法律声明

- 本课件包括演示文稿、示例、代码、题库、视频和声音等内容，北风网和讲师拥有完全知识产权；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或者机构不得盗版、复制、仿造其中的创意和内容，我们保留一切通过法律手段追究违反者的权利。
- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：北风教育
  - 官方网址：http://www.ibeifeng.com/

人工智能之机器学习

回归算法

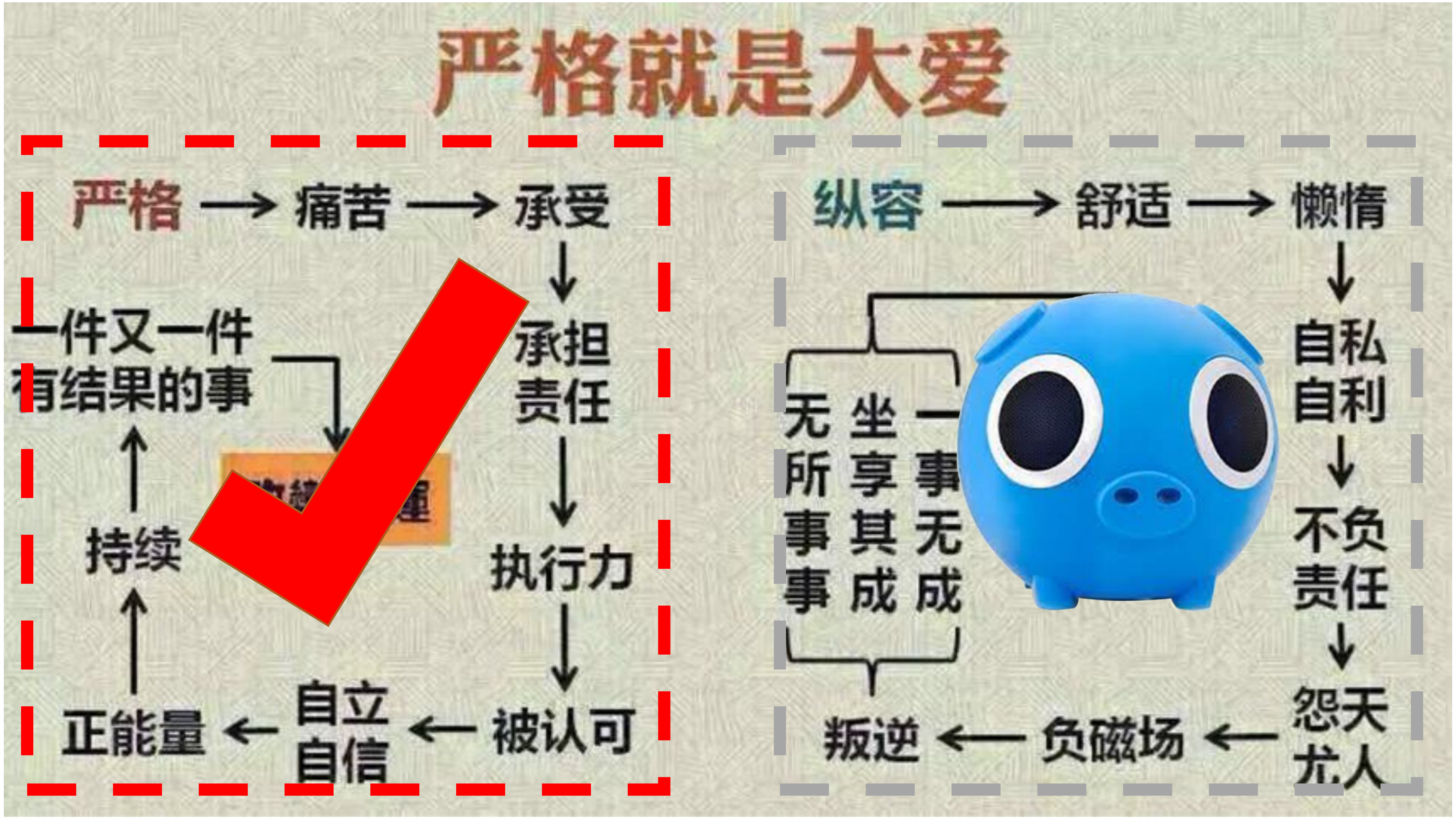
主讲人：Gerry

上海育创网络科技有限公司

课程要求

- 课上课下“九字”真言
  - 认真听，善摘录，勤思考
  - **多温故，乐实践**，再发散
- 四不原则
  - 不懒散惰性，不迟到早退
  - 不请假旷课，不拖延作业
- 一点注意事项
  - 违反“四不原则”，不包就业和推荐就业

