Mathématiques
Première S

Cours Valin

Notes rédigées par M. CELIS Alonso

Table des matières

Chapitre 1

Équation de second degré

1.1 Forme canonique et discriminant

On appelle polynôme de second degré ou trinôme de degré 2 la fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont de nombres réels fixés avec a non nul.

Définition 1.1.1

- La formule $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ est valable pour tout réel x. L'expression $a(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ est appelée **forme canonique** de la fonction $f : x \to ax^2 + bx + c$.
- Le nombre réel $b^2 - 4ac$, noté Δ, est appelé le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple 1.1.2

Soit $f(x) = -3x^2 + 5x + 10$. Trouver la forme canonique de f.

Solution

On voit que $a = -3, b = 5$ et $c = 10$. Ainsi, on calcul le discriminant.

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4 \times (-3) \times 10 \\ &= 25 - 4 \times (-30) \\ &= 25 + 120 \\ &= 145 \end{aligned}$$

On utilise la formule $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ et on obtient la forme canonique :

$$f(x) = -3\left(x + \frac{5}{2 \times (-3)}\right)^2 - \frac{145}{4 \times (-3)} = -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{145}{12}$$

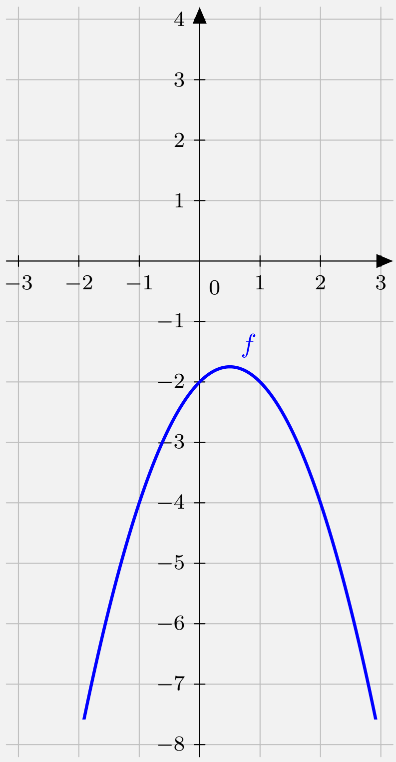
On rappelle que la courbe répresentative d'un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ c'est une parabole.

Exemple 1.1.3

Soit $f(x) = -x^2 + x - 2$.

Représentation graphique

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f(x) = -x^2 + x - 2$ est une parabole.



Propriété 1.1.4

La parabole répresentant un trinôme $f(x)$ dans un repère orthogonal du plan admet pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ et pour **sommet** le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Pour une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, on peut déterminer le sens de variation à l'aide du réel a.

Propriété 1.1.5

- ◇ Si $a > 0$, alors le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$

- ◇ Si $a < 0$, alors le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$

Exemple 1.1.6

Donner la forme canonique du trinôme $-x^2 + x - 2$. En déduire les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction $f : x \mapsto -x^2 + x - 2$.

Solution

On calcule le discriminant :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & 1^2 - 4 \times (-1) \times (-2) \\ & = & 1 - 4 \times 2 \\ & = & 1 - 8 \\ & = & -7 \end{array}$$

On utilise la formule

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

et on obtient la forme canonique :

$$f(x) = -1\left(x + \frac{1}{2 \times (-1)}\right)^2 - \frac{-7}{4 \times (-1)} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}.$$

On déduit le sommet de la parabole :

$$(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}) = (\frac{1}{2}; \frac{7}{4}).$$

1.2 Résolution d'une équation de second degré

Considérons l'équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des nombres réels fixés et a non nul.

Définition 1.2.1

On dit qu'un nombre réel x_0 est une solution de l'équation précédente si $ax_0^2+bx_0+c=0$. Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées les **racines** du trinôme ax^2+bx+c.

L'existence des solutions de l'équation $ax^2+bc+c=0$ depend du signe du discriminant Δ.

Propriété 1.2.2 *Solutions de l'équation ax^2+bx+c*

- Si $\Delta<0$, il n'y a pas de solutions ou racines.
- Si $\Delta=0$, il y a **une seule racine**, donnée par $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, il y a **deux solutions**, données par $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice 1.2.3

Considérons le trinôme $x^2-9x+14$. On va trouver les solutions de l'équation $x^2-9x+14=0$.

Corrigé

On calcule le discriminant Δ. Notons que $a=1$, $b=-9$ et $c=14$, d'où

$$\begin{array}{rcl}\Delta & = & (-9)^2-4\times 1\times 14\\ & = & 81-56\\ & = & 25\end{array}$$

Comme $\Delta=25>0$, on a deux solutions. Calculons-les :

$$x_1=\frac{-(-9)+\sqrt{25}}{2}=\frac{9+5}{2}=7 \text{ et } x_2=\frac{-(-9)-\sqrt{25}}{2}=\frac{9-5}{2}=2$$

Les solutions de l'équation $x^2-9x+14=0$ sont donc $x_1=7$ et $x_2=2$.

Propriété 1.2.4 *Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$*

- Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$, on note x_0 l'unique solution, on a :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2.$$

- Si $\Delta > 0$, on note x_1 et x_2 les deux solutions, on a

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exemple 1.2.5

Factoriser le trinôme $3x^2 - 7x + 4$.

Solution

On calcule le discriminant Δ du trinôme $3x^2 - 7x + 4$.

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 49 - 48 = 1$$

Comme $\Delta = 1 > 0$, ce trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{7-1}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{7+1}{6} = \frac{4}{3}$. On a donc la factorisation :

$$3x^2 - 7x + 4 = 3(x - 1)\left(x - \frac{4}{3}\right).$$

1.3 Signe d'un trinôme

On s'intéresse au signe d'un trinôme de second degré, c'est-à-dire, au signe d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Propriété 1.3.1

Soient a, b, c des nombres réels avec a non nul. Considérons le trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ c'est du signe de a pour tout nombre réel x.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ c'est du signe de a ou nul pour $x = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta > 0$ et si x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ c'est du signe de a pour $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et du signe de $-a$ pour $x \in]x_1; x_2[$.

Exercice 1.3.2

Étudier le signe du trinôme $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

Corrigé

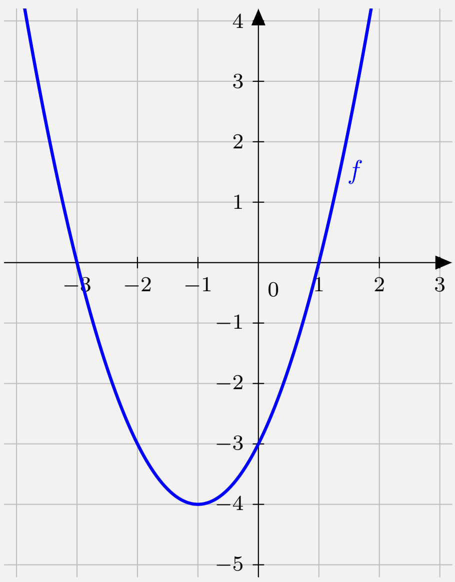
En calculant Δ, on détermine les racines du trinôme, puis on obtient le signe de $f(x)$ à partir de celui du coefficient a de x^2. Le discriminant Δ de $f(x)$ est :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & b^2 - 4ac \\ & = & 2^2 - 4 \times (-3) \\ & = & 4 + 12 \\ & = & 16 \end{array}$$

Comme $\Delta = 16 > 0$, les deux racines de $f(x)$ sont :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Le trinôme $f(x)$ est strictement positif (du signe de $a = 1$) pour $x \in]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$ et $f(x)$ est strictement négatif (du signe de -a=-1) pour $x \in]-3; 1[$.



1.4 Devoir 1

Ex. 1 — Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + bx + c$ et C_f sa courbe répresentative dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer b et c pour que le sommet de C_f ait pour coordonnées $(2; -1)$.

Ex. 2 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$x - 3 < \frac{x^2}{2} + 2x - 1 < x + 11.$$

Ex. 3 — $ABCD$ est un trapèze isocèle. On pose $BH = x$ où H est la projection orthogonale de B sur (DC). On donne $CD = 14$.

1. Déterminer BH pour que l'aire du trapèze soit 45 (l'unité de longueur est le mètre, celle des aires est le m^2).

Ex. 4 — On considère l'équation ($m \in \mathbb{R}$) :

$$(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0, \ \ x \text{ étant l'inconnue.}$$

1. Discuter, suivant les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de cette équation.
2. Résoudre l'équation précédente pour $m \in \{0, 1, 2, 4\}$.
3. a) Pour quelles valeurs de m, -1 fait-il partie de l'ensemble des solutions de l'équation ?
   b) On suppose que l'équation admet des solutions différentes de -1 : calculer en fonction de m l'expression :

$$y = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1}$$

   x_1 et x_2 étant les deux solutions de l'équation.

Chapitre 2

Étude de fonctions

2.1 Fonctions de référence

Définition 2.1.1

La fonction **racine carrée** est la fonction f qui à tout nombre réel non négatif associe le nombre réel non négatif qui a pour carrée x. En symbole, cette fonction est définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

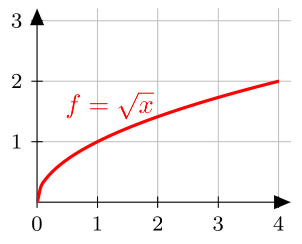
On rappelle que la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ est **croissante** sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

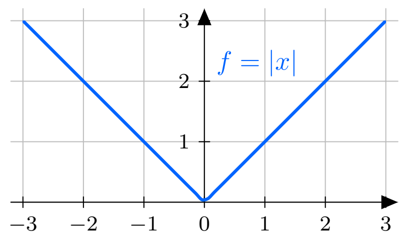
Définition 2.1.2

On définie la fonction **valeur absolue**, notée $|x|$, comme la fonction qui à tout réel x associe les valeurs suivantes :

- ◇ $|x| = x$ si $x \geq 0$.
- ◇ $|x| = -x$ si $x \leq 0$.

