Ecuaciones Diferenciales Parciales

Prof. Álvaro Amador J.
Escuela de Física
Unidad Académica carrera Licenciatura Ingeniería Física

EDP (I)

- Diversas cantidades físicas dependen de coordenadas espaciales y temporales, como parámetros independientes.
- En esas condiciones, las derivadas en las ecuaciones que las involucran deben ser parciales.
- Resolver EDO y EDP difiere por varios motivos.

TEC

EDP (II)

- Por ejemplo, la condición inicial involucra no solo un parámetro sino varios (espacio y tiempo, entre otros).
- La evolución temporal está acoplada a la evolución espacial.
- Esos acoplamientos se convierten en conjuntos de ecuaciones, que deben ser resueltos de manera simultánea.

TEC

EDP (III)

- Los diferentes tipos de EDP requieren métodos particulares para encontrar la solución, con un adecuado nivel de precisión.

TEC

EDP 2D general

- Una forma general de EDP en dos coordenadas (x, y) cualesquiera es:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

- Se obtienen casos particulares para $B^2 = AC$, $B^2 > AC$ y $AC > B^2$.

TEC

EDP 2D: ecuación parabólica

- Cuando $B^2 = AC$, la EDP resultante se denomina parabólica.
- Si B=C=0, en física se tiene como ejemplo la ecuación de calor en una dimensión, utilizando una dimensión espacial y la otra temporal:

$$\frac{\kappa}{c\rho}\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$$

TEC

EDP 2D: ecuación hiperbólica

- Cuando $B^2 > AC$, la EDP resultante se denomina hiperbólica.
- Si $B = 0$ y $AC < 0$, en física se tiene como ejemplo la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 \Psi(y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(y,t)}{\partial t^2}$$

TEC

EDP 2D: ecuación elíptica

- Cuando $AC > B^2$, la EDP resultante se denomina elíptica.
- Si $B = 0$ y $AC > 0$, en física se tiene como ejemplo la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \mathrm{U}(x,y) = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x,y)$$

TEC

EDP 3D

- En tres dimensiones espaciales y una temporal, algunas EDP importantes para la física son:

$$\frac{\partial \mathrm{n}(\vec{r},t)}{\partial \mathrm{t}} - \vec{\nabla} \cdot \mathrm{D}(\vec{r})\vec{\nabla}\mathrm{n}(\vec{r},t) = \mathrm{S}(\vec{r},t)$$

Ecuación de difusión

$$-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial \Psi(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{H}\Psi(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$$

Ecuación de Schrödinger

Estabilidad y unicidad (I)

- Bajo diferentes condiciones de frontera, los tipos de EDP mencionados anteriormente presentan variadas características de estabilidad y unicidad de las soluciones.
- Las condiciones de frontera comunes se denominan de Dirichlet, Neumann, Cauchy.

TEC

Estabilidad y unicidad (II)

CF	Descripción
Dirichlet	Especifica los valores de la solución en la frontera.
Neumann	Especifica los valores de la derivada normal de la solución en la frontera.
Cauchy	Especifica los valores de la solución y de la derivada normal de la solución en la frontera.

TEC

Estabilidad y unicidad (III)

Table 17.1 The Relation Between Boundary Conditions and Uniqueness for PDEs.

Boundary Condition	*Elliptic* (*Poisson Equation*)	*Hyperbolic* (*Wave Equation*)	*Parabolic* (*Heat Equation*)
Dirichlet open surface	Underspecified	Underspecified	*Unique & stable (1-D)*
Dirichlet closed surface	*Unique & stable*	Overspecified	Overspecified
Neumann open surface	Underspecified	Underspecified	*Unique & Stable (1-D)*
Neumann closed surface	*Unique & stable*	Overspecified	Overspecified
Cauchy open surface	Nonphysical	*Unique & stable*	Overspecified
Cauchy closed surface	Overspecified	Overspecified	Overspecified

Landau, R. H., Páez, J., & Bordeianu, C. C. (2011). *A Survey of Computational Physics: Introductory Computational Science*. Princeton: Princeton University Press.

TEC

Separación de variables (I)

- La separación de variables es un método analítico para resolver EDP.
- De ser posible, conviene combinar este método analítico con métodos numéricos para resolver EDP, pues aumenta la rapidez del cálculo, la precisión de las soluciones y reduce las necesidades de memoria o recursos computacionales.

TEC

Separación de variables (II)

- Cada vez que una variable se separa de las otras, se puede obtener su solución con las técnicas para EDO y luego se combina con las soluciones de las variables restantes.
- Las condiciones iniciales y de frontera se utilizan para determinar los parámetros desconocidos, que suelen ser coeficientes o autovalores.

TEC

Separación de variables (III)

- Como ejemplo, se puede desarrollar la solución de la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Rapidez de fase de la onda

TEC

Separación de variables (IV)

- Las condiciones de frontera son que los extremos de la onda, en x = 0 y x = L, cumplen que:

$$\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$$

- Suponiendo que la solución acepta esta separación:

$$\Psi(x,t) = X(x)T(t)$$

Separación de variables (V)

- La ecuación de onda unidimensional se puede reescribir como:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2$$

- De lo cual se obtiene:

$$X''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} X(x) = -k^2 X(x)$$

$$T''(t) = -\omega^2 T(t)$$

TEC

Separación de variables (VI)

- Las dos ecuaciones diferenciales anteriores son ordinarias, por lo que se pueden resolver numéricamente por cualquiera de los métodos ya estudiados.

EDO 2do grado a EDO 1ro (I)

- Al utilizar separación de variables se pueden generar EDO de segundo orden o superior, que conviene convertir en EDO de primer orden para resolverlas numéricamente.
- Para esto, de forma general, lo que se hace es introducir nuevas variables, que van a producir sistemas de EDO de primer orden que se resuelven de forma simultánea.

TEC

EDO 2do grado a EDO 1ro (II)

- Tomando, por ejemplo, una de las EDO en la lámina sobre separación de variables se tiene:

$$X''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2}X(x) = -k^2X(x)$$

$$Y_1(x) = X(x) \qquad\qquad Y_2(x) = \frac{dX(x)}{dx} = Y_1{}'(x)$$

$$Y_2{}'(x) = \frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k^2Y_1(x)$$

TEC

EJEM: solución sistema EDO (I)

- Para mostrar como una EDO de segundo orden se puede convertir en un sistema de EDO de primer orden se utiliza el caso de un oscilador armónico amortiguado, en el que la fricción es proporcional a la rapidez del objeto en oscilación.

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

TEC

EJEM: solución sistema EDO (II)

- Las nuevas variables para realizar la conversión, en términos que faciliten su uso en el cálculo numérico posterior, son:

$$y[0] = x(t) \qquad \mathrm{y}[1] = \mathrm{x}'(t) = \mathrm{y}'[0]$$

- Por lo tanto:

$$\mathrm{y}'[0] = y[1] = f_0(t, y)$$

$$\mathrm{y}'[1] = -2\beta \mathrm{y}[1] - \omega_0^2 \mathrm{y}[0] = f_1(t, y)$$

TEC

EJEM: solución sistema EDO (III)

- El sistema anterior se puede resolver con cualquiera de los métodos numéricos cubiertos para EDO, bajo las condiciones iniciales que correspondan.
- En particular, la solución se facilita con el uso de la biblioteca SciPy, como se observa en el código que se presenta a continuación.

TEC