# Contrastes de hipótesis. Enfoque de Neyman-Pearson

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

# Introducción

- En esta presentación vamos a introducir los contrastes de hipótesis desde una perspectiva más amplia.

# Introducción

- En esta presentación vamos a introducir los contrastes de hipótesis desde una perspectiva más amplia.
- Esta nueva perspectiva nos permitirá introducir la clasificación en machine learning y detección en procesamiento de señales.

# Introducción

- En esta presentación vamos a introducir los contrastes de hipótesis desde una perspectiva más amplia.
- Esta nueva perspectiva nos permitirá introducir la clasificación en machine learning y detección en procesamiento de señales.
- Este nuevo enfoque se llama enfoque de Neyman-Pearson.

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- En los contrastes de hipótesis paramétricos introducidos durante el curso, nos concentramos en la hipótesis nula $H_0$.

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- En los contrastes de hipótesis paramétricos introducidos durante el curso, nos concentramos en la hipótesis nula $H_0$.
- Tanto si usamos los z-test como los t-test, en el cálculo del p-valor, se usaba la distribución suponiendo que la hipótesis nula $H_0$ es cierta.

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Para fijar ideas, suponiendo que el contraste considerado era sobre la media $\mu$, y el contraste era de la forma:

$$\left.\begin{aligned} H_0 : \mu &= \mu_0, \\ H_1 : \mu &\neq (<,>)\mu_0, \end{aligned}\right\}$$

  donde hemos considerados los tres casos de hipótesis alternativa $H_1$, suponiendo que la desviación típica $\sigma$ de la población es conocida, suponemos que la distribución del estadístico de contraste $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ es una normal estándar o $N(0,1)$ suponiendo que la hipótesis nula $H_0$ es cierta o que $\mu = \mu_0$

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- La suposición anterior es equivalente a suponer que la distribución de la media muestral $\overline{X}$ es normal de parámetros $\mu_{\overline{X}} = \mu_0$ y $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: $\overline{X} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- La suposición anterior es equivalente a suponer que la distribución de la media muestral $\overline{X}$ es normal de parámetros $\mu_{\overline{X}} = \mu_0$ y $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: $\overline{X} = N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
- Recordemos que para aceptar o rechazar la hipótesis nula $H_0$, comparamos el valor crítico $z_\alpha(H_1 : \mu < \mu_0)$, $z_{1-\alpha}(H_1 : \mu > \mu_0)$, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}(H_1 : \mu \neq \mu_0)$ con el valor $Z$ del estadístico de contraste y dependiendo de dicha comparación aceptamos o rechazamos la hipótesis nula $H_0$, siendo $\alpha$ el nivel de significación.

- Concretamente,

- Concretamente,
    - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Concretamente,
  - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,
    - si $Z < z_\alpha$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Concretamente,
  - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,
    - si $Z < z_\alpha$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu > \mu_0$,

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Concretamente,
  - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,
    - si $Z < z_{\alpha}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu > \mu_0$,
    - si $Z > z_{1-\alpha}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Concretamente,
  - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,
    - si $Z < z_\alpha$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu > \mu_0$,
    - si $Z > z_{1-\alpha}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu \neq \mu_0$,

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Concretamente,
  - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,
    - si $Z < z_\alpha$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu > \mu_0$,
    - si $Z > z_{1-\alpha}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
    - si $|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$.

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Concretamente,
  - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,
    - si $Z < z_{\alpha}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu > \mu_0$,
    - si $Z > z_{1-\alpha}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
    - si $|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$.
- Un aspecto importante del contrate de hipótesis es la hipótesis alternativa $H_1$, donde si suponemos que es cierta, la distribución del estadístico de contraste $Z$ o $\overline{X}$ (dependiendo de cuál usemos) sería diferente.

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Concretamente,
  - Si $H_1 : \mu < \mu_0$,
    - si $Z < z_\alpha$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu > \mu_0$,
    - si $Z > z_{1-\alpha}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$,
  - Si $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
    - si $|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, rechazamos $H_0$ y en caso contrario, aceptamos $H_0$.
- Un aspecto importante del contrate de hipótesis es la hipótesis alternativa $H_1$, donde si suponemos que es cierta, la distribución del estadístico de contraste $Z$ o $\overline{X}$ (dependiendo de cuál usemos) sería diferente.
- Concretamente, si la hipótesis alternativa $H_1$ es cierta, la distribución del estadístico de contraste $\overline{X}$ sería $\overline{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ o $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, 1\right)$

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Para usar ambas distribuciones, definimos:

$$f_0(z) = f_Z(z|H_0), \quad f_1(z) = f_Z(z|H_1),$$

  las funciones de densidad del estadístico de contraste suponiendo que $H_0$ es cierta ($f_0(z)$) o suponiendo que $H_1$ es cierta ($f_1(z)$).