严格是大爱


严格就是大爱
严格 → 痛苦 → 承受
承担责任
执行力
被认可
自立自信
正能量
持续
一件又一件有结果的事
纵容 → 舒适 → 懒惰
自私自利
不负责任
怨天尤人
负磁场
叛逆
无所事事
坐享其成
一事无成

寄语

做别人不愿做的事，

做别人不敢做的事，

做别人做不到的事。

课程内容

- 线性回归
- Logistic回归
- Softmax回归
- 梯度下降
- 特征抽取
- 线性回归案例

什么是回归算法

- 回归算法是一种比较常用的机器学习算法，用来建立“解释”变量和观测值之间的关系；从机器学习的角度来讲，用于构建一个算法模型(函数)来做属性与标签之间的映射关系，在算法的学习过程中，试图寻找一个函数 $h: R^d -> R$ 使得参数之间的关系拟合性最好。
- 回归算法中算法(函数)的最终结果是一个**连续**的数据值，输入值(属性值)是一个d维度的属性/数值向量

回归算法理性认知

信用额度提升审批

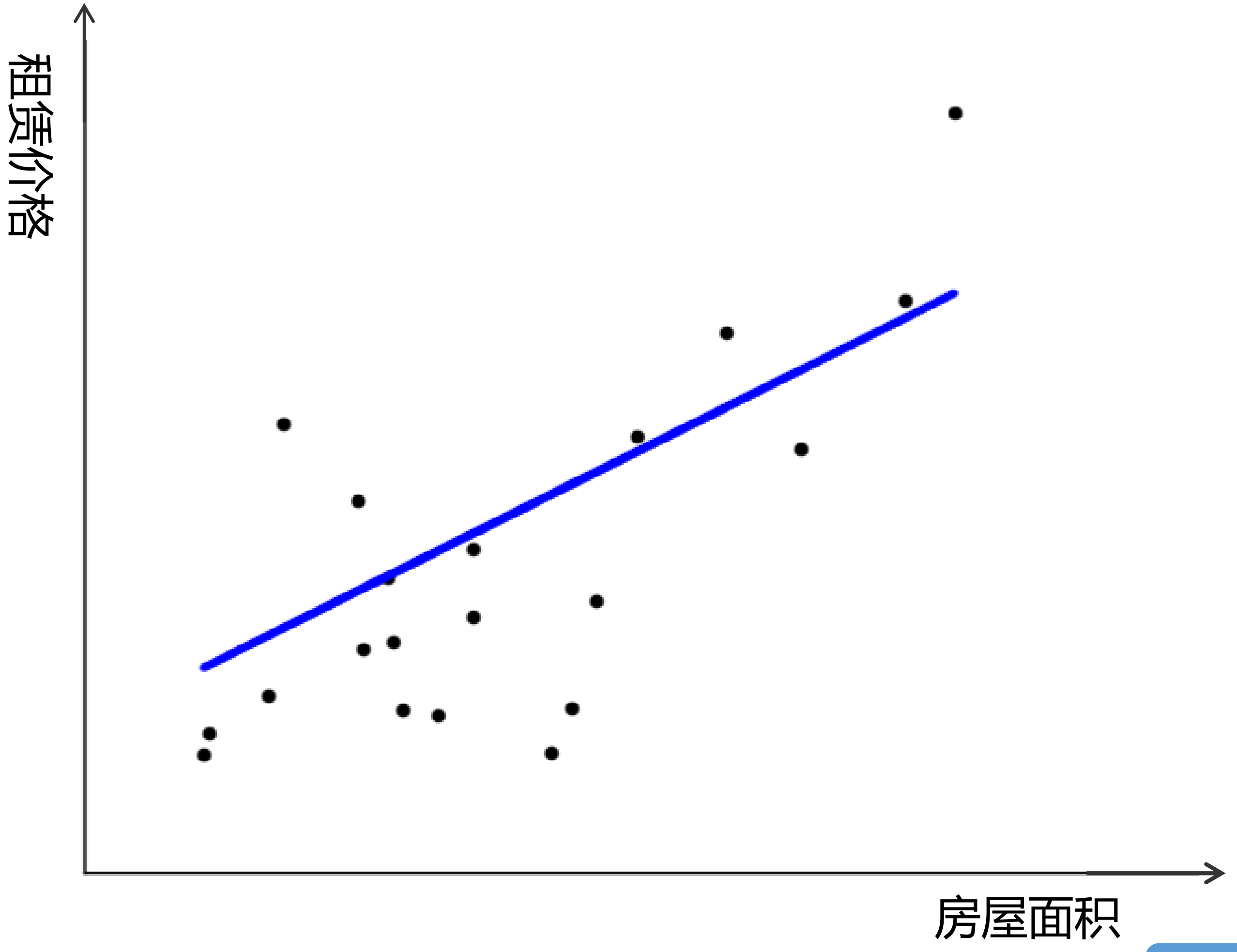
属性/标签名称	值
年龄	30
年薪	320000
工作年限	8
最近三个月消费额	15623
当前额度	50000
可提高额度	15000