On rappelle que la fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et **croissante** sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
Les courbes représentatives des fonctions $\sqrt{x}$ et $|x|$ sont les suivantes.



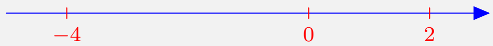


Exemple 2.1.3

Résoudre l'inéquation $|x+4| \geq 2|x-2|$.

Solution

On idèntifie les points distingués dans une droite graduée.



On écrit l'inéquation sans valeurs absolues en distinguant trois cas :

— Si $x < -4$, alors $x+4 < 0$ et $x-2 < -6$, donc $|x+4| = -x-4$ et $|x-2| = -x+2$ par définition de la fonction valeur absolue. On a donc :

$$|x+4| \geq 2|x-2| \Leftrightarrow -x-4 \geq -2x+4 \Leftrightarrow x \geq 8.$$

Comme les conditions $x < -4$ et $x \geq 8$ sont incompatibles, ce cas ne donne pas de solution.

— Si $-4 \leq x < 2$, alors $0 \leq x+4 < 6$ et $-6 \leq x-2 < 0$, d'où $|x+4| = x+4$ et $|x-2| = -x+2$. On a donc :

$$|x+4| \geq 2|x-2| \Leftrightarrow x+4 \geq -2x+4 \Leftrightarrow x \geq 0,$$

d'où l'intervalle solution $[0;2[$.

— Si $x \geq 2$, alors $x+4$ et $x-2$ sont bien positifs et on a donc :

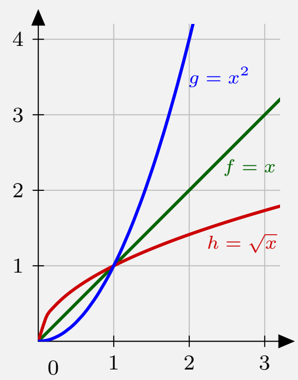
$$|x+4| \geq 2|x-2| \Leftrightarrow x+4 \geq 2x-4 \Leftrightarrow 8 \geq x,$$

d'où l'intervalle solution $[2;8]$.

Finalement on prend la réunion des ensembles de solutions trouvées précédemment. Ainsi, l'intervalle solution est la réunion des intervalles $[0;2[$ et $[2;8]$, c'est-à-dire, l'intervalle $[0;8]$.

Propriété 2.1.4

- Pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, on a $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.
- Pour tout $x \geq 1$, on a $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.



2.2 Sens de variation des fonctions usuelles

Théorème 2.2.1 *Somme de fonctions*

- Les fonctions f et $f + k$ ont le même sens de variation sur I.
- Supposons que les fonctions f et g sont toutes deux croissantes sur I, alors la fonction $f + g$ est croissante sur I.
- Supposons que les fonctions f et g sont toutes deux décroissantes sur I, alors la fonction $f + g$ est décroissante sur I.

Théorème 2.2.2 *Produit d'une fonction par une constante*

- Si $\lambda > 0$, alors les fonctions f et λf ont le même sens de variation sur I.
- Si $\lambda < 0$, alors les fonctions f et λf ont des sens de variation contraires sur I.

Définition 2.2.3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $f(x)$ est nulle ou positive pout tout réel x. Soit g une fonction définie sur un intervalle J sur lequel g a un signe constant et ne s'annule pas

- On définit sur I la fonction $\sqrt{f}$ comme la fonction qui à x associe $\sqrt{f(x)}$
- On définit la fonction $\frac{1}{g}$ comme la fonction qui à x associe $\frac{1}{g(x)}$.

Théorème 2.2.4 *Fonction racine carrée et fonction inverse*

- ◇ Les fonctions f et $\sqrt{f}$ ont le même sens de variation sur I.
- ◇ Les fonctions g et $\frac{1}{g}$ ont des sens de variation contraires sur J.

Exercice 2.2.5

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Étudier les variations de cette fonction sur I.

Corrigé

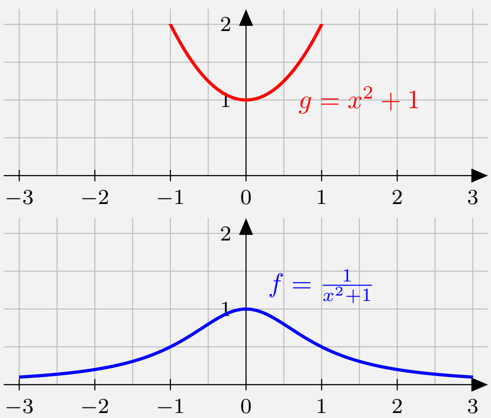
— On note d'abord que la fonction $g(x) = x^2 + 1$ est un polynôme de second degré strictement positive sur I. On note aussi que f est la fonction inverse de la fonction g. Ainsi les fonctions g et $f = \frac{1}{g}$ ont des sens de variation contraires.

— On sait que g change de sens en $\frac{-b}{2a} = 0$. Comme $a = 1 > 0$, on a les tableaux de variations pour g et pour f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

— Alors f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$



2.3 Devoir 2

Ex. 5 — Résoudre les inéquations suivantes puis représenter sur une droite graduée l'ensemble des points M dont l'abscisse x vérifie :

1. $|x - \frac{1}{3}| \leq 3$.
2. $|4 - 2x| \leq 9$.
3. $|5 + x| \geq |1 - x|$.
4. $| - x - 3| \leq |x - 7|$.

Ex. 6 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 7.$$

1. Calculer $f(-7)$, $f(\sqrt{2})$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Trouver les antécédents du réel 3 par f.
3. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-\infty; 0[$.
4. Dresser le tableau de variations de f.

Ex. 7 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{2|x| + 1}{|x|} = 2 + \frac{1}{|x|}.$$

1. Démontrer que pour tout réel non nul x, on a $f(x) > 2$.
2. Écrire $f(x)$, sans les barres de valeur absolue, suivant les valeurs de x.
3. Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0; \infty[$ et croissante sur l'intervalle $] - \infty; 0[$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Résoudre l'équation $f(x) = k$, où k désigne un réel strictement supérieur à 2.

Chapitre 3

Dérivation

3.1 Nombre dérivé

Définition 3.1.1

Soit f une fonction et soit D_f son ensemble de définition. Considérons a un nombre réel appartenant à D_f. Pour tout réel non nul h tel que h et $h+a$ appartiennent à D_f

- La fonction qui associe h à $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelée **taux d'accroissement**.
- Le **nombre dérivé de** f **en** a, noté $f'(a)$, est défini comme la limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers zéro. En symbole :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit aussi que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement existe.

Exemple 3.1.2

Montrer que la fonction inverse est dérivable en 1 avec $f'(1) = -1$.

Solution

En effet, sachant que $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f(1) = 1$, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{1+h} = -1.$$

Donc la fonction inverse est dérivable et par définition $f'(1) = -1$.

Exercice 3.1.3

Soit f la fonction définie sur $[1;\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$.

1. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
2. Vérifier que le taux d'accroissement de f en 2 est :

$$h \mapsto \tau(h) = \frac{\sqrt{h+1}-1}{h}.$$

3. Montrer que $\tau(h) = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$.
4. En déduire que f est dérivable en 2 et préciser $g'(2)$.

Corrigé

1. La fonction f n'est pas dérivable en 0 car f n'est pas définie en 0.
2. Rappelons que le taux d'accroissement est la fonction :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

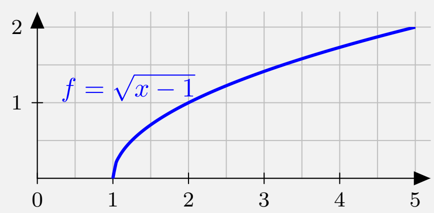
Ainsi, pour $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $a = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{\sqrt{2-1+h}-\sqrt{2-1}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}.\end{aligned}$$

3. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\\ &= \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\cdot\frac{\sqrt{1+h}+1}{\sqrt{1+h}+1}\\ &= \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}.\end{aligned}$$

4. On calcule $\lim_{h\to 0}\tau(h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \frac{1}{2}$. Par conséquent, f est dérivable en 2 et $f'(2) = \frac{1}{2}$.



3.2 Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point

Propriété 3.2.1

Soit f une fonction dérivable en a et C_f sa courbe représentative

- La droite passant par le point $P(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée **tangente** à C_f.

Propriété 3.2.2

- L'équation de la tangente en P dans un répére est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

3.3 Fonction dérivée et dérivation des fonctions usuelles

Définition 3.3.1

- On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle dérivable pour tout réel a de I, c'est-à-dire, si $f'(a)$ existe toujours pour tout $a \in I$. Cette fonction, définie par $x \mapsto f'(x)$, est notée par f'.

On donne les dérivées usuelles. Pour la suite, toutes les fonctions u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

Propriété 3.3.2

- La fonction dérivée de la somme $u + v$ est :

$$(u + v)' = u' + v'.$$

- Soit k un nombre réel. La fonction dérivée de ku est :

$$(ku)' = u'.$$

- La fonction dérivée d'un produit uv est :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

- Supposons que la fonction $v \neq 0$ sur I. Alors la fonction dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$ est :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exercice 3.3.3

Soit $f(x) = \frac{5}{x^2+x-2}$ définie sur l'intervalle $I =]-2;1[$. Considèrons $a = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur I.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse $a = 0$.

