Merge Sort

Clase 03

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

Sumario

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	?	?	?	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	?	?	?	?
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	?	?	?	?
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

SelectionSort in place

input : Secuencia A, largo $n \geq 2$
output: $\varnothing$

SelectionSort (A, n)**:**

```
1    for i = 1 ... n − 1 :
2        min = i
3        for j = i + 1 ... n :
4            if A[j] < A[min] :
5                min = j
6        Intercambiar A[i] con A[min]
```

SelectionSort e InsertionSort in place

```
SelectionSort (A, n):
1     for i = 1 ... n − 1 :
2         min = i
3         for j = i + 1 ... n :
4             if A[j] < A[min] :
5                 min = j
6         Intrc (A[i], A[min])
```

```
InsertionSort (A, n):
1     for i = 1 ... n − 1 :
2         j = i
3         while (j > 0) ∧ (A[j] < A[j − 1]) :
4             Intrc (A[j], A[j − 1])
5             j = j − 1
```

Ordenación hasta ahora

`SelectionSort`

- No tiene un mejor caso que sea *mejor* que su peor caso: $\mathcal{O}(n^2)$
- Siempre revisa la secuencia completa para determinar el mínimo

`InsertionSort`

- Cuando la secuencia está ordenada toma $\mathcal{O}(n)$
- En el caso promedio es $\mathcal{O}(n^2)$, tomando el promedio sobre todas las permutaciones igualmente probables
- Argumentamos esto mediante conteo de inversiones en cada permutación

¿Podemos tener un algoritmo de ordenación
con mejor complejidad que $\mathcal{O}(n^2)$ en el peor caso?

Hay esperanza: corregir varias inversiones a la vez

Ejemplo

Recordemos que el siguiente arreglo tiene 9 inversiones

34	8	64	51	32	21
0	1	2	3	4	5

Si intercambiamos 34 y 8:

8	34	64	51	32	21
0	1	2	3	4	5

- Corregimos $(0, 1)$

Si intercambiamos 34 y 21:

21	8	64	51	32	34
0	1	2	3	4	5

- Corregimos $(0, 4)$, $(0, 5)$, $(4, 5)$

Un escenario relacionado

Consideremos una secuencia parcialmente ordenada

Para ser más precisos, una secuencia que está formada por dos sub-secuencias ordenadas

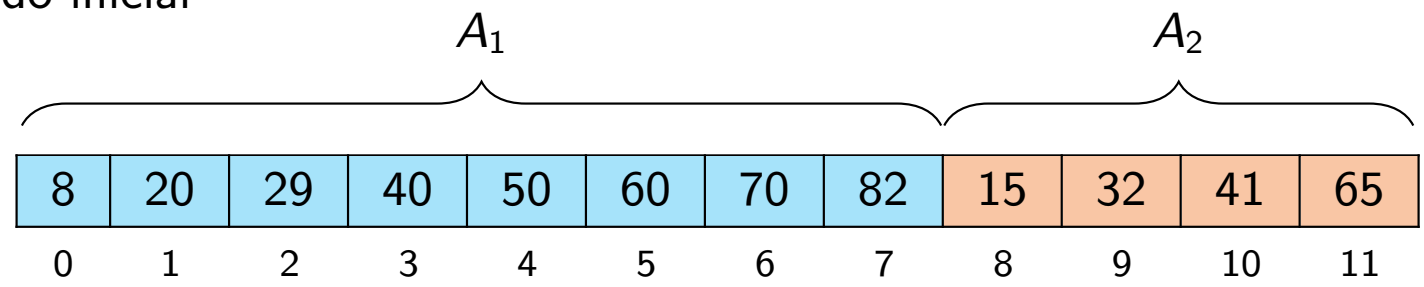
8	20	29	40	50	60	70	82	15	32	41	65
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Además, sabemos exactamente dónde comienza la segunda sub-secuencia ordenada