每个信用卡用户允许提高多少额度?

线性回归

- y=ax+b

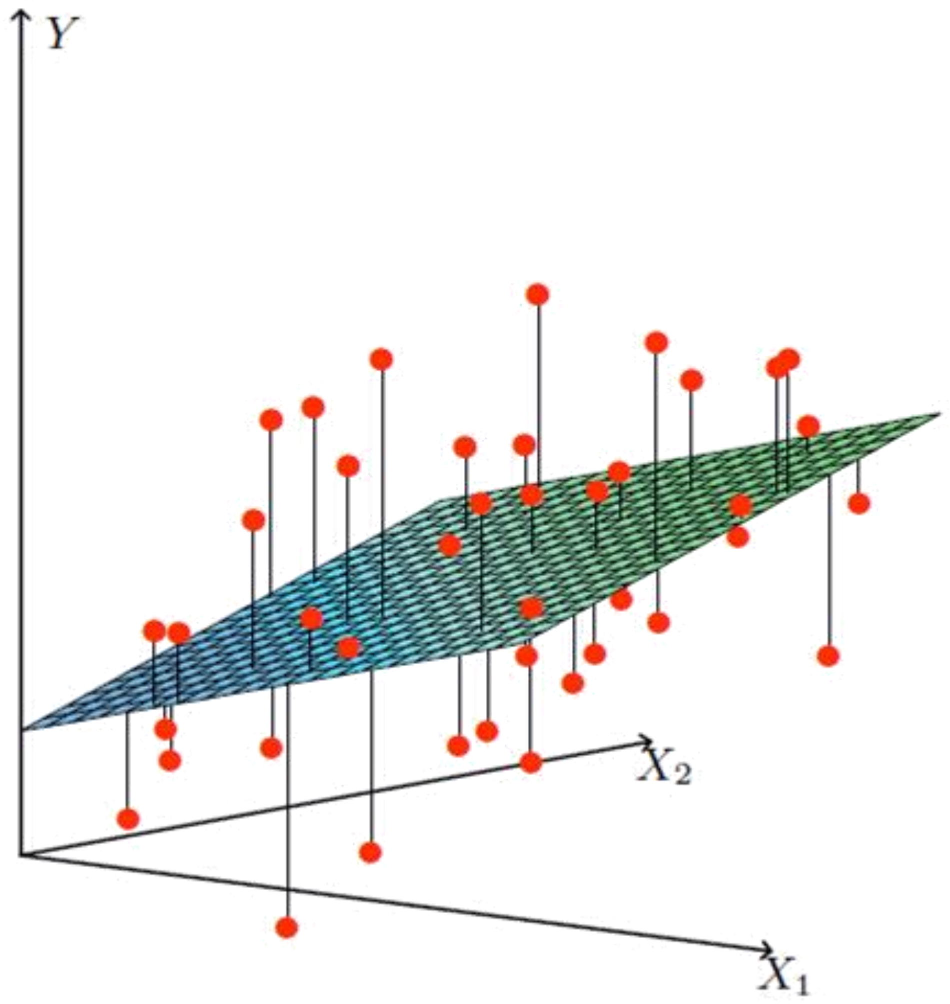
房屋面积(m^2)	租赁价格(1000￥)
10	0.8
15	1
20	1.8
30	2
50	3.5
60	3
…….	………



