Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# ENCAJES ENTRE NOCIONES DE FORCING

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

ALONSO LENIN CELIS MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

México D.F. 2013

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# Encajes entre nociones de Forcing

*Autor:*
**Alonso Lenin**

*Director de tesis:*
**Dr. Roberto Pichardo Mendoza**

*Aprobado por:*
Dr. Ulises Ariet Ramos García
Dra. Gabriela Campero Arena
M. en C. Rafael Rojas Barbachano
Dr. Francisco Marmolejo Rivas
Dr. Carlos Azarel Martínez Ranero

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, sinónimo de música y eterna fiesta.

A Roberto Pichardo Mendoza, el primero de mis héroes matemáticos, figura central en este trabajo y que sin su dirección, esta tesis no sería más que torpe balbuceo.

A mis profesores, de quienes aprendí y espero seguir aprendiendo teoría de conjuntos, en orden de aparición: Rafael Rojas Barbachano, Osvaldo Guzmán, José Alfredo Amor Montaño, Manuel Lara, Luis Turcio Cuevas, Roberto Pichardo Mendoza, Osvaldo Téllez y Ulises Ariet Ramos García.

A mis sinodales, cuya lectura contribuyó a un mejor destino para este trabajo: Ulises Ariet Ramos García, Gabriela Campero Arena, Roberto Pichardo Mendoza, Rafael Rojas Barbachano y Francisco Marmolejo Rivas.

A Carlos Azarel Martínez Ranero, sinodal secreto y valioso.

A mis otros maestros, aquellos de personalidad distinta y nombre imborrable: Efraín Vega, Iván Fernando Vilchis, Juan José Juárez y Natalia Jonard.

A Patricia Pellicer Covarrubias, por el espacio cedido y en cuyo pizarrón se gestaron los primeros y últimos manuscritos de este texto.

A mis amigos, de quienes he cifrado la lealtad y con quienes he compartido los detalles significativos del mundo: el horror y la larga sonrisa.

A nadie más.

## RESUMEN

Tras la invención en abril de 1963 del método de forcing a manos del matemático Paul Joseph Cohen, y mediante el cual probó la independencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo de la axiomática de Zermelo-Fraenkel, esta técnica conjuntista ha permitido establecer que una amplia lista de enunciados en matemáticas resultan ser independientes, esto es, ni ellos ni su negación pueden ser probados desde los axiomas usuales de la teoría de conjuntos (invitamos al lector a acercarse a los trabajos originales de Cohen, los cuales pueden encontrarse en [2], [3] y [4]). Uno de los primeros problemas que históricamente reclamaron su lugar en cuestiones relacionadas con pruebas de independencia es la célebre hipótesis de Suslin (SH), comúnmente formulada en una versión para cierto tipo de conjuntos conocidos como árboles y cuyo enunciado omitimos por ser ajeno a este trabajo. Fue en el camino de probar la consistencia de SH, y sorprendentemente poco tiempo después de la aparición de los trabajos de Cohen, que Robert Solovay y Stanley Tennenbaum se vieron motivados a introducir el concepto de iteración de forcing, que de acuerdo con Raymond M. Smullyan y Melving Fitting en [9], es probablemente la más significativa extensión y modificación del método que nos ocupa. En el presente trabajo nos limitaremos únicamente a la iteración de dos pasos y en este contexto, serán más bien de interés las relaciones guardadas entre extensiones de modelos de la teoría de conjuntos y cierto tipo de funciones entre nuestros principales objetos de estudio: órdenes parciales.

Para clarificar los fines que se persiguen, tracemos la ruta a seguir en los tres capítulos que comprenden este texto. Es sabido que si se asume la consistencia de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos, ZFC, es posible considerar $V$ un modelo transitivo y numerable de un fragmento amplio de los mismos (dicha posibilidad se desprende de una aplicación cuidadosa del teorema de Löwenheim-Skolem y del colapso de Mostowski al modelo dado por la consistencia). Nuestro propósito inicial será mostrar que vía el método de forcing, es posible extender $V$ de manera que su extensión siga siendo un modelo transitivo y numerable de ZFC. El camino habitual para producir dicha extensión es el siguiente: dado un orden parcial $\mathbb{P}$ en $V$, consideraremos $G$ un subconjunto de $\mathbb{P}$, objeto de suma importancia pues además de no pertencer al modelo base $V$, será precisamente a partir de él que el modelo

en cuestión se podrá extender propiamente a $V[G]$, modelo de ZFC usualmente llamado la extensión genérica. En pocas palabras, $V[G]$ extenderá a $V$ como conjunto y contendrá a $G$ como elemento. En suma, la técnica de forcing permite, entre otras cosas, obtener extensiones genéricas de modelos de la teoría de conjuntos. A lo largo de este trabajo, nos ocuparemos de ciertas funciones entre órdenes parciales (o nociones de forcing), todas ellas definibles en $V$. Así, si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos órdenes parciales en $V$ y $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es una de las funciones referidas, diremos que $e$ es un encaje si preserva orden e incompatiblidad, $e$ será un encaje completo si es un encaje que preserva anticadenas maximales y finalmente, $e$ será un encaje denso si es un encaje cuya imagen es un subconjunto denso en $\mathbb{Q}$. Estos encajes, dependiendo de su naturaleza, nos darán información sobre las extensiones obtenidas. Por ejemplo, siempre que una noción de forcing $\mathbb{P}$ se encaje completamente en una noción $\mathbb{Q}$, la extensión dada por $\mathbb{Q}$ contendrá a la extensión dada por $\mathbb{P}$. En este sentido, se presenta una noción especial de encaje de tal modo que al hacer forcing con ella iguale dichas extensiones. Siguiendo en la vía de obtener modelos de ZFC, se muestra que si $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje denso, entonces las extensiones producidas por ambos órdenes resultan ser las mismas. Como aplicación de lo desarrollado, se hará una introducción a la composición de dos nociones de forcing mostrando, en primera instancia, que todo orden parcial se encaja completamente en la composición de sí mismo con otra noción de forcing para más tarde, probar que la composición es equivalente a una iteración de dos pasos. Por último, se introduce el concepto de orden parcial separativo mostrando que hay un encaje denso entre todo orden parcial y cierta noción separativa; se presenta una forma alternativa de encajar densamente cualquier orden parcial en un orden parcial separativo distinto a la noción mencionada anteriormente.

Por último, sería deseable que el lector posea cierta solvencia en los conceptos básicos de la teoría de conjuntos (de no ser así se invita a consultar [5] y [6] para cubrir los prerrequisitos necesarios). De este modo, nuestro trabajo podrá ser leído de manera fluida, esperando no erosionar lo que a su vez se espera de nosotros.

ÍNDICE

# CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

En este capítulo introducimos los conceptos requeridos para el desarrollo posterior de la tesis. Se presenta la definición de la noción central de este trabajo: orden parcial y con éste a la mano se introducen conceptos de interés tales como: anticadena, anticadena maximal, subconjunto denso y subconjunto denso por debajo de un elemento de un orden parcial. Establecemos el lenguaje estándar de la teoría de forcing y enunciamos los teoremas fundamentales de esta técnica. Finalmente, se muestran algunos ejemplos y propiedades de órdenes parciales.

## 1.1 Órdenes parciales

**Definición 1.1.** Sean $\mathbb{P}$ un conjunto, $\leqslant$ una relación binaria en $\mathbb{P}$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ un elemento de $\mathbb{P}$. Decimos que $(\mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ es un orden parcial si y sólo si para cualesquiera $p, q, r \in \mathbb{P}$ se satisfacen:

1. $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ es el único elemento de $\mathbb{P}$ que satisface $p \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, para cada $p \in \mathbb{P}$.

2. $p \leqslant p$.

3. Si $p \leqslant q$ y $q \leqslant r$, entonces $p \leqslant r$.

De acuerdo con la definición anterior, $\mathbb{P} \neq \emptyset$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ es un elemento máximo de $\mathbb{P}$. En adelante, todos nuestros órdenes parciales tendrán elemento máximo $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$. La relación mencionada no necesariamente es antisimétrica (i.e. $p \leqslant q$ y $q \leqslant p$ no necesariamente implican $p = q$). Cuando sea el caso que la relación cumpla la propiedad de antisimetría, diremos que el orden parcial en cuestión es un orden parcial antisimétrico. Es usual encontrar en la literatura que se considere preorden lo que aquí se ha definido como orden parcial. En este sentido, para los fines de este trabajo preorden significa lo mismo que orden parcial.

Por simplicidad en la notación, cada vez que hablemos del orden parcial $\mathbb{P}$, nos estaremos refiriendo a la tripleta $(\mathbb{P}, \leqslant, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$. En este contexto, el símbolo $\mathbb{P}$ siempre denotará un orden parcial (o noción de forcing) y siempre que no haya lugar a confusión emplearemos $\mathbb{1}$ en lugar de $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ para denotar al elemento máximo de $\mathbb{P}$ .

**Definición 1.2.** Sean $p, q \in \mathbb{P}$.

1. Decimos que $p$ y $q$ son compatibles ($p \mid q$), si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

2. $p$ y $q$ serán incompatibles ($p \perp q$) si no son compatibles, es decir, si no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

Notemos que cualesquiera dos elementos comparables siempre son compatibles. En otras palabras, si $p, q \in \mathbb{P}$ y $p \leqslant q$, es consecuencia inmediata de la definición anterior que $p \mid q$. Así, por ejemplo, siempre se tiene que $p \mid \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$. Por otro lado, si dos elementos en $\mathbb{P}$ son comparables ($p \leqslant q$), diremos que $p$ es una extensión de $q$ y por ende, si dos elementos en $\mathbb{P}$ son compatibles diremos que admiten una extensión común.

**Definición 1.3.** Sean $A, X \subseteq \mathbb{P}$.

1. $A$ es una anticadena si cualesquiera dos elementos distintos de $A$ son incompatibles.

2. $A \subseteq X$ es una anticadena maximal en $X$ si $A$ es anticadena y ninguna otra anticadena en $X$ la contiene propiamente.

Observemos que si $A \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in A$, entonces $A = \{\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\}$. Lo anterior se verifica puesto que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \mid p$ para todo $p \in \mathbb{P}$.

**Definición 1.4.** $A \subseteq \mathbb{P}$ es la anticadena trivial si $A = \{\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\}$.

Cuando estemos interesados en probar que cierta anticadena es maximal, lo haremos vía la siguiente equivalencia.

**Proposición 1.5.** *Sea $X \subseteq \mathbb{P}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier anticadena $A \subseteq X$.*

1. *$A$ es maximal en $X$.*

2. *Para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $x$ y $a$ son compatibles.*

*Demostración.* Probemos esta proposición por contrarrecíproca en ambas direcciones. Sea $A \subseteq X$ una anticadena. Supongamos que hay $x \in X$ tal que $x \perp a$ para todo $a \in A$. De lo anterior, se tiene que $x \notin A$. Así, $A \cup \{x\}$ es una anticadena que contiene propiamente a $A$, por lo tanto $A$ no es maximal.

Supongamos que $A$ no es maximal en $X$. Entonces existe $B \subseteq X$ una anticadena tal que $A \subsetneq B$. Sea $b \in B \setminus A$. Como $B$ es anticadena, se tiene entonces que $a \perp b$ para cada $a \in A$. □

**Corolario 1.6.** *Si $A$ es la anticadena trivial, entonces $A$ es maximal en $\mathbb{P}$.*

*Demostración.* Sea $A = \{\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\}$ y sea $p \in \mathbb{P}$. Luego, $p \mid \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$. Por tanto, de acuerdo con la Proposición 1.5, $A$ es maximal en $\mathbb{P}$. □

Presentamos a continuación los conceptos de subconjunto denso de un orden parcial y subconjunto denso por debajo de un elemento de un orden parcial. Ambos conceptos adquirirán una relevancia notable en la siguiente sección.

**Definición 1.7.** Si $D \subseteq \mathbb{P}$ y $p_0 \in \mathbb{P}$, entonces:

1. $D$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ si para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant p$.

2. $D$ es denso por debajo de $p_0$ si para todo $r \leqslant p_0$, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant r$.

Una primera consecuencia de ser subconjunto denso de un orden parcial, es que basta que una anticadena sea maximal en el denso para que lo sea en el total, hecho que probamos enseguida.

**Proposición 1.8.** *Si $D$ es un subconjunto denso en $\mathbb{P}$, entonces toda anticadena maximal en $D$ es maximal en $\mathbb{P}$.*

*Demostración.* Sea $p \in \mathbb{P}$ y sea $A \subseteq D$ una anticadena maximal en $D$. Así, para alguna $d \in D$, $d \leqslant p$ pues $D$ es denso en $\mathbb{P}$. Por la Proposición 1.5, $d \mid a$ para alguna $a \in A$. Sea $q \leqslant d, a$. Entonces, $q \leqslant p, a$. Hemos probado que todo elemento de $\mathbb{P}$ es compatible con algún elemento de $A$, es decir, $A$ es maximal en $\mathbb{P}$. □

Hasta este momento hemos hablado de las propiedades de las anticadenas maximales, pero no hemos probado que éstas existan. El siguiente resultado resarce este daño.

**Proposición 1.9.** *Si $B \subseteq X \subseteq \mathbb{P}$ y $B$ es una anticadena, entonces existe una anticadena maximal en $X$ que contiene a $B$.*

*Demostración.* Nos interesa ver que $B$ se puede extender a una anticadena maximal en $X$. Para esto consideremos el siguiente conjunto:

$$\Sigma = \{A \subseteq X : A \text{ es una anticadena y } B \subseteq A\}$$

Veamos que el orden parcial $(\Sigma, \subseteq)$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn. $\Sigma \neq \emptyset$ pues $B \in \Sigma$.

Sea $\mathcal{C}$ cualquier cadena no vacía en $\Sigma$. Veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior en $\Sigma$ para $\mathcal{C}$.

Para cualquier $A \in \mathcal{C}$, $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Sea $x \in \bigcup \mathcal{C}$. Entonces $x \in A$ para alguna $A \in \mathcal{C}$ y como $\mathcal{C}$ es una cadena de elementos en $\Sigma$, entonces $A \subseteq X$ y por tanto $x \in X$.

Ahora bien, $\bigcup \mathcal{C}$ es anticadena pues si $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ son distintos, entonces existen $A_0, A_1 \in \mathcal{C}$ tales que $x \in A_0$ y $y \in A_1$. Como $\mathcal{C}$ es cadena, entonces $A_0 \subseteq A_1$ ó $A_1 \subseteq A_0$. Supongamos que $A_0 \subseteq A_1$, por ende $x$ y $y$ son ambos elementos de $A_1$, la cual es una anticadena y por lo tanto $x \perp y$. Si $A_1 \subseteq A_0$, el argumento es análogo.

Para verificar que $\bigcup \mathcal{C}$ contiene a $B$ notemos que como $\mathcal{C} \neq \emptyset$, existe $A \in \mathcal{C}$ de modo que $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Así, $A \in \Sigma$, de donde $B \subseteq A$ y por tanto $B \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

En resumen, hemos visto que cualquier cadena no vacía en $\Sigma$ admite una cota superior en $\Sigma$, entonces por el Lema de Zorn existe $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que $A$ es un elemento maximal de $\Sigma$.

□

## 1.2 Extensiones genéricas

En lo que resta del trabajo, $V$ siempre denotará un modelo transitivo y numerable de un fragmento amplio de los axiomas de ZFC, es decir, consideraremos a $V$ como un modelo de los axiomas de la teoría de conjuntos requeridos para probar el teorema en turno. Recordemos que de acuerdo con el Segundo Teorema de Incompletud de Gödel, no es posible producir dentro de ZFC un modelo de todos y cada uno de los axiomas de ZFC. Sin embargo, sí es posible considerar un modelo transitivo y numerable, $V$, de cualquier lista finita de axiomas de ZFC. A $V$ lo llamaremos el modelo base.

Una de las cuestiones importantes en el desarrollo de este trabajo es la necesidad de que ciertos conjuntos sean elementos del modelo base. Para esto es necesario recurrir al concepto de *relativización*. Dada la amplitud y complejidad del tema, referimos al lector a consultar [6, IV §2] para mayores detalles. Presentamos a continuación un ejemplo de una situación típica que se presentará a lo largo del texto y que sirve de muestra para argumentar cuándo un conjunto forma parte del modelo base $V$:

Supongamos que $\{\mathbb{P}, \leqslant\} \subseteq V$. Dado $X \in V$ con $X \subseteq \mathbb{P}$, definimos la siguiente fórmula.

$$\varphi : \forall x \in X(p \perp x).$$

Queremos argumentar que si $Y = \{p \in \mathbb{P} : \varphi(p)\} = \{p \in \mathbb{P} : \forall x \in X(p \perp x)\}$, entonces $Y \in V$; para hacer esto probaremos que $\varphi$ es absoluta para $V$, es decir, que $\varphi$ es equivalente a $\varphi^V$, la relativización de la fórmula $\varphi$ con respecto a $V$. Comencemos observando que dados $p, q \in \mathbb{P}$, $p \perp q$ significa: $\neg\exists r(r \in \mathbb{P} \;\&\; r \leqslant p \;\&\; r \leqslant q)$. Más aún, $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$ significan que $(r, p) \in \leqslant$ y $(r, q) \in \leqslant$.

Como $p, q \in \mathbb{P} \in V$ y $V$ es un modelo transitivo, se tiene que $p, q \in V$. Entonces $(p \leqslant q)^V$ si y sólo si $p \leqslant q$ porque $\in$ es absoluta (ver [6, VI §3]) y $\leqslant \in V$. De esta forma, $(p \perp q)^V \leftrightarrow p \perp q$. En conclusión, $\{p \in \mathbb{P} : \varphi^V(p)\} = Y$. Por lo tanto, $Y \in V$.

En general, nos ahorraremos los detalles en los casos en los que las nociones en cuestión sean absolutas y los parámetros sean elementos de $V$. Por ejemplo, para el caso anterior, diremos que $Y \in V$ porque $\mathbb{P}, X \in V$, donde, de ahora en adelante, $\mathbb{P} \in V$ significará que $\{\mathbb{P}, \leqslant\} \subseteq V$.

**Definición 1.10.** Sea $G \subseteq \mathbb{P}$ no vacío. Diremos que $G$ es un filtro en $\mathbb{P}$ si se satisfacen:

1. siempre que $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$, $p \leqslant q$ implica $q \in G$; y

2. si $p, q \in G$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p, q$.

Notemos que como $G \neq \emptyset$ y para cada $p \in G$, $p \leqslant \mathbb{1}$, se sigue del inciso (1) de la definición anterior que $\mathbb{1}$ siempre es un elemento de $G$.

Veamos ahora que dado cualquier subconjunto finito de un filtro, el primero admite una extensión común, en el filtro, de todos sus elementos.

**Proposición 1.11.** *Si $G$ es un filtro y $F$ es un subconjunto finito de $G$, entonces existe $p \in G$ de tal modo que $p \leqslant q$, para cualquier $q \in F$.*

*Demostración.* Escribimos $F = \{q_0, q_1, ..., q_{n-1}\}$. Como $G$ es filtro, existe $p_0 \in G$ tal que $p_0 \leqslant q_0, q_1$. Pero entonces, existe $p_1 \in G$ de modo que $p_1 \leqslant p_0, q_1$. Siguiendo este razonamiento, existe $p_{k+1} \in G$ tal que $p_{k+1} \leqslant p_k, q_{k+1}$ con $k = 0, 1, 2, ..., n-2$. Luego, $p = p_{n-1} \in G$ y $p \leqslant q$, para cualquier $q \in F$. □

A lo largo de este trabajo estaremos interesados en los filtros que no evadan a ningún subconjunto denso de $\mathbb{P}$ y que pertenezca al modelo base. Este concepto se precisa a continuación.

**Definición 1.12.** Sea $\mathbb{P} \in V$. Decimos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico si $G$ es un filtro y para cada conjunto $D$, denso en $\mathbb{P}$, $D \in V$ implica que $G \cap D \neq \emptyset$.

El siguiente lema simplifica el proceso de verificar que un filtro es $(V, \mathbb{P})$-genérico y será empleado en un capítulo posterior.

**Lema 1.13.** *Sean $\mathbb{P} \in V$ y $G \subseteq \mathbb{P}$. Entonces $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico si y sólo si para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$:*

1. *si $p, q \in G$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p, q$;*

2. *si $p \in G$ y $p \leqslant q$, entonces $q \in G$; y*

3. *dado cualquier $D \subseteq \mathbb{P}$, si $D \in V$ y $D$ es denso en $\mathbb{P}$, entonces $G \cap D \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Supongamos que $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. Como $G$ es filtro, las propiedas (1) y (2) se satisfacen trivialmente. La propiedad (3) se sigue de la genericidad de $G$.

Probemos la implicación restante. Supongamos que $G$ satisface las condiciones (1), (2) y (3). De acuerdo con la Definición 1.12, resta probar que cualesquiera dos elementos en $G$ son compatibles en $G$. Notemos que la propiedad (1) únicamente garantiza que cualesquiera dos elementos en $G$ admiten una extensión común en $\mathbb{P}$. Sean $p, q \in G$. Definimos:

$$D = \{r \in \mathbb{P} : r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leqslant p \;\&\; r \leqslant q)\}.$$

Demostraremos que $D$ es un subconjunto denso en $\mathbb{P}$. Sea $s \in \mathbb{P}$. Si ocurre que para alguna $r \leqslant s$, $r$ es incompatible con $p$ ó $q$, entonces $r \leqslant s$ y $r \in D$. Si por el contrario, toda extensión de $s$ es compatible con $p$ y $q$, se tiene entonces que para alguna $r_0 \in \mathbb{P}$, $r_0 \leqslant s, p$ (pues $s \leqslant s$). Luego, existe $r \in \mathbb{P}$ de modo que $r \leqslant r_0, q$, ya que $r_0 \leqslant s$. Por tanto $r \leqslant p, q$, es decir, $r$ es una extensión de $s$ en $D$.

Ahora bien, por hipótesis, $\mathbb{P} \in V$ y por la transitividad de $V$, $p, q \in V$. De este modo se concluye que $D \in V$. Así, por la propiedad (3), se tiene que $G \cap D \neq \emptyset$. Sea $r \in G \cap D$. Observemos que no ocurre que $r \perp q$ ni que $r \perp q$ pues de lo contrario existirían dos elementos en $G$ incompatibles, una contradicción con la propiedad (1). Por lo tanto, $r \in G$ y $r \leqslant p, q$. □

La razón por la que pedimos que nuestros modelos de ZFC sean numerables se puede ver en la prueba del siguiente resultado.

**Lema 1.14.** *Si $\mathbb{P} \in V$, entonces para cualquier $p \in \mathbb{P}$, existe $G$, un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, de modo que $p \in G$.*

*Demostración.* Sea $\langle D_n : n \in \omega \rangle$ una enumeración de todos los subconjuntos densos en $\mathbb{P}$ que son elementos de $V$. Dada la densidad de cada $D_n$, es posible seleccionar inductivamente $q_{n+1} \in D_n$ de tal modo que la sucesión $\langle q_i : i < \omega \rangle$ sea decreciente. En otras palabras, existe una sucesión $\langle q_i : i < \omega \rangle$ de tal modo que:

- $q_0 = p$
- $q_{n+1} \leqslant q_n$ con $q_{n+1} \in D_n$

Consideremos ahora $G = \{r \in \mathbb{P} : \exists\ n\ (q_n \leqslant r)\}$. Probemos que $G$ es el conjunto deseado. Sean $r, s \in G$. Entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $q_n \leqslant r$ y $q_m \leqslant s$. Sin perder generalidad, supongamos $n \leqslant m$. Así, $q_m \leqslant r, s$ y $q_m \in G$.

Sean $s \in \mathbb{P}$ y $r \in G$ tales que $r \leqslant s$. Entonces $q_n \leqslant r$ para alguna $n \in \omega$. Por tanto $q_n \leqslant s$. Luego, $s \in G$.

$G$ es genérico porque $q_{n+1} \in G \cap D_n$ para toda $n$. □

Nos interesa ahora hablar de los órdenes parciales para los cuales todos sus elementos admiten dos extensiones incompatibles entre sí.

**Definición 1.15.** Decimos que $\mathbb{P}$ es no atómico si para todo $p \in \mathbb{P}$, existen $r, q \in \mathbb{P}$ de modo que $r, q \leqslant p$ y $r \perp q$.

La importancia de los órdenes parciales no atómicos radica en que producen extensiones propias del modelo base, como veremos en el siguiente resultado.

**Lema 1.16.** *Si $\mathbb{P} \in V$ es no atómico y $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $G \notin V$.*

*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que $G \in V$. Así, $D = \mathbb{P} \setminus G \in V$ pues la diferencia entre conjuntos es una noción absoluta. $D$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ pues si $p \in \mathbb{P}$, entonces existen $r, q \in \mathbb{P}$ extensiones de $p$ incompatibles entre sí. Observemos que $r, q$ no pueden ser ambos elementos de $G$, pues $r \perp q$ y $G$ es filtro. Luego, $r \leqslant p$ y $r \in D$ ó $q \leqslant p$ y $q \in D$. Pero entonces, $D$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ tal que $D \in V$ y $G \cap D = \emptyset$, lo cual contradice la genericidad de $G$. $\square$

En adelante, todos nuestros órdenes parciales serán no atómicos (en algunos casos diremos orden parcial sin átomos en lugar de no atómico).

Un concepto central para hablar de un modelo que resultará ser una extensión de $V$ es el siguiente:

**Definición 1.17.** $\dot{x}$ es un $\mathbb{P}$-nombre si y sólo si $\dot{x}$ es una relación y para cualquier $(\dot{y}, p) \in \dot{x}$ se tiene que $\dot{y}$ es un $\mathbb{P}$-nombre y $p \in \mathbb{P}$.

La definición anterior se ha hecho de forma recursiva. Para tal efecto es importante señalar que el Axioma de Buena Fundación (también llamado Axioma de Regularidad) garantiza que tal definición tiene sentido. Notemos además que esta definición se ha hecho a partir de conceptos absolutos, por lo que la noción de $\mathbb{P}$-nombre es absoluta.

**Definición 1.18.** Denotamos por $V^{\mathbb{P}}$ a la colección de todos los $\mathbb{P}$-nombres que pertenecen a $V$.

La colección definida previamente adquiere relevancia una vez que se tiene un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$, ya que los habitantes del modelo que perseguimos y que extenderá a $V$ resultarán ser las valuaciones de los elementos de $V^{\mathbb{P}}$ respecto de $G$. Precisemos esto último dando las siguientes dos definiciones.

**Definición 1.19.** Si $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$ y $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, definimos recursivamente la valuación de $\dot{x}$ con respecto de $G$ como:

$$\dot{x}_G = \{\dot{y}_G : \exists p \in G((\dot{y}, p) \in \dot{x})\}.$$

**Definición 1.20.** Si $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, definimos $V[G] = \{\dot{x}_G : \dot{x} \in V^{\mathbb{P}}\}$.

Una forma de interpretar $V[G]$ es la siguiente: $x$ pertence a $V[G]$ si y sólo si $x$ es definible en $V[G]$ a partir de $G$ y una cantidad finita de elementos de $V$ y por tanto, le corresponde un nombre.

Un hecho de suma importancia es que $V[G]$ resulta ser la mínima extensión que contiene a $V$:

**Lema 1.21.** *Si $M$ es un modelo transitivo de ZFC con $V \subseteq M$ y $G \in M$, entonces $V[G] \subseteq M$.*

*Demostración.* Para cada $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$, $\dot{x} \in M$ y $G \in M$. De este modo, $\dot{x}_G = (\dot{x}_G)^M \in M$, donde $(\dot{x}_G)^M$ es la relativización del conjunto $\dot{x}_G$ al modelo $M$ (véase [6, VII]). □

El siguiente teorema junto con el Lema 1.21, establece que $V[G]$ es un modelo transitivo de ZFC que contiene a $V$. Se omite su prueba por exceder los fines de esta tesis. Se invita al lector a consultar la prueba que se da a lo largo de [6, VII §2 ] y [6, VII Theorem 4.2].

**Teorema 1.22.** *Si $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $V[G]$ es un modelo transitivo numerable de ZFC tal que $V \subseteq V[G]$.*

La siguiente definición y el Lema 1.24 nos permiten ver que cualquier elemento de $V$ puede ser representado en forma canónica por un nombre, el cual denotaremos por $\check{x}$.