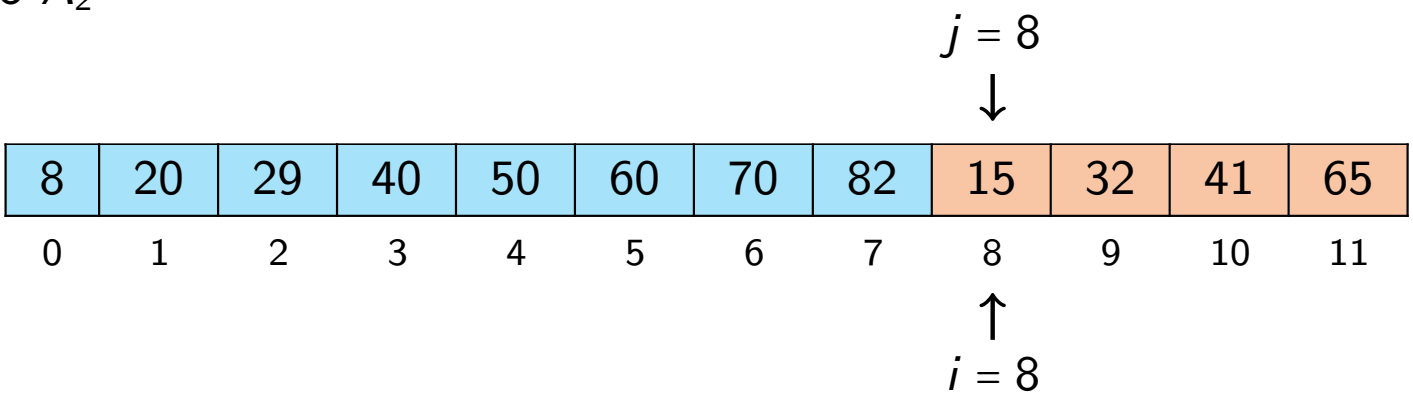
¿Cómo aprovechamos este hecho para ordenar la secuencia completa?

Primer intento: `InsertionSort`

Estado inicial



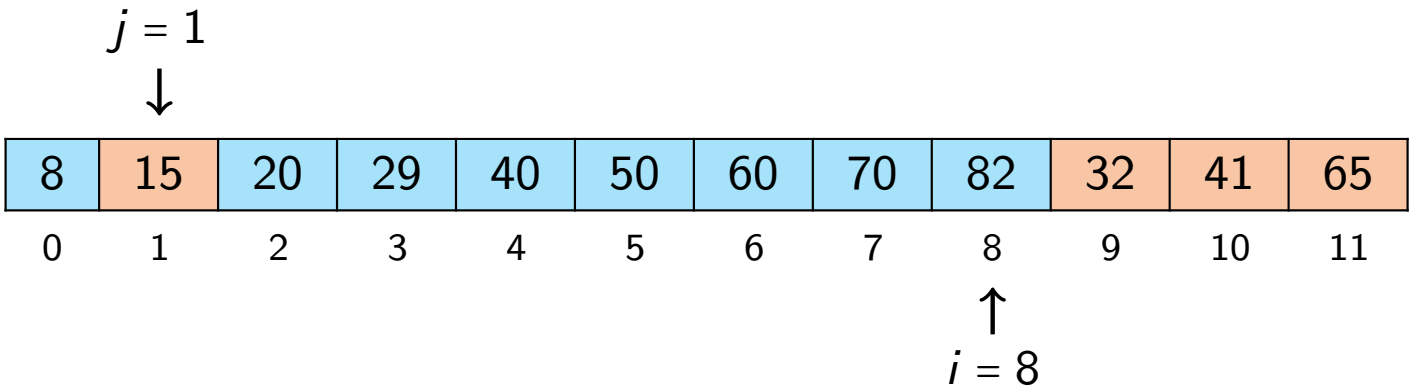
`InsertionSort` no intercambia nada del tramo A_1 y los índices i, j llegan al tramo A_2



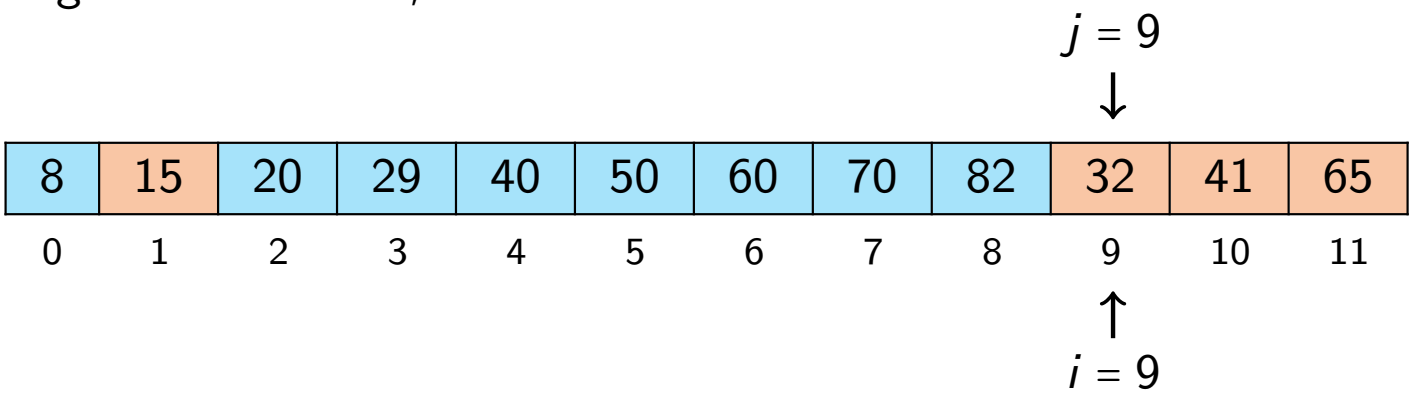
Hasta este punto la ejecución es $\mathcal{O}(n)$