Corrigé

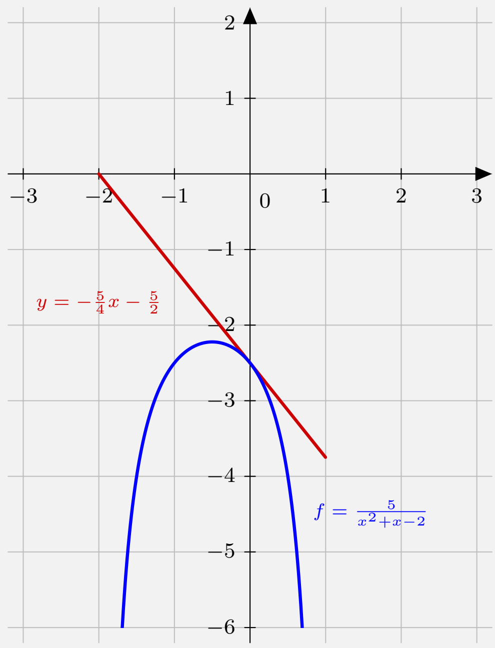
1. On note d'abord que la fonction $x \mapsto x^2 + x - 2$ est un polynôme non nul sur $]-2;1[$, donc la fonction f est bien définie. On calcule $\lim_{h\to 0} \tau(h)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{5}{(x+h)^2+(x+h)-2} - \frac{5}{x^2+x-2}}{h} = \frac{-10x-5}{(x^2+x-2)^2}$$

2. Par la question précédente, $f'(x)$ est bien déterminée. Neanmois, on utilise la formule de dérivée d'un quotient pour se convaincre que ces deux chemins conduisent au même résultat . Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{0\times(x^2+x-2)-(2x+1)\times 5}{(x^2+x-2)^2} \\ &= \tfrac{-10x-5}{(x^2+x-2)^2}. \end{aligned}$$

3. On calcule d'abord $f(0)$ et $f'(0)$, puis on utilise la formule de l'équation de la tangente $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. On a $f(0) = -\frac{5}{2}$ et $f'(0) = \frac{-5}{(-2)^2} = -\frac{5}{4}$. Donc l'équation de la tangente au point $a = 0$ est $y = -\frac{5}{4}x - \frac{5}{2}$.



3.4 Devoir 3

Ex. 8 — Déterminer D_f et f' pour les fonctions suivantes.

1. $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^3$.
2. $f(x) = \frac{3x^2-4x+7}{2x^2-x-1}$.
3. $f(x) = 3 - 5x + \frac{1}{4x-7}$.

Ex. 9 — Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. On pose $\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

1. Montrer que l'on a $\tau(h) = \frac{-2-h}{(1+h)^2}$.
2. Montrer que f est dérivable au point 1 et préciser son nombre dérivé.

Ex. 10 — Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x + 4$.

1. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative C_f dans le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$
2. On montrera que le point de coordonnées $(0; 4)$ est centre de symétrie pour C_f. Donner une équation de la tangente à C_f en ce point.
3. Soit g_m la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g_m(x) = mx^2 - (m-6)x + 4$, m étant un paramètre réel. Soit P_m la représentation graphique de g_m dans le repère $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer que toutes les courbes (P_m) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées, A étant le point d'abscisse le plus petit.

Chapitre 4

Suites

4.1 Généralités

Définition 4.1.1

Soit p un nombre entier.

- Soit n un entier tel que $n \geq p$. Une **suite à partir de** p est la fonction qui à chaque n associe le réel $u(n)$. Le réel $u(n)$ est noté aussi u_n. Ainsi définie, une suite est notée (u_n).

Notons que si a est un réel y f est une fonction définie sur l'intervalle $[a; +\infty[$, on peut définir une suite u_n comme $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq a$.

Définition 4.1.2

Considérons une fonction f définie sur un ensemble I. Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. Soient $a \in I$ et p un entier. On peut définir par récurrence une suite comme suit :

$$\begin{cases} u_p = a \\ \text{pour tout entier } n \geq p, u_{n+1} = f(u_{n+1}). \end{cases}$$

On rappelle la notion d'égalité entre deux suites définies à partir d'un certain p : $(u_n) = (v_n)$ si et seulement si $u_n = v_n$ pour tout $n \geq p$.

Définition 4.1.3

- (u_n) est croissante à partir de p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est décroissante à partir de p si pour tout $n \geq p$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Comme toujours, on dit qu'une suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante. Également, une suite est dite **stationnaire** à partir du rang p si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \geq p$.

Exercice 4.1.4

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}.$$

Corrigé

On rappelle qu'étudier le sens de variation d'une suite consiste à déterminer si la suite est croissante ou décroissante.

— On calcule les premiers termes de la suite pour conjecturer le sens de variation : $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{3}{4}$ et $u_3 = \frac{9}{8}$. Ainsi, il semble que la suite est croissante.

— On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1+1}} - \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+1}}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3^n}{2^{n+2}}.$$

Donc on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, ce qui implique que la suite (u_n) est croissante à partir de 0.

Propriété 4.1.5

Soit $I = [a; +\infty[$ et soit f une fonction définie sur I. Pour $p \geq a$, on considère la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq p$.

- ◇ f croissante sur $[p; +\infty[$ implique que (u_n) est croissante à partir de p.
- ◇ f décroissante sur $[p; +\infty[$ implique que (u_n) est décroissante à partir de p.

Comme toujours, on dit qu'une suite (u_n) converge vers un nombre réel a si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, (u_n) diverge vers $+\infty$ ou diverge vers $-\infty$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} = -\infty$.

4.2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 4.2.1

Une suite est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Théorème 4.2.2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout entier p et k, on a $u_p = u_k + (p-k) \times r$. En particulier, $u_n = u_0 + n \times r$ pour tout entier n.

Théorème 4.2.3

Soit (u_n) une suite de raison r. Alors pour tout entier p et k, on a $u_p = u_k + (p-k) \times r$. En particulier, $u_n = u_0 + n \times r$ pour tout entier n.

Théorème 4.2.4

Soit (u_n) une suite de raison r. Les affirmations suivantes sont vraies :

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

Définition 4.2.5

Une suite est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n \times q$. Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Théorème 4.2.6

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tout entier p et k, on a $u_p = u_k \times q^{(p-k)}$. En particulier, $u_n = u_0 + n \times q^n$ pour tout entier n.

Théorème 4.2.7

Soit q un nombre réel non nul. Les affirmations suivantes sont vraies :

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante égale à 1.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 0$, alors la suite (q^n) est constante égale à 0, à partir de 1.
- Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est pas monotone.

Théorème 4.2.8

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r non nulle. Alors :

- $r > 0$ implique que (u_n) diverge vers $+\infty$.
- $r < 0$ implique que (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème 4.2.9

Soit q un nombre réel distinct de 1. Alors :

- ◇ $q > 1$ implique que la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.
- ◇ $-1 < q < 1$ implique que la suite (q^n) converge vers 0.
- ◇ $q \leq -1$ implique que la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.

4.3 Devoir 4

Ex. 11 — On considère une suite géométrique décroissante dont on connaît deux termes : $\begin{cases} u_0 u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$

1. Calculer ces deux réels.
2. Quelle est la raison de la suite ?
3. On pose $z_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculer z_n en fonction de n.

Ex. 12 — Etudier la monotonie des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $u_n = n - n^3$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

Ex. 13 — On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} \text{Pour tout entier } n, u_{n+1} = \frac{2+3u_n}{7-2u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

On admet qu'on définit ainsi une suite sur $\mathbb{N}$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{5u_n}{1-u_n}$.

1. Calculer u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{v_n}{v_n+5}$.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Chapitre 5

Géométrie plane

5.1 Équation cartésienne d'une droite

Définition 5.1.1

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles : il existe un réel k tel que

$$\vec{v} = k\vec{u}.$$

Notons que, d'après la définition de colinéarité, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - yx' = 0$.

Théorème 5.1.2

Considèrons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un couple $(a; b)$ tel que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

On rappelle qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est dit vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$ si $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$.

Propriété 5.1.3

Considèrons les couples $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a', b') \neq (0; 0)$. Alors :

- Tous les points $M(x; y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax + by + c = 0,$$

  forment une droite $\mathcal{D}$, où $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. L'équation ci-dessus est appelée équation cartésienne de $\mathcal{D}$.
- Les droites $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si, et seulement si, $(a; b)$ et $(a'; b')$ sont colinéaires.

Exercice 5.1.4

Considèrons la droite d'équation cartésienne $\mathcal{D} : (a-1)x - 2y + 3 = 0$, où a est un réel.

1. Déterminer le réel a pour que $\mathcal{D}$ passe par le point $A(3; -2)$.
2. Dans ce cas-là, donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$.

Corrigé

1. On sait que $\mathcal{D}$ passe par $A(3; -2)$ si les coordonnées de A vérifient l'équation de $\mathcal{D}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad (a-1) \times 3 - 2 \times (-2) + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3a - 3 + 4 + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = -\tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

2. On sait qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Comme dans notre cas $a = -\frac{4}{3}$ et $b = -2$, on obtient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

5.2 Équation réduite

Propriété 5.2.1

Soit $\mathcal{D} : ax + bx + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$. On a :

- ◇ Si $b = 0$, alors $\mathcal{D}$ admet une équation réduite :

$$\mathcal{D} : x = k,$$

avec k un réel. Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

- ◇ Si $b \neq 0$, alors $\mathcal{D}$ admet une unique équation réduite :

$$\mathcal{D} : x = mx + p,$$

avec m le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ et p l'ordonnée à l'origine. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ es un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

5.3 Devoir 5

Ex. 14 — Le plan est muni d'un repère. Dans les cas suivants, préciser les valeurs possibles du réel x de sorte que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} x-1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ x+1 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} x+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $x \neq 0$.