**Definición 1.23.** Definimos recursivamente el $\mathbb{P}$-nombre canónico de $x \in V$ como:

$$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}}) : y \in x\}.$$

Observemos que, formalmente, $\check{x}$ depende del elemento máximo $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, así como de $x$. En este sentido, el conjunto $\mathbb{P}$ siempre será claro de acuerdo al contexto. La definición anterior se ha hecho de manera recursiva a partir de conceptos absolutos. De este modo, si $x \in V$, entonces $\check{x} \in V$. Un hecho relevante es que la valuación de $\check{x}$ respecto a un filtro genérico

$G$ resulta ser $x$. Esto queda establecido en el siguiente lema (véase una prueba en [6, VII Lemma 2.11]):

**Lema 1.24.** *Si $\mathbb{P} \in V$ y $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces para toda $x \in V$, se tiene que $\check{x} \in V^{\mathbb{P}}$ y $\check{x}_G = x$.*

Es de interés saber si existe un nombre cuya valuación respecto a $G$ sea precisamente el filtro genérico. Este se responde con la definición y el lema siguientes.

**Definición 1.25.** Dado $\mathbb{P} \in V$, definimos $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$.

Notemos que la definición de $\Gamma$ depende de $\mathbb{P}$. Ahora bien, $\Gamma \in V$ porque $\mathbb{P} \in V$.

**Lema 1.26.** *Si $\mathbb{P} \in V$ y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro no vacío, entonces $\Gamma_G = G$.*

*Demostración.* $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$. □

De acuerdo con el lema anterior, existe un nombre, $\Gamma$, cuya valuación respecto a $G$ devuelve $G$. Esto permite concluir que $G \in V[G]$.

Por la observación previa y según el Teorema 1.22, se concluye que $V[G]$ es la mínima extensión transitiva que contiene a $V$ como conjunto y a $G$ como elemento.

**Lema 1.27.** *Sea $\mathbb{P} \in V$ y sea $E \subseteq \mathbb{P}$ con $E \in V$. Para cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$, se tiene lo siguiente:*

1. *$G \cap E \neq \emptyset$ ó existe $q \in G$ tal que $r \perp q$ para todo $r \in E$.*

2. *Si $p \in G$ y $E$ es denso por debajo de $p$, entonces $G \cap E \neq \emptyset$.*

*Demostración.* (1). Sean $E^{\downarrow} = \{p \in \mathbb{P} : \exists r \in E(p \leqslant r)\}$ y $E^{\perp} = \{q \in \mathbb{P} : \forall r \in E(r \perp q)\}$ y consideremos $D = E^{\downarrow} \cup E^{\perp}$. Afirmamos que $D$ es denso en $\mathbb{P}$. Sea $p_0 \in \mathbb{P}$. Si $p_0 \in E^{\perp}$, entonces $p_0$ es un elemento de $D$ que se extiende a sí mismo y terminamos. Si por el contrario, $p_0 \notin E^{\perp}$, entonces existe $r_0 \in E$ tal que $r_0 \mid p_0$, es decir, $p \leqslant r_0$ y $p \leqslant p_0$ para alguna $p \in \mathbb{P}$. Pero entonces $p \in E^{\downarrow}$ y por tanto es un elemento en $D$ que extiende a $p_0$.

Ahora bien, $D \in V$, pues $\mathbb{P}, E \in V$. Puesto que $G$ es $(V, \mathbb{P})$-genérico, $G \cap D \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap D$. Si $p \in E^{\downarrow}$, entonces $p \leqslant r$ para algún $r \in E$, lo cual implica que $r \in G$, pues

$p \in G$ y $G$ es filtro. Esto es $G \cap E \neq \emptyset$. Si $p \in E^{\perp}$, entonces $p \in G$ y es incompatible con todo elemento de $E$, lo que termina la prueba.

(2). Por contradicción. Supongamos que para alguna $p \in G$ con $E$ denso bajo $p$, ocurre que $G \cap E = \emptyset$. De acuerdo con el inciso (1), se sigue entonces que para alguna $q \in G$, $q$ es incompatible con todo elemento de $E$. En virtud de que $G$ es un filtro, existe $t \in G$ tal que $t \leqslant p, q$. Puesto que $E$ es denso por debajo de $p$, $r \leqslant t$ para cierta $r \in E$, de donde $r \leqslant q$ y en particular $r \mid q$, lo cual no es posible. $\square$

El siguiente lema nos muestra que los filtros genéricos son maximales en el sentido de la contención.

**Lema 1.28.** *Sea $\mathbb{P} \in V$. Si $G$ y $H$ son ambos filtros $(V, \mathbb{P})$-genéricos y $G \subseteq H$, entonces $G = H$.*

*Demostración.* Resta probar que $H \subseteq G$. Por contradicción, supongamos que existe $p \in H \setminus G$. Así, $G \cap \{p\} = \emptyset$. De acuerdo con el Lema 1.27-(1) aplicado a $G$ y $\{p\}$, existe $q \in G \subseteq H$ tal que $q \perp p$, lo cual no es posible pues $H$ es un filtro. $\square$

## 1.3 Forcing

Establezcamos nuestra relación de mayor interés en esta sección, la relación de forzar. Relajemos por un momento la escritura para decir que el símbolo $p \Vdash \phi$ debe leerse como: $p$ fuerza $\phi$.

**Definición 1.29.** Sean $\mathbb{P} \in V$ y $\varphi(y_1, ..., y_n)$ una fórmula cuyas variables libres son $y_1, ..., y_n$. Sean $\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$. Decimos que $p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ si y sólo si para cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$ tal que $p \in G$, $\varphi^{V[G]}((\dot{x}_1)_G, ..., (\dot{x}_n)_G)$.

El siguiente lema será de gran utilidad en pruebas posteriores, se puede consultar su demostración en [6, VII Lemma 3.2]. De manera coloquial podemos decir que por un lado, el inciso (1) nos dice que si $p \in \mathbb{P}$ y $p \Vdash \phi$, entonces toda extensión de $p$ también fuerza $\phi$; por otro lado, el inciso (2) establece que si $p$ fuerza dos fórmulas, entonces $p$ fuerza la conjunción de las mismas.

**Lema 1.30.** *Sean $\mathbb{P} \in V$ y $\phi(y_1, ..., y_n)$ una fórmula cuyas variables libres son $y_1, ..., y_n$. Sean $\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$ y sean $p, q \in \mathbb{P}$. Se tiene lo siguiente.*

1. *Si $p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ y $q \leqslant p$, entonces $q \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$.*

2. *$(p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$ & $(p \Vdash \psi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$ si y sólo si $p \Vdash (\phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ & $\psi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$.*

El siguiente teorema es el de mayor relevancia dentro de la teoría básica de Forcing. De acuerdo con la Definición 1.29, si $\varphi$ es una fórmula, la noción $p \Vdash \varphi$ requiere del conocimiento de todos los filtros genéricos $G$, esto es, la noción de forzar ha sido definida a partir de objetos que están fuera de $V$. Sin embargo, el primer hecho que se establece es que es posible definir una noción equivalente a $\Vdash$, denotada por $\Vdash^*$, y la cual puede ser definida mediante una fórmula que admite una relativización a $V$. El segundo hecho que establece el resultado en cuestión es que si $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, $\varphi$ es cierta en $V[G]$ siempre que haya una condición en $G$ que fuerza $\varphi$. Dicho de manera coloquial, "algo" ocurre en la extensión genérica si y sólo si es forzado a ocurrir por un elemento del filtro $G$. Por no aportar elementos sustantivos al desarrollo de esta tesis, se omite la prueba del siguiente enunciado. Una demostración del mismo puede verse en [6, VII Theorem 3.6].

**Teorema 1.31.** *Sean $\mathbb{P} \in V$ y $\phi(y_1, ..., y_n)$ una fórmula cuyas variables libres son $y_1, ..., y_n$. Sean $\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$. Se tiene lo siguiente.*

1. *Para cada $p \in \mathbb{P}$, $p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))^V$.*

2. *Para cada $G$, filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico,*

$$\phi((\dot{x}_1)_G, ..., (\dot{x}_n)_G)^{V[G]} \text{ si y sólo si existe } p \in G \text{ tal que } p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n).$$

El resultado siguiente probará ser muy útil en la sección correspondiente a la composición de nociones de forcing. Una nota aclaratoria: como ya dijimos antes, un $\mathbb{P}$-nombre es una relación binaria y, por ende, todo $\mathbb{P}$-nombre $\dot{X}$ tiene dominio (el conjunto de todas las primeras coordenadas de $\dot{X}$). Se omite la prueba del inciso (1); una prueba del mismo puede verse en [6, VII Corollary 3.7].

**Lema 1.32.** *Sea* $\mathbb{P} \in V$ *y sean* $\dot{X}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$. *Sea* $\phi(y_0, ..., y_n)$ *una fórmula cuyas variables libres son* $y_0, ..., y_n$. *Si* $p \in \mathbb{P}$ *y* $p \Vdash \exists\, x\ (x \in \dot{X}\ \&\ \phi(x, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))$, *entonces:*

1. *Existen* $r \in \mathbb{P}$ *y* $\dot{x} \in \operatorname{dom} \dot{X}$ *de tal modo que* $r \leqslant p$ *y* $r \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$.

2. *Si* $G$ *es un filtro* $(V, \mathbb{P})$*-genérico y* $p \in G$, *entonces existen* $r \in G$ *y* $\dot{x} \in \operatorname{dom} \dot{X}$ *de tal modo que* $r \leqslant p$ *y* $r \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$.

*Demostración.* Definimos $D = \{s \in \mathbb{P} : \exists\, \dot{x} \in \operatorname{dom} \dot{X}(s \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))\}$. Probemos que $D$ es un conjunto denso por debajo de $p$. Sea $p_1 \leqslant p$. De acuerdo con (1), existen $s \leqslant p_1$ y $\dot{x} \in \operatorname{dom} \dot{X}$ de modo que $s \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$. Luego, $s \leqslant p_1$ y $s \in D$.

Ahora bien, por un lado $D$ está definido en términos de $\mathbb{P}$ y $\operatorname{dom} \dot{X}$, conjuntos que son elementos de $V$. Por otro lado, $D$ también está definido en términos de $\Vdash$, la cual, según el Teorema 1.31-(1), es equivalente a $\Vdash^*$, noción que puede ser relativizada a $V$. Esto permite concluir que $D \in V$. Así, por el Lema 1.27-(2), se tiene que $G \cap D \neq \emptyset$. Sea $s \in G \cap D$. Entonces $s \in G$ y existe $\dot{x} \in \operatorname{dom} \dot{X}$ tal que $s \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$. Sea $r \in G$ tal que $r \leqslant p, s$. Se sigue del Lema 1.30-(1) que $r \Vdash \phi(\dot{x}, \dot{x}_1, ..., x_n)$. □

## 1.4 Ejemplos

Las nociones de forcing y las propiedades de éstas contenidas en la presente sección serán empleadas abundantemente en el resto de este trabajo.

**Definición 1.33.** Para cualquier par de conjuntos $I$ y $J$, definimos:

$$\mathrm{Fn}(I, J) = \{p : |p| < \omega\ \&\ p \text{ es función } \&\ p \subseteq I \times J\ \}.$$

Ordenamos a $\mathrm{Fn}(I, J)$ por: $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$.

El siguiente lema nos da un criterio de compatibilidad para elementos de $\mathrm{Fn}(I, J)$.

**Lema 1.34.** *Sean* $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J)$. *Entonces* $p$ *es compatible con* $q$ *si y sólo si* $p \cup q$ *es función.*

*Demostración.* Supongamos que $p$ y $q$ son compatibles. Así, de acuerdo con el orden en $\mathrm{Fn}(I, J)$, $p \subseteq r$ y $q \subseteq r$ para alguna $r \in \mathrm{Fn}(I, J)$. Luego $p \cup q \subseteq r$ y se tiene el resultado.

Supongamos ahora que $p \cup q$ es función. Como $p \subseteq p \cup q$ y $q \subseteq p \cup q$, se tiene entonces que $p \cup q$ es una extensión común para $p$ y $q$ en $\mathrm{Fn}(I, J)$ y por tanto son compatibles. $\square$

**Definición 1.35.** Para cualquier ordinal $\alpha$:

1. $p \in 2^{<\alpha}$ si y sólo si existe un ordinal $\beta < \alpha$ de tal modo que $p : \beta \to \{0, 1\}$.
2. $2^{<\alpha}$ queda ordenado mediante $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$.
3. Si $p \in 2^{<\alpha}$, podemos definir, para cada $i < 2$, $p^\frown i := p \cup \{(\operatorname{dom} p, i)\}$.

En un sentido similar al anterior definimos lo siguiente.

**Definición 1.36.** $\omega^{<\omega} := \{p : \exists\, n < \omega(p : n \to \omega)\}$.

En lo que resta del trabajo, $2^{<\alpha}$ y $\omega^{<\omega}$ denotarán, respectivamente, a las tripletas $(2^{<\alpha}, \leqslant, \emptyset)$ y $(\omega^{<\omega}, \leqslant, \emptyset)$ donde $\leqslant$ es el orden definido previamente y $\emptyset$ es el elemento máximo de ambos conjuntos. Al orden parcial $\omega^{<\omega}$ lo llamaremos el forcing de Cohen.

Observemos que de acuerdo con la Definición 1.35, si $p \in 2^{<\alpha}$ y $\operatorname{dom} p + 1 < \alpha$, entonces $p^\frown i \in 2^{<\alpha}$ y $\operatorname{dom}(p^\frown i) = \operatorname{dom} p + 1$. Esto último permite observar que si $p \in 2^{<\alpha}$, entonces $p^\frown 0$ y $p^\frown 1$ son ambas extensiones de $p$, incompatibles entre sí, es decir, $2^{<\alpha}$ es no atómico. Se observa también que si en el Lema 1.34 se considera el orden parcial $2^{<\alpha}$ en lugar de $\mathrm{Fn}(I, J)$, el mismo argumento de la prueba establece que dos elementos en $2^{<\alpha}$ son compatibles si y sólo si su unión es función.

Si en esta última definición $\alpha = \omega$, entonces $2^{<\omega}$ queda definido a partir de nociones absolutas (para mayores detalles véase [6, Theorem 5.1, p. 126 ]), lo que permite concluir que $2^{<\omega} \in V$, hecho que será relevante para la siguiente proposición.

**Proposición 1.37.** *Si $G$ es un filtro $(V, 2^{<\omega})$-genérico y $g = \bigcup G$, entonces se satisface lo siguiente:*

1. $g : \omega \to 2$.
2. $G = \{g \restriction n : n \in \omega\}$.
3. $g \in V[G] \setminus V$.

*Demostración.* Para simplificar la escritura hagamos $\mathbb{P} = 2^{<\omega}$. Probemos que $g = \bigcup G$ es una función de $\omega$ en 2. Como cualesquiera dos elementos en $G$ son compatibles, se tiene que $g$ es función (ver Lema 1.34). Notemos que $\operatorname{dom} g = \bigcup_{p \in G} \operatorname{dom} p$, de donde $\operatorname{dom} g \subseteq \omega$.

Sea $n \in \omega$ arbitrario y veamos que $n \in \operatorname{dom} g$. Definimos $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \operatorname{dom} p\}$. Demostremos que $D_n$ es un subconjunto denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Si $n \in \operatorname{dom} p$, entonces $p \in D_n$ y, como $p \leqslant p$, se sigue el resultado. Si $n \notin \operatorname{dom} p$, consideramos $r : n+1 \to 2$ definida como:

$$r(i) = \begin{cases} p(i), & \text{si } i \in \operatorname{dom} p, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, $r$ es una función en $D_n$ que extiende a $p$. Por tanto, $D_n$ es denso en $\mathbb{P}$. Dado que $\mathbb{P} \in V$ y $\operatorname{dom} p$ es definible en $V$, se tiene que $D_n \in V$. De este modo, $G \cap D_n \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap D_n$. Entonces $p \in G$ y $n \in \operatorname{dom} p$. Luego, $n \in \operatorname{dom} g$.

La contención de izquierda a derecha del inciso (2) se satisface pues si $p \in G$, como $\operatorname{dom} p \in \omega$, se tiene entonces que $p = g \restriction \operatorname{dom} p$. Así, resta probar que para cada $n \in \omega$, se cumple que $g \restriction n \in G$. De acuerdo con lo probado en el inciso (1), $D_n$ es un conjunto denso en $\mathbb{P}$ y $D_n \in V$. Así, $G \cap D_n \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap D_n$. Entonces, $n < \operatorname{dom} p$, de donde $g \restriction \operatorname{dom} p \leqslant g \restriction n$. Como $g \restriction \operatorname{dom} p = p$ y $p \in G$, se sigue que $g \restriction n \in G$.

Probemos que $g \in V[G] \setminus V$ suponiendo lo contrario. Así, si $g \in V$, se desprende de la igualdad del inciso (2) que $G \in V$, una contradicción al Lema 1.16. $\square$

La función $g$ del teorema anterior recibe el nombre de real de Cohen y por el inciso (3) de este mismo resultado, es habitual decir que se ha añadido un nuevo real de Cohen.

A diferencia de la proposición anterior, el siguiente resultado muestra que es posible considerar un orden parcial $\mathbb{P} \in V$, de modo que dado un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$, se tiene que en la extensión genérica $V[G]$ no se han añadido nuevas funciones de $\omega$ en 2. Para tal efecto consideraremos $\mathbb{P} = (2^{<\omega_1})^V$. Esto es, $\mathbb{P}$ es el orden parcial que $V$ piensa que son las funciones de un ordinal menor que $\omega_1^V$ a 2.

**Proposición 1.38.** *Si $\mathbb{P} = (2^{<\omega_1})^V$ y $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $V[G]$ no contiene funciones nuevas de $\omega$ en 2, es decir $V[G] \cap {}^{\omega}2 \subseteq V$.*

*Demostración.* Sea $f \in V[G] \cap {}^{\omega}2$. De acuerdo con la Definición 1.20, existe $\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\dot{f}_G = f$. Ahora bien, por el Teorema 1.31-(2), para alguna $p \in G$ ocurre que $p \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \to \check{2}$. Consideremos la fórmula $\varphi(r) : r \in \mathbb{P}\ \&\ \exists\, h \in {}^{\omega}2(r \Vdash \dot{f} = \check{h})$. Puesto que $\mathbb{P} \in V$ y dado que es posible relativizar a $V$ las nociones ${}^{\omega}2$ y $\Vdash$, se tiene que la fórmula $\varphi$ puede ser relativizada a $V$.

Definimos $D = \{r \in \mathbb{P} : \varphi^V(r)\}$. Notemos que $D \in V$. Probemos que $D$ es un conjunto denso por debajo de $p$. En adelante siempre se trabajará en $V$, es decir, los siguientes argumentos deben entenderse relativizados a $V$. Sea $p_0 \leqslant p$. Por el Lema 1.30-(1), se tiene que $p_0 \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \to \check{2}$. En particular, $p_0 \Vdash \exists x(x \in \check{2}\ \&\ \dot{f}(\check{0}) = x)$. Se sigue del Lema 1.32-(1) que existen $p_1 \in \mathbb{P}$ y $\dot{y} \in \operatorname{dom} \check{2}$ de modo que $p_1 \leqslant p_0$ y $p_1 \Vdash \dot{f}(\check{0}) = \dot{y}$. Ahora bien, recordemos que $\check{2} = \{(\check{z}, \emptyset) : z \in 2\}$, de tal suerte que $\dot{y} \in \operatorname{dom} \check{2}$ implica $\dot{y} = \check{m}_0$ para alguna $m_0 \in 2$, es decir, $p_1 \Vdash \dot{f}(\check{0}) = \check{m}_0$. Dado que $p_1 \leqslant p_0 \leqslant p$, es consecuencia del Lema 1.30-(1) que $p_1 \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \to \check{2}$. En particular, $p_1 \Vdash \exists x(x \in \check{2}\ \&\ \dot{f}(\check{1}) = x)$. Aplicando nuevamente el Lema 1.32-(1), existen $p_2 \leqslant p_1$ y $m_1 \in 2$ de manera que $p_2 \Vdash \dot{f}(\check{1}) = \check{m}_1$. Este procedimiento permite establecer que existen dos sucesiones, $\{p_k : k < \omega\} \subseteq \mathbb{P}$ y $\{m_k : k < \omega\}$, de modo que para cada $k < \omega$: $p_{k+1} \leqslant p_k$, $m_k \in 2$ y $p_{k+1} \Vdash \dot{f}(\check{k}) = \check{m}_k$. Sea $r = \bigcup_{n\in\omega} p_n$. Observemos que como $p_{k+1} \leqslant p_k$, se tiene que $p_{k+1} \mid p_k$. Esto es, $r$ es la unión de funciones compatibles y por tanto $r$ es función (ver Lema 1.34). Notemos además que $\operatorname{dom} r = \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{dom} p_n$, donde $\operatorname{dom} p_n < \omega_1$. En consecuencia, $\operatorname{dom} r < \omega_1$. En suma, $r \in \mathbb{P}$. Consideremos $h : \omega \to 2$ definida mediante $h(n) = m_n$. Como $p_0 \subseteq r$ y $r \Vdash \dot{f} = \check{h}$, se sigue que $r \leqslant p_0$ y $r \in D$.

Por el Lema 1.27-(2), se tiene que $G \cap D \neq \emptyset$, es decir, existen $r \in G$ y $h \in {}^{\omega}2 \cap V$ tales que $r \Vdash \dot{f} = \check{h}$. Es consecuencia directa de la Definición 1.29 que $f = \dot{f}_G = h$ y como $h \in V$, se tiene el resultado. $\square$

En distintos momentos de nuestro trabajo, estaremos interesados en órdenes parciales, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$, donde el primero guarda una relación especial con el segundo.

**Definición 1.39.** Diremos que $\mathbb{P}$ es un suborden de $\mathbb{Q}$ si $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\leqslant_{\mathbb{P}} := \leqslant_{\mathbb{Q}} \cap (\mathbb{P} \times \mathbb{P})$.

Como se verá en los capítulos posteriores, un concepto que nos dará información relevante es el de isomorfismo entre órdenes parciales.

**Definición 1.40.** Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos órdenes parciales. Decimos que $f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un isormorfismo si $f$ es una función biyectiva tal que $f$ y $f^{-1}$ preservan el orden.

Notación. Cada vez que exista una función entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ como la de la definición anterior, escribiremos $\mathbb{P} \cong \mathbb{Q}$.

# CAPÍTULO 2: ENCAJES

En este capítulo introducimos los conceptos centrales de la tesis. Se introducen funciones entre órdenes parciales tales como encaje, encaje completo y encaje denso. Se muestra que todo encaje denso es completo pero no a la inversa. Bajo estos encajes entre órdenes parciales, todos ellos en el modelo base $V$, se obtienen extensiones genéricas de $V$ que dependiendo de la naturaleza del encaje, serán en algunos casos, extensiones propias, mientras que en otros, las extensiones producidas serán las mismas. Finalmente, se prueba que el forcing de Cohen se encaja densamente en todo orden parcial numerable y sin átomos.

## 2.1 Encajes completos

Por lo que resta del capítulo, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ siempre denotarán dos órdenes parciales.

**Definición 2.1.** Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ una función. Decimos que $e$ es un encaje si para cualesquiera $p, r \in \mathbb{P}$, se satisface lo siguiente:

1. $p \leqslant r$ implica $e(p) \leqslant e(r)$, es decir, $e$ preserva el orden;
2. $p \perp r$ implica $e(p) \perp e(r)$, es decir, $e$ preserva la incompatibilidad.

Es importante señalar que el término encaje no debe confundirse con una función inyectiva, pues si por ejemplo, todos los elementos de $\mathbb{P}$ son compatibles (verbigracia, un orden lineal), entonces la función $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ definida mediante $e(p) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ es un encaje no inyectivo.

Notación. Si $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es una función y $X \subseteq \mathbb{P}$, denotamos a la imagen directa de $X$ por $e"X$.

Estamos interesados en aquellos encajes que preservan anticadenas maximales.

**Definición 2.2.** Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje. Decimos que $e$ es un encaje completo si para cualquier $A$, anticadena maximal en $\mathbb{P}$, se tiene que $e"A$ es una anticadena maximal en $\mathbb{Q}$.

Notación. Cada vez que entre dos órdenes parciales $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ exista una función $e$ como la de la Definición 2.2 escribiremos $\mathbb{P} \leqslant_c \mathbb{Q}$.

La siguiente es una equivalencia que nos será útil más adelante.

**Teorema 2.3.** *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje. Son equivalentes:*

1. *$e$ es un encaje completo.*

2. *Dado cualquier $q \in \mathbb{Q}$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que si $r \leqslant p$, entonces $e(r) \mid q$. En este caso diremos que $p$ es una $e$-reducción de $q$ a $\mathbb{P}$.*

*Demostración.* Es suficiente probar que preservar anticadenas maximales es equivalente a que cualquier $q \in \mathbb{Q}$ tiene una $e$-reducción a $\mathbb{P}$.

Probemos que (1) implica (2) por contrapositiva. Así, si no se cumple (2), entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que para todo $p \in \mathbb{P}$ hay alguna $r \leqslant p$ de modo que $e(r) \perp q$. Sea $D = \{r \in \mathbb{P} : e(r) \perp q\}$. Por nuestra suposición, $D$ es denso en $\mathbb{P}$. Consideremos $A \subseteq D$ una anticadena maximal en $D$. Por la Proposición 1.8, $A$ es maximal en $\mathbb{P}$. Como $e$ preserva incompatibilidad, $e"A$ es anticadena. Ahora bien, $q \notin e"A$, pues en caso contrario $q \perp q$, lo que no es posible. Además, $q \perp e(r)$ para todo $r \in A$, es decir, $e"A \cup \{q\}$ es anticadena. Pero entonces $e"A \subsetneq e"A \cup \{q\}$, por lo que $e"A$ no es maximal.

Probemos que (2) implica (1) por contradicción. Sea $A \subseteq \mathbb{P}$ una anticadena maximal en $\mathbb{P}$ para la cual $e"A$ no es una anticadena maximal en $\mathbb{Q}$. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ incompatible con todo elemento de $e"A$. Sea $p$ una $e$-reducción de $q$ a $\mathbb{P}$. Como $A$ es anticadena maximal en $\mathbb{P}$, $p \mid a$ para alguna $a \in A$. Sea $r \leqslant p, a$. Entonces $e(r) \leqslant e(a)$ y además $e(r) \mid q$. Así, $s \leqslant e(r), q$ para alguna $s \in \mathbb{Q}$. Pero entonces $s \leqslant e(a), q$, es decir, $e(a) \mid q$, lo cual es una contradicción, pues $e(a) \in e"A$. $\square$

Si $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje completo y $q \in \mathbb{Q}$, el Teorema 2.3 garantiza que existe una $e$-reducción $p$ de $q$ a $\mathbb{P}$. Sin embargo, $p$ no es única. Por ejemplo, si $p_1 \leqslant p$, entonces dado $p_2 \leqslant p_1$, se tiene que $e(p_2) \mid q$, pues $p_2 \leqslant p$. Luego, $p_1$ es también una $e$-reducción de $q$ a $\mathbb{P}$.

Por otro lado, volviendo al encaje $e(p) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, donde todos los elementos de $\mathbb{P}$ son compatibles, se observa, recurriendo a la equivalencia del Teorema 2.3, que nuestro encaje (no inyectivo) es completo. En efecto, si $q \in \mathbb{Q}$, entonces cualquier $p \in \mathbb{P}$ es una $e$-reducción de $q$ a $\mathbb{P}$, pues $e(r) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \geqslant q$ para toda $r \leqslant p$. En particular, $e(r) \mid q$.

El teorema anterior es una caracterización del concepto de encaje completo en la que no se hace mención alguna de modelos de ZFC. En este contexto y dados nuestros intereses, el siguiente resultado resulta de suma importancia.

Previo a nuestro teorema observemos que si una función $f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un elemento de $V$, entonces $\operatorname{dom} f \in V$, ya que $\operatorname{dom} f$ es una noción absoluta.

**Teorema 2.4.** *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje con $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *$e$ es completo.*
2. *Para cualquier filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico $H$ se tiene que $e^{-1}[H]$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y $V[e^{-1}[H]] \subseteq V[H]$.*

*Demostración.* Probemos que (1) implica (2). Sea $H$ un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico. Hagamos $G = e^{-1}[H]$ y demostremos que $G$ satisface las propiedades del Lema 1.13. Sean $p, q \in \mathbb{P}$.

