4. Teorema de la Probabilidad Total. Teorema de Bayes

February 21, 2019

I.4 Teorema de la Probabilidad Total. Teorema de Bayes

Teorema de la Probabilidad Total

Consideremos una partición $\mathscr{P}$ del espacio muestral Ω, constituida por K sucesos disjuntos B_i:

$$B_i \in \mathscr{P}(\Omega)\; i = 1 \dots K \iff \begin{array}{l} \bigcup_{i=1}^{K} B_i = \Omega \\ B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j \end{array}$$

Consideremos ahora un suceso $A \in \Omega$. Es fácil ver que:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots P(A \cap B_K) \\ &= P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \dots P(A/B_K)P(B_K) \\ &= \sum_{i=1}^{K} P(A/B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

Apliquemos el **Teorema de la Probabilidad Total** al experimento de lanzar un dado bueno, sin trucar, para calcular las probabilidades de los sucesos vistos antes, $A = \{2\}$, $B = \{5\}$, $C = A \cup B = \{2,5\}$, $D = \{3,4,6\}$, considerando la partición en los sucesos *par* e *impar*. **La partición la determina el problema**. Podríamos utilizar otras, por ejemplo $divisiblepor3$ y $nodivisiblepor3$, y los resultados no variarían.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/par)P(par) + P(A/impar)P(impar) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + 0\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ P(B) &= P(B/par)P(par) + P(B/impar)P(impar) = 0\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ P(C) &= P(C/par)P(par) + P(C/impar)P(impar) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ P(D) &= P(D/par)P(par) + P(D/impar)P(impar) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como ejemplo adicional, apliquemos ahora el **Teorema de la Probabilidad Total** al cálculo de la probabilidad del suceso $A = \{1,2,4,6\}$ a partir de las probabilidades de transición o verosimilitudes, vistas antes, y considerando las probabilidades a *priori*:

- Probabilidades de transición o verosimilitudes
  - $L(div3) \equiv P(A/div3) = \frac{1}{2}$

- $L(nodiv3) \equiv P(A/nodiv3) = \frac{3}{4}$
- Probabilidades *a priori*
  - $P(div3) = \frac{1}{3}$
  - $P(nodiv3) = \frac{2}{3}$

$$P(A) = P(A/div3)P(div3) + P(A/nodiv3)P(nodiv3) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Teorema de Bayes

Recordemos que la **probabilidad del suceso** A **condicionada por el suceso** B es

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La interpretación es que, si ambos sucesos A y B no son independientes, que acontezca B supone una información adicional en relación a la certidumbre de A, cuya probabilidad $P(A)$ pasa ahora a ser $P(A/B)$.

Supongamos que conocemos $P(A/B)$ y que acontece el suceso A. Nos preguntamos cuál es la $P(B/A)$. **Adviértase la diferencia con la verosimilitud** $L(B) = P(A/B)$.

El **Teorema de Bayes** nos permite dar una respuesta:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$$

- El suceso A es la observación
- Su probabilidad condicionada, también llamada **probabilidad de transición**, es $P(A/B)$, y suele ser un dato del problema.
- Su probabilidad total es $P(A)$, y suele requerir del Teorema de la Probabilidad Total para ser calculada.
- El suceso B es el suceso condicionante
- Su probabilidad total es $P(B)$, también llamada **probabilidad *a priori***, y suele conocerse de antemano.
- Su probabilidad condicionada por la observación, $P(B/A)$, también denominada **probabilidad *a posteriori*** se calcula mediante el Teorema de Bayes.

Apliquemos el **Teorema de Bayes** para calcular $P(par)$ cuando acontecen los sucesos $A = \{2\}$, $B = \{5\}$, $C = A \cup B = \{2, 5\}$, $D = \{3, 4, 6\}$. La **probabilidad *a priori*** del dado bueno es $P(par) = P(impar) = 1/2$. Las **probabilidades *a posteriori*** son:

$$\begin{aligned}
P(par/A) &= \frac{P(A/par)P(par)}{P(A)} = \frac{(1/3)(1/2)}{1/6} = 1 && \neq P(A/par) \\
P(par/B) &= \frac{P(B/par)P(par)}{P(B)} = \frac{0(1/2)}{1/2} = 0 && = P(B/par) \\
P(par/C) &= \frac{P(C/par)P(par)}{P(C)} = \frac{(1/3)(1/2)}{1/3} = \frac{1}{2} && \neq P(C/par) \\
P(par/D) &= \frac{P(D/par)P(par)}{P(D)} = \frac{(2/3)(1/2)}{1/2} = \frac{2}{3} && = P(D/par)
\end{aligned}$$