Primer intento: `InsertionSort`

El valor 15 se va intercambiando hasta llegar a su posición final $j = 2$



En la siguiente iteración,



Conclusión: en este tramo el algoritmo vuelve a ser $\mathcal{O}(n^2)$

Hoy veremos una mejor estrategia para aprovechar el orden

Objetivos de la clase

- ☐ Comprender el algoritmo `Merge` para combinar secuencias ordenadas
- ☐ Determinar complejidad de `Merge` y el *trade off* de ejecutarlo *in place*
- ☐ Demostrar correctitud de `Merge`
- ☐ Comprender el uso de `Merge` como algoritmo de ordenación general en `MergeSort`
- ☐ Determinar la complejidad de `MergeSort`

Sumario

Mezcla (*merge*) de secuencias ordenadas

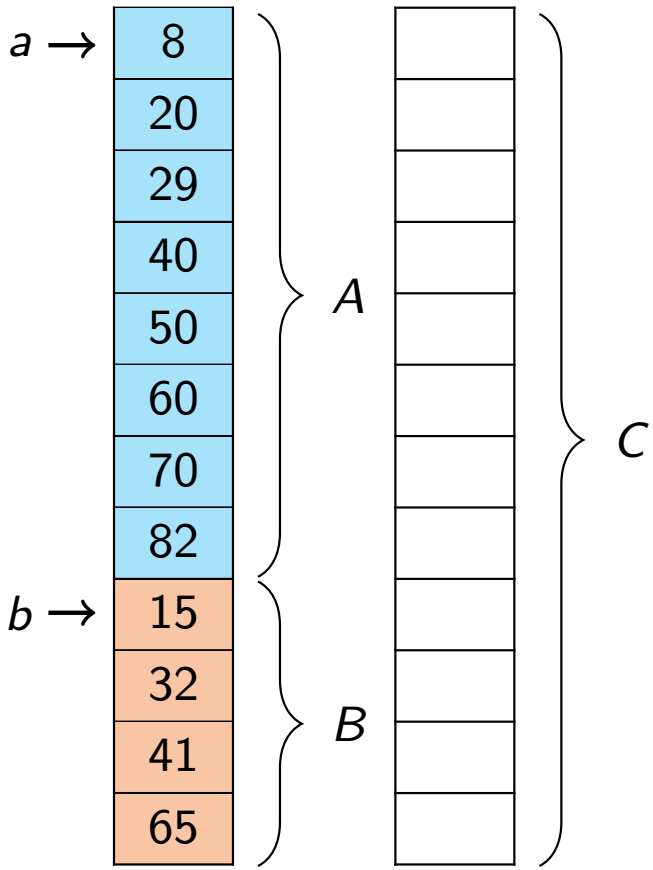
Proponemos el siguiente algoritmo para combinar dos secuencias ordenadas para formar una nueva **ordenada**

input : Secuencias ordenadas A y B
output: Nueva secuencia ordenada C

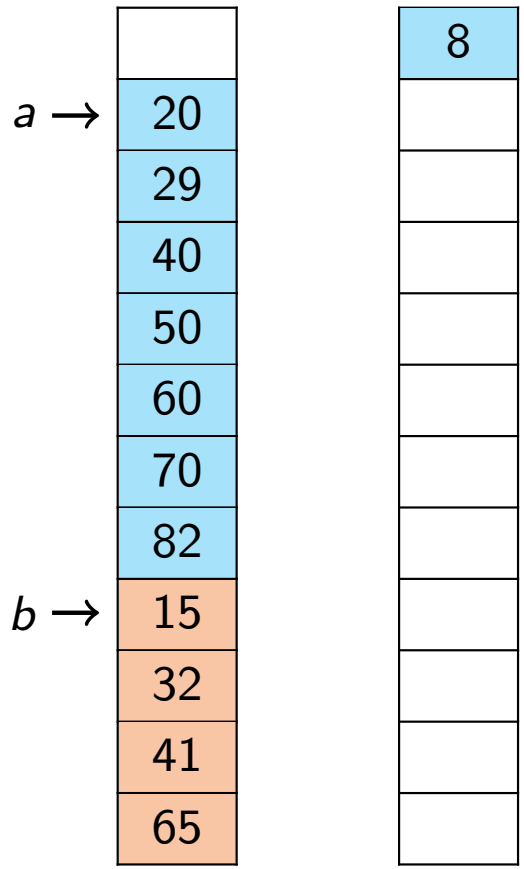
Merge(A, B)**:**

1. Iniciamos C vacía
2. Sean a y b los primeros elementos de A y B
3. Extraer de su secuencia respectiva el menor entre a y b
4. Insertar el elemento extraído al final de C
5. Si quedan elementos en A **y** B, volver a línea 2
6. Concatenar C con la secuencia que aún tenga elementos
7. **return** C