Si $p, q \in G$, entonces $e(p), e(q) \in H$. Como $H$ es un filtro, se tiene que $e(p) \mid e(q)$. Pero como $e$ preserva incompatibilidad, $p \mid q$, es decir, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p, q$.

Supongamos que $p \in G$ y $p \leqslant q$. Así, $e(p) \in H$, $e(q) \in \mathbb{Q}$ y además, por ser $e$ un encaje, $e(p) \leqslant e(q)$. Pero entonces, como $H$ es un filtro, $e(q) \in H$, de donde $q \in G$.

Probemos la genericidad de $G$ por contradicción. Supongamos que $G \cap D = \emptyset$ para algún conjunto $D \in V$ denso en $\mathbb{P}$. Observemos que esta suposición implica que $H \cap e\text{''}D = \emptyset$. Esto se verifica pues si $q \in H \cap e\text{''}D$, entonces $q \in H$ y $q = e(p)$ para alguna $p \in D$. De donde $e(p) \in H$ y, por tanto, $p \in G$, es decir, $G \cap D \neq \emptyset$.

De acuerdo con el párrafo anterior, $H \cap e\text{''}D = \emptyset$. Como $H$ es $(V, \mathbb{Q})$-genérico, por el Lema 1.27-(1) aplicado a $e\text{''}D$, existe $q \in H$ tal que $r \perp q$ para todo $r \in e\text{''}D$, es decir, $e(r') \perp q$ para todo $r' \in D$. Por ser $e$ completo, $q$ admite una reducción a $\mathbb{P}$, digamos $p'$. Así, $e(t) \mid q$ para cualquier $t \leqslant p'$, de donde $t \notin D$, lo cual no es posible pues $D$ es denso en $\mathbb{P}$.

Demostremos por contrapositiva que (2) implica (1). Supongamos que existe $q \in \mathbb{Q}$, la cual no admite una $e$-reducción. Por el Lema 1.14, existe $H$ un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico con

$q \in H$. Definimos $D = \{p \in \mathbb{P} : e(p) \perp q\}$, el cual es un subconjunto denso en $\mathbb{P}$. En efecto, dado cualquier $r \in \mathbb{P}$, existe $p \leqslant r$ de modo que $e(p) \perp q$ ($p$ no es una $e$-reducción de $q$), de donde, $p \in D$. Ahora bien, $D \in V$ porque $\mathbb{P}, e, q \in V$ (note que $q \in V$ ya que $q \in \mathbb{Q} \in V$ y $V$ es transitivo). Sin embargo, $D \cap e^{-1}[H] = \emptyset$, pues si $p \in D$, entonces $e(p) \perp q$, y como $q \in H$, tenemos que $e(p) \notin H$, es decir, $p \in D \setminus e^{-1}[H]$. Por tanto, $e^{-1}[H]$ no es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico.

Probemos ahora la contención de las extensiones genéricas. Puesto que $e \in V \subseteq V[H]$ y $H \in V[H]$, se tiene que $e^{-1}[H] \in V[H]$. Por tanto, de acuerdo con el Lema 1.21, $V[e^{-1}[H]] \subseteq V[H]$. $\square$

Una forma de leer el teorema anterior es: si $\mathbb{P} \leqslant_c \mathbb{Q}$, entonces la extensión genérica dada por $\mathbb{Q}$ siempre contiene a la dada por $\mathbb{P}$. Ilustremos esta situación con el siguiente diagrama. Debe leerse como sigue:

(i) Cada línea curva representa un modelo de ZFC.

(ii) Un modelo está contenido en el modelo representado por la línea curva a su derecha. Así, por ejemplo, $V \subseteq V[G] \subseteq V[H]$.

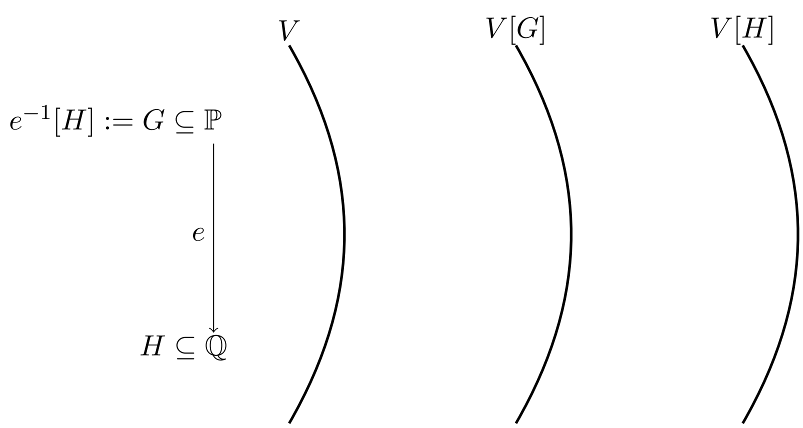



Diagrama asociado al Teorema 2.4.

**Corolario 2.5.** *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un isomorfismo, donde $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$, y $G \subseteq \mathbb{P}$. Entonces $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico si y sólo si $e$"$G$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico.*

Es importante resaltar que si $\mathbb{P}$ es un suborden de $\mathbb{Q}$ (véase la Definición 1.39), no necesariamente se tiene que la extensión genérica dada por $\mathbb{Q}$ contiene a la extensión dada por $\mathbb{P}$. Un ejemplo de lo anterior es considerar los órdenes $\mathbb{P} := 2^{<\omega}$ y $\mathbb{Q} := 2^{<\omega_1}$ (véase la sección de ejemplos en el Capítulo 1). En este caso, $\mathbb{P}$ es un suborden de $\mathbb{Q}$ y según las Proposiciones 1.37 y 1.38, la noción de forcing $\mathbb{P}$ añade una nueva función de $\omega$ en 2 mientras que la noción $\mathbb{Q}$ no lo hace, por lo que no es posible que $\mathbb{P}$ se encaje completamente en $\mathbb{Q}$.

En el contexto del Teorema 2.4, es natural preguntarse si hay alguna noción de forcing en $V[e^{-1}[H]]$ que añada a esta extensión los objetos faltantes para poder obtener $V[H]$. Demos respuesta a esta cuestión en sentido positivo introduciendo antes el concepto del cociente de un orden parcial módulo un conjunto.

**Definición 2.6.** Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje completo con $e, \mathbb{Q} \in V$. Para cualquier $P \subset \mathbb{P}$, definimos

$$\mathbb{Q}/P = \{q \in \mathbb{Q} : \forall p \in P(e(p) \mid q)\}.$$

Recordemos que de acuerdo con la Definición 1.25, $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$ mientras que el Lema 1.26 garantiza que $\Gamma_G = G$, para cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$ en $\mathbb{P}$. De este modo, como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \in G$ para cada filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$, se sigue del Teorema 1.31-(2) que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \Gamma \subseteq \check{\mathbb{P}}$. Ahora bien, como $\mathbb{Q} \in V$, $\mathbb{Q}$ posee un nombre canónico $\check{\mathbb{Q}}$ (véase la Definición 1.23) y por ende podemos denotar por $\check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ a un $\mathbb{P}$-nombre para el cociente $\mathbb{Q}/G$.

**Proposición 2.7.** *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje completo con $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$, y sea $q \in \mathbb{Q}$. Entonces $p \in \mathbb{P}$ es una $e$-reducción de $q$ a $\mathbb{P}$ si y sólo si $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$.*

*Demostración.* Supongamos que $p$ es una $e$-reducción de $q$ a $\mathbb{P}$. Sea $G$ cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico tal que $p \in G$ y sea $r \in G$ arbitrario. Entonces existe $s \in G$ tal que $s \leqslant p, r$. Como $s \leqslant p$, por hipótesis se tiene que $e(s) \mid q$, es decir, $t \leqslant e(s), q$ para alguna $t \in \mathbb{Q}$. Por otra parte, $e(s) \leqslant e(r)$, pues $e$ es un encaje. Así, $e(s) \leqslant e(r), q$ y en consecuencia $q \in \mathbb{Q}/G$. Por lo tanto, $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$.

Probemos la implicación restante por contrapositiva. Si $p$ no es una reducción de $q$, entonces existe $r \leqslant p$ tal que $e(r) \perp q$. Sea $G$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico de modo que $r \in G$ (véase el Lema 1.14). Como $G$ es un filtro, se tiene que $p \in G$. En suma, $p \in G$ y $r \in G$ es tal que $r \leqslant p$ y $e(r) \perp q$, es decir, $q \notin \mathbb{Q}/G$. Por lo tanto, $p \nVdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. □

Normalmente, la notación para la extensión genérica no hace referencia a la noción de forcing con la cual se obtuvo. Sin embargo, en los siguientes dos teoremas se da el caso siguiente: un conjunto $S \subseteq \mathbb{Q}/G$ es, simultáneamente, un filtro $(V,\mathbb{Q})$-genérico y un filtro $(V[G],\mathbb{Q}/G)$-genérico. Por esta razón añadiremos un subíndice al símbolo empleado para denotar a la extensión genérica. En otras palabras, $V[S]_{\mathbb{Q}} = \{\dot{x}_S : \dot{x} \in V^{\mathbb{Q}}\}$, mientras que $V[G][S]_{\mathbb{Q}/G} = \{\dot{x}_S : \dot{x} \in (V[G])^{\mathbb{Q}/G}\}$.

Notemos ahora que si $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje completo y $G$ es un filtro $(V,\mathbb{P})$-genérico, entonces el conjunto $\mathbb{Q}/G$ hereda el orden de $\mathbb{Q}$. Por otro lado, para cada $p \in G$ se tiene que $e(p) \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ y por ende $e(p) \mid \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Luego, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}/G$. De este modo, la terna $(\mathbb{Q}/G, \leqslant, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}})$ es un orden parcial, al cual siempre consideraremos como un suborden de $\mathbb{Q}$.

Estamos en condiciones de mostrar que hay una noción de forcing en $V[e^{-1}[H]]$ que iguala las extensiones del Teorema 2.4.

**Teorema 2.8.** *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje completo con $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$. Si $G$ es un filtro $(V,\mathbb{P})$-genérico y $K$ es un filtro $(V[G],\mathbb{Q}/G)$-genérico, entonces:*

1. *$K$ es $(V,\mathbb{Q})$-genérico.*

2. *$V[K]_{\mathbb{Q}} = V[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$.*

*Demostración.* Verifiquemos la genericidad de $K$. Sea $D \in V$ un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$. Probemos que $D \cap (\mathbb{Q}/G)$ es denso en $\mathbb{Q}/G$. Sea $q_0 \in \mathbb{Q}/G$ arbitrario. Como $\mathbb{Q}/G \subseteq \mathbb{Q}$, se tiene que $q_0 \in \mathbb{Q} \in V$. Se sigue de la transitividad de $V$ que $q_0 \in V$. Entonces $(\check{q}_0)_G \in (\check{\mathbb{Q}}/\Gamma)_G$ y, por el Teorema 1.31-(2), existe $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash \check{q}_0 \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. Definimos:

$$E = \{p \in \mathbb{P}\colon \exists\, q \in \mathbb{Q}\ (q \leqslant q_0\ \&\ q \in D\ \&\ p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma)\}.$$

Afirmamos que $E$ es denso bajo $p_0$. Sea $p_1 \leqslant p_0$. Según la Proposición 2.7, $p_0$ es una $e$-reducción de $q_0$ a $\mathbb{P}$. De donde, $e(p_1) \mid q_0$. Sea $q_1 \in \mathbb{Q}$ una extensión común de $e(p_1)$ y $q_0$. Por la densidad de $D$, se tiene que $q \leqslant q_1$ para alguna $q \in D$. Tomemos $p_2 \in \mathbb{P}$, una $e$-reducción de $q$. Entonces $e(p_2) \mid q$ y, por la Proposición 2.7, $p_2 \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. Sea $q_2 \leqslant e(p_2), q$. Como $q \leqslant q_1 \leqslant e(p_1)$, se tiene que $q_2 \leqslant e(p_2), e(p_1)$. Luego, $p_1 \mid p_2$. Sea $p \leqslant p_1, p_2$. Por tanto, $p \leqslant r$ y $p \in E$.

$E \in V$ porque $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, D, q_0 \in V$. Como $p_0 \in G$, se sigue del Lema 1.27-(2) que $G \cap E \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap E$. Así, $p \in G$ y existe $q \in \mathbb{Q} \cap D$ tal que $q \leqslant q_0$ y $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. De donde, de acuerdo con la Definición 1.29, $\check{q}_G = q \in \mathbb{Q}/G$. En suma, hemos encontrado un elemento $q \in D \cap (\mathbb{Q}/G)$ de tal modo que $q \leqslant q_0$, lo que prueba la densidad de $D \cap (\mathbb{Q}/G)$.

$D \cap (\mathbb{Q}/G) \in V[G]$ porque $D \in V \subseteq V[G]$ y $\mathbb{Q}/G \in V[G]$. Puesto que $K$ es un filtro $(V[G], \mathbb{Q}/G)$-genérico, se tiene que $K \cap D \cap (\mathbb{Q}/G) \neq \emptyset$, de donde $K \cap D \neq \emptyset$, lo que prueba la genericidad de $K$.

Probemos la igualdad del inciso (2). Observemos que si $p \in G$, entonces $e(p) \in K$. En caso contrario, por el Lema 1.27-(1) aplicado a $\{e(p)\}$, existiría $q \in K$ de modo que $q \perp e(p)$, lo cual contradice que $K \subseteq \mathbb{Q}/G$. Esto prueba que $G \subseteq e^{-1}[K]$. Por otra parte, el Teorema 2.4 nos dice que $e^{-1}[K]$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, por lo que aplicando el Lema 1.28, se tiene que $G = e^{-1}[K]$. Así, de acuerdo con el Teorema 2.4, $V[G] \subseteq V[K]_{\mathbb{Q}}$. Pero entonces, se desprende del Lema 1.21 que $V[G][K]_{\mathbb{Q}/G} \subseteq V[K]_{\mathbb{Q}}$. Por otra parte, $V \subseteq V[G] \subseteq V[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$ y $K \in V[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$. Así, por el Lema 1.21, $V[K]_{\mathbb{Q}} \subseteq V[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$.

□

Ilustremos el resultado del teorema anterior con un diagrama. Esto es, hay una noción de forcing, $\mathbb{Q}/G$, de tal modo que al considerar un filtro $(V, \mathbb{Q}/G)$-genérico $K$, este mismo conjunto resulta ser un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico de tal modo que, al hacer forcing vía $\mathbb{Q}$, se obtiene la misma extensión genérica que al forcing vía $\mathbb{P}$ seguida de la extensión de forcing vía $\mathbb{Q}/G$. Todo esto siempre que $\mathbb{P} \leqslant_c \mathbb{Q}$ en el modelo base.

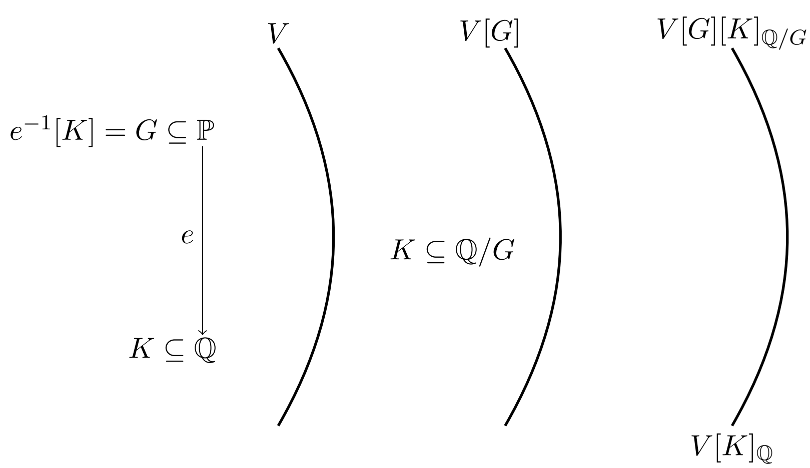



Diagrama asociado al Teorema 2.8

Mostremos ahora un resultado que puede ser pensado como el recíproco del teorema anterior.

**Teorema 2.9.** *Si $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje completo donde $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$, $H$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico y $G = e^{-1}[H]$, entonces:*

1. *$H \subseteq \mathbb{Q}/G$.*

2. *$H$ es un filtro $(V[G], \mathbb{Q}/G)$-genérico.*

3. *$V[H]_{\mathbb{Q}} = V[G][H]_{\mathbb{Q}/G}$.*

*Demostración.* Probemos el inciso (1). Sean $q \in H$ y $p \in G$, elementos arbitrarios. Entonces $q = e(p_0)$ para alguna $p_0 \in G$ y así, $p \mid p_0$. De donde, $e(p) \mid e(p_0)$ por ser $e$ un encaje. Hemos probado que $q$ es compatible con la imagen bajo $e$ de todo elemento en $G$, es decir, $q \in \mathbb{Q}/G$. De acuerdo con el Teorema 2.4, se tiene además que $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico.

(2). Verifiquemos la genericidad de $H$. Sea $D \in V[G]$ un subconjunto denso de $\mathbb{Q}/G$. Así, $D \in V[G]$ implica la existencia de $\dot{D} \in V^{\mathbb{P}}$ de tal modo que $\dot{D}_G = D$ y por el Teorema 1.31-(2), para cierta $p_0 \in G$, se tiene que $p_0 \Vdash \dot{D}$ es denso en $\check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. Definimos:

$$E = \{q \in \mathbb{Q} : \exists\, p \in \mathbb{P}\ \exists\, q_1 \in \mathbb{Q}\ [(p \Vdash \check{q}_1 \in \dot{D})\ \&\ q \leqslant e(p)\ \&\ q \leqslant q_1]\}.$$

Afirmamos que $E$ es un conjunto denso por debajo de $e(p_0)$. Sea $q_0 \leqslant e(p_0)$. Como $e$ es un encaje completo, $q_0$ admite una $e$-reducción a $\mathbb{P}$, digamos $p_1$. Así, $e(p_1) \mid q_0$ y, por el Lema 2.7, $p_1 \Vdash \check{q}_0 \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$. Consideremos $s \leqslant e(p_1), q_0$. Dado que $q_0 \leqslant e(p_0)$, se tiene que $s \leqslant e(p_1), e(p_0)$. En consecuencia, $p_1 \mid p_0$. Sea $p_2 \leqslant p_1, p_0$. En este caso, el Lema 1.30 garantiza que $p_2 \Vdash (\check{q}_0 \in \check{\mathbb{Q}}/\Gamma\ \&\ \dot{D}$ es denso en $\check{\mathbb{Q}}/\Gamma)$. Esto es, $p_2 \Vdash \exists x (x \in \check{\mathbb{Q}}\ \&\ x \in \dot{D}\ \&\ x \leqslant \check{q}_0)$. De acuerdo con el Lema 1.32-(1), existen $p \in \mathbb{P}$ y $\dot{s}_1 \in \operatorname{dom} \check{\mathbb{Q}}$ de modo tal que $p \leqslant p_2$ y $p \Vdash (\dot{s}_1 \in \dot{D}\ \&\ \dot{s}_1 \leqslant \check{q}_0)$. Ahora bien, como $\operatorname{dom} \check{\mathbb{Q}} = \{\check{r} : r \in \mathbb{Q}\}$, se tiene que $\dot{s}_1 \in \operatorname{dom} \check{\mathbb{Q}}$ implica que $\dot{s}_1 = \check{q}_1$ para cierta $q_1 \in \mathbb{Q}$. En suma, $p \Vdash \check{q}_1 \in \dot{D} \subseteq \check{\mathbb{Q}}/\Gamma$ y $p \Vdash \check{q}_1 \leqslant \check{q}_0$. Por el Lema 1.14, podemos fijar $K$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico tal que $p \in K$. Luego, $p$ es una $e$-reducción de $q_1$ a $\mathbb{P}$ (ver Proposición 2.7) y $(\check{q}_1)_K = q_1 \leqslant (\check{q}_0)_K = q_0$, es decir, $q_1 \leqslant q_0$. Se tiene entonces que $e(p) \mid q_1$, donde $q_1 \leqslant q_0$. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leqslant e(p), q_1$. Por tanto, $q \leqslant q_0$ y $q \in E$.

Tenemos que $E \in V$, pues $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, e \in V$ y $\dot{D}$ también es un elemento de $V$ porque, por definición, $V^{\mathbb{P}}$ es la colección de todos los $\mathbb{P}$-nombres que son elementos de $V$. De esta manera, de acuerdo con el Lema 1.27-(2), $E \cap H \neq \emptyset$. Sea $q \in E \cap H$. Existen entonces $p \in \mathbb{P}$ y $q_1 \in \mathbb{Q}$ de tal modo que $q \leqslant e(p)$, $q \leqslant q_1$ y $p \Vdash \check{q}_1 \in \dot{D}$. Ahora bien, $q \leqslant e(p)$ y $q \leqslant q_1$ implican que $e(p)$ y $q_1$ son ambos elementos de $H$, ya que $q \in H$ y como $G = e^{-1}[H]$, se sigue que $p \in G$. Esto último y dado que $p \Vdash \check{q}_1 \in \dot{D}$, permite establecer que $(\check{q}_1)_G = q_1 \in D$. En suma, $q_1 \in H \cap D$, con lo que se verifica la genericidad de $H$.

Demostremos el inciso (3). Por hipótesis, $G = e^{-1}[H]$ y $H$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico, así, de acuerdo con el Teorema 2.4, $V[G] \subseteq V[H]_{\mathbb{Q}}$. Pero entonces, por el Lema 1.21, $V[G][H]_{\mathbb{Q}/G} \subseteq V[H]_{\mathbb{Q}}$. Ahora bien, como $H \in V[G][H]_{\mathbb{Q}/G}$ y $V \subseteq V[G][H]_{\mathbb{Q}/G}$, se sigue del lema citado que $V[H]_{\mathbb{Q}} \subseteq V[G][H]_{\mathbb{Q}/G}$, lo que prueba la igualdad de las extensiones. $\square$

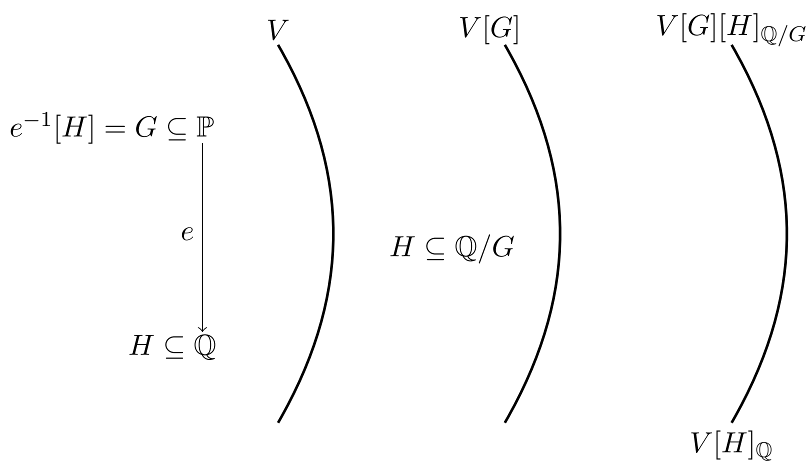



Diagrama asociado al Teorema 2.9

## 2.2 Encajes densos

En la presente sección estudiaremos aquellos encajes cuya imagen sea un subconjunto denso de su contradominio.

**Definición 2.10.** Decimos que $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje denso si y sólo si $e$ es un encaje tal que $e"\mathbb{P}$ es un conjunto denso en $\mathbb{Q}$.

Notación. Cada vez que entre dos órdenes parciales $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ exista una función $e$ como la de la Definición 2.10 escribiremos $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{Q}$.

**Proposición 2.11.** *Todo encaje denso es completo.*

*Demostración.* Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje denso.

Utilizando la equivalencia del Teorema 2.3, basta con probar que todo elemento de $\mathbb{Q}$ tiene una $e$-reducción a $\mathbb{P}$.

Sea $q \in \mathbb{Q}$. Por ser $e``\mathbb{P}$ densa en $\mathbb{Q}$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $e(p) \leqslant q$. Sea $r \leqslant p$. Entonces $e(r) \leqslant e(p)$, pues $e$ es un encaje. De este modo $e(r) \leqslant q$, y en particular $e(r)|q$. Por tanto, $p$ es la $e$-reducción deseada. □

A estas alturas el lector podría preguntarse si el converso de la propsosición anterior es cierto. La respuesta es no, es decir, no todo encaje completo es denso, hecho que mostramos a continuación.

**Proposición 2.12.** *Sean $I_0, I_1$ conjuntos no vacíos tales que $I_0 \subsetneq I_1$. Entonces la función $e : \mathrm{Fn}(I_0, 2) \to \mathrm{Fn}(I_1, 2)$ dada por $e(p) = p$, para cada $p \in \mathrm{Fn}(I_0, 2)$, es un encaje completo que no es denso.*

*Demostración.* Nuestra función $e : \mathrm{Fn}(I_0, 2) \to \mathrm{Fn}(I_1, 2)$ preserva el orden y la incompatibilidad pues, por un lado, si $p, q \in \mathrm{Fn}(I_0, 2)$ son tales que $p \leqslant q$, entonces $e(p) \leqslant e(q)$. Si, por otro lado, $p \perp q$, de acuerdo con el Lema 1.34 se tiene que $p \cup q$ no es función. Luego, $e(p) \cup e(q)$ no es función, es decir, $e(p) \perp e(q)$.

De acuerdo con la equivalencia del Teorema 2.3, resta probar que todo elemento en $\mathrm{Fn}(I_1, 2)$ admite una $e$-reducción a $\mathrm{Fn}(I_0, 2)$. Sea $q \in \mathrm{Fn}(I_1, 2)$. Afirmamos que $q \restriction I_0$ es una $e$-reducción de $q$ a $\mathrm{Fn}(I_0, 2)$. Esto se verifica gracias a que, $r \leqslant q \restriction I_0$, podemos descomponer a $q$ como $q = q \restriction I_0 \cup q \restriction (I_1 \setminus I_0)$, por lo que $r \cup q = r \cup q \restriction (I_1 \setminus I_0)$, pues $q \restriction I_0 \subseteq r$. Puesto que $\mathrm{dom}\, r \cap \mathrm{dom}(q \restriction (I_1 \setminus I_0)) = \emptyset$, se tiene que $r \cup q$ es función, es decir, $r \mid q$, lo que prueba nuestra afirmación.

Probemos ahora que nuestro encaje completo $e : \mathrm{Fn}(I_0, 2) \to \mathrm{Fn}(I_1, 2)$ no es denso. Sea $x \in I_1 \setminus I_0$. Definimos $q_0 \in \mathrm{Fn}(I_1, 2)$ como $q_0 = \{(x, 0)\}$. Observemos que ninguna extensión de $q_0$ es un elemento de $e``\mathrm{Fn}(I_0, 2)$. De ocurrir lo contrario, es decir, si $p_0 \leqslant q_0$ para algún $p_0 = e(p_0) \in e``\mathrm{Fn}(I_0, 2)$, se tendría que $q_0 \subseteq p_0$, de donde, $\mathrm{dom}\, q_0 \subseteq \mathrm{dom}\, p_0$, lo que implicaría que $x \in I_0$, lo cual no es posible. Por tanto, $e``\mathrm{Fn}(I_0, 2)$ no es un subconjunto denso en $\mathrm{Fn}(I_1, 2)$. □

El siguiente resultado afirma que hay un encaje denso entre órdenes parciales considerados en la sección de ejemplos del Capítulo 1. En la última sección de este capítulo se probará un resultado más general al presentado a continuación cuya prueba involucra el Axioma de Elección. Una de las virtudes del teorema aquí expuesto es que no es necesario usar este axioma para construir el encaje.

**Teorema 2.13.** *Se tiene que* $\omega^{<\omega} \leqslant_d 2^{<\omega}$.

*Demostración.* Sea $t \in \omega^{<\omega}$. Entonces $t : n \to \omega$ para alguna $n \in \omega$. Definimos $e(t)$ del siguiente modo:

$$e(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n = 0, \\ \langle \underbrace{00\ldots0}_{t(0)-veces} \, 1 \, \underbrace{00\ldots0}_{t(1)-veces} \, 1 \ldots 1 \, \underbrace{00\ldots0}_{t(n-1)-veces} \, 1\rangle, & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

En otras palabras, cuando $t \neq \emptyset$, $e(t) \in 2^{<\omega}$ queda determinada por:

- $\operatorname{dom} e(t) = \sum_{i=0}^{n-1} t(i) + n$; y
- para toda $k \in \operatorname{dom} e(t)$, $e(t)(k) = 1$ sii existe $\ell < n$ tal que $k = \sum_{i=0}^{\ell} t(i) + \ell$.