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa

- Para usar ambas distribuciones, definimos:

$$f_0(z) = f_Z(z|H_0), \quad f_1(z) = f_Z(z|H_1),$$

las funciones de densidad del estadístico de contraste suponiendo que $H_0$ es cierta ($f_0(z)$) o suponiendo que $H_1$ es cierta ($f_1(z)$).

- En el primer caso o suponiendo que $H_0$ es cierta, $f_0(z)$ sería la función de densidad de una $N(0, 1)$ y en el segundo caso o suponiendo que $H_1$ es cierta, $f_1(z)$ sería la función de densidad de una $N\left(\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, 1\right)$.

- Suponemos que nos planteamos el contraste de hipótesis siguiente:

$$\left.\begin{aligned} H_0 : \mu &= 2, \\ H_1 : \mu &> 2, \end{aligned}\right\}$$

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa. Ejemplo

- Suponemos que nos planteamos el contraste de hipótesis siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 : \mu & = 2, \\ H_1 : \mu & > 2, \end{array}\right\}$$

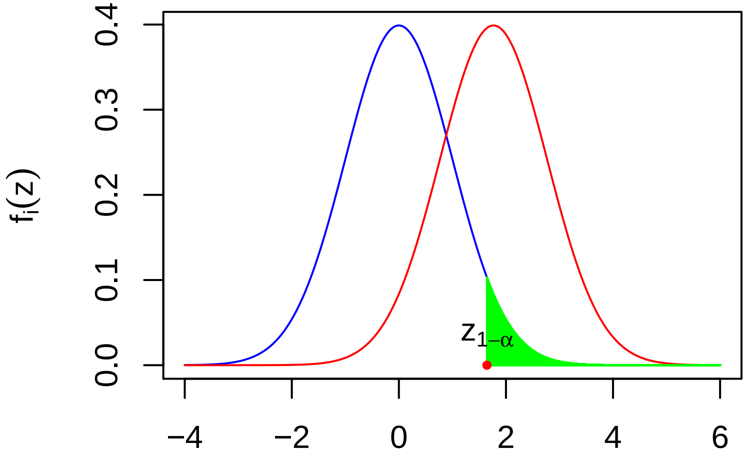
- En el gráfico siguiente hemos dibujado las funciones de densidad $f_0$ y $f_1$. La curva azul es $f_0$ y la roja $f_1$, donde hemos supuesto que $\mu = 2{,}5$ y $\sigma = 2$.

- Suponemos que nos planteamos el contraste de hipótesis siguiente:

$$\left.\begin{aligned} H_0 : \mu &= 2, \\ H_1 : \mu &> 2, \end{aligned}\right\}$$

- En el gráfico siguiente hemos dibujado las funciones de densidad $f_0$ y $f_1$. La curva azul es $f_0$ y la roja $f_1$, donde hemos supuesto que $\mu = 2{,}5$ y $\sigma = 2$.
- Rechazaremos la hipótesis nula $H_0$ si el valor del estadístico de contraste $Z$ se encuentra en la zona verde, o $Z > z_{1-\alpha}$, donde hemos considerado un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, de donde $z_{0{,}95} = 1{,}645$.

# Distribuciones de las hipótesis nula y alternativa. Ejemplo



# Reglas de decisión

- Un contraste de hipótesis, se basa en una regla de decisión $\delta(\cdot)$ a partir de un espacio de valores $\mathcal{Z}$ del estadístico de contraste $Z$.