Merge: Ejemplo de ejecución

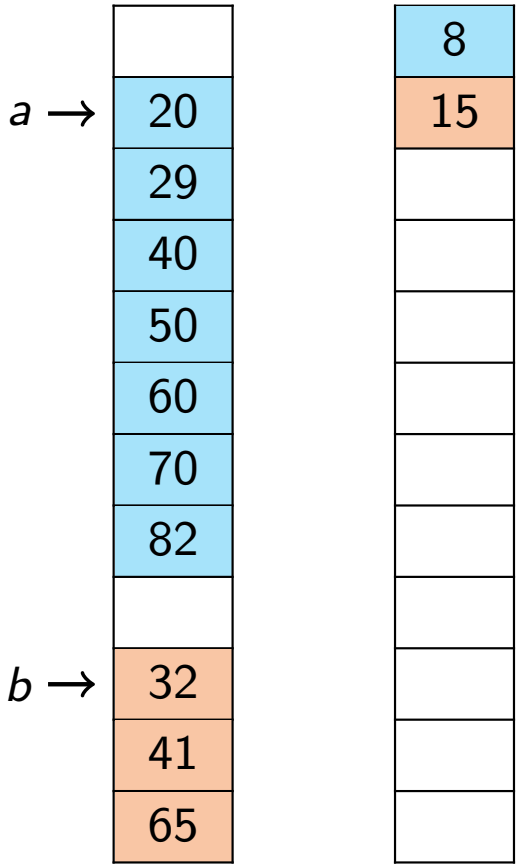


Estado inicial

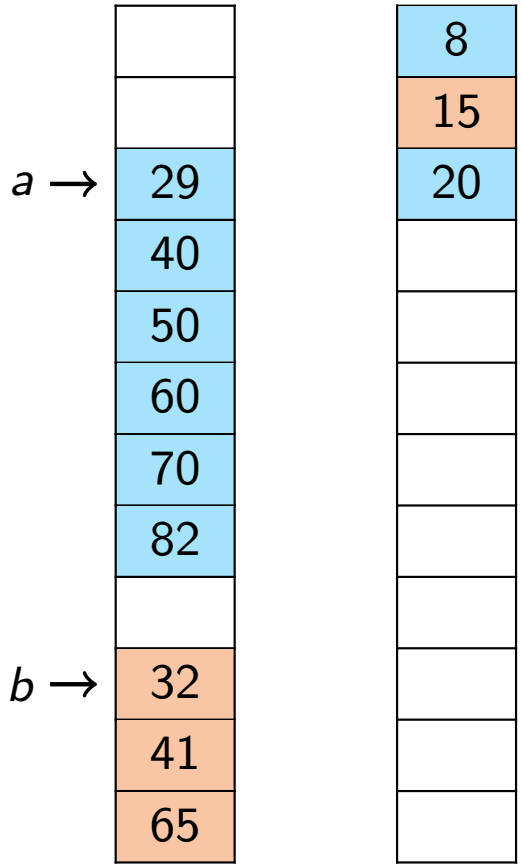


Estado luego de la primera iteración

Merge: Ejemplo de ejecución

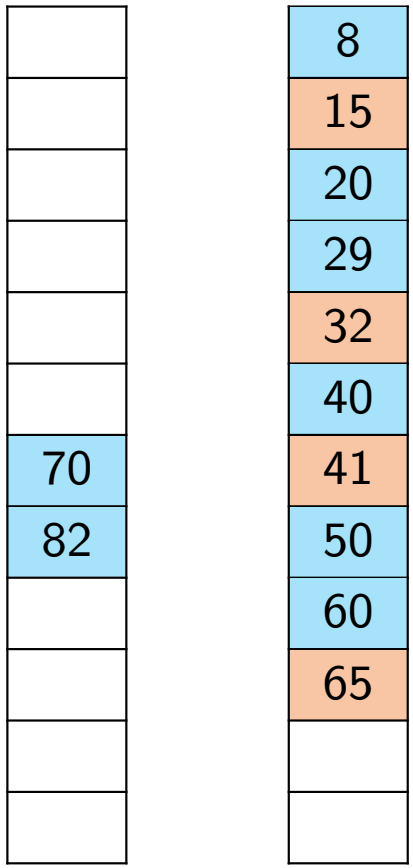


Estado luego de la segunda iteración

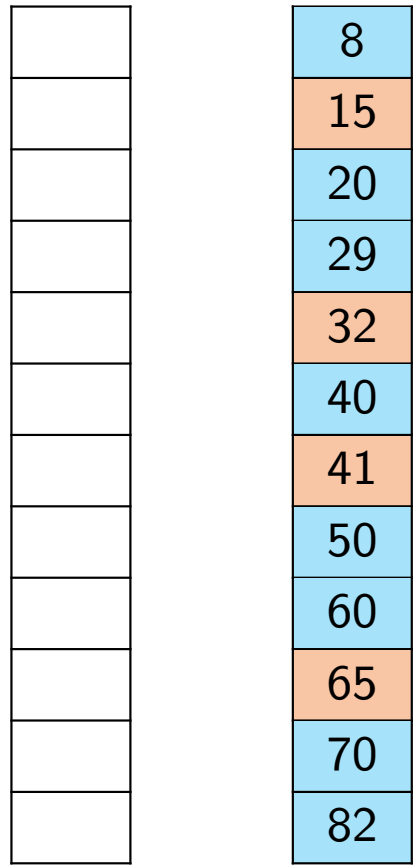


Estado luego de la tercera iteración

Merge: Ejemplo de ejecución



Estado luego de insertar en C
el último elemento de B



Estado luego de
concatenar el resto de A

Correctitud de `Merge`

Demostración (finitud)

En cada iteración del algoritmo antes de ejecutar la línea 6, se extrae siempre un elemento de A o B, y se inserta en C.

Luego, cuando una de las secuencias se vacía, se insertan todos sus elementos en C.

En total se realizan $n = |A| + |B|$ inserciones y un número menor a n de comparaciones entre elementos. Luego, el algoritmo termina en una cantidad finita de pasos. □

Correctitud de `Merge`

Demostración (propósito)

Para A, B inicialmente ordenadas, consideremos la propiedad

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de insertar el } n\text{-ésimo elemento en } C, \\ A, B, C \text{ se encuentran ordenadas}$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$ corresponde al estado de las secuencia luego de insertar el primer elemento en C.
   - Dado que se extrajo el menor elemento de alguna de las otras secuencias, estas se mantienen ordenadas. Esto aplica trivialmente si dicha secuencia queda vacía.