De este modo tenemos definida una función $e : \omega^{<\omega} \to 2^{<\omega}$.

Sean $t, s \in \omega^{<\omega}$ con dominios $n$ y $m$ respectivamente. Verifiquemos que $e$ es una función que preserva el orden, la incompatibilidad y cuya imagen es densa en $2^{<\omega}$.

Supongamos que $t \leqslant s$ y probemos que $e$ preserva el orden. Así, $m \leqslant n$. Observemos que esta hipótesis implica que $\operatorname{dom} e(s) \leqslant \operatorname{dom} e(t)$. Si $s = \emptyset$, entonces $e(s) = \emptyset$ y, por ende, la desigualdad es trivial. Supongamos que $s \neq \emptyset$, esto es, que $0 < m \leqslant n$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} e(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} t(i) + n \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} t(i) + \sum_{i=m}^{n} t(i) + n \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} s(i) + m + \sum_{i=m}^{n} t(i) + (n-m) \\ &= \operatorname{dom} e(s) + \sum_{i=m}^{n} t(i) + (n-m). \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{i=m}^{n} t(i) + (n-m) \geqslant 0$, se sigue que $\operatorname{dom} e(s) \leqslant \operatorname{dom} e(t)$.

Ahora bien, si $s=\emptyset$, entonces $e(s)=\emptyset$, y por ende $e(t)\leqslant e(s)$. Supongamos que $s\neq\emptyset$ y probemos que $e(t)\leqslant e(s)$ viendo que dada cualquier $k\in\operatorname{dom} e(s)$, se tiene que $e(s)(k)=1$ si y sólo si $e(t)(k)=1$.

Tomemos $k\in\operatorname{dom} e(s)$ tal que $e(s)(k)=1$. Así, $k=\sum_{i=0}^{\ell}s(i)+\ell$ para alguna $\ell<m$. Como $t\leqslant s$, se tiene que $s(i)=t(i)$ para cada $i\leqslant\ell$ y así, $k=\sum_{i=0}^{\ell}t(i)+\ell$ con $\ell<m\leqslant n$, lo que implica que $e(t)(k)=1$.

Supongamos ahora que $k\in\operatorname{dom} e(s)$ satisface $e(t)(k)=1$. Así, por la definición de $e$, existe $\ell<n$ tal que $k=\sum_{i=0}^{\ell}t(i)+\ell$. Afirmamos que $\ell<m$. Si por el contrario, $\ell\geqslant m$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=0}^{m-1}t(i)+\sum_{i=m}^{\ell}t(i)+\ell \\ &= \sum_{i=0}^{m-1}s(i)+m+\sum_{i=m}^{\ell}t(i)+(\ell-m) \end{aligned}$$

Como $\operatorname{dom} e(s)=\sum_{i=0}^{m-1}s(i)+m$, se tiene que $k=\operatorname{dom} e(s)+\sum_{i=m}^{\ell}t(i)+(\ell-m)$, donde $\ell-m\geqslant 0$. Pero entonces $\operatorname{dom} e(s)\leqslant k$, lo cual contradice que $k\in\operatorname{dom} e(s)$ y, por tanto, $\ell<m$. De este modo, como hemos supuesto que $t\leqslant s$, se tiene que $\sum_{i=0}^{\ell}t(i)=\sum_{i=0}^{\ell}s(i)$, de donde $k=\sum_{i=0}^{\ell}s(i)+\ell$ con $\ell<m$, es decir, $e(s)(k)=1$.

Veamos que $e$ preserva la incompatibilidad. Supongamos que $t\perp s$. Así, existe $i\in\operatorname{dom} t\cap\operatorname{dom} s$ tal que $t(i)\neq s(i)$. Sea $\ell=\min\{i\in\operatorname{dom} t\cap\operatorname{dom} s : t(i)\neq s(i)\}$. Sin perder la generalidad, supongamos que $t(\ell)<s(\ell)$.

De este modo, para $k=\sum_{i=0}^{\ell}t(i)+\ell$ se tiene que $e(t)(k)=1$. Observemos que $k\in\operatorname{dom} e(s)$. Si por el contrario, $k\geqslant\operatorname{dom} e(s)$, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^{\ell}t(i)+\ell\geqslant\sum_{i=0}^{m-1}s(i)+m=\sum_{i=0}^{\ell-1}s(i)+\sum_{i=\ell}^{m-1}s(i)+m.$$

Como $s(i)=t(i)$ para toda $i<\ell$,

$$\sum_{i=0}^{\ell}t(i)+\ell\geqslant\sum_{i=0}^{\ell-1}t(i)+\sum_{i=\ell}^{m-1}s(i)+m;$$

de donde,

$t(\ell)\geqslant\sum_{i=\ell}^{m-1}s(i)+(m-\ell)$ y en particular $t(\ell)\geqslant s(\ell)$, lo que contradice la suposición $t(\ell)<s(\ell)$.

Probemos que $e(s)(k) \neq 1$. Si por el contrario, $e(s)(k) = 1$, entonces $k = \sum_{i=0}^{r} s(i) + r$ para alguna $r < m$. Tenemos los siguientes casos:

I. Si $r = \ell$, entonces $\sum_{i=0}^{\ell} t(i) = \sum_{i=0}^{\ell} s(i)$. Puesto que $t(i) = s(i)$ para toda $i < \ell$, se sigue que $t(\ell) = s(\ell)$, lo que contradice la definición de $\ell$.

II. Si $r < \ell$, entonces:

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=0}^{\ell} t(i) + \ell \\ &= \sum_{i=0}^{r} t(i) + r + \sum_{i=r+1}^{\ell} t(i) + (\ell - r) \\ &= \sum_{i=0}^{r} s(i) + r + \sum_{i=r+1}^{\ell} t(i) + (\ell - r) \\ &= k + \sum_{i=r+1}^{\ell} t(i) + (\ell - r). \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{i=r+1}^{\ell} t(i) \geqslant 0$ y $\ell - r > 0$, se sigue que:

$$k < k,$$

lo cual es una contradicción.

III. Si $\ell < r$, entonces:

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=0}^{r} s(i) + r \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} s(i) + \ell + \sum_{i=\ell+1}^{r} s(i) + (r - \ell) \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} t(i) + \ell + \sum_{i=\ell+1}^{r} s(i) + (r - \ell) \\ &= k + \sum_{i=\ell+1}^{r} s(i) + (r - \ell). \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_{i=\ell+1}^{r} s(i) \geqslant 0$ y $r - \ell > 0$, se tiene entonces que:

$$k < k,$$

lo cual no es posible.

En suma, $e(t)(k) = 1$ y $e(s)(k) \neq 1$, es decir, $e(t) \perp e(s)$.

Veamos que $e"(\omega^{<\omega})$ es densa en $2^{<\omega}$. Sea $p \in 2^{<\omega}$. Así, existe $n < \omega$ tal que $n = \operatorname{dom} p$. Consideremos $p^{-1}[1] = \{k < n : p(k) = 1\}$. Si $p^{-1}[1] = \emptyset$, consideramos $t := \{(0, n+1)\}$. Así, $e(t) = p^\frown 1$ (véase la Definición 1.35-(3) ), de donde $e(t) \leqslant p$. Si $p^{-1}[1] \neq \emptyset$, ordenamos este conjunto como $p^{-1}[1] = \{k_0, k_1, ..., k_m\}$, donde:

(i) $k_0 < k_1 < ... < k_m$,

(ii) $m \leqslant n$.

Definimos $t : m + 2 \to \omega$ como sigue:

- $t(0) = k_0$,
- $t(i+1) = k_{i+1} - k_i - 1$ para $i < m$,
- $t(m+1) = n - k_m - 1$.

Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom} e(t) &= \sum_{i=0}^{m+1} t(i) + m + 2 \\
&= k_0 + (k_1 - k_0 - 1) + ... + (k_m - k_{m-1} - 1) + (n - k_m - 1) + m + 2 \\
&= n + 2.
\end{aligned}$$

Notemos que por (ii) y según lo anterior, $\operatorname{dom} p \leqslant \operatorname{dom} e(t)$.

Verifiquemos que $e(t) \leqslant p$ probando que para toda $k < n$, $p(k) = 1$ si y sólo si $e(t)(k) = 1$.

Observación. Para todo $\ell \leqslant m$, se tiene que $\sum_{i=0}^{\ell} t(i) = k_\ell - \ell$. Esto se verifica pues $k_\ell$ se puede escribir como:

$$k_\ell = k_0 + (k_1 - k_0 - 1) + ... + (k_\ell - k_{\ell-1} - 1) + \ell.$$

Es decir, $k_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} t(i) + \ell$.

Supongamos que $p(k) = 1$ para cierta $k < n$. Entonces $k \in p^{-1}[1]$. Así, $k = k_j$ para alguna $j \leqslant m$. Por lo observado previamente, $k_j = \sum_{i=0}^{j} t(i) + j$, donde $j < m + 2$. Por lo tanto, $e(t)(k_j) = 1$.

Supongamos ahora que $e(t)(k) = 1$ para alguna $k < n$. Así, existe $\ell < m + 2$ tal que $k = \sum_{i=0}^{\ell} t(i) + \ell$. De acuerdo con nuestra observación, si $\ell \leqslant m$, entonces $k \in p^{-1}[1]$. Probemos la desigualdad anterior suponiendo lo contrario, es decir, que $\ell = m+1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
k &= \sum_{i=0}^{m+1} t(i) + m + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{m} t(i) + t(m+1) + m + 1 \\
&= t(0) + ... + t(m) + t(m+1) + m + 1 \\
&= k_0 + (k_1 - k_0 - 1) + ... + (k_m - k_{m-1} - 1) + (n - k_m - 1) + m + 1 \\
&= n,
\end{aligned}$$

lo cual contradice la suposición de que $k < n$. □

Los encajes densos son importantes porque si una noción de forcing se encaja densamente en otra, entonces las extensiones genéricas dadas por estas nociones son las mismas (en un sentido que se hará claro en el enunciado del Teorema 2.15).

**Definición 2.14.** Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos órdenes parciales y $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ una función. Para cada $X \subseteq \mathbb{P}$, definimos $\tilde{e}(X) = \{q \in \mathbb{Q} : \exists\, p \in X(e(p) \leqslant q)\}$.

Observemos que de acuerdo con la definición anterior, para cada $X \subseteq \mathbb{P}$, siempre ocurre que $e"X \subseteq \tilde{e}(X)$. En efecto, si $q \in e"X$, entonces $q = e(p)$ para alguna $p \in X$. Luego, $q \in \tilde{e}(X)$.

**Teorema 2.15.** *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje denso. Si $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V$, entonces:*

1. *Si $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $\tilde{e}(G)$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico y $G = e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. En este caso, $V[G] = V[\tilde{e}(G)]$.*

2. *Si $H \subset \mathbb{Q}$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico, entonces $e^{-1}[H]$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y $H = \tilde{e}(e^{-1}[H])$. En este caso, $V[e^{-1}[H]] = V[H]$.*

*Demostración.* (1). Probemos que $\tilde{e}(G)$ es un filtro. Sean $q_1, q_2 \in \tilde{e}(G)$. Entonces $e(p_1) \leqslant q_1$ y $e(p_2) \leqslant q_2$ para algunas $p_1, p_2 \in G$. Como $G$ es un filtro, existe $p \in G$ tal que $p \leqslant p_1, p_2$. De donde $e(p) \leqslant e(p_1), e(p_2)$. Por tanto, $e(p) \in \tilde{e}(G)$ y $e(p) \leqslant q_1, q_2$.

Sean $r \in \tilde{e}(G)$ y $q \in \mathbb{Q}$ tales que $r \leqslant q$. Así, $e(p) \leqslant r$ para alguna $p \in G$. En consecuencia, $e(p) \leqslant q$ y, por tanto, $q \in \tilde{e}(G)$.

Verifiquemos la genericidad de $\tilde{e}(G)$. Sea $D \in V$ un subconjunto denso en $\mathbb{Q}$ y sea

$$E = \{p \in \mathbb{P} : \exists\, q \in D(e(p) \leqslant q)\}.$$

Probemos que $E$ es un conjunto denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Como $D$ es denso en $\mathbb{Q}$ y $e(p) \in \mathbb{Q}$, se tiene que $q \leqslant e(p)$ para alguna $q \in D$. Por hipótesis, $e"\mathbb{P}$ es un conjunto denso en $\mathbb{Q}$, de donde $e(r) \leqslant q$ para alguna $r \in \mathbb{P}$. Entonces $e(r) \leqslant e(p)$ y en particular $e(r) \mid e(p)$, de donde $r \mid p$. Sea $s \leqslant r, p$. Así, $e(s) \leqslant q$ con $q \in D$ y además $s \leqslant p$. Por tanto, $E$ es denso en $\mathbb{P}$.

Puesto que $\mathbb{P}, D, e \in V$, se tiene que $E \in V$. Luego, $G \cap E \neq \emptyset$, de donde existen $p \in G$ y $q \in D$ tales que $e(p) \leqslant q$. En consecuencia, $q \in \tilde{e}(G)$. Por tanto, $\tilde{e}(G) \cap D \neq \emptyset$.

Verifiquemos que $G = e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. Como hemos visto, $\tilde{e}(G)$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico, por lo que, de acuerdo con el Teorema 2.4 y la Proposición 2.11, $e^{-1}[\tilde{e}(G)]$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. Ahora bien, se tiene que $e(G) \subseteq \tilde{e}(G)$, equivalentemente, $G \subseteq e^{-1}[\tilde{e}(G)]$. Por tanto, de acuerdo con el Lema 1.28, $e^{-1}[\tilde{e}(G)] = G$.

Hagamos $H = \tilde{e}(G)$ y veamos que $V[G] = V[H]$. Por lo probado en el párrafo anterior, $H$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico, de donde, por el Teorema 2.4, se sigue que $V[G] \subseteq V[H]$. Ahora bien, $H \in V[G]$, pues $G \in V[G]$ y $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V \subseteq V[G]$. Así, por el Lema 1.21, se obtiene que $V[H] \subseteq V[G]$ y por tanto se cumple nuestra igualdad.

(2). Dado que, de acuerdo con la Proposición 2.11, $e$ es un encaje completo, se tiene, por el Teorema 2.4, que $e^{-1}[H]$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico.

Ahora bien, por lo probado en (1), $\tilde{e}(e^{-1}[H])$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico. Observemos que $\tilde{e}(e^{-1}[H]) \subseteq H$: si $q \in \tilde{e}(e^{-1}[H])$, entonces $e(p) \leqslant q$ para alguna $p \in e^{-1}[H]$. De donde se sigue que $e(p) \in H$ y en consecuencia $q \in H$, pues $H$ es un filtro. En suma, $\tilde{e}(e^{-1}[H])$ es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico contenido en $H$, el cual, por hipótesis, es un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico. Así, por el Lema 1.28, $H = \tilde{e}(e^{-1}[H])$.

Hagamos $G = e^{-1}[H]$ y veamos que $V[G] = V[H]$. Por el Teorema 2.4, $V[G] \subseteq V[H]$. Ahora bien, según nuestra suposición y por lo probado en el párrafo anterior, $H = \tilde{e}(G)$. Dado que $G \in V[G]$ y $e, \mathbb{P}, \mathbb{Q} \in V \subseteq V[G]$, se tiene que $H \in V[G]$. Así, por el Lema 1.21, se sigue que $V[H] \subseteq V[G]$ y, por tanto, $V[G] = V[H]$. $\square$

Los siguientes diagramas ilustran el Teorema 2.15 en sus partes (1) y (2), respectivamente. En el primero se observa que si en $V$ se tiene un encaje denso, $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$, entonces al tomar un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$, el filtro generado por la imagen de $G$ bajo $e$, a saber

$\tilde{e}(G)$, es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ cuya imagen inversa bajo $e$ devuelve $G$ y con el cual, además, se obtiene la misma extensión genérica si se hace forcing vía $\mathbb{Q}$, que si se hace lo propio vía $\mathbb{P}$. Esto se ilustra etiquetando con $V[G]$ y $V[\tilde{e}(G)]$ la misma línea curva que representa un modelo de ZFC que extiende a $V$.

Análogamente, el segundo diagrama ilustra que si ahora $e \in V$ es un encaje denso entre $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ y se considera un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico $H$, entonces $e^{-1}[H]$ resulta ser un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico (véanse Proposición 2.11 y Teorema 2.4) con el cual, si se considera $\tilde{e}(e^{-1}[H])$, se obtiene un filtro $(V, \mathbb{Q})$-genérico que coincide con $H$. Se ilustra además la obtención de idénticas extensiones genéricas al hacer forcing vía $\mathbb{P}$ y al hacerlo vía $\mathbb{Q}$ considerando los correspondientes filtros genéricos ya mencionados.

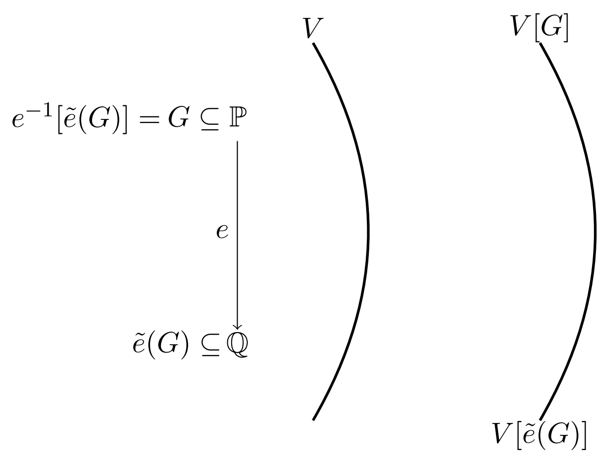



Diagrama asociado al Teorema 2.15-(1)

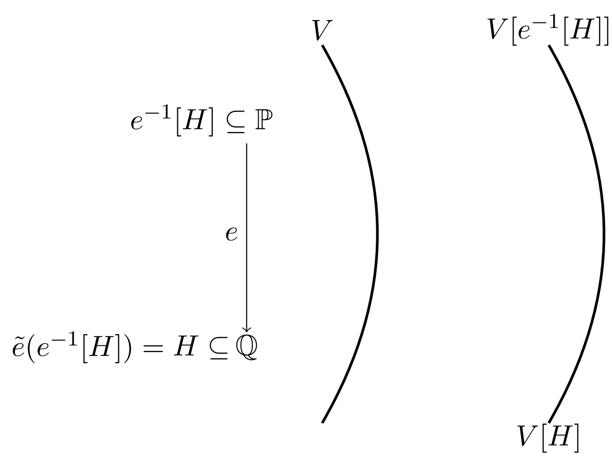



Diagrama asociado al Teorema 2.15-(2)

De acuerdo con el Teorema 2.13, $\omega^{<\omega} \leqslant_d 2^{<\omega}$. Así, es un corolario inmediato del Teorema 2.15 que $\omega^{<\omega}$ y $2^{<\omega}$ producen las mismas extensiones de forcing. Sin embargo, es preciso aclarar que el resultado opuesto no necesariamente es cierto, es decir, dos nociones de forcing pueden producir las mismas extensiones genéricas sin estar encajada densamente una en la otra. Para verificar lo dicho consideraremos los órdenes parciales mencionados y veremos que no hay un encaje denso de $2^{<\omega}$ a $\omega^{<\omega}$.

Previo a lo que se quiere, probemos que los encajes completos preservan anticadenas maximales no triviales.

**Lema 2.16.** *Si $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje completo y $A \subseteq \mathbb{P}$ es una anticadena maximal no trivial en $\mathbb{P}$, entonces $e``A$ es una anticadena maximal no trivial en $\mathbb{Q}$.*

*Demostración.* Sea $A$ una anticadena maximal no trivial en $\mathbb{P}$. Dado que $e$ es un encaje completo, se tiene que $e``A$ es una anticadena maximal (véase la Definición 2.2). Por hipótesis, $A$ no es la anticadena trivial, así, existen al menos dos elementos $p, q \in A$ incompatibles. Pero entonces $e(p) \perp e(q)$ y por ende $e(p) \neq e(q)$. Con lo cual $e``A$ no es trivial. $\square$

**Proposición 2.17.** *Se tiene que $2^{<\omega} \nleqslant_c \omega^{<\omega}$.*

*Demostración.* Probaremos primero que $2^{<\omega}$ admite anticadenas maximales finitas no triviales.

Sean $p := \{(0,0)\}$ y $q := \{(0,1)\}$ y sea $A = \{p, q\}$. Veamos que $A$ es una anticadena maximal. Por definición, $p \neq q$. Observamos además que $p \cup q$ no es una función, así, por el Lema 1.34 aplicado a nuestro caso, $p \perp q$. Por tanto, $A$ es una anticadena.

Probemos ahora que $A$ es maximal viendo que satisface la equivalencia de la Proposición 1.5. Sea $r \in 2^{<\omega}$ arbitraria. Así, existe $n < \omega$ tal que $\operatorname{dom} r = n$. Si $n = 0$, $r$ es la función vacía y por tanto $r$ es compatible con cualquier elemento de $A$. Supongamos que $n > 0$. Entonces $0 \in \operatorname{dom} r$ y en consecuencia $r(0) \in \{0, 1\}$. Si $r(0) = 0$, entonces $p \subseteq r$, es decir, $r \leqslant p$, y, como $r \leqslant r$, se tiene que $r \leqslant p, r$. Por tanto, $r \mid p$. Si ocurre que $r(0) = 1$, se tiene entonces que $q \subseteq r$, es decir, $r \leqslant q$, de donde $r \leqslant q, r$. Por tanto, $r \mid q$.

Probemos nuestra proposición suponiendo lo contrario. Así, si $2^{<\omega} \leqslant_c \omega^{<\omega}$, entonces existe $e : 2^{<\omega} \to \omega^{<\omega}$ un encaje completo. Pero entonces, si $B$ es una anticadena maximal finita no trivial en $2^{<\omega}$, por el Lema 2.16, $e"B$ es una anticadena maximal finita no trivial en $\omega^{<\omega}$. Así, resta probar que ninguna anticadena finita no trivial en $\omega^{<\omega}$ puede ser maximal.

Sea $B$ una anticadena finita no trivial en $\omega^{<\omega}$. Como $B \subseteq \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$, se tiene que $0 \in \operatorname{dom} b$ para toda $b \in B$. Consideremos $\{r(0) : r \in B\} \subseteq \omega$, el cual es finito por ser $B$ finita. Tomemos $k \in \omega \setminus \{r(0) : r \in B\}$. Así, si $s = \{(0, k)\}$ y $t \in B$, entonces, por definición, $s(0) = k \neq t(0)$. Pero entonces $s \perp t$, y como $t$ fue arbitrario, se sigue que $s \notin B$. Así, $B \cup \{s\}$ es una anticadena en $\omega^{<\omega}$ que contiene propiamente a $B$. Por tanto, $B$ no es maximal. □

Según los teoremas 2.13, 2.15 y por el resultado anterior, hemos exhibido dos nociones de forcing que producen las mismas extensiones y que sin embargo, una no está densamente encajada en la otra. Esto se verifica, pues de ocurrir que $2^{<\omega} \leqslant_d \omega^{<\omega}$, como todo encaje denso es completo (ver Proposición 2.11), se tendría que $2^{<\omega} \leqslant_c \omega^{<\omega}$, hecho que no es posible de acuerdo con la proposición previa.

Hay un cierto tipo de orden parcial que resulta interesante por preservar alguna noción de interés, tal es el caso de los órdenes $\kappa$-cc, cuya virtud es preservar cofinalidades mayores o iguales que un cardinal infinito $\kappa$ (se invita al lector a consultar [6], Lemma 6.9, p. 213).

**Definición 2.18.** Sea $\kappa$ un cardinal infinito. Decimos que $\mathbb{P}$ tiene la $\kappa$-cc si toda anticadena en $\mathbb{P}$ tiene cardinalidad menor que $\kappa$.

En este contexto, el resultado presentado enseguida nos muestra que siempre que haya un encaje denso entre dos nociones $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$, el tamaño de las anticadenas en ambos órdenes no excede a $\kappa$.

**Proposición 2.19.** *$\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{Q}$ implica que $\mathbb{P}$ es $\kappa$-cc si y sólo si $\mathbb{Q}$ es $\kappa$-cc.*

*Demostración.* Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje denso. Supongamos que $\mathbb{P}$ tiene la $\kappa$-cc y probemos que $\mathbb{Q}$ es $\kappa$-cc. Sea $A \subseteq \mathbb{Q}$ una anticadena. Como $e"\mathbb{P}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$, se tiene que para cada $a \in A$, existe $p_a \in \mathbb{P}$ de tal modo que $e(p_a) \leqslant a$. Sea $B = \{p_a : a \in A\}$. Observemos que $B$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. En efecto, si $a \neq b$, entonces $p_a \perp p_b$, pues de ocurrir lo contrario, $p_a \mid p_b$, se tendría en consecuencia que $e(p_a) \mid e(p_b)$, de donde

$q \leqslant e(p_a), e(p_b)$ para alguna $q \in \mathbb{Q}$. Pero entonces $q \leqslant a, b$, pues $e(p_a) \leqslant a$ y $e(p_b) \leqslant b$. Esto último contradice el hecho de que $A$ es una anticadena. En suma, $B$ es una anticadena y por tanto $|B| < \kappa$.

Ahora bien, sea $f : A \to B$ la función definida mediante $f(a) = p_a$ para cada $a \in A$. Observemos que $f$ es una biyección entre $A$ y $B$. En efecto, $f$ es inyectiva porque si $a \neq b$, hemos visto en el párrafo anterior que $p_a \perp p_b$ y en particular, $p_a \neq p_b$. Se tiene además que $f$ es suprayectiva porque cada elemento de $B$ es por la definición de $f$, la imagen de cierto elemento de $A$. Así, $|A| = |B|$ y, como $|B| < \kappa$, se tiene el resultado.

Probemos la implicación restante. Sea $A \subseteq \mathbb{P}$ una anticadena. Observemos que $e \restriction A$ es una función inyectiva: si $e(p) = e(q)$ con $p, q \in A$, entonces en particular $e(p) \mid e(q)$. Luego, $p \mid q$, lo que implica que $p = q$, pues $A$ es una anticadena. Ahora bien, de acuerdo con la Definición 2.2, $e"A$ es una anticadena en $\mathbb{Q}$ y, por tanto, $|e"A| < \kappa$, pues $\mathbb{Q}$ es $\kappa$-cc. En suma, $e \restriction A$ es una función inyectiva de $A$ en $e"A$ con $|e"A| < \kappa$ y, por lo tanto, $|A| < \kappa$. $\square$

**Definición 2.20.** Diremos que $\mathbb{P}$ es $\kappa$-cerrado si toda sucesión decreciente $\langle p_\xi : \xi < \lambda \rangle$ de condiciones en $\mathbb{P}$ tiene una cota inferior en $\mathbb{P}$, para cualquier $\lambda \leqslant \kappa$.

Los órdenes $\kappa$-cerrados son interesantes porque no añaden nuevos subconjuntos de $\kappa$, en otras palabras, si $\mathbb{P} \in V$ y $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $V[G] \cap {}^{\kappa}\omega \subseteq V$. Una demostración de lo anterior es análoga a la prueba de la Proposición 1.38.

El siguiente es un ejemplo de dos nociones de forcing, una encajada densamente en la otra, y donde una de ellas es un orden $\kappa$-cerrado pero no necesariamente la otra noción es un orden con esta propiedad.