# Reglas de decisión

- Un contraste de hipótesis, se basa en una regla de decisión $\delta(\cdot)$ a partir de un espacio de valores $\mathcal{Z}$ del estadístico de contraste $Z$.
- Concretamente, en un contraste de la media $\mu$ del tipo:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 : \mu & = \mu_0, \\ H_1 : \mu & > \mu_0, \end{array}\right\}$$

como la del ejemplo anterior,

# Reglas de decisión

- Un contraste de hipótesis, se basa en una regla de decisión $\delta(\cdot)$ a partir de un espacio de valores $\mathcal{Z}$ del estadístico de contraste $Z$.
- Concretamente, en un contraste de la media $\mu$ del tipo:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 : \mu & = \mu_0, \\ H_1 : \mu & > \mu_0, \end{array}\right\}$$

como la del ejemplo anterior,

  - el espacio de valores $\mathcal{Z}$ sería el conjunto de números reales $\mathbb{R}$,

# Reglas de decisión

- Un contraste de hipótesis, se basa en una regla de decisión $\delta(\cdot)$ a partir de un espacio de valores $\mathcal{Z}$ del estadístico de contraste $Z$.
- Concretamente, en un contraste de la media $\mu$ del tipo:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 : \mu & = \mu_0, \\ H_1 : \mu & > \mu_0, \end{array}\right\}$$

como la del ejemplo anterior,

  - el espacio de valores $\mathcal{Z}$ sería el conjunto de números reales $\mathbb{R}$,
  - el estadístico de contraste $Z$ sería $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (suponemos $\sigma$ conocida) y

# Reglas de decisión

- Un contraste de hipótesis, se basa en una regla de decisión $\delta(\cdot)$ a partir de un espacio de valores $\mathcal{Z}$ del estadístico de contraste $Z$.
- Concretamente, en un contraste de la media $\mu$ del tipo:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 : \mu & = \mu_0, \\ H_1 : \mu & > \mu_0, \end{array}\right\}$$

como la del ejemplo anterior,

  - el espacio de valores $\mathcal{Z}$ sería el conjunto de números reales $\mathbb{R}$,
  - el estadístico de contraste $Z$ sería $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (suponemos $\sigma$ conocida) y
  - la regla de decisión $\delta(z, \alpha)$ que depende del valor del estadístico de contraste y del nivel de significación $\alpha$ sería:

# Reglas de decisión

- Un contraste de hipótesis, se basa en una regla de decisión $\delta(\cdot)$ a partir de un espacio de valores $\mathcal{Z}$ del estadístico de contraste $Z$.
- Concretamente, en un contraste de la media $\mu$ del tipo:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0: \mu & = \mu_0, \\ H_1: \mu & > \mu_0, \end{array}\right\}$$

como la del ejemplo anterior,

  - el espacio de valores $\mathcal{Z}$ sería el conjunto de números reales $\mathbb{R}$,
  - el estadístico de contraste $Z$ sería $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (suponemos $\sigma$ conocida) y
  - la regla de decisión $\delta(z,\alpha)$ que depende del valor del estadístico de contraste y del nivel de significación $\alpha$ sería:
    - si $Z \geq z_{1-\alpha}$, rechazamos la hipótesis nula $H_0$,

# Reglas de decisión

- Un contraste de hipótesis, se basa en una regla de decisión $\delta(\cdot)$ a partir de un espacio de valores $\mathcal{Z}$ del estadístico de contraste $Z$.
- Concretamente, en un contraste de la media $\mu$ del tipo:

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 : \mu & = \mu_0, \\ H_1 : \mu & > \mu_0, \end{array}\right\}$$

como la del ejemplo anterior,

  - el espacio de valores $\mathcal{Z}$ sería el conjunto de números reales $\mathbb{R}$,
  - el estadístico de contraste $Z$ sería $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ (suponemos $\sigma$ conocida) y
  - la regla de decisión $\delta(z, \alpha)$ que depende del valor del estadístico de contraste y del nivel de significación $\alpha$ sería:
    - si $Z \geq z_{1-\alpha}$, rechazamos la hipótesis nula $H_0$,
    - si $Z < z_{1-\alpha}$, aceptamos la hipótesis nula $H_0$.

# Reglas de decisión

- Escribiremos la regla de decisión de la forma siguiente:

$$\delta(z,\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in R_\alpha (\text{ rechazamos } H_0), \\ 0, & \text{si } z \notin R_\alpha (\text{ aceptamos } H_0), \end{cases}$$

donde $R_\alpha$ es la llamada zona de rechazo que valdría en el ejemplo que vamos desarrollando:

$$R_\alpha = \{z \geq z_{1-\alpha} = \phi^{-1}(1-\alpha)\},$$

donde $\phi(z)$ representa la función de distribución de la $N(0,1)$: $\phi(z) = P(Z \leq z)$.

