TEC | Tecnológico de Costa Rica

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Prof. Álvaro Amador J.

Escuela de Física

Unidad Académica carrera Licenciatura Ingeniería Física

Solución serie de Fourier (I)

- El caso desarrollado para la separación de variables, para la ecuación de onda unidimensional, también se puede utilizar para mostrar el uso de las series de Fourier para completar la solución de una EDP.
- Para esto, se retoman las ecuaciones para $X(x)$ y $T(t)$ y se continúa su desarrollo analítico.

Solución serie de Fourier (II)

- Una solución para X(x) es

$$X(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

- Si las condiciones de frontera son que los extremos de la onda, en x = 0 y x = L, están fijos:

$$\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$$

$$\mathrm{X_n}(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad n = 1, 2, \dots, \infty$$

TEC

Solución serie de Fourier (III)

- Lo que lleva a esta solución para T(t):

$$\mathrm{T_n}(t) = C_n sin\frac{n\pi c}{L}t + D_n cos\frac{n\pi c}{L}t$$

- La solución general sería entonces:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{n\pi c}{L}t + b_n \cos\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Se obtienen del desplazamiento inicial y la rapidez inicial de la onda.

TEC

Solución serie de Fourier (IV)

- De la solución general se tiene para el desplazamiento inicial y la rapidez inicial:

$$\Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\left.\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi c}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

TEC

Solución serie de Fourier (V)

- Multiplicando las ecuaciones anteriores por $\sin\frac{m\pi}{L}x$, integrando y dada la ortogonalidad de la función seno, se obtiene:

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L \Psi(x,0)\sin\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}$$

$$a_m = \frac{2}{m\pi c}\int_0^L \mathrm{v}(\mathrm{x},0)\sin\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{L}}\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}$$

TEC

Solución serie de Fourier (VI)

- Las expresiones anteriores pueden evaluarse numéricamente, para obtener los valores de los parámetros a_n y b_n que se requieran para una precisión deseada.

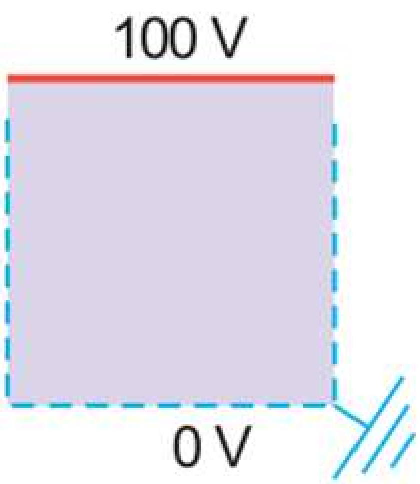
TEC

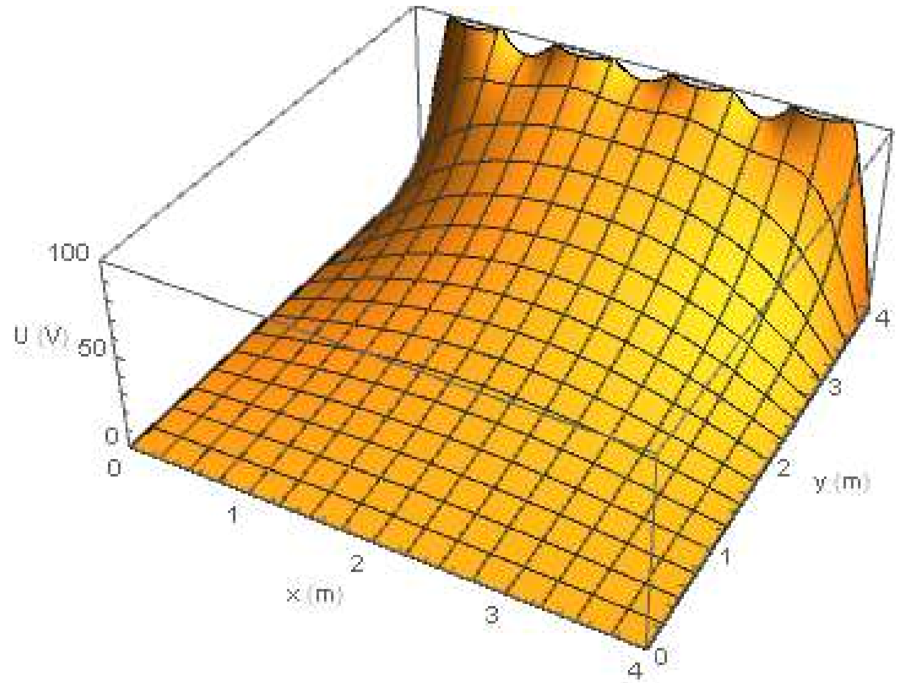
EJEM: solución EDP por Fourier (I)

- Otro ejemplo del uso de series de Fourier para resolver EDP se tiene con la ecuación de Laplace.
- Se puede plantear para un potencial eléctrico bidimensional, $U(x, y)$, en el cual $U(x, L) = U_0$, $U(0, y) = U(L, y) = U(x, 0) = 0$.

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (II)





Landau, R. H., Páez, J., & Bordeianu, C. C. (2011). A Survey of Computational Physics: Introductory Computational Science. Princeton: Princeton University Press.

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (III)

- La ecuación a resolver es

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

- Se puede suponer que la solución es separable, de la forma:

$$U(x,y) = X(x)Y(y)$$

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (IV)

- Esta separación lleva a las siguientes EDO:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = k^2$$

- Las soluciones generales para X(x) y Y(y) son:

$$X(x) = A\,sin\,kx + B\,cos\,kx$$

$$\mathrm{Y}(y) = \mathrm{C}e^{ky} + De^{-ky}$$

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (V)

- Por las condiciones de frontera dadas se obtiene que:

$$kL = n\pi \qquad n = 1, 2, \dots, \infty$$

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$Y_n(y) = C_n\left(e^{\frac{n\pi}{L}y} - e^{-\frac{n\pi}{L}y}\right) \equiv 2C_n \sinh \frac{n\pi}{L} y$$

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (VI)

- La solución más general para U(x, y) es:

$$U(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$$

- Utilizando que U(x, L) = U_0 se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sinh(n\pi) = U_0$$

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (VII)

- Multiplicando las ecuaciones anteriores por $\sin\frac{m\pi}{L}x$, integrando y dada la ortogonalidad de la función seno, se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\, sinh(\mathrm{n\pi}) \int_0^L sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx =$$

$$= a_m sinh(m\pi) = \int_0^L U_0 sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx$$

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (VIII)

- En el caso en que U_0 es una constante, los coeficientes a_m se obtienen de forma inmediata:

$$a_m = 0 \quad \text{(para m par)}$$

$$a_m = \frac{4U_0}{m\pi \sinh m\pi} \quad \text{(para m impar)}$$

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (IX)

- Cuando U_0 es constante, entonces la solución de la EDP en cuestión es:

$$U(x,y) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{N} \frac{U_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi)}$$

- Esta solución se puede evaluar numéricamente con el número de términos que se considere adecuado.

TEC

EJEM: solución EDP por Fourier (X)

- En el caso en que U_0 no sea constante, la integral respectiva se puede realizar de manera numérica para obtener a_m.