**Ejemplo 2.20.1.** *Existen $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ tales que $\mathbb{P}$ es $\kappa$-cerrado, $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{Q}$, y, sin embargo, $\mathbb{Q}$ no es $\kappa$-cerrado.*

Hagamos claro lo anterior considerando $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$, dos subconjuntos de $\omega^{<\omega}$ (ambos pensados como subórdenes de $\omega^{<\omega}$) del modo siguiente:

(1) $\mathbb{P}$ consta de todas las funciones cuyo dominio es $\leqslant 1$, es decir,

$$p \in \mathbb{P} \text{ si y sólo si } p = \emptyset \text{ ó existe } n \in \omega \text{ de modo que } p = \{(0, n)\}.$$

Al heredar $\mathbb{P}$ el orden de $\omega^{<\omega}$, es posible visualizar los elementos de $\mathbb{P}$ como sigue:

$$\begin{tikzcd}
& & \emptyset \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\{(0,0)\} & \{(0,1)\} & \cdots & \{(0,n)\} & \cdots
\end{tikzcd}$$

(2) Sea $f \in {}^{\omega}\omega$ la función constante cero: $f(k) = 0$ para toda $k \in \omega$. Así, hacemos:

$$\mathbb{Q} = \{\emptyset\} \cup \{(f \restriction n)^\frown k : n \in \omega \ \&\ k \in \{0,1\}\}.$$

Al igual que $\mathbb{P}$, el orden en $\mathbb{Q}$ es el orden heredado por $\omega^{<\omega}$. De este modo, podemos ilustar los elementos de $\mathbb{Q}$ como:

$$\begin{tikzcd}
& & & & & \emptyset = f \restriction 0 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& & & & f \restriction 1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (f \restriction 0)^\frown 1 \\
& & & f \restriction 2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (f \restriction 1)^\frown 1 & \\
& & \vdots \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (f \restriction 2)^\frown 1 & & \\
& f \restriction (n+1) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (f \restriction n)^\frown 1 & & & \\
\vdots & & \vdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que se satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si $p, q \in \mathbb{P}$ y $p < q$, entonces $q = \emptyset$.

(ii) $\mathbb{P}$ es $\omega$-cerrado.

(iii) $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{Q}$.

El inciso (i) se cumple, pues si contrariamente a lo que se afirma, $q \neq \emptyset$, entonces $0 \in \operatorname{dom} q$ y por tanto existe $m \in \omega$ de modo que $q = \{(0, m)\}$. Como $p < q$ y de acuerdo con la definición de $\mathbb{P}$, se sigue que $p = q$, lo cual no es posible.

Demostremos el inciso (ii) viendo que si $\langle p_i : i \in \omega \rangle$ es una sucesión decreciente de condiciones en $\mathbb{P}$, entonces existen $m \in \omega$ y $p \in \mathbb{P}$ de modo tal que $p_n = p$ para toda $n \geqslant m$. Si por el contrario, para cualquier $m \in \omega$ se tiene que existe $n \geqslant m$ para la cual $p_n \neq p_m$, entonces en particular para $m = 0$ debe ocurrir que $p_n \neq p_0$ para alguna $n \geqslant 0$. Notemos que $n > 0$. Así, $p_n < p_0$, pues $p_n \neq p_0$ y son ambos elementos de una sucesión decreciente (nótese que como $p_n$ es una extensión propia de $p_0$, se tiene que $0 \in \operatorname{dom} p_n$). Pero entonces, para cualquier $k \geqslant n$, se tiene que $p_k \leqslant p_n$ (y por ende, $0 \in \operatorname{dom} p_k$) y en particular, $p_k(0) = p_n(0)$, es decir, $p_n = p_k$, lo cual no es posible. En suma, hemos probado que toda sucesión decreciente en $\mathbb{P}$ tiene una cota inferior, es decir, $\mathbb{P}$ es $\omega$-cerrado.

Probemos el inciso (iii). Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ definida mediante:

$$e(p) = \emptyset \text{ si } p = \emptyset \text{ y } e(\{(0, n)\}) = (f \restriction n)^\frown 1, \text{ para cada } n \in \omega.$$

Comprobemos que $e$ es un encaje denso verfificando en primera instancia que $e$ preserva el orden. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \leqslant q$. Si ocurre que $p < q$, entonces por la Afirmación (1), se sigue que $q = \emptyset$. De donde, $e(q) = \emptyset$ y, por tanto, $e(p) \leqslant e(q)$. De ocurrir, $p = q$, entonces $e(p) = e(q)$ y se sigue preservando el orden.

Demos paso a probar que nuestra función $e$ preserva la incompatibilidad. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \perp q$. Observemos que ninguna de estas funciones es $\emptyset$, pues toda condición en $\mathbb{P}$ es compatible con la función $\emptyset$. Así, existen $n, m \in \omega$ de modo tal que $p = \{(0, n)\}$ y $q = \{(0, m)\}$. Sin perder la generalidad, supongamos que $n < m$. De este modo, $e(p)(n) = 1$ y $e(q)(n) = 0$, pues $n < m$. Por tanto, $e(p) \perp e(q)$.

Finalmente, comprobemos que $e$"$\mathbb{P}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Si $q = \emptyset$, entonces la imagen bajo $e$ de cualquier elemento de $\mathbb{P}$, es una extensión de $q$. Ahora bien, si $q \neq \emptyset$, entonces existe $n \in \omega$ de modo que $q = (f \restriction n)^\frown k$ con $k \in \{0, 1\}$. Así, si por un lado, $q = (f \restriction n)^\frown 0$, entonces $q = f \restriction (n+1)$ y, por lo tanto, $f \restriction (n+1)^\frown 1 = e(\{(0, n+1)\})$ y $e(\{(0, n+1)\}) \leqslant q$. Si por otro lado, $q = (f \restriction n)^\frown 1$, entonces $q = e(\{(0, n)\})$ y se tiene el resultado.

De acuerdo con el Teorema 2.15, sabemos que si $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{Q}$, entonces la extensión genérica dada por $\mathbb{P}$ es la misma que la dada por $\mathbb{Q}$. De esta forma y por el ejemplo anterior, si $\mathbb{P}$ es $\kappa$-cerrado y $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}$ no añade nuevos subconjuntos de $\kappa$ a pesar de que $\mathbb{Q}$ no necesariamente es $\kappa$-cerrado.

Nos interesa ahora hablar de órdenes parciales denominados $\kappa$-distributivos. Estos órdenes son interesantes porque no añaden funciones nuevas de $\kappa$ en 2 (una prueba puede encontrarse en [5, Theorem 15.6, p. 228]). Sabemos por la Proposición 1.38 que $2^{<\omega_1}$ no añade un nuevo real cuando $\kappa = \omega$, así que la pregunta natural es si este orden parcial es $\omega$-distributivo.

**Definición 2.21.** Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial.

1. Un subconjunto $U \subseteq \mathbb{P}$ será llamado abierto si para cualesquiera $p \in U$ y $q \leqslant p$, se tiene que $q \in U$.

2. Si $\kappa$ es un cardinal infinito, $\mathbb{P}$ es $\kappa$-distributivo si para cada sucesión $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de densos abiertos en $\mathbb{P}$, se tiene que $\bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ es denso.

Observemos que la intersección de $\kappa$ subconjuntos densos abiertos siempre es abierta. En efecto, si $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es tal colección y $D = \bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$, entonces $D$ es abierto, pues si $p \in D$ y $q \leqslant p$, entonces $p \in D_\alpha$, para toda $\alpha < \kappa$. Como cada $D_\alpha$ es abierto, se sigue que $q \in D_\alpha$. Luego, $q \in D$.

**Lema 2.22.** *Si $\mathbb{P}$ es $\kappa$-cerrado, entonces $\mathbb{P}$ es $\kappa$-distributivo.*

*Demostración.* Sea $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una sucesión de subconjuntos densos abiertos en $\mathbb{P}$. Verifiquemos que $D = \bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ es un conjunto denso en $\mathbb{P}$. Por inducción sobre $\alpha < \kappa$, probemos que existe $\langle p_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ de modo que:

(i) $p_0 \leqslant p$,

(ii) para cada $\alpha < \kappa$, se tiene que $p_\alpha \in D_\alpha$; y

(iii) si $\alpha < \beta < \kappa$, entonces $p_\beta \leqslant p_\alpha$.

Sea $p \in \mathbb{P}$. Así, existe $p_0 \in D_0$ tal que $p_0 \leqslant p$. Ahora bien, supongamos que para alguna $\alpha < \kappa$, la sucesión $\langle p_\xi : \xi < \alpha\rangle$ satisface (i), (ii) y (iii). Como $\mathbb{P}$ es $\kappa$-cerrado, existe $r \in \mathbb{P}$ de modo que para cada $\xi < \alpha$, se tiene que $r \leqslant p_\xi$. Dada la densidad de $D_\alpha$, existe $p_\alpha \in D_\alpha$ tal que $p_\alpha \leqslant r$. Por tanto, $p_\alpha \leqslant p_\xi$ y $p_\alpha \in D_\alpha$. Esto completa la inducción y, por ende, existe la sucesión mencionada. Entonces, dado que $\mathbb{P}$ es $\kappa$-cerrado, existe $q \in D$ de modo que $q \leqslant p_\alpha$, para cada $\alpha < \kappa$. Por tanto, $q \leqslant p$ y $q \in D$. $\square$

De acuerdo con la prueba de la Proposición 1.38, $2^{<\omega_1}$ es $\omega$-cerrado. Así, se sigue del lema anterior que $2^{<\omega_1}$ es $\omega$-distributivo.

El resultado presentado a continuación adquiere importancia porque nos muestra que la $\kappa$-distributividad se preserva bajo encajes densos.

**Proposición 2.23.** *Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ un encaje denso. Entonces lo siguiente se satisface:*

1. *Si $D$ es un abierto denso en $\mathbb{Q}$, entonces $e^{-1}[D]$ es un abierto denso en $\mathbb{P}$.*

2. *Si $\mathbb{P}$ es $\kappa$-distributivo, entonces $\mathbb{Q}$ es $\kappa$-distributivo.*

*Demostración.* Probemos el inciso (1). Sean $p \in e^{-1}[D]$ y $q \in \mathbb{P}$ tales que $q \leqslant p$. Entonces $e(p) \in D$ y $e(q) \leqslant e(p)$. Como $D$ es abierto en $\mathbb{Q}$, se tiene que $e(q) \in D$. Luego, $q \in e^{-1}[D]$. En suma, $e^{-1}[D]$ es abierto. Verifiquemos que $e^{-1}[D]$ es un conjunto denso en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Así, $e(p) \in \mathbb{Q}$ y dada la densidad de $D$, existe $q \in D$ de modo que $q \leqslant e(p)$. Ahora bien, puesto que $e$"$\mathbb{P}$ es un conjunto denso en $\mathbb{Q}$, se tiene que para cierta $p_0 \in \mathbb{P}$, $e(p_0) \leqslant q$. Luego, $e(p_0) \leqslant e(p)$ y en particular, $e(p_0) \mid e(p)$. Por ende, $p_0 \mid p$. Sea $p_1 \leqslant p_0, p$. De este modo, $e(p_1) \leqslant e(p_0)$ y, como $e(p_0) \leqslant q$, se sigue que $e(p_1) \leqslant q$. En consecuencia, $e(p_1) \in D$ pues $q \in D$. En suma, $p_1 \in e^{-1}[D]$ y $p_1 \leqslant p$.

Demostremos ahora el inciso (2). Sea $\{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una sucesión de densos abiertos en $\mathbb{Q}$. Hagamos $D = \bigcap_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ y verifiquemos la densidad de $D$. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Así, existe $p_0 \in \mathbb{P}$ tal que $e(p_0) \leqslant q$. Dado que cada $D_\alpha$ es denso y abierto, se sigue del inciso (1) que $\{e^{-1}[D_\alpha] : \alpha < \kappa\}$ es una colección de densos abiertos en $\mathbb{P}$. Ahora bien, como $\mathbb{P}$ es $\kappa$-distributivo, el conjunto $E = \bigcap_{\alpha<\kappa} e^{-1}[D_\alpha]$ es un denso abierto en $\mathbb{P}$. Por tanto, existe $p \in E$ tal que $p \leqslant p_0$. Entonces $e(p) \in D$, $e(p) \leqslant e(p_0)$ y, como $e(p_0) \leqslant q$, se tiene el resultado. $\square$

## 2.3 Añadir un real de Cohen

Nuestro objetivo principal de esta sección es probar que $\omega^{<\omega}$ se encaja densamente en toda noción de forcing numerable y no atómica (según la Definición 1.15). De este modo, hacer forcing con cualquiera de ellas es equivalente a hacer forcing con $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$, es decir, la noción de forcing que añade un real de Cohen. La prueba de este resultado será dividida en una serie de lemas.

**Definición 2.24.** Sea $p \in \mathbb{P}$. Definimos $p^{\downarrow} = \{r \in \mathbb{P} : r \leqslant p\}$.

**Lema 2.25.** *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial sin átomos. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ compatibles. Entonces existe $A \subseteq \mathbb{P}$ tal que:*

1. *$A$ es una anticadena infinita;*
2. *para cualquier $r \in \mathbb{P}$, si $r \leqslant p$, entonces existe $a \in A$ compatible con $r$;*
3. *hay un elemento $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leqslant q$; y*
4. *$A \subseteq p^{\downarrow}$.*

*Demostración.* Existe $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leqslant p, q$.

Afirmamos que existen $\langle r_i : i \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{P}$ y $\langle s_i : i \in \omega \rangle \subseteq \mathbb{P}$ tales que:

(a) $\langle r_i : i \in \omega \rangle$ es decreciente,

(b) $s_{i+1} \leqslant r_i$ para todo $i \in \omega$, y

(c) $r_i \perp s_i$ para cada $i \in \omega$.

Como $\mathbb{P}$ es no atómico y $t \in \mathbb{P}$, se tiene que hay $r_0, s_0 \in \mathbb{P}$ tales que $r_0, s_0 \leqslant t$ y $r_0 \perp s_0$. Supongamos que para alguna $n \in \omega$ existen $\langle r_i : i \leqslant n \rangle$ y $\langle s_i : i \leqslant n \rangle$ que satisfacen (a), (b) y (c). Nuevamente, como $\mathbb{P}$ es no atómico, existen $r_{n+1}, s_{n+1} \in \mathbb{P}$ tales que $r_{n+1}, s_{n+1} \leqslant r_n$ y $r_{n+1} \perp s_{n+1}$, lo cual finaliza la inducción.

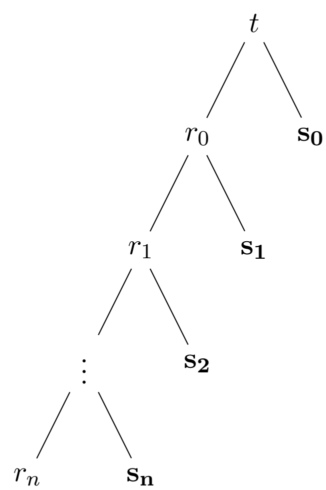
Sea $B = \{s_i : i \in \omega\}$. Veamos que $B$ es una anticadena (para una ilustración de $B$ veáse el diagrama de abajo). Supongamos, buscando una contradicción, que existen $n$ y $m$ de tal modo que $m < n$ y $s_n \mid s_m$. Así, hay $s \leqslant s_n, s_m$. Por construcción $s_n \leqslant r_m$, de donde se tiene que $s \leqslant r_m, s_m$ lo cual contradice el inciso (c) de la afirmación anterior. Por lo tanto, cualesquiera dos elementos en $B$ con subíndices distintos son incompatibles, es decir, $B$ es una anticadena. $B$ es infinita pues al tomar dos índices distintos $n$ y $m$ hemos visto que $s_n \perp s_m$ y, por lo tanto, $s_n \neq s_m$.

Por la Proposición 1.9, $B$ se puede extender a una anticadena maximal infinita en $p^{\downarrow}$, digamos $A$. Comprobemos que $A$ satisface además las condiciones (2) y (3).

Para verificar (2) tomemos $r \in p^{\downarrow}$ arbitrario. Como $A$ es una anticadena maximal en $p^{\downarrow}$, se sigue del la Proposición 1.5 que existe $a \in A$ de tal modo que $a \mid r$.

Finalmente, $A$ satisface (3) debido a que $B \subseteq A$ y $s \leqslant t \leqslant q$ para todo $s \in B$. $\square$

La construcción de la anticadena $B$ en el Lema 2.25 puede ilustrarse en la siguiente figura, la cual muestra que al tener la extensión común $t$ de $p$ y $q$, el que $\mathbb{P}$ carezca de átomos permite seleccionar los elementos de $B$.




Elementos $s_i$ de la anticadena $B$.

Notemos que el resultado anterior implica que todo orden parcial sin átomos es infinito.

Para los siguientes cuatro resultados consideraremos un orden parcial $\mathbb{P}$ numerable sin átomos y lo identificaremos como $\mathbb{P} = \{p_n : n \in \omega\}$ donde para cualesquiera $n, m \in \omega$, $n \neq m$ implica que $p_n \neq p_m$ y donde $p_0 = \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$.

**Lema 2.26.** *Existe una sucesión $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ de anticadenas en $\mathbb{P}$ tal que para cada $n \in \omega$:*

1. *$A_n$ es una anticadena maximal infinita en $\mathbb{P}$;*

2. *existe $a \in A_n$ tal que $a \leqslant p_n$;*

3. *para todo $x \in A_n$, $|\{y \in A_{n+1} : y \leqslant x\}| = \omega$; y*

4. *para cada $y \in A_{n+1}$ existe $x \in A_n$ tal que $y \leqslant x$.*

*Demostración.* Consideremos $p_0 \in \mathbb{P}$. Por el Lema 2.25, existe $A_0 \subseteq \mathbb{P}$ que satisface las condiciones del Lema 2.25 tomando $p = p_0 = q$.

Supongamos que para alguna $n \in \omega$ existe $\langle A_i : i \leqslant n \rangle$ que satisface (1), (2), (3) y (4). Como $A_n$ es maximal en $\mathbb{P}$, por la Proposición 1.5, para alguna $a_n \in A_n$ se tiene que $a_n \mid p_{n+1}$. Hagamos $p = a_n$ y $q = p_{n+1}$ en el Lema 2.25 y obtengamos una anticadena $A_n(a_n)$ la cual satisface los incisos del Lema 2.25.

Para cada $x \in A_n \setminus \{a_n\}$ hagamos $p = x = q$ en el Lema 2.25 para obtener una anticadena $A_n(x)$ que satisface las condiciones del Lema 2.25.

Definamos $A_{n+1} = \bigcup\{A_n(x) : x \in A_n\}$ y veamos que $A_{n+1}$ satisface (1), (2), (3) y (4).

Verifiquemos que $A_{n+1}$ satisface el inciso (1). Sean $y, z \in A_{n+1}$ y supongamos que $y \mid z$. Así, $y \in A_n(x)$ y $z \in A_n(x')$ para algunos $x, x' \in A_n$ y además existe $w \in A_{n+1}$ tal que $w \leqslant y, z$. Como $y \leqslant x$ y $z \leqslant x'$, se tiene que $w \leqslant x, x'$, esto es $x \mid x'$, donde $x, x' \in A_n$, la cual es una anticadena, por lo tanto $x = x'$. De donde, $y, z \in A_n(x)$, por lo que $z = y$. Por tanto, $A_{n+1}$ es una anticadena.

Para ver que $A_{n+1}$ es una anticadena maximal tomemos $r \in \mathbb{P}$ y veamos que $A_{n+1}$ cumple la equivalencia de la Proposición 1.5. Como $A_n$ es una anticadena maximal en $\mathbb{P}$, por la Proposición 1.5, para alguna $x \in A_n$ ocurre que $x \mid r$. Sea $r' \in \mathbb{P}$ tal que $r' \leqslant x, r$. Como $A_n(x)$ satisface la condición (2) del Lema 2.25, donde $p = x$, se tiene que existe $a \in A_n(x)$ compatible con $r'$. Así, para alguna condición $a' \leqslant a, r'$, tenemos que $a' \leqslant a, r$ y, por tanto, $a \mid r$.

La anticadena $A_{n+1}$ satisface (2), pues por nuestra construcción $A_n(a_n) \subseteq A_{n+1}$ y por el Lema 2.25-(3), existe $a \in A_n(a_n)$ tal que $a \leqslant p_n$.

Sea $x \in A_n$ y verifiquemos (3). Nuestra definición de $A_n(x)$ garantiza que $A_n(x) \subseteq x^{\downarrow}$ por el Lema 2.25-(4), mientras que por el Lema 2.25-(1), $|A_n(x)| = \omega$. Por definición de $A_{n+1}$, $A_n(x) \subseteq A_{n+1}$, por lo cual $|\{y \in A_{n+1} : y \leqslant x\}| = \omega$.

Ahora probemos (4). Sea $y \in A_{n+1}$ arbitrario. Por definición de $A_{n+1}$, $y \in A_n(x)$ para algún $x \in A_n$ y en consecuencia $y \leqslant x$. $\square$

En los siguientes resultados, la colección $\{A_n : n \in \omega\}$ es la sucesión de anticadenas descrita en el enunciado del Lema 2.26

Consideremos $\mathbb{Q} = \omega^{<\omega}$ y veamos qué relación hay entre $\mathbb{Q}_n = \{p : \operatorname{dom} p = n+1\} \subseteq \mathbb{Q}$ y $A_n \subseteq \mathbb{P}$ para cada $n \in \omega$.

**Lema 2.27.** *Existe $\langle e_i : i \in \omega\rangle$ tal que para todo $i < \omega$:*

1. *$e_i : \mathbb{Q}_i \to A_i$, donde $e_i$ es una función biyectiva;*

2. *si $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$ y $r \in \mathbb{Q}_i$, con $i \leqslant n$ y $p \leqslant r$, entonces $e_{n+1}(p) \leqslant e_i(r)$; y*

3. *si $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$ y $r \in \mathbb{Q}_i$, con $i \leqslant n$, son tales que $p \perp r$, entonces $e_{n+1}(p) \perp e_i(r)$.*

*Demostración.* Por inducción finita construiremos las funciones deseadas entre cada $\mathbb{Q}_n$ y $A_n$.

Se tiene que $\mathbb{Q}_0 = \{p : \operatorname{dom} p = 1\}$ y $|\mathbb{Q}_0| = |A_0| = \omega$. Así, consideramos $e_0$ cualquier biyección entre $\mathbb{Q}_0$ y $A_0$.

Supongamos que para alguna $n \in \omega$ la sucesión $\langle e_i : i \leqslant n\rangle$ satisface (1), (2) y (3).

Para cada $p \in \mathbb{Q}_n$ definimos $\mathbb{Q}_n(p) = \{q \in \mathbb{Q}_{n+1} : q \leqslant p\}$.

Observemos lo siguiente:

(i) Como $\mathbb{Q}_n(p) = \{p^\frown i : i \in \omega\}$, se tiene que $|\mathbb{Q}_n(p)| = \omega$.

(ii) Si $p, r \in \mathbb{Q}_n$, con $p \neq r$, entonces $\mathbb{Q}_n(p) \cap \mathbb{Q}_n(r) = \emptyset$. Por contrapositiva, si $q \in \mathbb{Q}_n(p) \cap \mathbb{Q}_n(r)$, entonces $q \leqslant p, r$, es decir, $p|r$, y por tanto $p = r$.

(iii) Para cada $x \in A_n \subseteq \mathbb{P}$, definimos $A_n(x) := \{r \in A_{n+1} : r \leqslant x\}$. Por el Lema 2.26-(3), $|A_n(x)| = \omega$, mientras que por el inciso (4) del mismo lema, se tiene que $A_{n+1} = \bigcup\{A_n(x) : x \in A_n\}$.

(iv) Se tiene que $A_n(x)$ y $A_n(y)$ son ajenas siempre que $x \neq y$. En efecto, si ocurre que $r \in A_n(x) \cap A_n(y)$, entonces $r \in A_{n+1}$ y $r \leqslant x, y$, es decir $x, y \in A_n$ son compatibles, esto es, $x = y$.

Para cada $p \in \mathbb{Q}_n$ fijamos una biyección $e_n^p : \mathbb{Q}_n(p) \to A_n(e_n(p))$. Notemos que de acuerdo con (iii), $A_{n+1} = \bigcup\{A_n(e_n(p)) : p \in \mathbb{Q}_n\}$.

Sea $e_{n+1} := \bigcup\{e_n^p : p \in \mathbb{Q}_n\}$. Se tiene que $e_{n+1}$ es una función, pues por (ii) los dominios de las funciones $e_n^p$ son ajenos por pares. Ahora verifiquemos que $e_{n+1}$ es una función biyectiva entre $\mathbb{Q}_{n+1}$ y $A_{n+1}$ que además satisface (2) y (3).

Para verificar el inciso (1) notemos primero que $\operatorname{dom} e_{n+1} = \bigcup\{\operatorname{dom} e_n^p : p \in \mathbb{Q}_n\}$. Como $\operatorname{dom} e_n^p = \mathbb{Q}_n(p)$ para cada $p \in \mathbb{Q}_n$, se tiene que $\operatorname{dom} e_{n+1} = \bigcup\{\mathbb{Q}_n(p) : p \in \mathbb{Q}_n\}$. Probemos ahora que $\operatorname{dom} e_{n+1} = \mathbb{Q}_{n+1}$.

Veamos que todo elemento de $\operatorname{dom} e_{n+1}$ es un elemento de $\mathbb{Q}_{n+1}$. Así, si $p' \in \operatorname{dom} e_{n+1}$, entonces $p' \in \mathbb{Q}_n(p)$ para alguna $p \in \mathbb{Q}_n$. Pero por la definición de $\mathbb{Q}_n(p)$, $p' \in \mathbb{Q}_{n+1}$ y, por tanto, $\operatorname{dom} e_{n+1} \subseteq \mathbb{Q}_{n+1}$.

Verfiquemos la contención restante. Si $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$, entonces $p \restriction n+1 \in \mathbb{Q}_n$ y $p \leqslant p \restriction n+1$. Por lo tanto, $p \in \mathbb{Q}_n(p \restriction n+1)$, con lo que $p \in \operatorname{dom} e_{n+1}$.

Veamos ahora que $e_{n+1}$ es una función inyectiva. Sean $p_1, p_2 \in \operatorname{dom} e_{n+1}$ con $p_1 \neq p_2$. Por la definición de $e_{n+1}$, existen $p, r \in \mathbb{Q}_n$ tales que $p_1 \in \mathbb{Q}_n(p)$ y $p_2 \in \mathbb{Q}_n(r)$. De este modo, si $p = r$, entonces $e_n^p(p_1) \neq e_n^p(p_2)$ por ser $e_n^p$ una biyección. Ahora bien, si $p \neq r$, entonces $e_n(p) \neq e_n(r)$ por hipótesis inductiva. De donde, por (iv), $A_n(e_n(p)) \cap A_n(e_n(r)) = \emptyset$. Como $e_n^p(p_1) \in A_n(e_n(p))$ y $e_n^r(p_2) \in A_n(e_n(r))$, se tiene que $e_n^p(p_1) \neq e_n^r(p_2)$. En vista de que $e_{n+1}(p_1) = e_n^p(p_1)$ y $e_{n+1}(p_2) = e_n^r(p_1)$, se obtiene el resultado.

Observemos que:

$$\operatorname{Im}(e_{n+1}) = \bigcup\{\operatorname{Im}(e_n^p) : p \in \mathbb{Q}_n\} = \bigcup\{A_n(e_n(p)) : p \in \mathbb{Q}_n\} = A_{n+1}.$$

Afirmamos que se cumple lo siguiente:

(v) $e_{n+1}(p) \leqslant e_n(p \restriction n+1)$ para cualquier $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$. En efecto, si $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$, entonces $(p \restriction n+1) \in \mathbb{Q}_n$. Dado que $p \leqslant p \restriction n+1 \in \mathbb{Q}_n$, se obtiene que $p \in \mathbb{Q}_n(p \restriction n+1)$. Así, $e_{n+1}(p) \in A_n(e_n(p \restriction n+1))$, por lo que $e_{n+1}(p) \leqslant e_n(p \restriction n+1)$.

Para probar el inciso (2) tomemos $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$ y $r \in \mathbb{Q}_i$ con $i \leqslant n$ y tales que $p \leqslant r$. Puesto que $(p \restriction n+1) \in \mathbb{Q}_n$ y además $(p \restriction n+1) \leqslant r$, se sigue, por la hipótesis inductiva, que $e_n(p \restriction n+1) \leqslant e_i(r)$. De acuerdo con lo anterior y por (v), se obtiene que $e_{n+1}(p) \leqslant e_i(r)$.

Resta probar el inciso (3). Sean $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$ y $r \in \mathbb{Q}_i$, con $i \leqslant n$ y de modo que $p \perp r$.