- En el ejemplo anterior, la regla de decisión para $\alpha = 0{,}05$ sería:

$$\delta(z, 0{,}05) = \begin{cases} 1, & \text{si } z \in R_{0{,}05}(\text{ rechazamos } H_0), \\ 0, & \text{si } z \notin R_{0{,}05}(\text{ aceptamos } H_0), \end{cases}$$

donde $R_{0{,}05} = \{z \geq z_{0{,}95} = \phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}645\}$.

- Recordemos que en un contraste de hipótesis, el error tipo I se definía como:

$$\text{Error tipo I} = P(\text{Rechazar } H_0 | H0 \text{ cierta }),$$

o como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula suponiendo ésta cierta.

# Errores tipo I y tipo II

- Recordemos que en un contraste de hipótesis, el error tipo I se definía como:

$$\text{Error tipo I} = P(\text{Rechazar } H_0 | H0 \text{ cierta }),$$

o como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula suponiendo ésta cierta.

- De la misma manera, el error tipo II se definía como:

$$\text{Error tipo II} = P(\text{Aceptar } H_0 | H0 \text{ falsa }),$$

o como la probabilidad de aceptar la hipótesis nula suponiendo ésta falsa.

# Errores tipo I y tipo II

- Si interpretamos un contraste de hipótesis como un proceso de decisión,

# Errores tipo I y tipo II

- Si interpretamos un contraste de hipótesis como un proceso de decisión,
  - aceptar la hipótesis nula sería tener un valor negativo y

# Errores tipo I y tipo II

- Si interpretamos un contraste de hipótesis como un proceso de decisión,
    - aceptar la hipótesis nula sería tener un valor negativo y
    - rechazarla sería tener un valor positivo.

# Errores tipo I y tipo II

- Si interpretamos un contraste de hipótesis como un proceso de decisión,
  - aceptar la hipótesis nula sería tener un valor negativo y
  - rechazarla sería tener un valor positivo.
- Entonces, podemos interpretar

# Errores tipo I y tipo II

- Si interpretamos un contraste de hipótesis como un proceso de decisión,
  - aceptar la hipótesis nula sería tener un valor negativo y
  - rechazarla sería tener un valor positivo.
- Entonces, podemos interpretar
  - el error tipo I como un falso positivo ya que declaramos positiva una decisión que debería ser negativa y

# Errores tipo I y tipo II

- Si interpretamos un contraste de hipótesis como un proceso de decisión,
  - aceptar la hipótesis nula sería tener un valor negativo y
  - rechazarla sería tener un valor positivo.
- Entonces, podemos interpretar
  - el error tipo I como un falso positivo ya que declaramos positiva una decisión que debería ser negativa y
  - y el error tipo II como un falso negativo ya que declaramos positiva una decisión que debería ser positiva.

# Tasa de falsos positivos y falsos negativos

- En un contexto del proceso de decisión,

# Tasa de falsos positivos y falsos negativos

- En un contexto del proceso de decisión,
  - el error tipo I se podría interpreta como la tasa de falsos positivos y

# Tasa de falsos positivos y falsos negativos

- En un contexto del proceso de decisión,
  - el error tipo I se podría interpreta como la tasa de falsos positivos y
  - el error tipo II se podría interpreta como la tasa de falsos negativos.

# Tasa de falsos positivos y falsos negativos

- En un contexto del proceso de decisión,
  - el error tipo I se podría interpreta como la tasa de falsos positivos y
  - el error tipo II se podría interpreta como la tasa de falsos negativos.
- Otro concepto que se introdujo en los contrastes de hipótesis es la potencia de un contraste que se definía como:

$$\begin{aligned}\text{Potencia de un contraste} &= 1 - \text{Error tipo II}\\ &= 1 - P(\text{Aceptar } H_0 | H0 \text{ falsa })\\ &= P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ falsa}),\end{aligned}$$

es decir, como la probabilidad de rechazar la hipótesis nula suponiendo ésta falsa.

# Tasa de verdaderos positivos

- En un contexto del proceso de decisión, la potencia del contraste se puede interpretar como la probabilidad de detectar un negativo.