Ex. 15 — On considère les deux droites suivantes :

$$\mathcal{D} : 2x - 3y + 4 = 0 \text{ et } \mathcal{D}' : x + 3y + 1 = 0.$$

On considère le point d'intersection A des deux droites et le point B de coordonnées $(3; 8)$. Déterminer une équation de la droite AB.

Ex. 16 — Le plan est rapportée à un repère (O, I, J).

1. Calculer les coordonnées des sommets A, B et C du triangle dont les côtés sont portés par les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'équations respectives :

$$\mathcal{D}_1 : 2x - y + 6 = 0;\ \mathcal{D}_2 : 5x + 2y - 14 = 0;\ \mathcal{D}_3 : y + 3 = 0.$$

2. Quelles sont les droites dont une équation est de la forme $x = k$ et qui n'ont aucun point en commun avec l'intérieur du triangle ABC ?

Ex. 17 — Pour tout réel r, on appelle $\mathcal{D}_r$ l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient :

$$(r + 1)x - (r + 2)y + 1 = 0.$$

1. Déterminer et construire $\mathcal{D}_3$.
2. Démontrer que, quelle que soit la valeur de r, $\mathcal{D}_r$ est une droite du plan.
3. Déterminer les réels r pour lequels la droite $\mathcal{D}_r$ est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

Chapitre 6

Trigonométrie

6.1 Mesure des angles

Définition 6.1.1

- On dit qu'un plan est orienté si tous les cercles sont orientés dans le sens contraire des aguilles d'une montre.

Définition 6.1.2

- Soit M un point d'un cercle trigonométrique dans le repère (O, I, J). Tout nombre réel x associé au M est appelé la mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
- La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est l'unique mesure en radian de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi[$.

6.2 Fonctions cosinus et sinus

On rappelle que dans un plan orienté, si x est la mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, alors on peut définir $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos x$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \sin x$. On a donc les propriétés suivantes.

Propriété 6.2.1

Pour tout nombre réel x, on a :

- $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$.
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$.
- $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

6.3 Équations $\sin x = \sin a$ et $\cos x = \cos a$

Propriété 6.3.1

Fixons a un nombre réel.

- L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solutions les nombres réels :

$$a + k \times 2\pi \text{ ou } \pi - a + k \times 2\pi,$$

où k est un entier relatif.

- L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solutions les nombres réels :

$$a + k \times 2\pi \text{ ou } -a + k \times 2\pi,$$

où k est un entier relatif.

Exercice 6.3.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Corrigé

— On écrit $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sous la forme d'un sinus pour se ramener à une équation du type $\sin x = \sin a$. Par exemple :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

— On résout donc l'équation $\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ par les propriétés de la fonction sinus.

— Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ sont les réels :

$$x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi \text{ ou } x = \pi + \frac{\pi}{4} + k \times 2\pi,$$

avec k un entier relatif.

6.4 Devoir 6

Ex. 18 — Calculer :

$$E = \cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{3\pi}{12} + \cos^2 \frac{7\pi}{12} + \cos^2 \frac{9\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12}$$

en justifiant exactement.

Ex. 19 — Déterminer la mesure principale des angles suivants en radians :

1. $-\frac{21\pi}{13}$.
2. $\frac{150\pi}{11}$.
3. $1854°$

Ex. 20 — Résoudre les équations et les inéquations suivantes sur les intervalles précisés.

1. $2\cos x + 1 = 0$ sur $I =]-\pi; \pi[$.
2. $2\sin^2 x = 1$ sur $I = [0; 2\pi[$.
3. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $I = [0; 2\pi[$.
4. $\sin(-x) < 1$ sur $I =]-\pi; \pi]$.

Ex. 21 — $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O, I, J) du plan. M est le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif.

1. Quelles sont les coordonnées de M dans le repère (O, I, J) ?
2. Calculer la distance IM.
3. a) Démontrer que $IM = 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
   b) En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Chapitre 7

Produit scalaire

7.1 Produit scalaire et normes

Définition 7.1.1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, comme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v}),$$

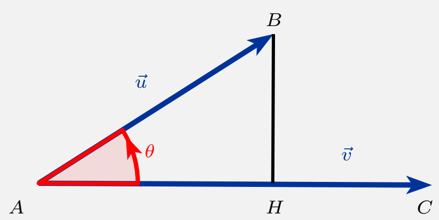
où $||\vec{u}||, ||\vec{v}||$ denotent les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Notons que si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. En plus, $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$. Une définition équivalente à la précédente est la suivante.

Définition 7.1.2

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan non nuls dans un repère orthogonal. Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AH \times AC \text{ si } \measuredangle ACH = 0. \\ -AH \times AC \text{ si } \measuredangle ACH = \pi. \end{cases}$$



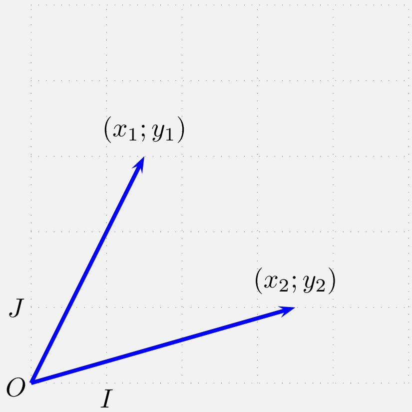
7.2 Propriétés du produit scalaire

On peut exprimer le produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormé.

Propriété 7.2.1

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$



Propriété 7.2.2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||u||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right).$$

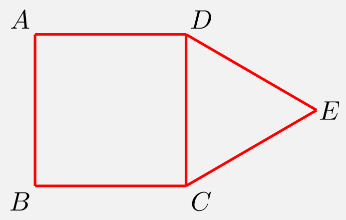
Propriété 7.2.3

Soient $\vec{u},\vec{v}$ et$\vec{w}$ deux vecteurs et soit k un nombre réel. On a :

- ◇ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- ◇ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.
- ◇ $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- ◇ $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$.
- ◇ $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$.
- ◇ $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Exercice 7.2.4

Soit $ABCD$ un carré de côté a. Considèrons le triangle équilatéral DCE.



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE}$
2. Calculer BE^2.

Corrigé

(1) Comme les segments de droite (AB) et (DC) sont parallèles, $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) = \measuredangle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = 60° = \frac{\pi}{3}$. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = ||\overrightarrow{DC}|| \times ||\overrightarrow{DE}|| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \times a \times \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{a^2}{2}.$$

Calculons maintenant $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE}$. On voit que

$$\measuredangle(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = 90° + 60° = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}.$$

Ainsi

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = ||\overrightarrow{DC}|| \times ||\overrightarrow{DE}|| \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) Pour calculer BE^2, on décompose $\overrightarrow{BE}$ comme $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} BE^2 & = & ||\overrightarrow{BE}||^2 \\ & = & ||\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE}||^2 \\ & = & ||\overrightarrow{BD}||^2 + 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DE} + ||\overrightarrow{DE}||^2. \end{array}$$

En décomposant $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ on a :

$$\begin{array}{rcl} ||\overrightarrow{BD}||^2 & = & ||\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}||^2 \\ & = & ||\overrightarrow{BA}||^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + ||\overrightarrow{AD}||^2 \\ & = & a^2 + 0 + a^2 \\ & = & 2a^2. \end{array}$$

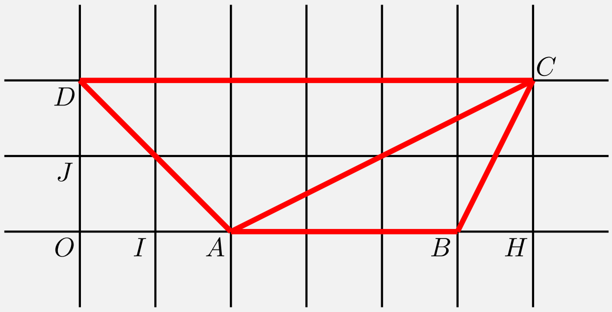
et

$$\begin{array}{rcl} 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DE} & = & 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{DE} \\ & = & 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE} \\ & = & 2 \times \frac{a^2}{2} + 2 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2) \\ & = & a^2 - \sqrt{3}a^2. \end{array}$$

Ainsi $BE^2 = 2a^2 + a^2 - \sqrt{3}a^2 + a^2 = 4a^2 - \sqrt{3}a^2$.

Exercice 7.2.5

On considère le trapèze $ABCD$ tracé sur un quadrillage à mailles carrées de côté 1 cm. H et O sont les projetés orthogonaux de C et O sur (AB). L'angle $\measuredangle BAD$ mesure 135° ou $\frac{3\pi}{4}$ radians.



Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Corrigé

— On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 3 \times 4 = 12$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -AB \times AD = -3 \times 2 = -6$. Notons qu'on peut calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ d'une autre manière :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} = -6.$$

— $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \cdot AB^2 = -18.$$

— Calculons $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= CH^2 + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} \end{aligned}$$

or $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{CH}$, ce qui implique des produits scalaires nuls, donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2^2 + 4 \times 1 = 8$.

— Dans le repère orthonormé (O, I, J), on a $\overrightarrow{AD} = (-2; 2)$ et $\overrightarrow{BC} = (1; 2)$, d'où $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{BC} = -2 \times 1 + 2 \times 2 = 2$.

7.3 Devoir 7

Ex. 22 — Considèrons dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des points : $A(-2; 0), B(1; \sqrt{3})$ et $C(-2; 2\sqrt{3})$.

1. Calculer $||\overrightarrow{AB}||, ||\overrightarrow{AC}||$, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Quelle est la nature du triangle ABC.

Ex. 23 — On considère à présent $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer les normes de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.
2. Exprimer $||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$ en fonction de x_1, y_1, x_2 et y_2.
3. Faire de même pour la quantité $||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$.
4. En déduire la Propriété 7.2.2

Ex. 24 — Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D, tel que $AB = 16, CD = 5$ et $AD = 12$. On appelle O le point d'intersection des diagonales.

1. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
2. En déduire l'angle $\measuredangle AOB$, arrondi à 1° près.

Ex. 25 — Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan P.

1. Démontrer qu'il existe un point G unique tel que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, où $\vec{0} = (0; 0)$.
2. Soit f l'application de P dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(M) = 2MA^2 + MB^2 - MC^2$$

pour tout M de P. Démontrer que $f(M) = f(G) + 2MG^2$ pour tout M de P. En déduire que l'application f présente un minimum absolu en $M = G$.

Chapitre 8

Statistiques

8.1 Quartiles et déciles

Définition 8.1.1

Considérons une série statistique $x_1, \dots, x_n$, de n valeurs, donnée en ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

- Le premier quartile, noté Q_1, est la plus petite valeur x_i (avec i comprise entre 1 et n) telle qu'au moins 25% des valeurs de la série est inférieur ou égale à x_i :

$$Q_1 = x_i \text{ tel que } 0,25 \times n \leq i.$$

- Le troisième quartile, noté Q_3, est la plus petite valeur x_i (avec i comprise entre 1 et n) telle qu'au moins 75% des valeurs de la série est inférieur ou égale à x_i :

$$Q_3 = x_i \text{ tel que } 0,75 \times n \leq i.$$

On rappelle que $[Q_1; Q_3]$ est appelé **intervalle interquartile** tandis que la dispersion liée à la médiane, donnée par $Q_3 - Q_1$, est appelée **écart interquartile**.

Définition 8.1.2

Considérons une série statistique $x_1, \ldots, x_n$, à n valeurs, donnée en ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

- Le premier décile, noté d_1, est la plus petite valeur x_i (avec i comprise entre 1 et n) telle qu'au moins 10% des valeurs de la série est inférieur ou égale à x_i :

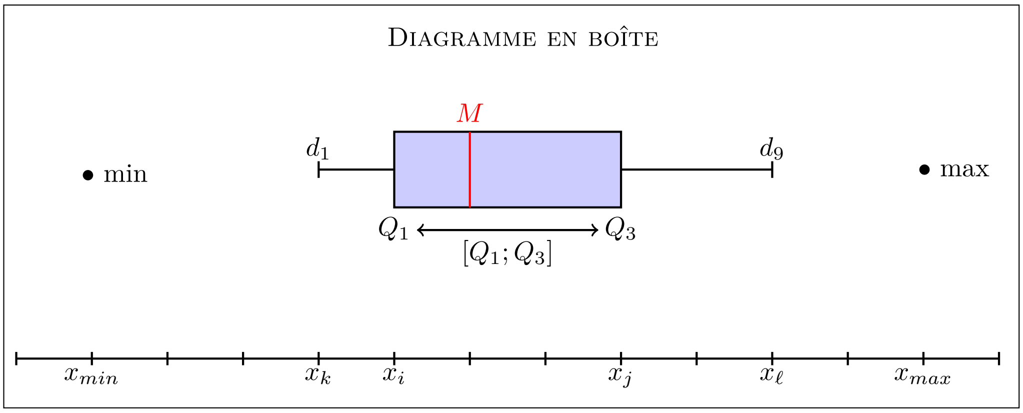
$$d_1 = x_i \text{ tel que } 0,1 \times n \leq i.$$

- Le neuvième décile, noté d_9, est la plus petite valeur x_i (avec i comprise entre 1 et n) telle qu'au moins 90% des valeurs de la série est inférieur ou égale à x_i :

$$d_9 = x_i \text{ tel que } 0,9 \times n \leq i.$$

8.2 Représentation d'une série statistique

Étant donnée une série statistique $x_1, \ldots, x_n$ de n valeurs avec $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ et après avoir choisi une échelle, on peut représenter cette série à l'aide d'un rectangle dont les extrémités représentent Q_1 et Q_3, les prolongations à gauche et à droite sont d_1 et d_9 et dont on partage notre figure par une droite représentant la médiane. Si les valeurs minimum et maximum de la série son connues, on les indique également. Une repésentation ainsi construite est appelée **diagramme en boîte**.



8.3 Variance

On rappelle que la moyenne d'une série statistique $x_1, \ldots, x_n$, notée $\bar{x}$, est définie par $\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. On utilise le symbole $\sum_{i=1}^{n} x_i$ comme abréviation de $x_1 + \cdots + x_n$.

Définition 8.3.1

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une série statistique de n valeurs. La variance de la série est donnée par :

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2.$$

Définition 8.3.2

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_k$ une série statistique de k valeurs et soient $n_1, \ldots, n_k$ leurs effectifs. La variance de la série est donnée par :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \bar{x}^2, \text{ où } N = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

On s'intéresse à la racine carrée de la variance V d'une série statistique donnée. Le nombre $s = \sqrt{V}$ est appelé **l'écart type**.

Exercice 8.3.3

Considèrons la série statistique suivante :

$$1, 14, 42, 429, 1430, 16796, 58786, 4862, 5, 132, 1, 2$$

1. Déterminer la médiane, Q_1, Q_3, d_1 et d_9.

2. Proposer un diagramme en boîte.

3. Calculer la variance et l'écart type de cette série.

Corrigé

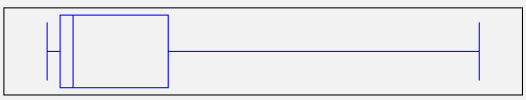
On commence par présenter la série en ordre croissant :

rang i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Valeurs x_i	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

(1) On rappelle d'abord que la médiane est la valeur qui divise la série en deux parties égales. Comme $n = 12$ est un nombre pair, la médiane est la valeur au milieu des 6^{e} et 7^{e} valeurs de la série ; elle est donc égale à $\frac{42+132}{2} = 87$.
On a $0,25 \times 12 = 3$. Ainsi, le premier quartile Q_1 est la 3^{e} valeur de la série : $Q_1 = 2$.
On a $0,75 \times 12 = 9$. Ainsi, le troisième quartile Q_3 est la 9^{e} valeur de la série : $Q_3 = 1430$.
On a $0,1 \times 12 = 1,2$. Le premier décile d_1 est donc la 2^{e} valeur de la série : $d_1 = 1$.
On a $0,9 \times 12 = 10,8$. Le neuvième décile d_9 est donc la 11^{e} valeur de la série : $d_9 = 16796$.

(2) D'après les valeurs obetenues précédemment, on propose le diagramme suivant. Nous laissons au lecteur l'identification des valeurs correspondantes.

Diagramme en boîte



(3) À l'aide de la calculatrice on trouve $\bar{x} = 6875$. Ainsi,

$$V = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i - 6875^2 = 266383276$$

et

$$s = \sqrt{266383276} \approx 16321,25.$$

8.4 Devoir 8

Ex. 26 — Reprenez la série de l'exercice 8.3.3.

1. Chosissez une échelle convenable puis recopiez le diagramme en boîte de l'exercice en question.
2. Completez la représentation de la série en identifiant Q_1, Q_3, d_1, d_9, l'intervalle interquartile, la médiane et les valeurs maximum et minimum.
3. Refaites l'exercice 8.3.3 mais en considérant la série suivante :

$$1, 4, 8, 2, 9, 6, 3, 3, 3, 11, 13, 7, 22, 14, 14, 15, 5, 5, 5, 5, 19$$

Ex. 27 — (M El-Methni UPMF Grenoble) On définit le milieu d'une série statistique comme $\mathbf{m} = \frac{x_{min}+x_{max}}{2}$.

1. Calculer la médiane et le milieu **m** de chacune de quatre séries suivantes puis comparer et conclure.

rang i	1	2	3	4	5	6	7
Série 1	3	4	5	12	19	20	21
Série 2	9	10	11	12	19	20	21
Série 3	1	2	3	12	13	14	15
Série 4	3	4	5	18	19	20	21

2. Donner une série dont le milieu **m** est le double de la médiane.
3. Calculer l'écart type de chaque série.

Ex. 28 — Considèrons la série suivante donnée par leurs valeurs (notes obtenues à un contrôle d'espagnol par 25 élèves) et leurs effectifs.

Note	17	18	3	4	5	6	10	11	12
Effectif	2	1	1	5	4	2	6	3	1

1. Déterminer la médiane, le milieu, le premier et le troisième quartile et le premier et le neuvième décile de la série.
2. Déterminer la fréquence des élèves dont la note appartient à l'intervalle $[\bar{x} - s; \bar{x} + s]$.
3. Construire le diagramme en boîte associé à cette série.

Chapitre 9

Probabilités

9.1 Variable aléatoire

On rappelle qu'une expérience est dite aléatoire si on ne peut pas prévoir le résultat de toutes les issues possibles. Dans la suite, Ω indique toujours l'ensemble fini des résultats possibles pour une expérience aléatoire.

Définition 9.1.1

On définit une variable aléatoire sur Ω comme la donnée d'une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.

Comme convenu en théorie des probabilités, si $x_1, \ldots, x_n$ sont les images par X des éléments de Ω, alors pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on écrit $(X = x_i)$ au lieu de $X(\Omega)$. Autrement dit, $(X = x_i)$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x_i par X.

On rappelle qu'une loi de propabilité P sur Ω est « la chance » qu'une ou plusieurs issues soient réalisées ; toute probabilité est exprimée en quotient ou pourcentage et prend ses valeurs dans $[0; 1]$.

Définition 9.1.2

Soit X une variable aléatoire sur Ω et soit P une loi de probabilité sur Ω. On définit la loi de probabilité de X comme $P(X = x_i)$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$.

