i + |m|
```

Las inserciones al final de la EDD

- $\mathcal{O}(1)$ en arreglos y listas
- Se hace una por elemento x
- Total: $\mathcal{O}(n)$

La concatenación

- $\mathcal{O}(1)$ en listas
- $\mathcal{O}(n)$ en arreglos

Además, usa memoria adicional $\mathcal{O}(n)$ para mantener las secuencias m, M

Más adelante veremos una versión *in place* de `Partition`

Median

Supongamos que no hay elementos repetidos en la secuencia

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$
output: Elemento en posición central de A

```
Median (A):
    i ← 0
    f ← n − 1
    x ← Partition(A, i, f)
    while x no es el centro :
        if x < centro : i ← x + 1
        else: f ← x − 1
        x ← Partition(A, i, f)
    return A[x]
```

Median

Supongamos que no hay elementos repetidos en la secuencia

Median (A):

$i \leftarrow 0$
$f \leftarrow n - 1$
$x \leftarrow$ Partition(A, i, f)
while x *no es el centro* **:**
    if $x < centro$ **:** $i \leftarrow x + 1$
    else: $f \leftarrow x - 1$
    $x \leftarrow$ Partition(A, i, f)
return $A[x]$

- x: # datos menores al pivote
- Median entrega el elemento en la posición central ordenada
- Para n impar, Median(A) corresponde a la mediana
- Para n par, Median(A) es uno de los dos elementos centrales

Podemos parametrizar Median para encontrar el k-ésimo estadístico de orden

Median (versión parametrizada)

Supongamos que no hay elementos repetidos en la secuencia

input : Secuencia $A[0, \dots, n-1]$, índice $k \in \{0, \dots, n-1\}$
output: k-ésimo estadístico de orden de A

`Median` (A, k)**:**

    $i \leftarrow 0$
    $f \leftarrow n - 1$
    $x \leftarrow \texttt{Partition}(A, i, f)$
    while $x \neq k$ **:**
        if $x < k$ **:** $i \leftarrow x + 1$
        else: $f \leftarrow x - 1$
        $x \leftarrow \texttt{Partition}(A, i, f)$
    return $A[x]$

- $\texttt{Median}(A, 0)$ entrega el menor elemento de A
- $\texttt{Median}(A, n-1)$ entrega el mayor elemento de A

`Median` y dividir para conquistar

El algoritmo `Median` también aplica la estrategia dividir para conquistar

1. División del problema en dos sub-problemas (`Partition`)
2. Naturaleza del problema hace que solo sea necesario resolver uno de los dos sub-problemas
   - Similar al caso de búsqueda binaria
   - Resolvemos el sub-problema correspondiente a la zona donde debiera estar la mediana
   - Se puede cambiar el enfoque recursivo por uno iterativo
3. Solución al problema original se obtiene de la solución al sub-problema

Complejidad de `Median`

NutriDiscusión

¿Cuál es la complejidad de `Median`?

- ¿Importa el orden de A?
- ¿Depende de algo distinto?
- ¿Cuáles serían su mejor y peor caso?

Complejidad de `Median`

La complejidad de `Median` depende la elección del pivote: es **probabilística**

El **mejor caso**

- Escoger la mediana como primer pivote
- Esto significa separar los demás elementos en m y M
- Eso toma $\mathcal{O}(n)$ por pivote $\mathcal{O}(n)$
- Como solo se debe tomar un pivote: Total: $\mathcal{O}(n)$

El **peor caso**

- Que todos los datos menos la mediana sean escogidos como pivote
- Para cada pivote hay que separar menores y mayores $\mathcal{O}(n)$
- Como solo se deben tomar $\mathcal{O}(n)$ pivotes: Total: $\mathcal{O}(n^2)$

Ordenar con `Partition`

Luego de cada ejecución de `Partition`, el pivote queda en su posición ordenada

1	2	3	4	3	5	6	7	9	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1	2	3	5	4
0	1	2	3	4

Además, las dos sub-secuencias están "*del lado correcto*" del pivote

¿Cómo usar esto para ordenar?

Sumario

Ordenar con `Partition`

Nuevamente podemos usar la estrategia dividir para conquistar

1. División del problema en dos sub-problemas con `Partition`
2. Aplicar recursivamente `Partition` para cada sub-secuencia
3. No necesitamos combinar nada: la secuencia queda ordenada

Llamaremos **Quicksort** a este algoritmo

Quicksort

input : Secuencia $A[0,\ldots,n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

```
QuickSort (A, i, f):
    if i ≤ f :
        p ← Partition(A, i, f)
        Quicksort(A, i, p − 1)
        Quicksort(A, p + 1, f)
```

El llamado inicial es `Quicksort`$(A, 0, n-1)$

Quicksort: Ejemplo de ejecución

A S O R T I N G E X A M P L E
A A E **E** T I N G O X S M P L R
A A **E**
A **A**
A
L I N G O P M **R** X T S
L I G **M** O P N
G I L
— I **L**
— **I**
N P O
— **O** P
— — **P**
S T X
— T **X**
— **T**

A A E E G I L M N O P R S T X

En este ejemplo, el pivote es siempre el elemento que está en el extremo derecho del subarreglo, es decir, $A[f]$; al terminar *Partition*, el pivote queda en la posición que se muestra en rojo

Complejidad de memoria de `Quicksort`

En términos de memoria

- La complejidad de `Quicksort` depende solo de `Partition`
- Vimos una versión $\mathcal{O}(n)$ de `Partition`
- Es posible contar con una versión *in place*

Para la versión *in place* usaremos arreglos

- Haremos intercambios dentro del arreglo
- El truco será partir poniendo el pivote al final

Versión *in place* de `Partition`

input : Arreglo $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f

output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f}
    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

Con este cambio, `Quicksort` usa memoria adicional $\mathcal{O}(1)$

Análisis de `Quicksort`

Próxima clase demostraremos

- correctitud
- complejidad de tiempo
- En particular, que en el caso promedio es $\mathcal{O}(n \log(n))$

Partiremos de la base que `Partition` es correcto

Ejercicio (propuesto)

Demuestre que `Partition` es correcto

Sumario

Ideas al cierre

- No todo algoritmo dividir para conquistar busca resolver todos los sub-problemas
- Particionar uan secuencia con un pivote nos informa de su posición ordenada
- `Partition` puede ser usado para encontrar estadísticos de orden en `Median`
- `Partition` puede ser usado para ordenar en `Quicksort`
- `Median` y `Quicksort` siguen la estrategia dividir para conquistar