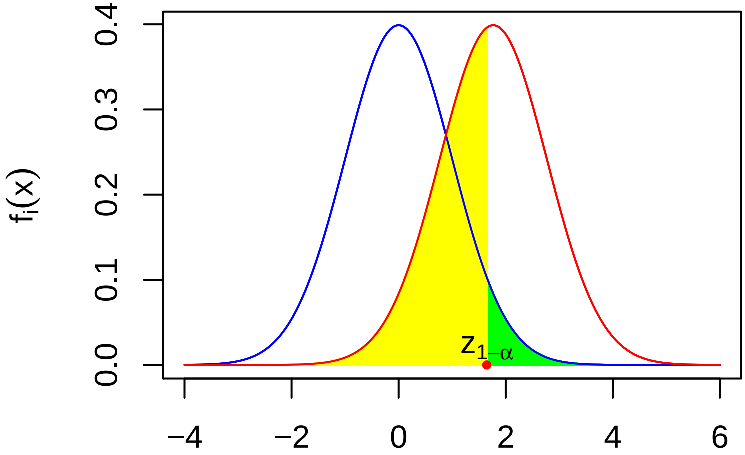
# Tasa de verdaderos positivos

- En un contexto del proceso de decisión, la potencia del contraste se puede interpretar como la probabilidad de detectar un negativo.
- Por tanto, la potencia de un contraste puede interpretarse como la tasa de verdaderos positivos o la probabilidad de detección.

# Tasa de verdaderos positivos

- En un contexto del proceso de decisión, la potencia del contraste se puede interpretar como la probabilidad de detectar un negativo.
- Por tanto, la potencia de un contraste puede interpretarse como la tasa de verdaderos positivos o la probabilidad de detección.
- En el gráfico siguiente mostramos en amarillo el error tipo II o la tasa de falsos negativos para el ejemplo anterior. Recordemos que en verde está el error tipo I o la tasa de falsos positivos.

# Tasa de verdaderos positivos



# Tasa de falsos positivos, falsos negativos y verdaderos positivos

- Matemáticamente, podemos escribir las tasas anteriores de la forma siguiente:

# Tasa de falsos positivos, falsos negativos y verdaderos positivos

- Matemáticamente, podemos escribir las tasas anteriores de la forma siguiente:
    - Tasa de falsos positivos o error tipo I:

$$P_{FP} = \int_{R_\alpha} f_0(z)\,dz = \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} f_0(z)\,dz.$$

# Tasa de falsos positivos, falsos negativos y verdaderos positivos

- Matemáticamente, podemos escribir las tasas anteriores de la forma siguiente:
  - Tasa de falsos positivos o error tipo I:

$$P_{FP} = \int_{R_\alpha} f_0(z)\, dz = \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} f_0(z)\, dz.$$

  - Tasa de falsos negativos o error tipo II:

$$P_{FN} = \int_{R_\alpha^c} f_1(z)\, dz = \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha}} f_1(z)\, dz.$$

# Tasa de falsos positivos, falsos negativos y verdaderos positivos

- Matemáticamente, podemos escribir las tasas anteriores de la forma siguiente:
  - Tasa de falsos positivos o error tipo I:

$$P_{FP} = \int_{R_\alpha} f_0(z)\, dz = \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} f_0(z)\, dz.$$

  - Tasa de falsos negativos o error tipo II:

$$P_{FN} = \int_{R_\alpha^c} f_1(z)\, dz = \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha}} f_1(z)\, dz.$$

  - Tasa de verdaderos positivos o potencia del contraste:

$$P_{VP} = \int_{R_\alpha} f_1(z)\, dz = \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} f_1(z)\, dz = 1 - PFN.$$

# Tasa de falsos positivos, falsos negativos y verdaderos positivos

- Podemos escribir las probabilidades anteriores en función de la regla de decisión $\delta(z,\alpha)$ de la forma siguiente:

$$P_{FP} = \int_{\mathbb{R}} \delta(z,\alpha) f_0(z)\,dz = \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} f_0(z)\,dz,$$
$$P_{FN} = \int_{\mathbb{R}} (1-\delta(z,\alpha)) f_1(z)\,dz = \int_{-\infty}^{z_{1-\alpha}} f_1(z)\,dz,$$
$$P_{VP} = \int_{\mathbb{R}} \delta(z,\alpha) f_1(z)\,dz = \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} f_1(z)\,dz.$$

# Ejemplo anterior

- En el ejemplo anterior, las tasas de falsos positivos, falsos negativos y verdaderos positivos son las siguientes:

$$P_{FP} = \int_{1{,}645}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 1 - \phi(1{,}645) = 0{,}05,$$

$$P_{FN} = \int_{-\infty}^{1{,}645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(z - \frac{2{,}5-2}{\frac{2}{\sqrt{50}}}\right)^2}{2}}\, dz = \int_{-\infty}^{1{,}645} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-1{,}768)}{2}}\, dz$$
$$= P(N(1{,}768, 1) \leq 1{,}645) = \phi(1{,}645 - 1{,}768) = \phi(-0{,}123)$$
$$= 0{,}451,$$
$$P_{VP} = 1 - P_{FN} = 1 - 0{,}451 = 0{,}549.$$

# Decisión de Neyman-Pearson

- Una vez establecidos los conceptos necesarios, el objetivo es hallar la mejor regla de decisión para un contraste de hipótesis.