On donnera sous forme de tableau la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilités p_i	$p_1 = p_1(X = x_1)$	$p_2 = (X = x_2)$	$\cdots$	$p_n = (X = x_n)$

Une loi de probabilité satisfait toujours :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

9.2 Espérance mathématique et variance

Soit X une variable aléatoire sur Ω. Considèrons une loi de probabilité donnée par le tableau suivant.

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilités p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Dans le définition suivante, le lecteur peut reconnaître des analogies avec le chapitre précédent.

Définition 9.2.1

Soit X une variable aléatoire sur Ω. On définit les nombres réels suivants.

- ◇ L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, comme :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

- ◇ La variance de X, notée $V(X)$, comme :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2.$$

- ◇ L'écart type de X, noté σ, comme :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}.$$

On s'intéresse aux propriétés de l'espérance mathématique et de la variance.

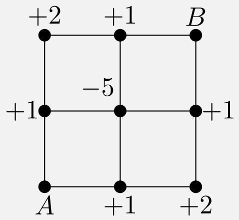
Propriété 9.2.2

Soit X une variable aléatoire sur Ω et soient a, b dans $\mathbb{R}$. On a :

- ◇ $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- ◇ $V(ax) = a^2 V(X)$.

Exercice 9.2.3

Pour se rendre du point A au point B dans la figure ci-dessous, on prend au hasard un trajet parmi tous les trajets possibles en se déplaçant d'un pas à droite ou d'un pas vers le haut. À chaque point, les probabilités de se déplacer vers la droite ou vers le haut sont égales. Le passage par chacun des points rapporte les points indiqués.



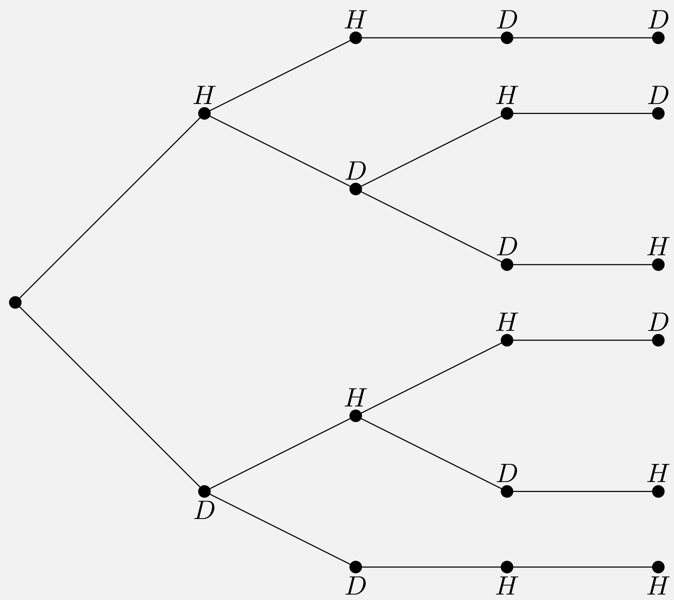
1. À l'aide d'un arbre, représenter tous les trajets possibles.

2. On appelle X la variable aléatoire égale au score obtenu après l'arrivée en B. Déterminer les valeurs prises par X puis la loi de probabilité de X.

3. Calculer $E(X), V(X)$ et σ.

Corrigé

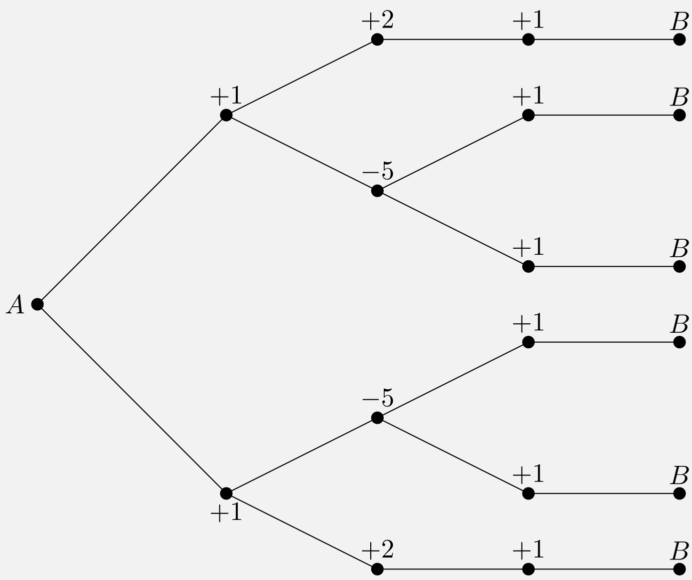
(1) En indiquant les déplacements haut H et droite D on obtient l'arbre suivant.



Exercice 9.2.3 (suite).

Corrigé

(1) On peut également construir un arbre en indiquant les points rapportés.



(2) On a le tableau de trajets possibles :

Issues	Points rapportés
HHDD	$+1+2+1=4$
HDHD	$+1-5+1=-3$
HDDH	$+1-5+1=-3$
DHHD	$+1-5+1=-3$
DHDH	$+1-5+1=-3$
DDHH	$+1+2+1=4$

L'ensemble des valeurs prises par X est donc $\{-3;4\}$. La loi de probabilité est donnée par :

Valeus x_i	-3	4
Probabilités p_i	$p_1(X=-3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$p_2(X=4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Notons que la loi de probabilité vérifie :

$$p_1+p_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

(3) Calculons l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X :

$$E(X)=-3\left(\frac{2}{3}\right)+4\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

$$V(X)=\frac{2}{3}\left(-3+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(4+\frac{2}{3}\right)^2\approx 10,89.$$

$$\sigma=\sqrt{10,89}=3,3.$$

9.3 Devoir 9

Ex. 29 — Une urne contient cinque boules dont deux sont noires et trois sont bleues. On prélève une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On prélève une deuxième boule et on note sa couleur.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre.
2. Calculer la probabilité que les deux boules soient bleues.
3. Calculer la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes.
4. Idéntifier Ω et définir une variable aléatoire X.
5. Justifier que votre variable aléatoire est bien définie puis donner une loi de probabilité de X.

Ex. 30 — Soit X une variable aléatoire. Considèrons la loi de probabilité de X donnée par le tableau suivant.

Valeus x_i	3	4	7	10
Probabilités p_i	$p_1 = \frac{1}{6}$	$p_2 = \frac{1}{12}$	$p_3 = \frac{5}{12}$	$p_4 = \frac{1}{3}$

1. Justifier qu'on a bien une loi de probabilité.
2. Calculer $E(X), V(X)$ et σ.

Ex. 31 — On reprend la loi de probabilité de l'exercice précédent.

1. On augmente les valeurs prises par X de 3. Calculer la nouvelle espérance mathématique puis la nouvelle variance.
2. On augmente les valeurs prises par X de 50%. Calculer la nouvelle $E(X)$ puis le nouvel écart type.

Ex. 32 — Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

Valeus x_i	$x_1 = 1$	x_2	x_3	x_4
Probabilités p_i	$p_1 = \frac{1}{25}$	p_2	p_3	p_4

Les nombres x_1, x_2, x_3, x_4 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r. Les nombres p_1, p_2, p_3, p_4 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q. On sait de plus que $E(X) = \frac{27}{5}$.

1. Calculer les six nombres inconnus de ce tableau.
2. Calculer $E(X), V(X)$ et σ.

Chapitre 10

La loi binomiale

10.1 Schéma de Bernoulli

Considérons une expérience aléatoire à deux issues : S (succès) et E (échec). Telle type d'expérience est dite **épreuve de Bernoulli**.

Définition 10.1.1

Un schéma de Bernoulli est la répetition d'un nombre fini n d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Considérons maintenant un schéma de Bernoulli à n épreuves. Soit p la probabilité d'obtenir succès dans chaque épreuve. On définit la variable aléatoire X comme le nombre de succès obtenus dans notre schéma.

Définition 10.1.2

Soit X la variable aléatoire définie ci-dessus. La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On note cette loi par $\mathscr{B}(n;p)$.

On peut réaliser un arbre pondéré pour déduire la loi de probabilité d'une variable aléatoire X. On note la probabilité d'obtenir k succès par $P(X = k)$. Par exemple, considérons l'exercice suivant.

Exercice 10.1.3

On lance 4 fois de suite une pièce truquée, telle que la probabilité d'obtenir face soit $p = 0,4$. On s'intéresse au nombre de fois où on obtient face. Soit S (succès) l'événement d'obtenir face à un lancer et soit E (échec) l'événement contraire. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de succès.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un succès : $P(X = 1)$.

Exercice 10.1.3 (suite)

Corrigé

(1) Comme la probabilité de succès est égale à $p = 0,4$, on obtient une probabilité d'échec $q = 1 - p = 0,6$. L'arbre pondéré est montré ci-dessous.

(2) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,4$, c'est-à-dire, $\mathscr{B}(4; 0,4)$.

(3) D'après l'arbre pondéré, on peut noter les successions d'un succès comme :

— $SEEE$.

— $ESEE$.

— $EESE$.

— $EEES$.

Selon le **principe multiplicatif**, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. On obtient donc :

— $P(SEEE) = 0,4 \times 0,6^3 = 0,0864$.

— $P(ESEE) = 0,6 \times 0,4 \times 0,6^2 = 0,0864$.