   - Dado que C solo tiene un elemento, está ordenada.

Correctitud de `Merge`

Demostración (propósito)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de insertar el } n \text{ -ésimo elemento en } C, \\ A, B, C \text{ se encuentran ordenadas}$$

2. **H.I.** Suponemos que luego de agregar el n-ésimo elemento, A, B, C están ordenadas.

   P.D. Luego de agregar el $(n+1)$-ésimo elemento, A, B, C siguen ordenadas.

   Tenemos dos casos

   - Si quedan elementos en A y en B, sea c_{n+1} el menor entre las cabezas de A y B.
   - Sin pérdida de generalidad, si solo quedan elementos en A, sea c_{n+1} la cabeza de A.

   Se elimina c_{n+1} de su secuencia respectiva y se inserta al final de C.

Correctitud de `Merge`

Demostración (propósito)

Por **H.I.** tenemos que la secuencia de origen de c_{n+1} se encontraba ordenada antes de sacarlo. Como es el mínimo de la secuencia por ser el primer elemento y ser una secuencia ordenada, se preserva el orden. Si la secuencia se vacía, también está ordenada.

Por **H.I.** tenemos que los primeros n elementos de C cumplen

$$c_1 \leq \cdots \leq c_n$$

Si c_{n+1} fuera estrictamente menor a alguno de estos elementos, implicaría una de las siguientes contradicciones

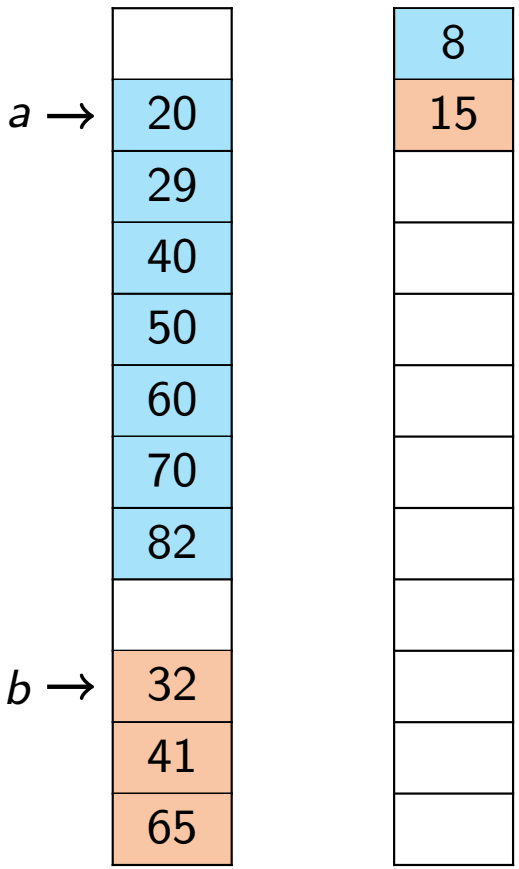
- A o B no están ordenadas (ya probamos que lo están)
- c_{n+1} es extraído en una iteración anterior por el criterio de selección