**Definition (Definición)**

La regla de decisión de Neyman-Pearson se define como el siguiente problema de optimización:

$$\hat{\delta} = \max_{\delta \text{ tal que } P_{FP}(\delta) \leq \alpha} P_{VP}(\delta)$$

# Decisión de Neyman-Pearson

- Una vez establecidos los conceptos necesarios, el objetivo es hallar la mejor regla de decisión para un contraste de hipótesis.
- Definimos la regla de decisión de Neyman-Pearson precisamente como la mejor regla de decisión donde formalmente se define como el siguiente problema de optimización:

**Definition (Definición)**

La regla de decisión de Neyman-Pearson se define como el siguiente problema de optimización:

$$\hat{\delta} = \max_{\delta \text{ tal que } P_{FP}(\delta) \leq \alpha} P_{VP}(\delta)$$

# Decisión de Neyman-Pearson

- Es decir, de entre todas las reglas de decisión $\delta$ tal que la tasa de falsos positivos es menor que un cierto nivel de significación $\alpha$, hallar la que maximiza la tasa de verdaderos positivos o la tasa de detección.

# Decisión de Neyman-Pearson

- Es decir, de entre todas las reglas de decisión $\delta$ tal que la tasa de falsos positivos es menor que un cierto nivel de significación $\alpha$, hallar la que maximiza la tasa de verdaderos positivos o la tasa de detección.
- Para resolver el problema de optimización anterior, necesitamos introducir el índice de verosimilitud entre dos distribuciones de funciones de densidad $f_0(z)$ y $f_1(z)$ como:

$$L(z) = \frac{f_1(z)}{f_0(z)}.$$

# Decisión de Neyman-Pearson

- El siguiente resultado resuelve el problema de optimización:

# Decisión de Neyman-Pearson

- El siguiente resultado resuelve el problema de optimización:

**Theorem**

*La solución al problema de optimización de la regla de decisión de Neyman-Pearson es el siguiente:*

$$\hat{\delta}(z) = \begin{cases} 1, & \text{si } L(z) \geq \eta, \\ 0, & \text{si } L(z) < \eta, \end{cases}$$

*donde $\eta$ depende del nivel de significación $\alpha$.*

- El siguiente resultado resuelve el problema de optimización:

**Theorem**

*La solución al problema de optimización de la regla de decisión de Neyman-Pearson es el siguiente:*

$$\hat{\delta}(z) = \begin{cases} 1, & si\ L(z) \geq \eta, \\ 0, & si\ L(z) < \eta, \end{cases}$$

*donde $\eta$ depende del nivel de significación $\alpha$.*

- El teorema anterior dice que si el objetivo es maximizar la tasa de detección o la tasa de verdaderos positivos manteniendo la tasa de falsos positivos, no podemos hacerlo mejor que la regla de decisión dada por el Teorema.

# Demostración del Teorema

- La relación entre $\eta$ y $\alpha$ es la siguiente:

$$\alpha = P_{FP}(\hat{\delta}) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\delta}(z) f_0(z)\, dz = \int_{L(z)\geq\eta} f_0(z)\, dz$$

# Demostración del Teorema

- La relación entre $\eta$ y $\alpha$ es la siguiente:

$$\alpha = P_{FP}(\hat{\delta}) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\delta}(z) f_0(z)\, dz = \int_{L(z)\geq\eta} f_0(z)\, dz$$

- Sea $\delta$ otra regla de decisión. Nuestro objetivo es demostrar que $P_{VP}(\hat{\delta}) \geq P_{VP}(\delta)$.