Como $(p \restriction n+1) \in \mathbb{Q}_n$, se tiene que $r \perp (p \restriction n+1)$. En efecto, $p \perp r$ si y sólo si $p \cup r$ no es una función, esto es, existe $k \in \operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} r$ tal que $p(k) \neq r(k)$. Ahora bien, por hipótesis, $i \leqslant n$, de donde $i+1 \leqslant n+1 = \operatorname{dom}(p \restriction n+1)$. Como $k \in \operatorname{dom} r$, se tiene que $k < i+1 \leqslant n+1$, es decir, $k \in \operatorname{dom}(p \restriction n+1) \cap \operatorname{dom} r$. Como además $p(k) = (p \restriction n+1)(k)$, se tiene entonces que $(p \restriction n+1)(k) \neq r(k)$. Por tanto, $(p \restriction n+1) \perp r$ y, por la hipótesis inductiva, $e_i(r) \perp e_n(p \restriction n+1)$.

Afirmamos que $e_{n+1}(p) \perp e_i(r)$. En caso contrario, existiría $s \leqslant e_{n+1}(p), e_i(r)$. De donde, por (v), $s \leqslant e_i(r), e_n(p \restriction n+1)$, lo cual es una contradicción a lo probado en el párrafo anterior. □

Finalmente nos encontramos en posesión de todos los elementos necesarios para probar el teorema anunciado al inicio de la sección.

**Teorema 2.28.** *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial numerable y sin átomos, entonces $\omega^{<\omega} \leqslant_d \mathbb{P}$.*

*Demostración.* Consideremos los elementos de la sucesión $\langle e_n : n \in \omega \rangle$, la cual queda garantizada por el Lema 2.27.

Sea $e := (\bigcup_{n\in\omega} e_n) \cup \{(\emptyset, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})\}$.

Observamos que $\operatorname{dom} e = \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{dom} e_n \cup \{\emptyset\} = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{Q}_n \cup \{\emptyset\} = \omega^{<\omega}$. Ahora bien, $\operatorname{Im}(e) = \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{Im}(e_n) \cup \{\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\} = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cup \{\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\}$.

Afirmamos que $e : \omega^{<\omega} \to \mathbb{P}$ es un encaje denso.

En efecto, $e$ es una función, pues para cualesquiera $n, m \in \omega$, $n \neq m$ implica que $\mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m = \emptyset$. Esto se verifica, pues si existe $p \in \mathbb{Q}_n \cap \mathbb{Q}_m$, entonces, por definición de $\mathbb{Q}_n$ y $\mathbb{Q}_m$, se tiene que $\operatorname{dom} p = n+1$ y $\operatorname{dom} p = m+1$, con lo cual cual $n = m$.

Sea $p \in \mathbb{P}$ y veamos que $\operatorname{Im}(e)$ es densa en $\mathbb{P}$. Recordemos que previo al Lema 2.26 fijamos una enumeración para $\mathbb{P}$. Así, $p = p_k$ para alguna $k \in \omega$ . De acuerdo al Lema 2.26-(2), existe $a \in A_k$ tal que $a \leqslant p_k$. Pero entonces $a \in \operatorname{Im}(e)$ y $a \leqslant p_k$.

Sean $p, q \in \omega^{<\omega}$ tales que $p \leqslant q$ y probemos que $e$ preserva el orden. Empecemos con los casos triviales. Si $q = \emptyset$, entonces $e(p) \leqslant e(q)$, pues $e(q) := \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$. Si se da el caso $q \neq \emptyset$ y $p = q$, entonces $e(p) = e(q)$ y se cumple el resultado. Supongamos entonces que $p < q$ con $q \neq \emptyset$. Sean $\operatorname{dom} p = m+1$ y $\operatorname{dom} q = i+1$. Como $p < q$, se tiene que $i+1 < m+1$, de donde $i < m$. Haciendo $n := m-1$, obtenemos $i \leqslant n$ y $n+1 = m$. Así, por el Lema 2.27-(2), $e_m(p) \leqslant e_i(q)$. Pero por la definición de $e$, $e(p) = e_m(p)$ y $e(q) = e_i(q)$. Por tanto, $e(p) \leqslant e(q)$.

Probemos que $e$ preserva la incompatibilidad. Sean $p, q \in \omega^{<\omega}$ tales que $p \perp q$. Observemos que en ningún caso $p$ y $q$ son la función $\emptyset$, pues para toda $s \in \omega^{<\omega}$, $s \leqslant \emptyset$ y en particular, $s \mid \emptyset$. Así, existen $m, i \in \omega$ tales que $p \in \mathbb{Q}_m$ y $q \in \mathbb{Q}_i$. Si $m = i$, ocurre que $p, q \in \mathbb{Q}_m$, entonces por el Lema 2.27-(1), $e_m(p) \neq e_m(q)$ y $e_m(p), e_m(q) \in A_m$. De donde $e_m(p) \perp e_m(q)$, es decir, $e(p) \perp e(q)$.

Ahora bien, si $m \neq i$, supongamos sin perder la generalidad que $m > i$. Así, haciendo $n := m - 1 \geqslant i$ se tiene que $n + 1 = m$, con lo que $p \in \mathbb{Q}_{n+1}$ y $q \in \mathbb{Q}_i$ con $i \leqslant n$. Por el Lema 2.27-(3), $e_m(p) \perp e_i(q)$, es decir, $e(p) \perp e(q)$. $\square$

Ahora bien, órdenes del tipo $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ y $\mathrm{Fn}(\omega, \omega)$ son numerables y no atómicos. Esto último se verifica, pues si, por ejemplo, $p \in \mathrm{Fn}(\omega, 2)$, entonces dado que $|p| < \omega$ y $\mathrm{dom}\, p \subseteq \omega$, es posible tomar $n \in \omega \setminus \mathrm{dom}\, p$. De este modo, $r = p \cup \{(n, 0)\}$ y $q = p \cup \{(n, 1)\}$ son ambas extensiones de $p$ en $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$, incompatibles entre sí. El mismo argumento permite ver que $\mathrm{Fn}(\omega, \omega)$ es una noción no atómica. Asimismo, $2^{<\omega}$ es un orden parcial numerable sin átomos (véanse los comentarios posteriores a la Definición 1.35). Por tanto, es un corolario del teorema anterior que todos los órdenes de esta naturaleza producen la misma extensión genérica que $\omega^{<\omega}$.

Es interesante observar que en el Teorema 2.28 no es posible prescindir de la hipótesis de la numerabilidad para $\mathbb{P}$.

Para verificar esta observación consideremos $\kappa$ un cardinal infinito y los órdenes $2^{<\omega}$ y $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$. Pensamos a $2^{<\omega}$ como suborden de $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$.

Observemos que en este caso, la inclusión $i : 2^{<\omega} \to \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ es un encaje completo. La función $i$ preserva el orden y la incompatibilidad trivialmente. Recurriendo a la equivalencia del Teorema 2.3, verifiquemos que todo elemento en $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$ admite una $i$-reducción a $2^{<\omega}$. Sea $q \in \mathrm{Fn}(\kappa, 2)$. De este modo tenemos que $|\omega \cap \mathrm{dom}\, q| < \omega$. En otras palabras, existe $n \in \omega$ de tal suerte que $(\omega \cap \mathrm{dom}\, q) \subseteq n$. Afirmamos que la función $r : n \to 2$ definida por:

$$r(m) = \begin{cases} q(m), & \text{si } m \in \mathrm{dom}\, q \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una $i$-reducción de $q$ a $2^{<\omega}$. Sea $p \leqslant r$, es decir, $r \subseteq p$. Probemos que $i(p) = p$ es compatible con $q$, es decir, que $p \cup q$ es una función. Para tal efecto tomemos $m \in$

$\operatorname{dom} p \cap \operatorname{dom} q$. Así, $m \in \operatorname{dom} p \in \omega$ y $m \in \operatorname{dom} q$, lo que implica que $r(m) = q(m)$. Ahora bien, como $r \subseteq p$, se sigue que $p(m) = r(m)$ y, por tanto, $p(m) = q(m)$, lo que prueba la afirmación.

Por lo anterior, $2^{<\omega} \leqslant_c \operatorname{Fn}(\kappa, 2)$. De este modo, el Teorema 2.4 garantiza que la extensión genérica dada por $\operatorname{Fn}(\kappa, 2)$ contiene a la extensión dada por $2^{<\omega}$. Así, dado que la Proposición 1.37 establece que al hacer forcing vía $2^{<\omega}$ se agrega un nuevo real, se tiene que la noción de forcing $\operatorname{Fn}(\kappa, 2)$ hace lo propio.

Hagamos $\mathbb{P} := \{p : p \subseteq \kappa \times 2 \;\&\; p \text{ es función } \&\; |p| \leqslant \omega\}$, y $\mathbb{Q} := \operatorname{Fn}(\kappa, 2)$, ambos ordenados por la contención inversa.

En lo que resta de nuestro ejemplo supondremos que $\kappa^\omega = \kappa$. Esta propiedad la tiene, por ejemplo, el continuo $\mathfrak{c}$. En otras palabras: si $\kappa = \mathfrak{c} = 2^\omega$, entonces $\kappa^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^\omega = \mathfrak{c}$.

La prueba de la Proposición 1.38 se adapta fácilmente para probar que $\mathbb{P}$ no añade nuevas funciones de $\omega$ en 2.

Observemos ahora que $|\mathbb{P}| = \kappa = |\mathbb{Q}|$. Notemos que $\{\{(\alpha, 0)\} : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto tanto de $\mathbb{P}$ como de $\mathbb{Q}$. Así, tanto $\mathbb{P}$ como $\mathbb{Q}$ tienen cardinalidad al menos $\kappa$. Ahora bien, $\mathbb{P} \subseteq [\kappa \times 2]^{\leqslant\omega}$. En suma, $|\mathbb{P}| \leqslant |[\kappa \times 2]^{\leqslant\omega}| = |[\kappa]^{\leqslant\omega}| = \kappa^\omega = \kappa$.

Por otro lado, como $\mathbb{Q} \subseteq [\kappa \times 2]^{<\omega}$, se tiene que $|\mathbb{Q}| \leqslant |[\kappa \times 2]^{<\omega}| \leqslant \kappa$.

Veamos en última instancia que tanto $\mathbb{P}$ como $\mathbb{Q}$ carecen de átomos: si $p \in \mathbb{P}$, podemos tomar $\alpha \in \kappa \setminus \operatorname{dom} p$. Así, $r = p \cup \{(\alpha, 0)\}$ y $q = p \cup \{(\alpha, 1)\}$ son ambas extensiones de $p$ en $\mathbb{P}$, incompatibles entre sí. El mismo argumento prueba que $\mathbb{Q}$ no tiene átomos.

En suma, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos órdenes parciales no numerables y sin átomos, ninguno de ellos encajado densamente en el otro, pues de ocurrir lo contrario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ producirían las mismas extensiones genéricas, hecho que no es posible puesto que $\mathbb{P}$ no añade nuevas funciones de $\omega$ en 2 mientras que $\mathbb{Q}$ sí lo hace.

## CAPÍTULO 3: APLICACIONES

En este capítulo introducimos la composición de dos nociones de forcing. Veremos que todo orden parcial se encaja completamente en la composición de sí mismo con cualquier otra noción de forcing. Se estudian ejemplos de interés para la composición de un orden parcial consigo mismo y se analiza la interacción de esta composición con su cociente módulo un filtro genérico (véase la Definición 2.6). Finalmente, se define un orden parcial separativo y se dan dos formas distintas de encajar densamente todo orden parcial en dos nociones separativas, no necesariamente isomorfas entre sí.

### 3.1 Composición

En esta sección, nos proponemos responder una pregunta que, tal como lo hace Saharon Shelah en [8], puede gestarse como sigue: supongamos que empezamos con un modelo $V$ y vía una noción de forcing $\mathbb{P}$, lo extendemos a $V[G]$, donde $G$ es un subconjunto genérico de $\mathbb{P}$, entonces tomamos una noción de forcing $\mathbb{Q}$ en $V[G]$ y extendemos $V[G]$ a $V[G][H]$, donde $H$ es un filtro genérico sobre $\mathbb{Q}$. ¿Es posible obtener la extensión $V[G][H]$ a partir de $V$ mediante una sola extensión de forcing? Los conceptos y resultados presentados a continuación servirán para dar respuesta positiva a nuestra pregunta.

**Definición 3.1.** Sea $\mathbb{P} \in V$ un orden parcial.

Diremos que la terna de $\mathbb{P}$-nombres $(\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\leqslant}, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in V$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un orden parcial si $\mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$ y

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash [(\mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}} \in \dot{\mathbb{Q}}) \ \& \ (\dot{\leqslant} \text{ es un orden parcial para } \dot{\mathbb{Q}} \text{ cuyo elemento máximo es } \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})].$$

Por simplicidad, únicamente escribiremos $\dot{\mathbb{Q}}$ para referirnos al $\mathbb{P}$-nombre dado por la tripleta $(\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\leqslant}, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$ de la definición anterior. En este contexto, entenderemos por $\dot{\mathbb{Q}} \in V$ que $\{\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\leqslant}, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}\} \subseteq V$. Por otro lado, $\mathbb{1}$ denotará el elemento máximo $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$.

**Definición 3.2.** Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial en $V$ y $\dot{\mathbb{Q}} \in V$ el $\mathbb{P}$-nombre de un orden parcial. Definimos $\mathbb{P}$ compuesto con $\dot{\mathbb{Q}}$ como:

$$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} = \{(p, \dot{x}) : p \in \mathbb{P} \ \& \ \dot{x} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}} \ \& \ p \Vdash \dot{x} \in \dot{\mathbb{Q}}\}.$$

Por otro lado, dados $(p, \dot{x}), (q, \dot{y}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ definimos:

$$(p, \dot{x}) \leqslant (q, \dot{y}) \text{ sii } p \leqslant_{\mathbb{P}} q \text{ y } p \Vdash \dot{x} \mathrel{\dot{\leqslant}} \dot{y}.$$

Finalmente: $\mathbb{1}_{\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}} = (\mathbb{1}, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$.

No perdamos de vista que $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \in V$, pues tanto $\mathbb{P}$ como $\dot{\mathbb{Q}}$ son elementos de $V$ y, de acuerdo con el Teorema 1.31-(1), la noción $\Vdash$ es equivalente a una noción que puede ser relativizada a $V$.

*Observación.* Para todo $p \in \mathbb{P}$, se tiene que $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Esto ocurre, pues de acuerdo con la Definición 3.1, $\mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$ y $\mathbb{1} \Vdash \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}} \in \dot{\mathbb{Q}}$. Como $p \leqslant \mathbb{1}$, se sigue del Lema 1.30-(1) que $p \Vdash \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}} \in \dot{\mathbb{Q}}$, lo que verifica la observación.

Veamos a continuación que si al valuar un $\mathbb{P}$-nombre respecto de un filtro genérico $G$, se tiene que dicha valuación es un elemento de la noción $\mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}_G \in V[G]$, entonces hay una pareja en la composición $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ cuya segunda coordenada se ve fozada por la primera a ser igual al $\mathbb{P}$-nombre del que partimos.

**Lema 3.3.** *Sean $\mathbb{P}$ y $\dot{\mathbb{Q}}$ como en la definición anterior. Si $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}_G$ y $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$ satisface que $\dot{q}_G \in \mathbb{Q}$, entonces existe $(p, \dot{q}_0) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ de tal modo que $p \in G$ y $p \Vdash \dot{q} = \dot{q}_0$.*

*Demostración.* Por el Teorema 1.31-(2), para alguna $r \in G$, se tiene que $r \Vdash \exists x(x \in \dot{\mathbb{Q}} \ \& \ x = \dot{q})$. Por el Lema 1.32, existen $p \in G$ y $\dot{q}_0 \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$ de modo que $p \leqslant r$ y $p \Vdash \dot{q}_0 = \dot{q}$. Así, de acuerdo con la Definición 3.2, $(p, \dot{q}_0) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. $\square$

Siempre que el contexto sea claro, simplificaremos la escritura de los siguientes resultados escribiendo $\leqslant$ en lugar de $\dot{\leqslant}$.

**Proposición 3.4.** *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $\dot{\mathbb{Q}} \in V$ es el $\mathbb{P}$-nombre de un orden parcial, entonces $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es un orden parcial.*

*Demostración.* Por un lado, $(p,\dot{x}) \leqslant (p,\dot{x})$ porque $p \leqslant p$ y $p \Vdash \dot{x} \leqslant \dot{x}$. Por otro lado, si $(p,\dot{x}) \leqslant (q,\dot{y})$ y $(q,\dot{y}) \leqslant (r,\dot{z})$, entonces $p \leqslant q$, $p \Vdash \dot{x} \leqslant \dot{y}$, $q \leqslant r$ y $q \Vdash \dot{y} \leqslant \dot{z}$. Así, $p \leqslant r$ y $p \Vdash \dot{y} \leqslant \dot{z}$. De donde, $p \Vdash \dot{x} \leqslant \dot{z}$. □

**Definición 3.5.** Sea $i : \mathbb{P} \to \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ la función definida mediante $i(p) = (p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$.

Observemos que $i \in V$. Esto se sigue del hecho de que $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \in V$. Por lo que resta de la sección, $i$ será siempre la función de la definición anterior. En esta ruta, en el siguiente lema se concluye que vía la función $i$, todo orden parcial se encaja completamente en la composición de la que hemos estado hablando.

**Lema 3.6.** *Sea $\mathbb{P} \in V$ un orden parcial y $\dot{\mathbb{Q}} \in V$ el $\mathbb{P}$-nombre para un orden parcial. Entonces:*

1. *Para cualesquiera $p,q \in \mathbb{P}$, $p \leqslant q$ si y sólo si $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \leqslant (q, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$.*
2. *$i(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}}$.*
3. *Si $(p,\dot{x}),(q,\dot{y}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ y $p \perp q$, entonces $(p,\dot{x}) \perp (q,\dot{y})$.*
4. *Para cualesquiera $(p,\dot{x}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ y $q \in \mathbb{P}$, $p \perp q$ si y sólo si $(p,\dot{x}) \perp (q, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$.*
5. *Para cualesquiera $p,q \in \mathbb{P}$, $p \perp q$ si y sólo si $i(p) \perp i(q)$.*
6. *La función $i : \mathbb{P} \to \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es un encaje completo.*

*Demostración.* (1). Sean $p,q \in \mathbb{P}$. Si por un lado, $p \leqslant q$, puesto que $p \Vdash \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}} \leqslant \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}$, se sigue entonces que $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \leqslant (q, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$. Si por otro lado, $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \leqslant (q, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$, se sigue de la Definición 3.2 que $p \leqslant q$.

(2). De acuerdo con las Definiciones 3.5 y 3.2, $i(\mathbb{1}) = (\mathbb{1}, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}}$.

(3). Lo hacemos por contrapositiva. Supongamos que $(p,\dot{x}) \mid (q,\dot{y})$. Se tiene entonces que $(r,\dot{z}) \leqslant (p,\dot{x}),(q,\dot{y})$ para alguna $(r,\dot{z}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Luego, $p \mid q$.

(4). Como $(q, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, la implicación de izquierda a derecha se sigue del inciso (3). Probemos la implicación restante por contrapositiva. Así, si $r \leqslant p,q$ para cierta $r \in \mathbb{P}$, se sigue del Lema 1.30-(1) que $r \Vdash \dot{x} \in \dot{\mathbb{Q}}$ y, por tanto, $(r,\dot{x}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Ocurre también que $r \Vdash \dot{x} \leqslant \dot{x}$ y $r \Vdash \dot{x} \leqslant \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}$. En consecuencia, $(r,\dot{x}) \leqslant (p,\dot{x}),(q, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$.

(5). Se sigue del inciso (4) considerando las parejas $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}), (q, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$.

(6). De acuerdo con los incisos (1) y (5), la función $i$ preserva el orden y la incompatibilidad. Por tanto, $i : \mathbb{P} \to \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es un encaje

Probemos que $i$ es un encaje completo utilizando la equivalencia del Teorema 2.3. Sea $(p, \dot{x}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ arbitrario. Consideremos cualquier $q \leqslant p$. En particular, $q \mid p$. De donde, por el inciso (4), se tiene que $(p, \dot{x}) \mid i(q)$, es decir, $p$ es una $i$-reducción de $(p, \dot{x})$ a $\mathbb{P}$. □

Nos proponemos ahora hacer un análisis de las conexiones que hay entre los filtros genéricos de $\mathbb{P}$ y $\dot{\mathbb{Q}}$ con respecto a los de $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$.

**Definición 3.7.** Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial y $\dot{\mathbb{Q}}$ el $\mathbb{P}$-nombre de un orden parcial. Si $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y $H \subset \dot{\mathbb{Q}}_G$, definimos

$$G * H = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G \ \& \ \dot{q}_G \in H\}.$$

Una primera muestra que nos arroja el análisis emprendido es que los filtros genéricos de $\mathbb{P}$ y $\dot{\mathbb{Q}}$ quedan determinados por su composición, como lo refleja el siguiente resultado.

**Lema 3.8.** *Sean $\mathbb{P} \in V$, un orden parcial, y $\dot{\mathbb{Q}} \in V$, el $\mathbb{P}$-nombre de un orden parcial. Sea $G$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y sea $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}_G$. Si $H$ es un filtro $(V[G], \mathbb{Q})$-genérico, entonces:*

1. $G = \{p : \exists\ \dot{q}\ ((p, \dot{q}) \in G * H)\}$.

2. $H = \{\dot{q}_G : \exists\ p\ ((p, \dot{q}) \in G * H)\}$.

*Demostración.* (1). Si $p \in G$, se tiene entonces que $i(p) = (p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in G * H$, ya que $(\mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})_G \in H$. Observe el lector que este mismo argumento prueba que $p \in i^{-1}[G * H]$, es decir, $G \subseteq i^{-1}[G * H]$. La contención restante se cumple pues dado $p \in \mathbb{P}$ tal que $(p, \dot{q}) \in G * H$ para cierto $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$, se sigue de la Definición 3.7 que $p \in G$.

(2). Por un lado, si $q \in H \subseteq \mathbb{Q}$, entonces $q = \dot{q}_G$ para algún $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$. Así, por el Lema 3.3, existe $(p_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ de modo que $p_0 \in G$ y $p \Vdash \dot{q}_0 = \dot{q}$. Pero entonces $(\dot{q}_0)_G = q \in H$, por lo que de acuerdo con la Definición 3.7, $(p_0, \dot{q}_0) \in G * H$, lo que prueba la primera contención. Por otro lado, si $x \in \{\dot{q}_G : \exists\ p\ ((p, \dot{q}) \in G * H)\}$, entonces existe $(p, \dot{q}) \in G * H$ tal que $\dot{q}_G = x$. Como $\dot{q}_G \in H$, se tiene el resultado. □

En el siguiente teorema se presenta esta situación: en $V[G]$, la extensión genérica dada por $\mathbb{P}$, se tiene que $\dot{\mathbb{Q}}_G = \mathbb{Q}$ es un orden parcial y, por ende, tiene sentido hacer forcing con $\mathbb{Q}$ sobre $V[G]$. Denotemos por $V[G][H]$ a esta última extensión de forcing, donde $H$ es un filtro genérico sobre $\mathbb{Q}$. Lo que afirma nuestro teorema es que $V[G][H]$ coincide con la extensión dada por la composición $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. De esta manera respondemos a la pregunta formulada al inicio de la sección, es decir, $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es la noción de forcing en $V$ que se buscaba.

**Teorema 3.9.** *Sean $\mathbb{P}, \dot{\mathbb{Q}}, G$ y $H$ como en el lema anterior. Entonces:*

1. *$G * H$ es un filtro $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérico.*

2. *$V[G * H] = V[G][H]$.*

*Demostración.* Probemos que $G * H$ es un filtro. Sean $(p_0, \dot{q}_0), (p_1, \dot{q}_1) \in G * H$. Entonces $p_0, p_1 \in G$ y $(\dot{q}_0)_G, (\dot{q}_1)_G \in H$. Así, existen $r \in G$ y $x \in H$ de modo que $r \leqslant p_0, p_1$ y $x \leqslant (\dot{q}_0)_G, (\dot{q}_1)_G$. Por el Lema 3.8-(2), existe $(p, \dot{q}) \in G * H$ de tal modo que $x = \dot{q}_G$. De esto último, según la Definición 3.7, se tiene que $p \in G$. Ahora bien, de acuerdo con el Teorema 1.31-(2), existe $t \in G$ tal que $t \Vdash \dot{q} \leqslant \dot{q}_0, \dot{q}_1$. Por la Proposición 1.11, existe $s \in G$ tal que $s \leqslant r, p, t$. Observemos que como $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, por la Definición 3.2, $\dot{q} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$ y $p \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$. Por lo que según el Lema 1.30-(1), $s \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$, lo cual garantiza que $(s, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Ahora bien, como $s \leqslant t$, se sigue del Lema 1.30-(1) que $s \Vdash \dot{q} \leqslant \dot{q}_0, \dot{q}_1$. El que $\dot{q}_G \in H$, garantiza que $(s, \dot{q}) \in G * H$ y $(s, \dot{q}) \leqslant (p_0, \dot{q}_0), (p_1, \dot{q}_1)$.

Supongamos ahora que $(p_0, \dot{q}_0) \in G * H$ y $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ son tales que $(p_0, \dot{q}_0) \leqslant (p, \dot{q})$. Entonces, de acuerdo con la Definición 3.2, $p_0 \leqslant p$ y $p_0 \Vdash \dot{q}_0 \leqslant \dot{q}$. Como $p_0 \in G$, se sigue que $p \in G$ y $(\dot{q}_0)_G \leqslant (\dot{q})_G$. Por hipótesis, $(\dot{q}_0)_G \in H$ y, por tanto, $\dot{q}_G \in H$. Luego, $(p, \dot{q}) \in G * H$.

Probemos la genericidad de $G * H$. Sea $D \in V$ cualquier subconjunto denso de $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$.

Comprobemos primero que $E = \{\dot{q}_G : \exists\, p \in G\ ((p, \dot{q}) \in D)\}$ es un subconjunto denso en $\mathbb{Q}$. Sea $q \in \mathbb{Q}$ arbitrario. Así, $q = \dot{s}_G$ para alguna $\dot{s} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$. Se desprende del Lema 3.3 que existe $(p_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ de modo que $p_0 \in G$ y $p_0 \Vdash \dot{s} = \dot{q}_0$. Definimos

$$E_1 = \{p \in \mathbb{P} : \exists\, x (p \Vdash x \leqslant \dot{q}_0 \;\&\; (p, x) \in D)\}.$$

Afirmamos que $E_1$ es un subconjunto denso por debajo de $p_0$. Sea $r \leqslant p_0$. Según el Lema 1.30-(1), $r \Vdash \dot{q}_0 \in \dot{\mathbb{Q}}$. En consecuencia, $(r, \dot{q}_0) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Dada la densidad de $D$ en

$\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Q}}$, se tiene que $(p, x) \leqslant (r, \dot{q}_0)$ para cierta $(p, x) \in D$. Según la Definición 3.2, $p \Vdash x \leqslant \dot{q}_0$. Por tanto, $p \leqslant r$ y $p \in E_1$.

Ahora bien, $E_1 \in V$ porque $\mathbb{P}, D, \dot{q}_0 \in V$ ($\dot{q}_0 \in V$, ya que $\dot{q}_0 \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}} \in V$ y $V$ es transitivo). Como $p_0 \in G$, se desprende del Lema 1.27-(2) que $G \cap E_1 \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap E_1$. Entonces $p \in G$ y para cierta $x$, $p \Vdash x \leqslant \dot{q}_0$ y $(p, x) \in D$. Notemos que como $D \subseteq \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, se tiene que $x = (\dot{q}_1)_G$ para cierta $\dot{q}_1 \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$. Por tanto, $(\dot{q}_1)_G \leqslant (\dot{q}_0)_G = \dot{s}_G = q$. En suma $(\dot{q}_1)_G \leqslant q$ y $(\dot{q}_1)_G \in E$, lo que prueba la densidad de $E$.

Se tiene que $E \in V[G]$, pues $G \in V[G]$ y $D \in V \subseteq V[G]$. Dada la genericidad de $H$, se sigue que $H \cap E \neq \emptyset$. De donde, existe $(p, \dot{q}) \in D$ con $\dot{q}_G \in H$ y $p \in G$. Luego, $(p, \dot{q}) \in D \cap (G * H)$, lo que prueba la genericidad de $G * H$.

