II.0 Introducción a la Variable Aleatoria

March 31, 2019

Introducción al Concepto de Variable Aleatoria

Recordemos que llamamos **espacio de probabilidad** a la terna $\mathscr{E}(\Omega, \mathscr{F}, P)$ donde:

- Ω es el **espacio muestral** o conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio, formado por elementos **discretos** o definido de forma **continua**.
- $\mathscr{F}$ es el **conjunto de todos los sucesos** con resultados en Ω:
  - $\emptyset, \Omega \subset \mathscr{F}$.
  - $A, B \subset \mathscr{F} \implies \begin{cases} A \cup B \subset \mathscr{F} \\ A \cap B \subset \mathscr{F} \end{cases}$
- **P es una ley que asigna probabilidades a los sucesos** de $\mathscr{F}$

$$\begin{aligned} P : \mathscr{F} &\longmapsto [0,1] \\ A, B &\longmapsto P(A), P(B) \\ \emptyset &\longmapsto 0 \\ \Omega &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Variable aleatoria

Dado el **espacio de probabilidad** $\mathscr{E}(\Omega, \mathscr{F}, P)$, definimos la **variable aleatoria** X

$$\begin{aligned} X : &\longmapsto \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto X(\alpha) \end{aligned}$$

asignando a cada resultado del espacio muestral un número real, con las condiciones:

- $\{X \leq x\}$, esto es, el conjunto formado por todos los elementos muestrales que al transformarse por la variable aleatoria son menores que x, es un suceso de $\mathscr{F}$.
- Son también sucesos de $\mathscr{F}$, con la misma interpretación:
  - $\{x_1 \leq X \leq x_1\}$

- $\{X = x\}$
- Los resultados de todas las operaciones conjuntistas sobre la recta real de sucesos definidos de las maneras anteriores.

- Lógicamente, cada uno de los sucesos definidos con intervalos o elementos de la recta real tienen probabilidades asociadas, pues son sucesos del espacio de probabilidad.
- Debe cumplirse que $P(\{X = \infty\}) = P(\{X = -\infty\}) = 0$

Ejemplo de variable aleatoria discreta: dado

Consideremos un dado bueno (no trucado) cuyas caras están indicadas por las seis primeras letras del abecedario. El espacio de probabilidad es:

- Espacio muestral $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$.
- $\mathscr{F}$ está formado por $2^6 = 64$ sucesos, incluyendo $\emptyset$ y Ω, entre ellos, por ejemplo, $\{a\}, \{a, c\}, \{d, e, f, \}, \{b, c, e, f\}, \{b, c, d, e, f\}, \ldots$
- Cada suceso tiene asignada una probabilidad fácilmente obtenible considerando que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = P(e) = P(f) = 1/6$ y aplicando la probabilidad de la unión de sucesos.

Definamos la variable aleatoria $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$

$$X(a) = 1, X(b) = 2, X(c) = 3, X(d) = 4, X(e) = 5, X(f) = 6$$

Veamos algunos sucesos y sus probabilidades:

- $\{X > 7\} = \emptyset \implies P(\{X > 7\}) = 0$
- $\{X \leq 6.001\} = \Omega \implies P(\{X \leq 6.001\}) = 1$
- $\{X = 3\} = \{c\} \implies P(\{X = 3\}) = 1/6$
- $\{3 < X \leq 5\} = \{d, e\} \implies P(\{3 < X \leq 5\}) = 2/6 = 1/3$
- $\{X \leq 3.5\} = \{a, b, c\} \implies P(\{X \leq 3.5\}) = 3/6 = 1/2$
- $\{4 < X \leq 4.999\} = \emptyset \implies P(\{4 < X \leq 4.999\}) = 0$
- $\{X \leq 3.5\} \cup \{X \leq 5\} = \{X \leq 5\} = \{a, b, c, d, e\} \implies$
  - $\implies P(\{X \leq 3.5\} \cup \{X \leq 5\}) = P(\{X \leq 5\}) = 5/6$
- $\{X \leq 3.5\} \cap \{X \leq 5\} = \{X \leq 3.5\} = \{a, b, c\} \implies$
  - $\implies P(\{X \leq 3.5\} \cap \{X \leq 5\}) = P(\{X \leq 3.5\}) = 3/6 = 1/2$

Adviértase que

$$P(\{X \leq 3.5\} \cup \{X \leq 5\}) = P(\{X \leq 3.5\}) + P(\{X \leq 5\}) - P(\{X \leq 3.5\} \cap \{X \leq 5\})$$

Ejemplo de variable continua: tiempo de llegada

Consideremos un hecho que acontece aleatoriamente dentro de un intervalo de tiempo $[T_0, T_1]$. Por ejemplo, una llamada telefónica del padre o la madre que siempre acontece entre las 22h y las 23h. Sabemos que siempre se produce la llamada, pero lo hara de forma igualmente aleatoria a lo largo del intervalo.

El espacio muestral Ω está formado por el intervalo con los infinitos instantes en los que puede acontecer el hecho, definidos sobre un eje temporal **continuo**, delimitados por los instantes T_0 y T_1. Los distintos subintervalos dentro del intervalo forman el espacio de sucesos $\mathscr{F}$, asignándose probabilidades a cada uno como sigue:

$$P(\{t_a, t_b\}) = \frac{t_b - t_a}{T_1 - T_0}$$

donde $\{t_a, t_b\}$ representa el subintervalo cuya probabilidad se desea calcular. En el ejemplo anterior, la probailidad de que la llamada acontezca entre 22:15h y 22:30h es de 0.25. Adviértase que **la probabilidad del hecho en un único instante es nula**, pues dicho instante se determina estrechando el subintervalo hasta el límite:

$$P(\{(t - \frac{\Delta}{2}), (t + \frac{\Delta}{2})\}) = \frac{(t + \frac{\Delta}{2}) - (t - \frac{\Delta}{2})}{T_1 - T_0} \xrightarrow[\Delta \to 0]{} 0$$

En este caso, el espacio muestral continuo suele ya estar definido numéricamente, lo que implícitamente define una variable aleatoria. Veamos algunos intervalos para nuestro ejemplo de llamada, definiendo la variable aleatoria $X(t) = t$ sobre todo el eje real, convirtiendo los minutos, segundos y demás subunidades. Por ejemplo, las 22:15 corresponde 22.25, pues quince minutos es un cuarto de hora

- $P(\{X = 22.30\}) = 0$ pues la **probabilidad de cualquier instante siempre es nula**.
- $P(\{X < 22\}) = P(\emptyset) = 0$
- $P(\{X \leq 22\}) = P(\{22\}) = 0$
- $P(\{X \leq 22.75\}) = 3/4$
- $P(\{X > 22.75\}) = 1 - P(\{X \leq 22.75\}) = 1/4$
- $P(22.25 < X \leq 22.75) = 1/2$
- $P(X \leq 23) = P(\Omega) = 1$