# Demostración del Teorema

- La relación entre $\eta$ y $\alpha$ es la siguiente:

$$\alpha = P_{FP}(\hat{\delta}) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\delta}(z) f_0(z)\, dz = \int_{L(z)\geq \eta} f_0(z)\, dz$$

- Sea $\delta$ otra regla de decisión. Nuestro objetivo es demostrar que $P_{VP}(\hat{\delta}) \geq P_{VP}(\delta)$.
- Como la regla $\delta$ debe cumplir que la tasa de falsos positivos debe ser menor que $\alpha$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha \geq P_{FP}(\delta) &= \int_{\mathbb{R}} \delta(z) f_0(z)\, dz \\ &= \int_{L(z)\geq \eta} \delta(z) f_0(z)\, dz + \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_0(z)\, dz.\end{aligned}$$

# Demostración del Teorema (continuación)

- Entonces:

$$\int_{L(z)\geq\eta} f_0(z)\,dz \geq \int_{L(z)\geq\eta} \delta(z) f_0(z)\,dz + \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_0(z)\,dz, \;\Rightarrow$$

$$\int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z)) f_0(z)\,dz - \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_0(z)\,dz \geq 0.$$

# Demostración del Teorema (continuación)

- Entonces:

$$\int_{L(z)\geq\eta} f_0(z)\,dz \geq \int_{L(z)\geq\eta} \delta(z)f_0(z)\,dz + \int_{L(z)<\eta} \delta(z)f_0(z)\,dz, \ \Rightarrow$$
$$\int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z))f_0(z)\,dz - \int_{L(z)<\eta} \delta(z)f_0(z)\,dz \geq 0.$$

- A continuación, veamos que $P_{VP}(\hat{\delta}) \geq P_{VP}(\delta)$:

$$\begin{aligned}
P_{VP}(\hat{\delta}) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\delta}(z)f_1(z)\,dz = \int_{L(z)\geq\eta} f_1(z)\,dz,\\
P_{VP}(\delta) &= \int_{\mathbb{R}} \delta(z)f_1(z)\,dz = \int_{L(z)\geq\eta} \delta(z)f_1(z)\,dz\\
&\quad + \int_{L(z)<\eta} \delta(z)f_1(z)\,dz,
\end{aligned}$$

- Restando las dos expresiones anteriores,

$$P_{VP}(\hat{\delta})-P_{VP}(\delta)=\int_{L(z)\geq\eta}(1-\delta(z))f_1(z)\,dz-\int_{L(z)<\eta}\delta(z)f_1(z)\,dz$$

# Demostración del Teorema (continuación)

- Restando las dos expresiones anteriores,

$$P_{VP}(\hat{\delta}) - P_{VP}(\delta) = \int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z)) f_1(z)\, dz - \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_1(z)\, dz$$

- Ahora bien,

- Restando las dos expresiones anteriores,

$$P_{VP}(\hat{\delta}) - P_{VP}(\delta) = \int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z)) f_1(z)\, dz - \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_1(z)\, dz$$

- Ahora bien,
    - si $L(z) = \frac{f_1(z)}{f_0(z)} \geq \eta$, $f_1(z) \geq \eta f_0(z)$,

# Demostración del Teorema (continuación)

- Restando las dos expresiones anteriores,

$$P_{VP}(\hat{\delta})-P_{VP}(\delta) = \int_{L(z)\geq\eta}(1-\delta(z))f_1(z)\,dz-\int_{L(z)<\eta}\delta(z)f_1(z)\,dz$$

- Ahora bien,
  - si $L(z)=\frac{f_1(z)}{f_0(z)}\geq\eta$, $f_1(z)\geq\eta f_0(z)$,
  - si $L(z)=\frac{f_1(z)}{f_0(z)}<\eta$, $f_1(z)<\eta f_0(z)$ y por tanto, $-f_1(z)>-\eta f_0(z)$.

# Demostración del Teorema (continuación)

- Entonces:

$$\begin{aligned} P_{VP}(\hat{\delta}) - P_{VP}(\delta) &\geq \int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z))\eta f_0(z)\,dz \\ &\quad - \int_{L(z)<\eta} \eta\delta(z) f_0(z)\,dz \\ &= \eta\left(\int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z)) f_0(z)\,dz - \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_0(z)\,dz\right) \end{aligned}$$

# Demostración del Teorema (continuación)

- Entonces:

$$
\begin{aligned}
P_{VP}(\hat{\delta}) - P_{VP}(\delta) &\geq \int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z))\eta f_0(z)\,dz \\
&\quad - \int_{L(z)<\eta} \eta\delta(z) f_0(z)\,dz \\
&= \eta \left( \int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z)) f_0(z)\,dz - \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_0(z)\,dz \right)
\end{aligned}
$$

- Anteriormente vimos que

$$\int_{L(z)\geq\eta} (1-\delta(z)) f_0(z)\,dz - \int_{L(z)<\eta} \delta(z) f_0(z)\,dz \geq 0,$$

por tanto,

$$P_{VP}(\hat{\delta}) - P_{VP}(\delta) \geq 0,$$

tal como queríamos demostrar.