Argumentemos por último que se cumple la igualdad del inciso (2). Por un lado, $G \in V[G] \subseteq V[G][H]$ y $H \in V[G][H]$. Por tanto, $G * H \in V[G][H]$. Se sigue entonces del Lema 1.21 que $V[G * H] \subseteq V[G][H]$. Por otro lado, hemos probado que $G * H$ es un filtro $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérico y como el encaje $i : \mathbb{P} \to \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es completo (véase el Lema 3.6), se sigue del Teorema 2.4 que $i^{-1}[G * H]$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. Dado que $G \subseteq i^{-1}[G * H]$ (véase la prueba del Lema 3.8-(1)), el Lema 1.28 garantiza que $G = i^{-1}[G * H]$. De este modo, el Teorema 2.4 establece que $V[G] \subseteq V[G * H]$. Luego, $G \in V[G * H]$, pues $G \in V[G]$. Además, según el Lema 3.8, $H = \{\dot{q}_G : \exists\, p\ ((p, \dot{q}) \in G * H)\}$ y, como $G * H \in V[G * H]$, se tiene que $H \in V[G * H]$. Por tanto, siguiendo el Lema 1.21, $V[G][H] \subseteq V[G * H]$. Esto prueba la igualdad de las extensiones. □

El resultado anterior puede ilustrarse en el siguiente diagrama, donde en primera instancia se tiene la extensión de forcing, $V[G]$, dada por $\mathbb{P} \in V$. En segunda instancia, se tiene que $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}_G$ es un orden parcial y $H \subseteq \mathbb{Q}$ es un filtro $(V[G], \mathbb{Q})$-genérico y por tanto es posible obtener $V[G][H]$. Tal como ha sido probado, la composición de $G * H$ nos provee de un filtro $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérico de tal modo que al hacer forcing vía $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ se obtiene la extensión genérica, $V[G * H]$, la cual coincide con $V[G][H]$. No pierda de vista el lector que la afirmación previa se cumple ya que $\mathbb{P} \leqslant_c \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$.

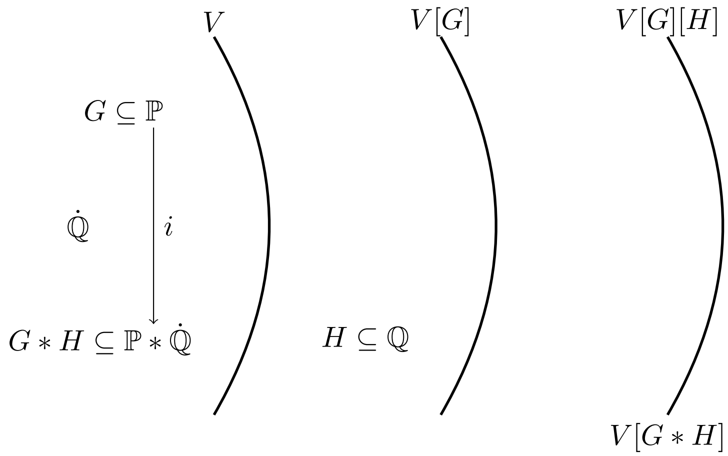



Diagrama asociado al Teorema 3.9

Una forma del recíproco del teorema anterior se presenta a continuación. Este resultado permitirá ver que todos los filtros genéricos para $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ son de la forma $G * H$ para ciertos filtros $G$ y $H$.

**Teorema 3.10.** *Sea $\mathbb{P} \in V$ un orden parcial y sea $\dot{\mathbb{Q}} \in V$ un $\mathbb{P}$-nombre para un orden parcial. Si $K$ es un filtro $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérico, $H = \{\dot{q}_G : \exists\ r\ ((r, \dot{q}) \in K)\}$ y $G = i^{-1}[K]$, entonces:*

1. *$G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico.*

2. *$H$ es un filtro $(V[G], \mathbb{Q})$-genérico, donde $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}_G$.*

3. *$K = G * H$.*

4. *$V[K] = V[G][H]$.*

*Demostración.* El Lema 3.6-(6) establece que $i$ es un encaje completo. Así, por el Teorema 2.4, se tiene que $G = i^{-1}[K]$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico.

Verifiquemos que $H$ es un filtro. Sean $p_0, p_1 \in H$. Entonces existen $(r_0, \dot{q}_0), (r_1, \dot{q}_1) \in K$ de modo que $\dot{q}_0, \dot{q}_1 \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$, $(\dot{q}_0)_G = p_0$ y $(\dot{q}_1)_G = p_1$. La Proposición 1.11 garantiza que existe $(r, \dot{q}) \in K$ tal que $(r, \dot{q}) \leqslant (r_0, \dot{q}_0), (r_1, \dot{q}_1)$. Así, $r \leqslant r_0, r_1$ y además $r \Vdash \dot{q} \leqslant \dot{q}_0$ y $r \Vdash \dot{q} \leqslant \dot{q}_1$. Se tiene también que $(r, \dot{q}) \leqslant (r, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$. Por ende $i(r) = (r, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in K$, de donde $r \in G$. Por lo tanto, $\dot{q}_G \in H$ y $\dot{q}_G \leqslant (\dot{q}_0)_G, (\dot{q}_1)_G$.

Sean $p \in H$ y $q \in \mathbb{Q}$ de modo que $p \leqslant q$. Así, existen $(r, \dot{q}_0) \in K$ y $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$ de manera que $\dot{q}_0, \dot{q} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$, $(\dot{q}_0)_G = p$ y $\dot{q}_G = q$. Según el Teorema 1.31-(2), para alguna $p_0 \in G$ ocurre que $p_0 \Vdash \dot{q}_0, \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$ y también que $p_0 \Vdash \dot{q}_0 \leqslant \dot{q}$. Observemos que como $p_0 \in G = i^{-1}[K]$, se tiene que $i(p_0) = (p_0, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in K$. Sea $(r_1, \dot{q}_1) \in K$ tal que $(r_1, \dot{q}_1) \leqslant (r, \dot{q}_0), (p_0, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$. De acuerdo a la Definición 3.2, se tiene que $r_1 \Vdash \dot{q}_1 \leqslant \dot{q}_0$ y $r_1 \leqslant p_0$. De esta última desigualdad y según el Lema 1.30-(1), se tiene que $r_1 \Vdash \dot{q}_0 \leqslant \dot{q}$ y $r_1 \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$. En consecuencia, $r_1 \Vdash \dot{q}_1 \leqslant \dot{q}$ y $(r_1, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Pero entonces $(r_1, \dot{q}_1) \leqslant (r_1, \dot{q})$. De donde, $(r_1, \dot{q}) \in K$. Luego, $\dot{q}_G = q \in H$.

Probemos la genericidad de $H$. Sea $D \in V[G]$ un subconjunto denso de $\dot{\mathbb{Q}}_G$. Así, existe $\dot{D} \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\dot{D}_G = D$. Entonces, por el Teorema 1.31-(2), para alguna $p \in G$, ocurre que $p \Vdash \dot{D}$ es denso en $\dot{\mathbb{Q}}$. Definimos

$$E = \{(r, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : r \Vdash \dot{q} \in \dot{D}\}.$$

Afirmamos que $E$ es un conjunto denso por debajo de $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$. Sea $(p_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ de modo que $(p_0, \dot{q}_0) \leqslant (p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$. Así, $p_0 \leqslant p$, por lo que, de acuerdo con el Lema 1.30-(1), se tiene que $p_0 \Vdash \dot{D}$ es denso en $\dot{\mathbb{Q}}$ y como también $p_0 \Vdash \dot{q}_0 \in \dot{\mathbb{Q}}$, se sigue que $p_0 \Vdash \exists x(x \in \dot{\mathbb{Q}}$ & $x \in \dot{D}$ & $x \leqslant \dot{q}_0)$. Por el Lema 1.32-(1), existen $r \in G$ y $\dot{q}_1 \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$ tales que $r \leqslant p_0$ y $r \Vdash (\dot{q}_1 \in \dot{D}$ & $\dot{q}_1 \leqslant \dot{q}_0)$. Se sigue entonces del Lema 1.30-(2) que $r \Vdash \dot{q}_1 \in \dot{D} \subseteq \dot{\mathbb{Q}}$ y $r \Vdash \dot{q}_1 \leqslant \dot{q}_0$. En suma, $(r, \dot{q}_1) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ es tal que $(r, \dot{q}_1) \in E$ y $(r, \dot{q}_1) \leqslant (p_0, \dot{q}_0)$, lo que prueba nuestra afirmación.

Puesto que $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \in V \subseteq V[G]$ y $D \in V[G]$, se tiene que $E \in V[G]$. Ahora bien, $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in K$ y $E$ es denso por debajo de $(p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$, por lo que de acuerdo con el Lema 1.27-(2), $K \cap E \neq \emptyset$. Sea $(r, \dot{q}) \in K \cap E$. Entonces $(r, \dot{q}) \in K$ y como $(r, \dot{q}) \leqslant (r, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$, se tiene que $(r, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) \in K$, lo que implica que $r \in G$. Se tiene también que $\dot{q}_G \in H$ mientras que $(r, \dot{q}) \in E$ implica que $r \Vdash \dot{q} \in \dot{D}$. Luego, $\dot{q}_G \in D \cap H$.

Probaremos ahora el inciso (3). Si $(p, \dot{q}) \in K$, entonces $p \in G$, pues $G = i^{-1}[K]$ (recordemos que $(p, \dot{q}) \leqslant (p, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}) = i(p)$ y, por ende, $i(p) \in K$, luego, $p \in G$). Puesto que $K \subseteq \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, se cumple que $\dot{q} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$. Así, por la definición de $H$, se tiene que $\dot{q}_G \in H$. Por tanto, $K \subseteq G * H$. Pero entonces, como el Teorema 3.9 establece que $G * H$ es un filtro $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérico, se sigue del Lema 1.28 que $K = G * H$.

Finalmente, la igualdad del inciso (4) se cumple ya que de acuerdo con el inciso (3),

$K = G * H$. Luego, el Teorema 3.9-(2) implica que $V[K] = V[G][H]$. $\square$

Ilustremos el teorema en turno. Del mismo modo que en el caso anterior, $\mathbb{P} \leqslant_c \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ y se tienen dos extensiones genéricas, la primera dada por $\mathbb{P}$ y la segunda obtenida vía $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}_G$. La afirmación central es que todo filtro $(V, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-genérico es en realidad un filtro de la forma $G * H$ y, por ende, el hacer forcing vía $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ devuelve la misma extensión producida en dos pasos, a saber, $V[G][H]$.

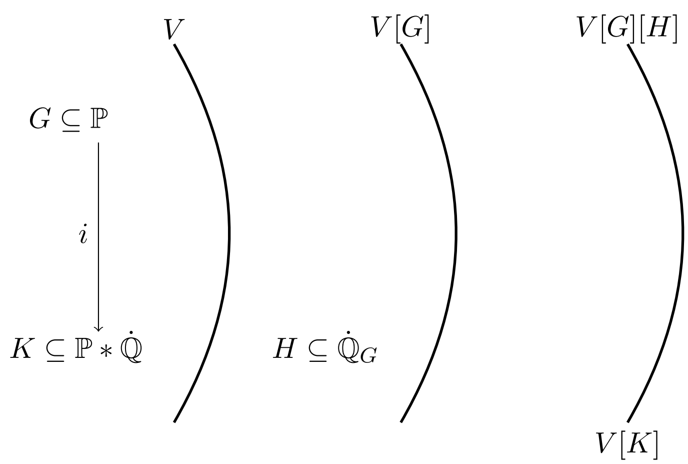



Diagrama asociado al Teorema 3.10

La semejanza entre los dos resultados anteriores y los teoremas 2.8 y 2.9, hace natural el preguntarse qué relación hay entre $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$ (donde el cociente se está realizando con respecto al encaje completo $i$) y la valuación respecto a $G$ de $\dot{\mathbb{Q}}$.

**Lema 3.11.** *Sea $\mathbb{P} \in V$ un orden parcial y sea $\dot{\mathbb{Q}} \in V$ el $\mathbb{P}$-nombre de un orden parcial. Si $G$ es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces* $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G\}$.

*Demostración.* Probemos la primera contención. Sea $(p, \dot{q}) \in (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$. Sea $s \in G$ arbitrario. Entonces, por definición, $i(s) = (s, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$ y $(p, \dot{q})$ son compatibles. Se tiene entonces que $s \mid p$. De donde, por el Lema 1.27-(1) aplicado a $E = \{p\} \in V$, se sigue que $G \cap E \neq \emptyset$. Luego, $p \in G$.

Probemos la contención restante. Sea $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ tal que $p \in G$. Sea $r \in G$ arbitrario y probemos que $i(r) = (r, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}})$ y $(p, \dot{q})$ son compatibles. Existe $s \in G$ tal que $s \leqslant p, r$. Como $p \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$ y $s \leqslant p$, por el Lema 1.30-(1), se tiene que $s \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$. Así, $(s, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$. Ahora bien, de acuerdo con la Definición 3.2 y por el Lema 1.30-(1), $s \Vdash \dot{q} \leqslant \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}$. Ocurre también que $s \Vdash \dot{q} \leqslant \dot{q}$. En suma, $(s, \dot{q}) \leqslant (r, \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}}), (p, \dot{q})$. □

El siguiente resultado garantiza que el cociente $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$ y $\dot{\mathbb{Q}}_G$ siempre producen la misma extensión genérica.

**Teorema 3.12.** *Sean $\mathbb{P}, \dot{\mathbb{Q}}$ y $G$ como en el lema anterior. Entonces $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G \leqslant_d \dot{\mathbb{Q}}_G$*

*Demostración.* Definimos $e : (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G \to \dot{\mathbb{Q}}_G$ mediante $e(p, \dot{q}) = \dot{q}_G$, para cada $(p, \dot{q}) \in (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$.

Sean $(p_1, \dot{q}_1), (p_2, \dot{q}_2) \in (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$ y probemos que $e$ es un encaje denso.

Supongamos que $(p_1, \dot{q}_1) \leqslant (p_2, \dot{q}_2)$. Entonces $p_1 \leqslant p_2$ y $p_1 \Vdash \dot{q}_1 \leqslant \dot{q}_2$. Como por el lema anterior $p_1 \in G$, se tiene que $(\dot{q}_1)_G \leqslant (\dot{q}_2)_G$, es decir, $e(p_1, \dot{q}_1) \leqslant e(p_2, \dot{q}_2)$.

Probemos que $e$ preserva la incompatiblidad. Supongamos que $(\dot{q}_1)_G \mid (\dot{q}_2)_G$. Existe $\dot{q}_0 \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $(\dot{q}_0)_G \in \dot{\mathbb{Q}}_G$ y $(\dot{q}_0)_G \leqslant (\dot{q}_1)_G, (\dot{q}_2)_G$. Por un lado, el Lema 3.3 garantiza que existe $(r_0, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ de modo que $r_0 \in G$ y $r_0 \Vdash \dot{q} = \dot{q}_0$. Por otro lado, se desprende del Teorema 1.31-(2) que para cierta $r_1 \in G$, $r_1 \Vdash \dot{q}_0 \leqslant \dot{q}_1, \dot{q}_2$. Tomemos $r \in G$, una extensión común de $r_0$ y $r_1$. Por el Lema 1.30-(1), se tiene entonces que $r \Vdash \dot{q} = \dot{q}_0$ y $r \Vdash \dot{q}_0 \leqslant \dot{q}_1, \dot{q}_2$, es decir, $r \Vdash \dot{q} \leqslant \dot{q}_1, \dot{q}_2$. Como $(p_1, \dot{q}_1), (p_2, \dot{q}_2) \in (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$, se sigue del Lema 3.11 que $p_1, p_2 \in G$. Según el Lema 1.11, para cierta $s \in G$ se tiene que $s \leqslant p_1, p_2, r$, por lo que, de acuerdo con el Lema 1.30-(2), $s \Vdash \dot{q} \leqslant \dot{q}_1, \dot{q}_2$. Puesto que $s \in G$, $\dot{q} \in \operatorname{dom} \dot{\mathbb{Q}}$ y $s \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}$, es consecuencia del Lema 3.11 que $(s, \dot{q}) \in (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$ y además $(s, \dot{q}) \leqslant (p_1, \dot{q}_1), (p_2, \dot{q}_2)$.

Comprobemos que $e$ es una función sobreyectiva y por consiguiente $e"(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$ es un subconjunto denso en $\dot{\mathbb{Q}}_G$. Si $q \in \dot{\mathbb{Q}}_G$, entonces existe $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$ de forma que $\dot{q}_G = q$. Aplicando el Lema 3.3, existe $(r, \dot{q}_0) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ tal que $r \in G$ y $r \Vdash \dot{q}_0 = \dot{q}$. Pero entonces, por el Lema 3.2, $(r, \dot{q}_0) \in (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$. Por tanto, $e(r, \dot{q}_0) = (\dot{q}_0)_G = q$. □

Es natural el preguntarse si $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})/G$ y $\dot{\mathbb{Q}}_G$ son isomorfos en general. Para mostrar que la respuesta a esta cuestión es negativa, necesitamos de una noción auxiliar que simplificará las cosas.

**Definición 3.13.** Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Decimos que $p$ es un predecesor inmediato de $q$ en $\mathbb{P}$ si y sólo si $p < q$ y no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $p < r < q$.

Mostremos ahora que ser predecesor inmediato se preserva bajo isomorfismos.

**Lema 3.14.** *Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos órdenes parciales. Si $f : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un isomorfismo y $p$ es un predecesor inmediato de $q$ en $\mathbb{P}$, entonces $f(p)$ es un predecesor inmediato de $f(q)$ en $\mathbb{Q}$.*

*Demostración.* Supongamos que $p$ es un predecesor inmediato de $q$ en $\mathbb{P}$. Entonces $p < q$. Dado que $f$ es isomorfismo, se tiene que $f(p) < f(q)$.

Por otro lado, si $f(p) < r < f(q)$ para alguna $r \in \mathbb{Q}$, tendríamos que $p < f^{-1}(r) < q$, es decir, $p$ no sería un predecesor inmediato de $q$. $\square$

Dado un orden parcial $\mathbb{P} \in V$, cuando nos refiramos a $\check{\mathbb{P}}$ como el $\mathbb{P}$-nombre canónico de un orden parcial entenderemos que nos estamos refiriendo a la terna $(\check{\mathbb{P}}, \check{\leqslant}, \check{\mathbb{1}}_{\mathbb{P}})$.

**Lema 3.15.** *Sean $\mathbb{P}$ un orden parcial y $\check{\mathbb{P}}$ su $\mathbb{P}$-nombre canónico. Entonces:*

1. $\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}} = \{(p, \check{q}) : p, q \in \mathbb{P}\}$.

2. *Para cualesquiera $(p, \check{q}_1), (r, \check{q}_2) \in \mathbb{P} * \check{\mathbb{P}}$, $(p, \check{q}_1) \leqslant (r, \check{q}_2)$ si y sólo si $p \leqslant r$ y $q_1 \leqslant q_2$.*

*Demostración.* (1). Sea $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \check{\mathbb{P}}$. De acuerdo con la Definición 3.2, se tiene que $p \in \mathbb{P}$, $\dot{q} \in \operatorname{dom} \check{\mathbb{P}}$ y $p \Vdash \dot{q} \in \check{\mathbb{P}}$. Recordemos que $\check{\mathbb{P}} = \{(\check{r}, \mathbb{1}) : r \in \mathbb{P}\}$, donde $\mathbb{1}$ es el elemento máximo de $\mathbb{P}$. De este modo, $\dot{q} \in \operatorname{dom} \check{\mathbb{P}}$ implica que $\dot{q} = \check{r}$ para alguna $r \in \mathbb{P}$. En suma, $(p, \dot{q}) = (p, \check{r})$ para cierta $r \in \mathbb{P}$.

Sean $p, q \in \mathbb{P}$ y veamos que $(p, \check{q}) \in \mathbb{P} * \check{\mathbb{P}}$. Resta probar que $\check{q} \in \operatorname{dom} \check{\mathbb{P}}$ y $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{P}}$. Como $q \in \mathbb{P}$, se tiene que $(\check{q}, \mathbb{1}) \in \check{\mathbb{P}}$, de donde $\check{q} \in \operatorname{dom} \check{\mathbb{P}}$. Ahora bien, puesto que $\mathbb{1} \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{P}}$ y $p \leqslant \mathbb{1}$, se desprende del Lema 1.30 que $p \Vdash \check{q} \in \check{\mathbb{P}}$.

(2). De acuerdo con la Definición 3.2, $(p, \check{q}_1) \leqslant (r, \check{q}_2)$ si y sólo si $p \leqslant r$ y $p \Vdash \check{q}_1 \leqslant \check{q}_2$. Esta última condición ocurre si y sólo si para cualquier filtro $G$ $(V, \mathbb{P})$-genérico con $p \in G$, $(\check{q}_1)_G \leqslant (\check{q}_2)_G$, equivalentemente, $q_1 \leqslant q_2$. $\square$

Mostremos ahora que hay una noción de forcing $\mathbb{P}$ de modo que al componerla con el $\mathbb{P}$-nombre canónico de sí misma y tomar el cociente de esta composición módulo un filtro genérico, el resultado es un orden parcial no isomorfo a $\mathbb{P}$. Con esto respondemos en sentido negativo a nuestra pregunta inicial.

**Proposición 3.16.** *Sean* $\mathbb{P} := 2^{<\omega}$ *y* $\check{\mathbb{P}}$ *su* $\mathbb{P}$*-nombre canónico. Entonces* $(\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G \not\cong \mathbb{P}$ *para ningún filtro* $G$ *que sea* $(V, \mathbb{P})$*-genérico.*

*Demostración.* Sea $G$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico arbitrario. Para probar nuestra proposición se requieren tres observaciones previas:

(i) Sean $p_0 := \{(0,0)\}$ y $p_1 := \{(0,1)\}$. Puesto que $p \leqslant \emptyset$ para cualquier $p \in \mathbb{P}$, en particular $p_0$ y $p_1$ son predecesores de $\emptyset$ en $\mathbb{P}$.

Probemos que $p_0$ y $p_1$ son predecesores inmediatos de $\emptyset$ en $\mathbb{P}$. Así, si $p_k < r < \emptyset$ para alguna $r \in \mathbb{P}$ y para alguna $k \in \{0,1\}$, entonces, de acuerdo a nuestro orden, $\emptyset \subset r \subset p_k$. De la primera contención se tiene que $0 \in \operatorname{dom} r$ mientras que la segunda implica que $r(0) = p_k(0)$. En consecuencia, $r = p_k$. Observemos que $p_0$ y $p_1$ son únicos. Esto es, si $t \in \mathbb{P} \setminus \{\emptyset\}$ es un predecesor inmediato de $\emptyset$, entonces $\operatorname{dom} t = 1$, pues si por el contrario, $\operatorname{dom} t > 1$, se tiene entonces que $t < p_0$ ó $t < p_1$, lo cual no es posible. Así, $\operatorname{dom} t = 1$ y, por tanto, $t = p_0$ ó $t = p_1$.

(ii) Se tiene que $p_k \in G$ para alguna $k < 2$.

Definamos $D = \{p \in \mathbb{P} : p \leqslant p_0 \text{ ó } p \leqslant p_1\}$ y veamos que este conjunto es denso en $\mathbb{P}$.

Sea $p \in \mathbb{P}$. Comencemos por notar que $p_0 \in D$ y, por ende, si $p = \emptyset$, entonces $p_0 \leqslant p$. Supongamos que $p \neq \emptyset$. Entonces $0 \in \operatorname{dom} p$. Puesto que $p(0) \in \{0,1\}$, se tiene que $p \leqslant p_0$ ó $p \leqslant p_1$, de donde $p \in D$ y, como $p \leqslant p$, se tiene la extensión deseada en $D$.

Notemos que $D \in V$, pues tanto $p_0$ como $p_1$ son funciones definibles en $V$. En consecuencia, $G \cap D \neq \emptyset$. Sea $p \in G \cap D$. Entonces $p \in G$ y $p \leqslant p_k$ para alguna $k < 2$. Luego, $p_k \in G$.

(iii) Las parejas $(\emptyset, \check{p}_0), (\emptyset, \check{p}_1)$ y $(p_k, \check{\emptyset})$ son predecesores inmediatos y distintos de $(\emptyset, \check{\emptyset})$ en $(\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$. De acuerdo con el Lema 3.15-(1), todas las parejas anteriores son elementos de $\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}}$. Como $\emptyset \in G$, se sigue del Lema 3.11 que las parejas $(\emptyset, \check{p}_0)$, $(\emptyset, \check{p}_1)$ y $(p_k, \check{\emptyset})$ son elementos de $(\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$.

Por el Lema 3.15-(2), toda pareja en $(\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$ precede a $(\emptyset, \check{\emptyset})$. Veamos que para $\ell < 2$, $(\emptyset, \check{p}_\ell)$ es un predecesor inmediato de $(\emptyset, \check{\emptyset})$ en $(\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$.

Si alguna pareja $(p, \check{q}) \in (\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$ es tal que $(\emptyset, \check{p}_\ell) < (p, \check{q}) < (\emptyset, \check{\emptyset})$, se sigue en particular, por el Lema 3.15-(2), que $p_\ell < q < \emptyset$, lo cual contradice (i).

Argumentemos ahora que $(p_k, \check{\emptyset})$ es un predecesor inmediato de $(\emptyset, \check{\emptyset})$. Si por el contrario, alguna pareja $(p, \check{q}) \in (\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$ es tal que $(p_k, \check{\emptyset}) < (p, \check{q}) < (\emptyset, \check{\emptyset})$. Entonces, en particular, por el Lema 3.15-(2), $p_k < p < \emptyset$, una contradicción con (i).

Probemos nuestra proposición suponiendo lo contrario. Sea $f : (\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G \to \mathbb{P}$ un isomorfismo.

En primer lugar observemos que $f(\emptyset, \check{\emptyset}) = \emptyset$. Como $f^{-1}(\emptyset) \in (\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$, se tiene que $f^{-1}(\emptyset) \leqslant (\emptyset, \check{\emptyset})$, de donde $f(f^{-1}(\emptyset)) \leqslant f(\emptyset, \check{\emptyset})$, es decir, $\emptyset \leqslant f(\emptyset, \check{\emptyset})$, o equivalentemente, $f(\emptyset, \check{\emptyset}) \subseteq \emptyset$. Luego, la afirmación está probada.

Ahora bien, de acuerdo con (iii) y por el Lema 3.14, $f(\emptyset, \check{p}_0)$, $f(\emptyset, \check{p}_1)$ y $f(p_k, \check{\emptyset})$ son predecesores inmediatos y distintos de $\emptyset$ en $\mathbb{P}$, una contradicción a lo observado en (i). $\square$

Por el Teorema 3.12 y de acuerdo con el resultado anterior, estamos en posibilidades de dar un ejemplo de dos órdenes parciales no isomorfos y de tal modo que cada uno de ellos se encaja densamente en el otro.

**Proposición 3.17.** *Sea $G$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. Si $\mathbb{P} := 2^{<\omega}$ y $\mathbb{Q} := (\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}})/G$, entonces $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{Q}$.*

*Demostración.* De acuerdo con los incisos (1) y (2) del Lema 1.37, si $g = \bigcup G$, entonces $g : \omega \to 2$ y $G = \{g \restriction n : n \in \omega\}$.

Observemos que lo anterior implica que $\mathbb{Q} = \{(g \restriction n, \check{q}) : n \in \omega \ \&\ q \in \mathbb{P}\ \}$. En efecto, por el Lema 3.15 sabemos que $\mathbb{P} * \check{\mathbb{P}} = \{(p, \check{q}) : p, q \in \mathbb{P}\}$. De esta forma, el Lema 3.11 garantiza que $\mathbb{Q} = \{(p, \check{q}) : p \in G \ \&\ q \in \mathbb{P}\} = \{(g \restriction n, \check{q}) : n \in \omega \ \&\ q \in \mathbb{P}\}$.

Definimos una función $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ mediante $e(p) = (g \restriction \operatorname{dom} p, \check{p})$. Por la observación previa, $e(p) \in \mathbb{Q}$ y de este modo, $e$ está bien definida. Probemos que $e : \mathbb{P} :\to \mathbb{Q}$ es un encaje denso.

Sean $p, r \in \mathbb{P}$ tales que $p \leqslant r$. De acuerdo con el Lema 3.15, es suficiente probar que $g \restriction \operatorname{dom} p \leqslant g \restriction \operatorname{dom} r$. Por hipótesis, $\operatorname{dom} r \leqslant \operatorname{dom} p$, de donde, $g \restriction \operatorname{dom} p \leqslant g \restriction \operatorname{dom} r$.