Luego, concluimos el resultado buscado

$$c_1 \leq \cdots \leq c_n \leq c_{n+1}$$

□

Complejidad de memoria de `Merge`



La ejecución de ejemplo que mostramos considera una nueva secuencia C donde se insertan los valores

- Para $|A| + |B| = n$ necesitamos memoria adicional $\mathcal{O}(n)$
- No necesita mover elementos dentro de ninguna secuencia

También se puede realizar *in place*

- Usar el mismo espacio reservado a A y B: memoria adicional $\mathcal{O}(1)$
- Mover todos los datos mayores al insertado
- Impacta en la complejidad de tiempo...

Complejidad de tiempo de `Merge`

Consideramos la implementación sugerida mediante una secuencia **adicional**

El algoritmo tiene dos fases

1. Extracción desde ambas secuencias A y B
   - Se decide quién extraer comparando los menores $\mathcal{O}(1)$
   - Se inserta el dato en C $\mathcal{O}(1)$
   - Esto se repite $\mathcal{O}(n)$ veces total $\mathcal{O}(n)$
2. Reubicación de la secuencia no vacía restante
   - Se saca un elemento de la restante $\mathcal{O}(1)$
   - Se inserta el dato en C $\mathcal{O}(1)$
   - Esto se repite $\mathcal{O}(n)$ veces total $\mathcal{O}(n)$

Usando $\mathcal{O}(n)$ memoria adicional, `Merge` es $\mathcal{O}(n)$

Complejidad de tiempo de `Merge`

Si consideramos usar el espacio reservado para A y B

El algoritmo tiene dos fases

1. Extracción desde ambas secuencias A y B
   - Se decide quién extraer comparando los menores $\mathcal{O}(1)$
   - Se inserta el dato en C $\mathcal{O}(n)$
   - Esto se repite $\mathcal{O}(n)$ veces total $\mathcal{O}(n^2)$
2. Reubicación de la secuencia no vacía restante
   - Se saca un elemento de la restante $\mathcal{O}(1)$
   - Se inserta el dato en C $\mathcal{O}(n)$
   - Esto se repite $\mathcal{O}(n)$ veces total $\mathcal{O}(n^2)$

Usando $\mathcal{O}(1)$ memoria adicional, `Merge` es $\mathcal{O}(n^2)$

Complejidad de tiempo de `Merge`

- Tenemos un algoritmo **lineal** para obtener una secuencia ordenada
- Pero el requisito de las sub-secuencias ordenadas es demasiado exigente

¿Podemos usar `Merge` para ordenar una secuencia arbitraria?

- Dada una secuencia arbitraria
- Estamos listos si logramos crear dos sub-secuencias ordenadas a partir de ella
- Luego las combinamos con `Merge`

Sumario

Dividir para conquistar

El plan para usar `Merge` en un algoritmo de ordenación sigue la estrategia **dividir para conquistar**

La estrategia sigue los siguientes pasos

1. Dividir el problema original en dos (o más) **sub-problemas** del mismo tipo
2. Resolver **recursivamente** cada sub-problema
3. Encontrar solución al problema original **combinando** las soluciones a los sub-problemas

Los sub-problemas son instancias más pequeñas del problema a resolver

Dividir para conquistar y `Merge`

Podemos usar la estrategia **dividir para conquistar** en el problema de ordenación, usando `Merge`

¿En qué parte del dividir para conquistar usaremos `Merge`?

La idea general para ordenar usando `Mergedefine` un nuevo algoritmo que llamaremos `MergeSort`

1. Dividir la secuencia original en dos sub-secuencias
2. Llamamos recursivamente a `MergeSort` sobre las dos sub-secuencias
3. Combinamos las secuencias ordenadas resultantes mediante `Merge`