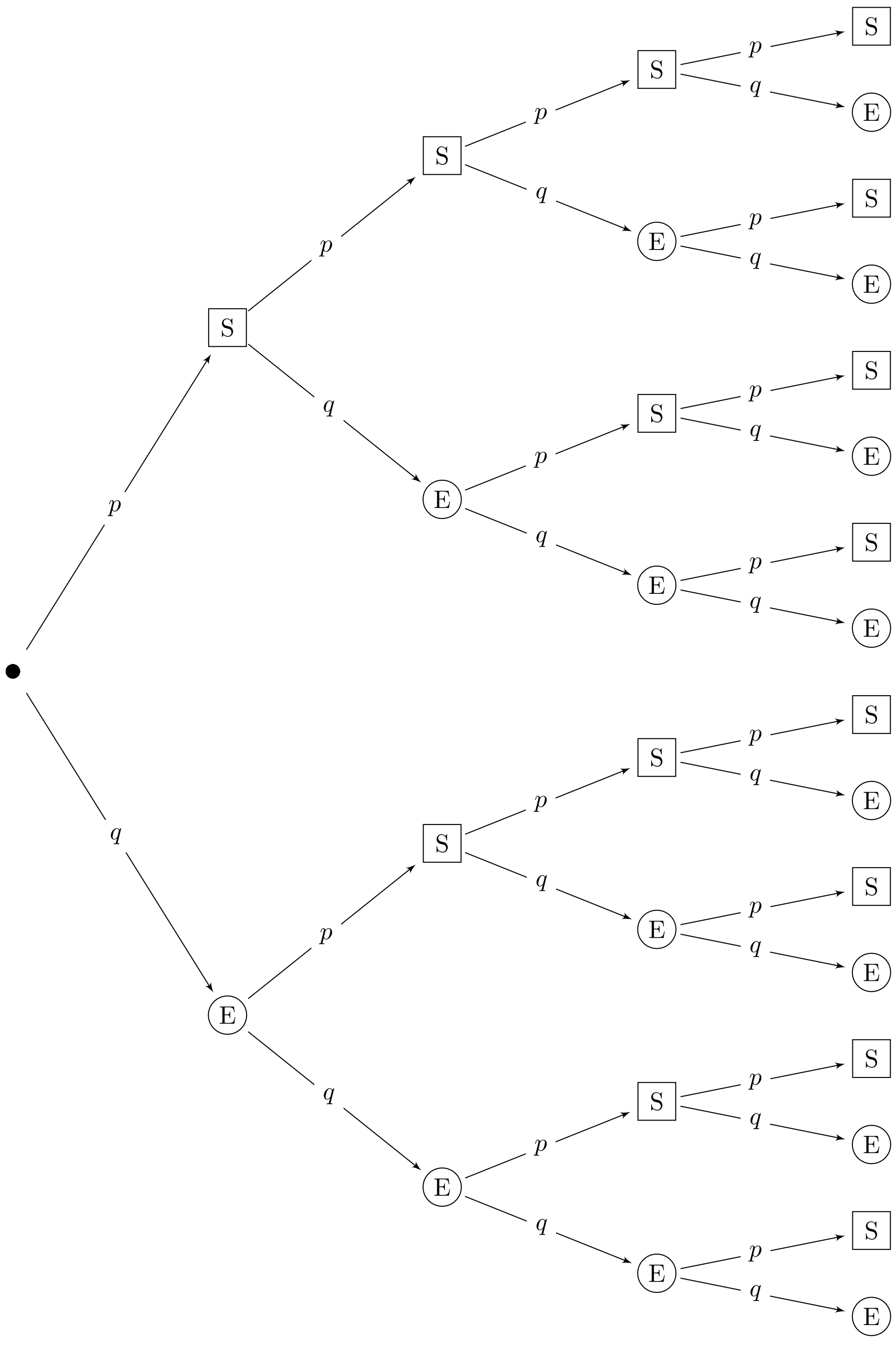
— $P(EESE) = 0,6^2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,0864$.

— $P(EEES) = 0,6^3 \times 0,4 = 0,0864$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir un succès est la somme des probabilités obtenues :

$$P(X = 1) = 4 \times 0,0864 = 0,3456.$$

Arbre pondéré de l'exercice 10.1.3.



10.2 Loi binomiale

On rappelle que si n et k sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments. Dans notre contexte, après n épreuves, $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de k succès.

Théorème 10.2.1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Alors la loi de probabilité de X est :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}.$$

Les propriétés suivantes sont connues comme **symétrie** et **triangle de Pascal**.

Propriété 10.2.2

- Soient k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

- Soient k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n-1$. On a :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

On rappelle le triangle de Pascal pour $n = 4$:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

10.3 Espérance et variance

Propriété 10.3.1

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.

- L'espérance de X est : $E(X) = n \times p$.
- La variance de X est : $V(X) = n \times p \times (1-p)$.

Exercice 10.3.2

Un archer vise une cible, qu'il atteint avec une probabilité de $p = 0,8$. Il effectue 20 tirs identiques et indépendants. On appelle X le nombre de fois où il atteint la cible.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Déterminer le nombre moyen de tirs réussis puis la variance de X.

3. Déterminer la probabilité qu'il réussisse moins de 5 tirs.

4. Déterminer la probabilité qu'il réussisse les 10 tirs.

Corrigé

(1) Les lancers sont identiques et indépendants. X représente donc le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,8$, c'est-à-dire, $\mathscr{B}(20; 0,8)$. On a donc pour $0 \leq k \leq 20$:

$$P(X = k) = \binom{20}{k} \times 0,8^k \times 0,2^{20-k}.$$

(2) Calculer le nombre moyen de tirs réussis revient à calculer l'espérance de X :

$$E(X) = 20 \times 0,8 = 16.$$

Donc

$$V(X) = 16 \times 0,2 = 3,2.$$

(3) On a :

$$\begin{array}{rcl} P(X < 5) & = & P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 4) \\ & \approx & 1,38 \times 10^{-8}. \end{array}$$

(4) $P(X = 10) = \binom{20}{10} \times 0,8^{10} \times 0,2^{10} \approx 0,002$.

10.4 Devoir 10

Ex. 33 — Reprendre l'énoncé de l'exercice 10.1.3. Compléter le tableau suivant. Justifier.

$P(X = 0) =$
$P(X = 1) = 0,3456$
$P(X = 2) =$
$P(X = 3) =$
$P(X = 4) =$

Ex. 34 — Le jeu du tapis vert consiste à cocher 4 cases, un seul cœur, un seul pique, un seul carreau et un seul trèfle, sur la table suivante :

Pique	1	R	D	V	10	9	8	7
Cœur	1	R	D	V	10	9	8	7
Carreau	1	R	D	V	10	9	8	7
Trèfle	1	R	D	V	10	9	8	7

1. Un joueur ayant coché dans les conditions imposées quatre cartes sur cette table, quelle est la probabilité de chacun des événements suivants qui seuls permettent le gain :
   a) Les quatre cartes cochées on été tirées.
   b) Exactement trois des cartes cochées on été tirées.
   c) Exactement deux cartes cochées ont été tirées.
2. En déduire que la probabilité que le joueur soit gagnant est égale à $P(Gain) = \frac{323}{4096}$.

Ex. 35 — Lors d'une loterie, une publicité TV annonce qu'un billet sur quatre est gagnant. On suppose que le nombre de billets de loterie mis en vente est très grand.

1. Calculer la probabilité de gagner si l'on achète un billet.
2. Blaise affirme qu'en achetant quatre billets, il est sûr de gagner.
   a) Calculer la probabilité de ne rien gagner en achetant quatre billets comme Blaise.
   b) Calculer la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant en achetant trois billets comme Blaise.
   c) Que peut-on dire à Blaise ?

Ex. 36 — Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. On suppose qu'une variable aléatoire suit la loi suivante :

$$P(X = 0) = (1 - p)^n$$

et

$$P(X = k) = p \times (1 - p)^{k-1},$$

pour $1 \leq k \leq n$.

1. Montrer que :

$$E(X) = p[1 + 2(1-p) + \cdots + n(1-p)^{n-1}] = p \times \sum_{k=1}^{n} k \times (1-p)^{k-1}.$$

2. Soit x un réel. On pose $S(x) = 1 + 2x + 3x^2 \cdots + nx^{n-1}$.
   a) Simplifier l'expression $S(x) - xS(x)$.
   b) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x.
   c) En déduire que :

$$E(x) = \frac{1}{p}(1 - (1+np)(1-p)^n).$$

Chapitre 11

Échantillonnage

11.1 Méthode

Définition 11.1.1

Soit X une loi binomiale suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$. Considérons deux entiers naturels k_1 et k_2 vérifiant les deux conditions suivantes.

1. k_1 est le plus petit des entiers k tel que $P(X \leq k_1) > 0,025$.
2. k_2 est le plus petit des entiers k tel que $P(X \leq k_2) \geq 0,975$.

L'intervalle de fluctuation à 95% est l'intervalle :

$$I = \left[\frac{k_1}{n}; \frac{k_2}{n}\right].$$

Considérons une expérience aléatoire $\mathcal{E}$. Soit A un événement et soit $P(A)$ la probabilité de A. Considérons l'affirmation $P(A) = p$, où p est un réel compris entre 0 et 1. L'échantillonnage est une méthode permettant accepter ou rejetter l'hypothèse $P(A) = p$.

La méthode pour accepter ou rejetter l'affirmation $P(A) = p$ est la suivante.

1. **Fréquence observée**. On réalise n fois l'expérience $\mathcal{E}$ et on note f, dite *la fréquence observée*, la fréquence d'apparition de l'événement A.
2. **Modélisation par un schéma de Bernoulli**.
   a. On modélise $\mathcal{E}$ par une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'événement A et l'échec l'événement contraire, noté $\bar{A}$, puis on modélise par un schéma de Bernoulli la répétition de cette épreuve n fois, de façon indépendante.
   b. On définit X la variable aléatoire comme le nombre de succès obtenus après n épreuves. Si $P(A) = p$, on a donc que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.
   c. On définit la variable aléatoire Y comme $Y = \frac{X}{n}$. On observe que Y est égale au nombre de succès obtenus, divisé par le nombre d'épreuves. Y est appelée *fréquence théorique*.