Probemos que $e"\mathbb{P}$ es un subconjunto denso en $\mathbb{Q}$. Sea $q \in \mathbb{Q}$. Así, $q = (g \restriction n, \check{p})$ para algunas $n \in \omega$ y $p \in \mathbb{P}$. Tenemos los siguientes casos:

I. Si $n = \operatorname{dom} p$, entonces $q = (g \restriction n, \check{p})$ es justo $e(p)$ y se tiene el resultado.

II. Si $n < \operatorname{dom} p$, entonces $g \restriction \operatorname{dom} p \leqslant g \restriction n$ y, por tanto, $(g \restriction \operatorname{dom} p, \check{p}) \leqslant (g \restriction n, \check{p})$, es decir, $e(p) \leqslant q$.

III. Si $n > \operatorname{dom} p$, consideramos $s : n \to 2$ definida como sigue:

$$s(i) = \begin{cases} p(i), & \text{si } i \in \operatorname{dom} p, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, $s \leqslant p$ y $\operatorname{dom} s = n$. Por tanto, $(g \restriction \operatorname{dom} s, \check{s}) \leqslant (g \restriction \operatorname{dom} p, \check{p})$, es decir, $e(s) \leqslant q$.

□

## 3.2 Cociente separativo

La última sección de este trabajo está dedicada a los órdenes parciales que satisfacen una propiedad interesante: la separatividad.

**Definición 3.18.** Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Decimos que $\mathbb{P}$ es separativo si y sólo si para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$, si $p \nleqslant q$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \perp q$.

El siguiente lema nos da un criterio de comparabilidad entre elementos de un orden parcial separativo.

**Lema 3.19.** *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial separativo, entonces para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$, $p \leqslant q$ si y sólo si toda extensión de $p$ es compatible con $q$.*

*Demostración.* La primera implicación se satisface pues si $p \leqslant q$ y $r \leqslant p$, entonces $r \leqslant q$, lo que implica $r \mid q$. La implicación restante se verifica por contrapositiva, pues si $p \nleqslant q$, entonces, como $\mathbb{P}$ es separativo, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \perp q$. □

La conexión entre la separatividad y la relación $\Vdash$ queda establecida en el siguiente resultado.

**Proposición 3.20.** *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *$\mathbb{P}$ es separativo.*

2. *Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$: $p \Vdash \check{q} \in \Gamma$ si y sólo si $p \leqslant q$.*

*Demostración.*

Supongamos que $\mathbb{P}$ es separativo con elemento máximo $\mathbb{1}$. Consideremos $p, q \in \mathbb{P}$ de modo que $p \nleqslant q$. Entonces existe $r \leqslant p$ tal que $r \perp q$. Ahora bien, como $\mathbb{1} \Vdash \Gamma$ es filtro y $r \Vdash \check{r} \in \Gamma$, de acuerdo con el Lema 1.30-(1), $r \Vdash \Gamma$ es filtro. Así, $r \Vdash \check{q} \notin \Gamma$. Por tanto, $p \nVdash \check{q} \in \Gamma$. Por otro lado, si $p \leqslant q$, como $q \Vdash \check{q} \in \Gamma$, se sigue del Lema 1.30-(1) que $p \Vdash \check{q} \in \Gamma$.

Probemos que (2) implica (1). Sean $p, q \in \mathbb{P}$. Si $p \nleqslant q$, entonces $p \nVdash \check{q} \in \Gamma$. Se sigue entonces que para alguna $r \leqslant p$, $r \Vdash \check{q} \notin \Gamma$. De acuerdo con el Lema 1.14, podemos considerar un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico $G$ que contenga a $r$. En consecuencia, $q \notin G$. De donde, por el Lema 1.27-(1) aplicado a $\{q\}$, se tiene que $r_0 \perp q$ para alguna $r_0 \in G$. Tomemos $r_1 \in G$, una extensión común de $r$ y $r_0$. Es posible afirmar que $r_1 \perp q$, pues de lo contrario, $s \leqslant r_1, q$ para alguna $s \in \mathbb{P}$. De donde $s \leqslant r_0, q$, lo cual no es posible. Luego, $r_1 \leqslant p$ y $r_1 \perp q$, es decir, $\mathbb{P}$ es separativo. □

La siguiente proposición nos da una condición suficiente para que un encaje completo sea inyectivo.

**Proposición 3.21.** *Si $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ es un encaje completo donde $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos órdenes parciales separativos antisimétricos, entonces se satisface lo siguiente:*

1. *$e$ es inyectivo.*

2. *$e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.*

3. *Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$: $p \leqslant q$ si y sólo si $e(p) \leqslant e(q)$.*

*Demostración.* Sean $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $e(p) = e(q)$. Probemos por contradicción que $p = q$. Así, si $p \neq q$, entonces $p \nleqslant q$ o $q \nleqslant p$, pues $\mathbb{P}$ es un orden parcial antisimétrico. Si, por ejemplo, ocurre que $p \nleqslant q$, entonces existe $r \leqslant p$ tal que $r \perp q$. De este modo, $e(r) \leqslant e(p)$ y $e(r) \perp e(q)$. Pero entonces $e(r) \leqslant e(q)$ y $e(r) \perp e(q)$, pues $e(p) = e(q)$, lo cual no puede ser. De forma análoga se verifica que suponer $q \nleqslant p$ conduce a una contradicción.

Verifiquemos que $e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Como $q \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ para cualquier $q \in \mathbb{Q}$, entonces la desigualdad $e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}) \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ siempre se da. Resta probar que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \leqslant e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}})$. Si, por el contrario, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \nleqslant e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}})$, entonces $q_0 \perp e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ para alguna $q_0 \in \mathbb{Q}$ puesto que $\mathbb{Q}$ es separativo. De acuerdo con la Proposición 2.3, $q_0$ admite una $e$-reducción de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$, digamos $p$. Así, se tiene que $e(p) \mid q_0$. Sea $s \leqslant e(p), q_0$. Como $p \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, se tiene que $e(p) \leqslant e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}})$. En consecuencia, $s \leqslant e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}), q_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \leqslant e(\mathbb{1}_{\mathbb{P}})$ y se tiene el resultado.

Sean $p, q \in \mathbb{P}$. Si por un lado, $p \leqslant q$, entonces $e(p) \leqslant e(q)$ por ser $e$ un encaje. Probemos la implicación restante por contradicción. Así, si $e(p) \leqslant e(q)$ y $p \nleqslant q$, entonces $r \perp q$ para cierta $r \leqslant p$, pues $\mathbb{P}$ es un orden separativo. Luego, $e(r) \leqslant e(p)$ y $e(r) \perp e(q)$. Como $e(p) \leqslant e(q)$, se sigue entonces que $e(r) \leqslant e(q)$, lo que implica $e(r) \mid e(q)$, lo cual no es posible. $\square$

Naturalmente, hay órdenes parciales que no son separativos (véanse los comentarios inmediatos al Lema 3.32), sin embargo, todo orden se puede encajar densamente en un orden separativo. La construcción de este orden precisa definir una relación de equivalencia.

**Definición 3.22.** Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial y sean $p, q \in \mathbb{P}$. Entonces:

1. $p \sim q$ si y sólo si para todo $r \in \mathbb{P}$, se tiene que $r \mid p$ si y sólo si $r \mid q$.

2. $[p] = \{s \in \mathbb{P} : s \sim p\}$.

*Observación.* $\sim$ es una relación de equivalencia.

- La relación $\sim$ es reflexiva, pues $p$ es compatible con los mismos elementos que son compatibles con $p$.

- Si $p \sim q$, entonces como $p$ y $q$ son compatibles con los mismos elementos de $\mathbb{P}$, se sigue trivialmente que $q \sim p$.

- Si $p \sim r$ y $r \sim q$, entonces $p$ y $r$ son compatibles con los mismos elementos de $\mathbb{P}$ y $r$ y $q$ son compatibles con los mismos elementos de $\mathbb{P}$. Así, $p$ y $q$ son compatibles con los mismos elementos de $\mathbb{P}$, es decir, $p \sim q$.

**Definición 3.23.** Definimos el cociente separativo de un orden parcial $\mathbb{P}$ como:

$$\mathbb{P}/_\sim = \{[p] : p \in \mathbb{P}\}.$$

Definimos la relación binaria $\trianglelefteq$ en $\mathbb{P}/_\sim$ mediante $[p] \trianglelefteq [q]$ si y sólo si para cualquier $r \leqslant p$, se tiene que $r \mid q$.

*Observación.* La relación $\trianglelefteq$ está bien definida. Esto se verifica, pues si $[p] = [p']$, $[q] = [q']$ y $[p] \trianglelefteq [q]$, entonces dado $r \leqslant p'$, en particular se tiene que $r \mid p'$. De donde $r \mid p$. Sea $p_1 \leqslant r, p$. Entonces $p_1 \mid q$ pues $[p] \trianglelefteq [q]$. Sea $p_2 \leqslant p_1, q$. Se sigue que $p_2 \leqslant r, q$, es decir, $r \mid q$. Luego, $r \mid q'$. Por tanto, $[p'] \leqslant [q']$.

El siguiente lema nos dice que el orden y la incompatibildad en todo orden parcial implican lo propio en su cociente separativo. Por comodidad, escribiremos $\mathbb{P}/_\sim$ para referirnos a $(\mathbb{P}/_\sim, \trianglelefteq)$.

**Lema 3.24.** *Si $\mathbb{P}$ es un orden parcial y $\mathbb{P}/_\sim$ es su cociente separativo, entonces para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$:*

1. *$p \leqslant q$ implica que $[p] \trianglelefteq [q]$.*

2. *$p \perp q$ implica que $[p] \perp [q]$.*

*Demostración.* Supongamos $p \leqslant q$. Si $r \leqslant p$, entonces $r \leqslant q$ y, en particular, $r \mid q$. Por tanto, $[p] \trianglelefteq [q]$, lo que prueba el inciso (1).

Verifiquemos el inciso (2) por contrarrecíproca. Sean $[p]$ y $[q]$ compatibles. Así, $[r] \trianglelefteq [p], [q]$ para alguna $r \in \mathbb{P}$. Pero entonces, de acuerdo con la Definición 3.23, toda extensión de $r$ es compatible con $p$ y $q$. En particular, $r$ y $p$ admiten una extensión común, digamos $s$. Se sigue entonces que $s$ y $q$ son compatibles. Sea $t \leqslant s, q$. Luego, $t \leqslant p, q$. $\square$

**Proposición 3.25.** *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial. Entonces $\mathbb{P}/_\sim$ es un orden parcial separativo y antisimétrico.*

*Demostración.* Tenemos que $[p] \trianglelefteq [p]$, ya que $r \leqslant p$ implica que $r \mid p$ para todo $r \in \mathbb{P}$.

Sean $p, q, r \in \mathbb{P}$ tales que $[p] \trianglelefteq [q]$ y $[q] \trianglelefteq [r]$. Sea $s \leqslant p$. Entonces $s \mid q$, de donde $p_0 \leqslant s, q$ para alguna $p_0 \in \mathbb{P}$. Se sigue entonces que $p_0$ y $r$ son compatibles. Sea $p_1 \leqslant p_0, r$. Así, $p_1 \leqslant s, r$. Por tanto, $[p] \trianglelefteq [r]$.

El orden $\mathbb{P}/_{\sim}$ es separativo porque si $[p], [q] \in \mathbb{P}/_{\sim}$ son tales que $[p] \ntrianglelefteq [q]$, se sigue de la Definición 3.23 que existe $r \leqslant p$ tal que $r \perp q$. Luego, por el Lema 3.24, $[r] \trianglelefteq [p]$ y $[r] \perp [q]$.

Probemos la antisimetría. Supongamos que $p, q \in \mathbb{P}$ son tales que $[p] \trianglelefteq [q]$ y $[q] \trianglelefteq [p]$. Sea $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \mid p$. Tomemos $s \leqslant p, r$. Como $[p] \trianglelefteq [q]$, se tiene que $s \mid q$. Esto es, existe $t \leqslant s, q$. De donde, $t \leqslant r, q$. Análogamente se verifica que $[q] \trianglelefteq [p]$ implica que toda condición compatible con $q$ es compatible con $p$. Por lo tanto, $[p] = [q]$. $\square$

Sirvámonos del trabajo hecho para probar que todo orden parcial se encaja densamente en su cociente separativo.

**Teorema 3.26.** *Se tiene que* $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{P}/_{\sim}$

*Demostración.* Definimos $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}/_{\sim}$ mediante $\pi(p) = [p]$.

Por un lado, el Lema 3.24 garantiza que la función $\pi$ preserva el orden y la incompatibilidad. Por otro lado, es bien sabido que la función $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}/_{\sim}$ es suprayectiva, así que $\pi''\mathbb{P}$ es un subconjunto denso en $\mathbb{P}/_{\sim}$. Por tanto, $\pi$ es un encaje denso. $\square$

El cociente separativo posee cierto tipo de unicidad, tal como la proposición a seguir nos lo revela.

**Proposición 3.27.** *Si* $(\mathbb{Q}, \sqsubseteq)$ *es un orden parcial antisimétrico y separativo para el cual existe* $e : \mathbb{P} \to \mathbb{Q}$*, un encaje suprayectivo (por ende denso), entonces* $\mathbb{P}/_{\sim} \cong \mathbb{Q}$.

*Demostración.* Definimos $f : \mathbb{P}/_{\sim} \to \mathbb{Q}$ mediante $f([p]) = e(p)$. Observemos que $f$ hace conmutativo el diagrama de abajo, pues $f \circ \pi = e$.

Verifiquemos que $f$ está bien definida, es decir, que si $p \sim r$, entonces $e(p) = e(r)$. Procediendo por contrapositiva, si $e(p) \neq e(r)$, entonces $e(p) \not\sqsubseteq e(r)$ o $e(r) \not\sqsubseteq e(p)$, pues $\mathbb{Q}$ es un orden parcial antisimétrico. Supongamos que ocurre la primera afirmación. Dado que $\mathbb{Q}$ es separativo, $q \sqsubseteq e(p)$ y $q \perp e(r)$ para alguna $q \in \mathbb{Q}$. Se sigue de la suprayectividad de $e$ que existe $p_0 \in \mathbb{P}$ tal que $e(p_0) = q$. Así, $e(p_0) \sqsubseteq e(p)$ y $e(p_0) \perp e(r)$, es decir, $p \not\sim r$. De ocurrir que $e(r) \not\sqsubseteq e(p)$, un argumento análogo al anterior prueba que $r \not\sim p$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{P}, \leqslant) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\pi"'] & (\mathbb{Q}, \sqsubseteq) \\
(\mathbb{P}/_{\sim}, \trianglelefteq) \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostremos que $f$ es un isomorfismo entre $\mathbb{P}/_{\sim}$ y $\mathbb{Q}$. Se tiene que $f$ es una función inyectiva, pues si $e(p) = e(r)$, entonces que $p \sim r$. En efecto, si $p \not\sim q$, entonces $s \mid p$ y $s \perp r$ para cierta $s \in \mathbb{P}$. Por tanto, $e(s) \mid e(p)$ y $e(s) \perp e(r)$, y, por ende, $e(p) \neq e(r)$. En suma, $e(p) = e(r)$ implica que $[p] = [r]$. Ahora bien, como $f \circ \pi = e$ y $e$ es suprayectiva, se tiene que $f$ también lo es.

Probemos por contrapositiva en ambas direcciones que $f$ y $f^{-1}$ preservan el orden. Sean $[p], [r] \in \mathbb{P}/_{\sim}$ tales que $[p] \trianglelefteq [r]$. Supongamos que $e(p) \not\sqsubseteq e(r)$. Como $\mathbb{Q}$ es separativo, existe $q \sqsubseteq e(p)$ tal que $q \perp e(r)$. Por ser $e$ suprayectiva, $q = e(p_0)$ para alguna $p_0 \in \mathbb{P}$, y, por ende, $e(p_0) \sqsubseteq e(p)$ y $e(p_0) \perp e(r)$. Como $e(p_0) \sqsubseteq e(p)$ implica que $e(p_0) \mid e(p)$, se tiene entonces que $p_0 \mid p$. Sea $p_1 \leqslant p_0, p$. Así, por un lado, $e(p_1) \sqsubseteq e(p_0)$. Por otro lado, observemos que $p_1$ y $r$ son incompatibles, pues en caso contrario, $p_1 \mid r$, y así $e(p_1) \mid e(r)$, es decir, existe $q_0 \sqsubseteq e(p_1), e(r)$; de donde, $q_0 \sqsubseteq e(p_0), e(r)$, lo cual no es posible. En suma, $p_1 \in \mathbb{P}$ es tal que $p_1 \leqslant p$ y $p_1 \perp r$, es decir, $[p] \ntrianglelefteq [r]$.

Supongamos ahora que $[p] \ntrianglelefteq [r]$. De acuerdo con la Definición 3.23, existe $p_0 \in \mathbb{P}$ de modo que $p_0 \leqslant p$ y $p_0 \perp r$. Luego, $e(p_0) \sqsubseteq e(p)$ y $e(p_0) \perp e(r)$, es decir, $f([p]) \not\sqsubseteq f([r])$.

$\square$

Como corolario de lo anterior y del Teorema 2.15, se tiene que toda extensión genérica puede verse como la extensión genérica dada por un orden parcial separativo.

A continuación presentamos una forma alternativa de encajar densamente cualquier orden parcial en un orden parcial separativo.

**Definición 3.28.** Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$:

1. $p \leqslant^\star q$ si y sólo si para todo $r \leqslant p$, se tiene que $r \mid q$.

2. $\mathbb{P}^\star = (\mathbb{P}, \leqslant^\star, \mathbb{1}_{\mathbb{P}})$

Es interesante observar que el inciso (1) de la definición anterior ha sido motivado por el Lema 3.19, por lo que es de esperarse que $\mathbb{P}^\star$ sea un orden parcial separativo. Un tratamiento de orden separativo en términos de la relación $\leqslant^\star$ puede encontrarse en [1]. Previo a probar la separatividad de $\mathbb{P}^\star$ verifiquemos que el orden y la incompatibilidad en $\mathbb{P}$ implican lo propio en $\mathbb{P}^\star$.

**Lema 3.29.** *Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$:*

1. *$p \leqslant q$ implica $p \leqslant^\star q$.*

2. *$p \perp q$ implica $p \perp^\star q$, es decir, no existe $r \in \mathbb{P}^\star$ de tal modo que $r \leqslant^\star p$ y $r \leqslant^\star q$.*

*Demostración.* La primera afirmación se satisface pues dado $r \leqslant p$, de la hipótesis se desprende que $r \leqslant q$. Luego, $r \mid q$.

Probemos (2) por contrapositiva. Así, supongamos que existe $r \in \mathbb{P}$ de modo que $r \leqslant^\star p$ y $r \leqslant^\star q$. Se sigue entonces que $r \mid p$. Sea $s \leqslant r, p$. De este modo, $s \mid q$, pues $r \leqslant^\star q$. Tomemos $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leqslant s, q$. En consecuencia, $t \leqslant p, q$, que es lo que se quería. $\square$

**Proposición 3.30.** $\mathbb{P}^\star$ *es un orden parcial separativo.*

*Demostración.* Nuestro orden es reflexivo, pues $p \leqslant^\star p$, ya que toda extensión de $p$ es compatible con $p$.

Supongamos ahora que $p \leqslant^\star q$ y $q \leqslant^\star r$. Queremos comprobar que $p \leqslant^\star r$. De este modo, si $s \leqslant p$, entonces $s \mid q$, de donde $p_0 \leqslant s, q$ para alguna $p_0 \in \mathbb{P}$. Se sigue entonces que $p_0$ y $r$ son compatibles. Sea $p_1 \leqslant p_0, r$. Así, $p_1 \leqslant s, r$ y, por tanto, $p \leqslant^\star r$.

Ahora bien, de acuerdo con la Definición 3.28, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ se tiene que $p \nleqslant^\star q$ implica que existe $r \leqslant p$ de modo que $r \perp q$. Se sigue del Lema 3.29 que $r \leqslant^\star p$ y $r \perp^\star q$. Esto prueba que $\mathbb{P}^\star$ es separativo. $\square$

De acuerdo con la proposición anterior y por la Proposición 3.20, tenemos que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P} : p \Vdash \check{q} \in \Gamma$ es equivalente a que $p \leqslant^\star q$.

**Teorema 3.31.** *Se tiene que* $\mathbb{P} \leqslant_d \mathbb{P}^\star$

*Demostración.* Sea $e : \mathbb{P} \to \mathbb{P}^\star$ la función identidad. Se sigue del Lema 3.29 que $e$ es un encaje y como $e"\mathbb{P} = \mathbb{P}$, el encaje es denso. $\square$

A continuación ilustraremos mediante un ejemplo las construcciones estudiadas en esta sección. Sea $\mathbb{P} = ([\omega]^\omega, \subseteq)$. Veamos primero que dos elementos en este orden serán compatibles si y sólo si la cantidad de elementos que tienen en común es infinita.

**Lema 3.32.** *Para cualesquiera* $p, q \in \mathbb{P}$*, se tiene que* $p \mid q$ *si y sólo si* $|p \cap q| = \omega$*.*

*Demostración.* Por un lado, si $p \mid q$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \subseteq p$ y $r \subseteq q$. Así, $r \subseteq p \cap q$ y, por tanto, $|p \cap q| = \omega$. Por otro lado, si $|p \cap q| = \omega$, se tiene entonces que $p \cap q \in \mathbb{P}$ y es una extensión común para $p$ y $q$, pues tanto $p$ como $q$ contienen a $p \cap q$. $\square$

Observemos ahora que el orden parcial considerado no es separativo. Sean $p = \omega$ y $q = \omega \setminus \{0\}$. Así, $p \nsubseteq q$ y, sin embargo, todo subconjunto de $p$ que esté en $\mathbb{P}$ resulta ser compatible con $q$. En efecto, si $r \in \mathbb{P}$ y $r \subseteq p$, se tiene entonces que $r \cap q = r \setminus \{0\}$, pues $q \subseteq p$ y, por tanto, $|r \cap q| = \omega$.

Ahora bien, según nuestro criterio de compatibilidad para $\mathbb{P}$ y siguiendo la Definición 3.28, podemos establecer que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$: $p \subseteq^\star q$ si y sólo si para todo $r \in \mathbb{P}$, $r \subseteq p$ implica que $|r \cap q| = \omega$.

**Lema 3.33.** *Para cualesquiera* $p, q \in \mathbb{P}$ *se tiene que* $p \subseteq^\star q$ *si y sólo si* $|p \setminus q| < \omega$*.*

*Demostración.* Probemos la primera implicación por contrapositiva. Así, supongamos que $p \setminus q$ es infinito. De este modo, $r := p \setminus q \in \mathbb{P}$, $r \subseteq p$ y $r \perp q$, pues $r \cap q = \emptyset$.

Probemos de forma directa la implicación restante. Sea $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \subseteq p$. Por hipótesis, $|p \setminus q| < \omega$. Como $r = (r \cap q) \cup (r \setminus q)$, se tiene que $|r \setminus q| < \omega$. Por tanto, $|r \cap q| = \omega$. $\square$

Por lo anterior, $\mathbb{P}^\star = ([\omega]^\omega, \subseteq^\star)$. Observemos que $\mathbb{P}^\star$ no es antisimétrico. En efecto, si $p = \omega$ y $q = \omega \setminus \{0\}$, se tiene que $p \subseteq^\star q$ y $q \subseteq^\star p$, ya que $|p \setminus q| = 1 < \omega$ y $|q \setminus p| = 0 < \omega$. Sin embargo, $p \neq q$.

Nos interesa ahora $\mathbb{P}/_{\sim}$, esto es, el cociente separativo de $\mathbb{P}$ (véase la Definición 3.23). Puesto que de acuerdo con la Definición 3.22, dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ estarán relacionadas si y sólo si son compatibles con los mismos elementos, se sigue del Lema 3.32 que $p \sim q$ si y sólo si para todo $r \in \mathbb{P}$, se tiene que $|p \cap r| = |q \cap r| = \omega$. Esto último nos permite afirmar lo siguiente.

**Proposición 3.34.** *Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$, se tiene que $p \sim q$ si y sólo si $|p \triangle q| < \omega$, donde $p \triangle q = (p \setminus q) \cup (q \setminus p)$.*

*Demostración.* Probemos por contrapositiva la primera implicación. Así, si $|p \triangle q| = \omega$, entonces $|p \setminus q| = \omega$ o $|q \setminus p| = \omega$. Si por ejemplo, ocurre que $|p \setminus q| = \omega$, entonces $p \setminus q$ es un elemento de $\mathbb{P}$ para el cual se tiene que $|p \cap (p \setminus q)| = \omega$ y $|q \cap (p \setminus q)| = 0 < \omega$. Por tanto, $p \not\sim q$. Análogamente se prueba que $p \not\sim q$, si ocurre que $|q \setminus p| = \omega$.

Supongamos ahora que $|p \triangle q| < \omega$. Sea $r \in \mathbb{P}$ compatible con $q$, es decir, $|r \cap q| = \omega$. Puesto que $r \cap q = (r \cap q \cap p) \cup (r \cap q \setminus p)$ y como por hipótesis $|q \setminus p| < \omega$, se tiene entonces que $|r \cap q \cap p| = \omega$. Dado que $r \cap q \cap p \subseteq r \cap p$, se sigue que $|r \cap p| = \omega$. Un argumento análogo prueba que todo elemento compatible con $p$, lo es también con $q$. $\square$

En otros ámbitos, al cociente $\mathbb{P}/_{\sim}$ aquí presentado se le denota por $([\omega]^{\omega}, \subseteq)/fin$, para el cual existe una vasta literatura. Sabemos por el Lema 3.23 que $\mathbb{P}/_{\sim}$ es un orden parcial antisimétrico. Por tanto, $\mathbb{P}/_{\sim}$ y $\mathbb{P}^{\star}$ no pueden ser isomorfos. Esto nos permite observar que no es posible prescindir de la antisimetría en la Proposición 3.27.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos querido mostrar que el método de forcing es una técnica de la mayor elegancia para producir modelos de la teoría de conjuntos. De manera general hemos visto que siempre que dos nociones de forcing estén encajadas una en la otra, un encaje completo nos provee de extensiones genéricas propias mientras que un encaje denso nos devuelve las mismas extensiones. Esto último nos permite preguntarnos lo siguiente: ¿si dos extensiones de forcing coinciden, entonces hay un encaje denso entre las nociones de las que provienen? Creemos pertinente la pregunta del mismo modo que el buscar una respuesta pueda convertirse en un trabajo futuro. Resaltamos el hecho de que hacer forcing en dos pasos es equivalente a producir una sola extensión vía la noción de la composición, situación que podemos plantearnos si es cierta para iteraciones de longitud infinita. Es en este contexto que nuestro trabajo puede tomar un rumbo más avanzado, empezando, por ejemplo, con un estudio de la iteración con suporte numerable, proceso que ha aparecido, entre otros lados, en la prueba de Ronald Jensen de la consistencia de la hipótesis del continuo con la hipótesis de Suslin así como en los trabajos de Richard Laver sobre la conjetura de Borel.

Por último, expresamos nuestra gratitud al lector por haber puesto sus ojos en nuestro texto y esperamos que este haga eco para un pronto retorno a la teoría de conjuntos.

# BIBILIOGRAFÍA

[1] T. Bartoszynski and H. Judah, *Set theory: On the structure of the real line*, A.K. Peters Ltd., 1995.

[2] P. J. Cohen, *Independence of the Axiom of Choice*, Standford University, 1963.

[3] P. J. Cohen, *The Independence of the Continuum Hypothesis*, I, II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50(1963), pp. 1143-1148; 51(1964), pp. 105-110.

[4] P. J. Cohen, *Independence Results in Set Theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. 39-54, 1965.

[5] T. Jech, *Set Theory. The Third Millenium Edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics, 3rd rev. ed. Corr. 4th printing, 2003, XIV, 772 p.

[6] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[7] J. Kennedy and R. Kossak, eds., *Set Theory Arithmetic and Foundations of Mathematics: Theorems Philosophies*, Lectures Notes in Logic, ASL, vol. 36, Cambridge University Press., New York, 2011.

[8] S. Shelah, *Proper and Improper Forcing*, 2nd ed., Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[9] R. Smullyan and M. Fitting, *Set theory and the continumm problem*, Dover Publications, Inc., Mineloa, New York, 2010.

[10] R. Solovay and S. Tennenbaum, *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem*, Annals of Mathematics, (2)-94, 201-245, 1971.