El algoritmo `MergeSort`

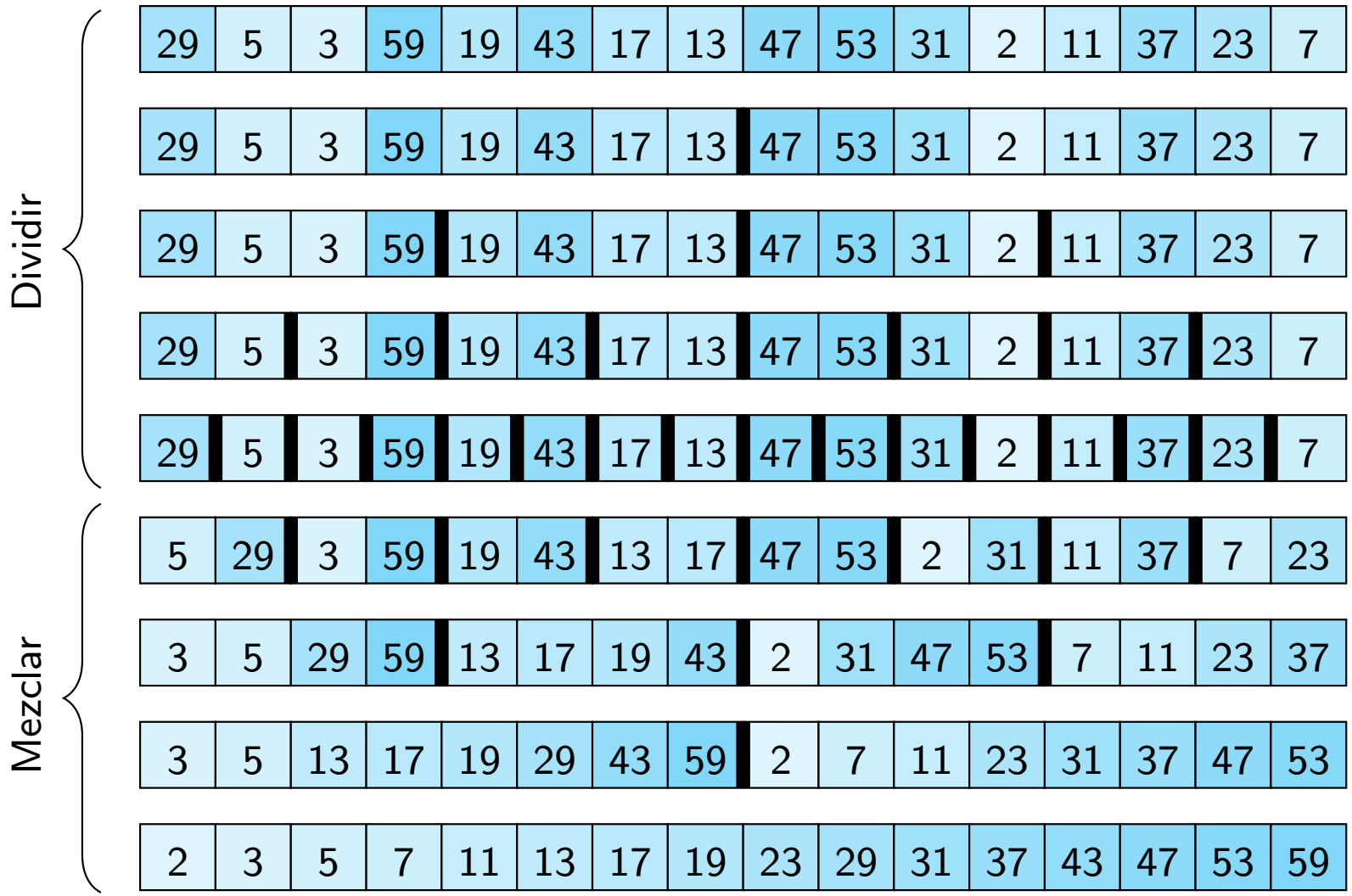
A continuación tenemos el pseudocódigo del algoritmo recursivo `MergeSort`

input : Secuencia A
output: Secuencia ordenada B

`MergeSort` *(A)*:

```
1    if |A| = 1 : return A
2    Dividir A en mitades A_1 y A_2
3    B_1 ← MergeSort(A_1)
4    B_2 ← MergeSort(A_2)
5    B ← Merge(B_1, B_2)
6    return B
```

MergeSort: Ejemplo de ejecución



Correctitud de `MergeSort`

Ejercicio (propuesto)

Demuestre que `MergeSort` es correcto

input : Secuencia A
output: Secuencia ordenada B

`MergeSort` *(A)*:

```
1  if |A| = 1 : return A
2  Dividir A en mitades A_1 y A_2
3  B_1 ← MergeSort(A_1)
4  B_2 ← MergeSort(A_2)
5  B ← Merge(B_1, B_2)
6  return B
```

Carácter recursivo de `MergeSort`

input : Secuencia A
output: Secuencia ordenada B

`MergeSort` (A)**:**

1 **if** $|A| = 1$ **: return** A
2 Dividir A en mitades A_1 y A_2
3 $B_1 \leftarrow$ `MergeSort`(A_1)
4 $B_2 \leftarrow$ `MergeSort`(A_2)
5 $B \leftarrow$ `Merge`(B_1, B_2)
6 **return** B