3. **Critère de décision de l'hypothèse** $P(A) = p$. Soit I l'intervalle de fluctuation à 95%.

$$\begin{cases} \text{Si } f \in I, & \text{alors on accepte l'hypothèse.} \\ \text{Si } f \notin I, & \text{alors on rejette l'hypothèse.} \end{cases}$$

Exercice 11.1.2

On a lancé 100 fois une pièce de monnaie, non necessairement équilibrée.

1. Si on suppose que la pièce de monnaie est équilibrée, quelle est l'intervalle de fluctuation à 95% ?
2. Supposons que le côté face est apparu 57 fois. Accepter ou rejetter la affirmation : *La sortie de face a une probabilité égale à* $0,5$.

Corrigé

(1) Soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de fois d'apparition du côté face. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$ car on a supposé que la pièce est équlibrée. Á l'aide d'un tableur on trouve $P(X \leq k)$ pour les entiers k de 0 à 100. On montre deux extraits du tableur ci-dessous.

fx =LOI.BINOMIALE.N(A41;100;0,5;1)

	Lancers	P(X<=k)	C
39	38	0,010489368	
40	39	0,0176001	
41	40	0,028443967	
42	41	0,04431304	
43	42	0,06660531	
44	43	0,096673952	
45	44	0,135626512	
46	45	0,184100809	
47	46	0,242059207	
48	47	0,308649707	
49	48	0,382176717	
50	49	0,460205381	
51	50	0,539794619	
52	51	0,617823283	
53	52	0,691350293	
54	53	0,757940793	
55	54	0,815899191	

COURS VALIN

fx =LOI.BINOMIALE.N(A41;100;0,5;1)

	Lancers	P(X<=k)	C
59	58	0,95568696	
60	59	0,971556033	
61	60	0,9823999	
62	61	0,989510632	
63	62	0,993983512	

Exercice 11.1.2 (suite)

Corrigé

(1) On a donc que $k_1 = 40$ est le plus pletit entier vérifiant $P(X \leq 40) > 0,025$ et $k_2 = 60$ est le plus pletit entier vérifiant $P(X \leq 60) \geq 0,975$. Par conséquent, l'intervalle de fluctuation à 95% est :

$$I = \left[\frac{40}{100}; \frac{60}{100}\right] = [0,4; 0,6].$$

(2) D'après l'énoncé, la *fréquence observée* f est égale à $\frac{57}{100} = 0,57$. Par la question (1), $I = [0,4; 0,6]$. Comme $f \in I$, on accepte l'hypothèse. On peut conclure que la pièce est bien équilibrée.

11.2 Devoir 11

Ex. 37 — On donne un extrait d'une table donnant les valeurs de $P(X \leq k)$, pour $n = 20$ et différents valeurs de p.

1. Á l'aide de la table ci-dessous, déterminer $P(X \leq 11)$ pour X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

fx =LOI.BINOMIALE.N(A3;20;0,2;1)

	A	B	C	D	E
2	k	p=0,2	p=0,25	p=0,3	p=0,35
3	0	0,011529215	0,003171212	0,000797923	0,000181245
4	1	0,06917529	0,024312625	0,00763726	0,00213312
5	2	0,206084719	0,091260432	0,035483132	0,012117707
6	3	0,411448862	0,225156048	0,107086805	0,044375603
7	4	0,629648264	0,414841503	0,237507779	0,118196559
8	5	0,804207785	0,617172654	0,416370829	0,245395745
9	6	0,913307486	0,785781948	0,608009812	0,416625418
10	7	0,967857337	0,898188143	0,772271797	0,601026605
11	8	0,990018214	0,959074832	0,886668537	0,762377643
12	9	0,997405173	0,986135583	0,952038103	0,878219414
13	10	0,999436586	0,996057858	0,982855184	0,946833386
14	11		0,999064608	0,994861838	0,980420645
15	12		0,999816296	0,99872112	0,99398473
16	13		0,999970488	0,999738953	0,998479338
17	14			0,99995706	0,999689425
18	15			0,99999445	0,999950059
19	16				0,999993916
20	17				0,999999472
21	18				0,999999971
22	19				0,999999999
23	20				1

2. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% pour une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$.
3. Même question pour : $p = 0,25$; $p = 0,3$ et $p = 0,35$ en conservant $n = 20$.

Ex. 38 — Un problème de parité.

1. À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% pour une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$, puis $n = 200$ et $p = 0,5$.
2. Un rassemblement d'élèves franco-mexicains est organisé à Paris, sous la forme d'une délégation par ville. Étant donné que dans chaque ville, les élèves sont en nombre égal de filles et de garçons, une commission est chargée de vérifier que les délégations envoyées respectent la parité.

   La ville de Mexico envoie une délégation de 20 personnes, dont 7 filles, et la ville de Marseille, une délégation de 200 personnes, dont 80 filles. À l'aide de la questions (1), accepter ou rejetter l'hypothèse suivante :

   Les deux villes ont respecté la parité.

Ex. 39 — L'année dernière, le centre d'enseignement à distance Cours Valin a acheté une nouvelle machine à café. Le vendeur a affirmé que *la probabilité que la machine tombe en panne pendant les deux premiers mois est égale à* $0,01$. Au cours de deux premiers mois, la machine est tombée en panne 4 fois.

1. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre k de pannes. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. À l'aide d'une feuille de tableur ou de la calculatrice, donner une table contenant $P(X \leq k)$ pour k comprise entre 0 et 60.
3. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95%.
4. Accepter ou rejetter l'affirmation du vendeur.

Chapitre 12

Révision générale

Ce dernier devoir a comme objectif de réviser tous les chapitres précédents.

12.1 Devoir 12

Ex. 40 — 1. Déterminer selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$x^2 + 2x + 4 = kx.$$

2. Étudier selon les valeurs de k, le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x + 4 - kx$. Justifier.

Ex. 41 — Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{1 - |x|}.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[-1; 0]$
3. Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $[0; 1]$.
4. On considère un point quelconque M de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x positive.
   a) Quelle est l'ordonnée du point M ?
   b) Démontrer que le point M' d'abscisse $-x$ a la même ordonnée que M.
   c) Quelle propriété géométrique peut-on déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Ex. 42 — Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3.$$

1. Démontrer que pout tout réel x, $P(x) = (x - 1)^3 - 2$.
2. Démontrer que la fonction P est croissante et en déduire que si $x \leq 2,2$, alors $P(x) \leq -0,27$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par
$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x-2)^2}.$$
Déduire de la question (2) que si $x \leq 2,2$, alors $f(x) \leq \frac{-0,2}{(x-2)^2}$.
4. En déduire un nombre réel h strictement positif, tel que $f(x) \leq -5$ pour tout $x \neq 2$ appartenant à l'intervalle $[2-h; 2+h]$.
5. Vérifier que, pour tout réel x différent de 2, on a :
$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}.$$
6. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.

Ex. 43 — Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, où u_0 et r sont entiers naturels. Démontrer que la suite (v_n) de terme général défini par $v_n = 3^{u_n}$ est une suite géométrique dont ont précisera le premier terme et la raison.

Ex. 44 — Soit P un plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soient $A(-1;4), B(2;1), C(-4;-5), D(-2;1)$ et $E(0;1)$ cinq points de ce plan.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Déterminer que les points A, D et C son alignés.
3. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Conclure.
4. Soit F le point de P définie par : $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Démontrer que B, C et F sont alignés.

Ex. 45 — Donner une série de 20 valeurs au hasard.

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type de votre série.
2. Déterminer la proportion de valeurs se trouvant en dehors de l'intervalle $J = [\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$ (vous pouvez utiliser un tableur).
3. Modifier votre série pour obtenir un pourcentage le plus grand possible en dehors de J.
4. Soit t un nombre réel positif fixé. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une série statistique de valeurs n_i, avec $1 \leq i \leq n$, de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type s. On note I l'ensemble des indices i tels que
$$x_i \notin [\bar{x} - ts, \bar{x} + ts].$$
a) On pose $N = \sum_{i=1}^{n} n_i$. Montrer que $i \in I \Leftrightarrow ts \leq |x_i - \bar{x}|$.
b) En déduire que : $\frac{\sum_{i \in I} n_i (ts)^2}{N} \leq s^2$ puis que $\sum_{i \in I} n_i \leq \frac{1}{t^2}$
5. Comparer les résultats des questions (2) et (4). Conclure.

6. Soient $x_1, x_2 \cdots, x_{20}$ les valeurs de votre série choisie en (1). Choisir $p_1, p_2 \cdots, p_{20}$ de sorte que les p_i ne soient pas tous égales et que si X est une variable aléatoire, alors le tableau suivant définit une loi de probabilité de X.

Valeus x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_{20}
Probabilités p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_{20}

a) Justifier qu'on a bien une loi de probabilité.
b) Calculer $E(X), V(X)$ et σ.

Ex. 46 — Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(40; 0,25)$.

1. À l'aide de l'extrait ci-dessous, déterminer l'intervalle de fluctuation à 95%.
2. M. Hugo Brod a organisé un jeu pour les élèves qui consiste à tirer une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 9 boules noires. Sur 40 élèves ayant joué, 6 ont gagné. Selon la question (1), peut-on supçonner M. Brod de tricherie ?

	A	B
1	k	P(X<=k)
2	0	1,00566E-05
3	1	0,000144144
4	2	0,001015715
5	3	0,00469568
6	4	0,01604224
7	5	0,043273983
8	6	0,096224593
9	7	0,181954154
10	8	0,2998323
11	9	0,439539732
12	10	0,583904078
13	11	0,715144393
14	12	0,820865758
15	13	0,896768276
16	14	0,945562752
17	15	0,973755116
18	16	0,988438639
19	17	0,995348532
20	18	0,998291635
21	19	0,999427569
22	20	0,999825146