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- Ahora ya sabemos cómo hallar reglas de decisión óptimas dado un contraste de hipótesis.

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- Ahora ya sabemos cómo hallar reglas de decisión óptimas dado un contraste de hipótesis.
- Apliquemos el Teorema anterior al ejemplo desarrollado pero lo haremos con cualquier valor de $\sigma$.

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- Ahora ya sabemos cómo hallar reglas de decisión óptimas dado un contraste de hipótesis.
- Apliquemos el Teorema anterior al ejemplo desarrollado pero lo haremos con cualquier valor de $\sigma$.
- En el ejemplo,

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, \quad f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-\left(z - \frac{\mu - 2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2}{2}}$$

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- Ahora ya sabemos cómo hallar reglas de decisión óptimas dado un contraste de hipótesis.
- Apliquemos el Teorema anterior al ejemplo desarrollado pero lo haremos con cualquier valor de $\sigma$.
- En el ejemplo,

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, \quad f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-\left(z - \frac{\mu - 2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2}{2}}$$

- Sea $\mu_1 = \frac{\mu - 2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. El valor de $L(z)$ será:

$$L(z) = \frac{f_1(z)}{f_0(z)} = \mathrm{e}^{-\frac{(z-\mu_1)^2}{2} + \frac{z^2}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2z\mu_1 - \mu_1^2)}.$$

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- La condición $L(z) \geq \eta$ será en nuestro caso,

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2z\mu_1-\mu_1^2)} \geq \eta, \Leftrightarrow 2z\mu_1 \geq 2\ln(\eta)+\mu_1^2, \Leftrightarrow z \geq \frac{2\ln(\eta)+\mu_1^2}{2\mu_1} := \tau.$$

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- La condición $L(z) \geq \eta$ será en nuestro caso,

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2z\mu_1-\mu_1^2)} \geq \eta, \Leftrightarrow 2z\mu_1 \geq 2\ln(\eta)+\mu_1^2, \Leftrightarrow z \geq \frac{2\ln(\eta)+\mu_1^2}{2\mu_1} := \tau.$$

- Para hallar $\tau$ en función de $\alpha$, hay que tener en cuenta que:

$$\alpha = P_{FP}(\hat{\delta}) = \int_{L(z)\geq\eta} f_0(z)\,dz = \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 1-\phi(\tau).$$

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- La condición $L(z) \geq \eta$ será en nuestro caso,

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(2z\mu_1 - \mu_1^2)} \geq \eta, \Leftrightarrow 2z\mu_1 \geq 2\ln(\eta) + \mu_1^2, \Leftrightarrow z \geq \frac{2\ln(\eta) + \mu_1^2}{2\mu_1} := \tau.$$

- Para hallar $\tau$ en función de $\alpha$, hay que tener en cuenta que:

$$\alpha = P_{FP}(\hat{\delta}) = \int_{L(z)\geq\eta} f_0(z)\,dz = \int_\tau^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 1 - \phi(\tau).$$

- Entonces,

$$\phi(\tau) = 1 - \alpha, \Leftrightarrow \tau = \phi^{-1}(1 - \alpha).$$

- En pocas palabras la regla de decisión óptima sería

- En pocas palabras la regla de decisión óptima sería
  - si $z \geq \phi^{-1}(1-\alpha) = z_{1-\alpha}$, rechazamos la hipótesis nula y,

- En pocas palabras la regla de decisión óptima sería
  - si $z \geq \phi^{-1}(1-\alpha) = z_{1-\alpha}$, rechazamos la hipótesis nula y,
  - si $z < \phi^{-1}(1-\alpha) = z_{1-\alpha}$, aceptamos la hipótesis nula.

# Decisión de Neyman-Pearson. Ejemplo

- En pocas palabras la regla de decisión óptima sería
  - si $z \geq \phi^{-1}(1-\alpha) = z_{1-\alpha}$, rechazamos la hipótesis nula y,
  - si $z < \phi^{-1}(1-\alpha) = z_{1-\alpha}$, aceptamos la hipótesis nula.
- La regla anterior es la regla que aprendimos. En este nuevo enfoque, hemos demostrado cuál es la razón que sea la regla de decisión óptima.