Todo algoritmo recursivo debe chequear primero el **caso base**

- Es el caso cuya solución no requiere recursión
- En `MergeSort`: línea 1

Los **llamados recursivos** se hacen sobre casos distintos al original

- Se acercan un poco más al caso base
- En `MergeSort`: líneas 3 y 4

Complejidad de `MergeSort`

Para el análisis de complejidad de tiempo, definimos

$$T(n) := \#\text{ pasos para ordenar } n \text{ elementos}$$

Con esto, consideramos los dos casos posibles al llamar a `MergeSort`

```
MergeSort (A):
1    if |A| = 1 : return A
2    Dividir A en A_1 y A_2
3    B_1 ← MergeSort(A_1)
4    B_2 ← MergeSort(A_2)
5    B ← Merge(B_1, B_2)
6    return B
```

- Si $n = 1$, aplica el caso base y solo involucra un paso

$$T(1) = 1$$

- Si $n > 1$, aplican los llamados
  - Dos llamados de tamaño $n/2$
  - Llamado a `Merge`

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

Este análisis aplica **para toda** secuencia de input:
Nos entregará el resultado de peor, mejor y caso promedio

Complejidad de `MergeSort`

La siguiente relación es una **relación de recurrencia**

$$T(1) = 1, \quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Podemos resolverla notando que la parte recursiva puede ser reescrita como

$$T(n) = 2T(n/2) + n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T(n)}{n} = \frac{T(n/2)}{n/2} + 1$$

La gracia de esta expresión es que numeradores y denominadores incluyen la misma fracción de n

Sin pérdida de generalidad, suponemos que n es potencia de 2

Complejidad de `MergeSort`

Construimos un sistema de ecuaciones reemplazando el argumento del lado izquierdo por $n, n/2, n/4, \ldots, 2$ de forma que el último término contiene $T(1)$ (nuestro caso base)

$$\text{ecuación } 1 \quad \frac{T(n)}{n} = \frac{T(n/2)}{n/2} + 1$$

$$\text{ecuación } 2 \quad \frac{T(n/2)}{n/2} = \frac{T(n/4)}{n/4} + 1$$

$$\ldots$$

$$\text{ecuación } k \quad \frac{T(2)}{2} = \frac{T(1)}{1} + 1$$

Como el lado derecho de la i-ésima ecuación considera la potencia 2^i, de la k-ésima ecuación deducimos

$$1 = \frac{n}{2^k} \quad \Rightarrow \quad 2^k = n \quad \Rightarrow \quad k = \log(n)$$

Complejidad de `MergeSort`

Sumamos las $\log(n)$ ecuaciones y simplificamos los términos que aparecen a ambos lados

$$\begin{aligned}
\text{ecuación } 1 \quad & \frac{T(n)}{n} = \frac{T(n/2)}{n/2} + 1 \\
\text{ecuación } 2 \quad & \frac{T(n/2)}{n/2} = \frac{T(n/4)}{n/4} + 1 \\
& \cdots \\
\text{ecuación } k \quad & \frac{T(2)}{2} = \frac{T(1)}{1} + 1 \\
\text{suma} \quad & \frac{T(n)}{n} = \frac{T(1)}{1} + \log(n)
\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos $T(n) = n\log(n) + n$

La complejidad de tiempo de `MergeSort` es $\mathcal{O}(n\log(n))$

Complejidad de `MergeSort`

En términos de memoria adicional

`MergeSort` (A)**:**

1 **if** $|A| = 1$ **: return** A
2 Dividir A en A_1 y A_2
3 $B_1 \leftarrow$ `MergeSort`(A_1)
4 $B_2 \leftarrow$ `MergeSort`(A_2)
5 $B \leftarrow$ `Merge`(B_1, B_2)
6 **return** B

- El paso recursivo no ocupa memoria adicional
- Para $|A| = n$, la línea 5 ocupa $\mathcal{O}(n)$
- Ojo! Los llamados recursivos no van acumulando memoria reservada, por lo que no sumamos $\mathcal{O}(n)$ por llamado

La complejidad de memoria de `MergeSort` es $\mathcal{O}(n)$

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

Notemos la mejora en tiempo con `MergeSort`
a cambio de memoria adicional

Sumario

Ideas al cierre

- Existen algoritmos en que podemos mejorar el tiempo si ocupamos más memoria adicional (*trade off*)
- `Merge` permite ordenar secuencias con características muy específicas
- `Merge` es $\mathcal{O}(n)$ cuando se ocupa $\mathcal{O}(n)$ memoria
- La estrategia dividir para conquistar requiere dividir el problema en subproblemas cuyos resultados se puedan combinar
- `MergeSort` es un ejemplo de la estrategia dividir para conquistar
- `MergeSort` es la extensión recursiva que permite usar `Merge` en un algoritmo de ordenación $\mathcal{O}(n \log(n))$