线性回归

- $h(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$

房屋面积	房间数量	租赁价格
10	1	0.8
20	1	1.8
30	1	2.2
30	2	2.5
70	3	5.5
70	2	5.2
.....	......	....



线性回归

$$
\begin{aligned}
h_\theta(x) &= \theta_0 + \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n \\
&= \theta_0 1 + \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n \\
&= \theta_0 x_0 + \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \theta_i x_i = \theta^T X
\end{aligned}
$$

最终要求是计算出 θ 的值，并选择最优的 θ 值构成算法公式

线性回归、最大似然估计及二乘法

$$y^{(i)} = \theta^T x^{(i)} + \varepsilon^{(i)}$$

- 误差 $\varepsilon^{(i)}(1 \le i \le n)$ 是独立同分布的，服从均值为0，方差为某定值 σ^2 的**高斯分布**。
  - 原因：**中心极限定理**
- 实际问题中，很多随机现象可以看做**众多因素**的独立影响的综合反应，往往服从正态分布

似然函数

$$y^{(i)} = \theta^T x^{(i)} + \varepsilon^{(i)}$$

$$p\left(\varepsilon^{(i)}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{\left(\varepsilon^{(i)}\right)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

$$p\left(y^{(i)} \mid x^{(i)}; \theta\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y^{(i)} - \theta^T x^{(i)}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{m} p\left(y^{(i)} \mid x^{(i)}; \theta\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y^{(i)} - \theta^T x^{(i)}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

对数似然、目标函数及最小二乘

$$\ell(\theta) = \log L(\theta)$$

$$= \log \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y^{(i)} - \theta^T x^{(i)}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y^{(i)} - \theta^T x^{(i)}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= m \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sigma^2} \bullet \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - \theta^T x^{(i)}\right)^2$$

$$loss(y_j, \hat{y}_j) = J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)}\right)^2$$

θ的求解过程 $J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2$

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2=\frac{1}{2}(X\theta-Y)^T(X\theta-Y)\quad\longrightarrow\quad\min_\theta J(\theta)$$

$$\nabla_\theta J(\theta)=\nabla_\theta\left(\frac{1}{2}(X\theta-Y)^T(X\theta-Y)\right)=\nabla_\theta\left(\frac{1}{2}\left(\theta^TX^T-Y^T\right)(X\theta-Y)\right)$$

$$=\nabla_\theta\left(\frac{1}{2}\left(\theta^TX^TX\theta-\theta^TX^TY-Y^TX\theta+Y^TY\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2X^TX\theta-X^TY-\left(Y^TX\right)^T\right)$$

$$=X^TX\theta-X^TY$$

$$\theta=\left(X^TX\right)^{-1}X^TY$$

最小二乘法的参数最优解

- 参数解析式

$$\theta = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

- 最小二乘法的使用要求矩阵 $X^T X$ 是可逆的；为了防止不可逆或者过拟合的问题存在，可以增加额外数据影响，导致最终的矩阵是可逆的：

$$\theta = \left(X^T X + \lambda I\right)^{-1} X^T y$$

- 最小二乘法直接求解的难点：矩阵逆的求解是一个难处

普通最小二乘法线性回归案例

- 现有一批描述家庭用电情况的数据，对数据进行算法模型预测，并最终得到预测模型（每天各个时间段和功率之间的关系、功率与电流之间的关系等）
  - 数据来源: Individual household electric power consumption Data Set
  - 建议：使用python的sklearn库的linear_model中LinearRegression来获取算法

Individual household electric power consumption Data Set

Download: Data Folder, Data Set Description

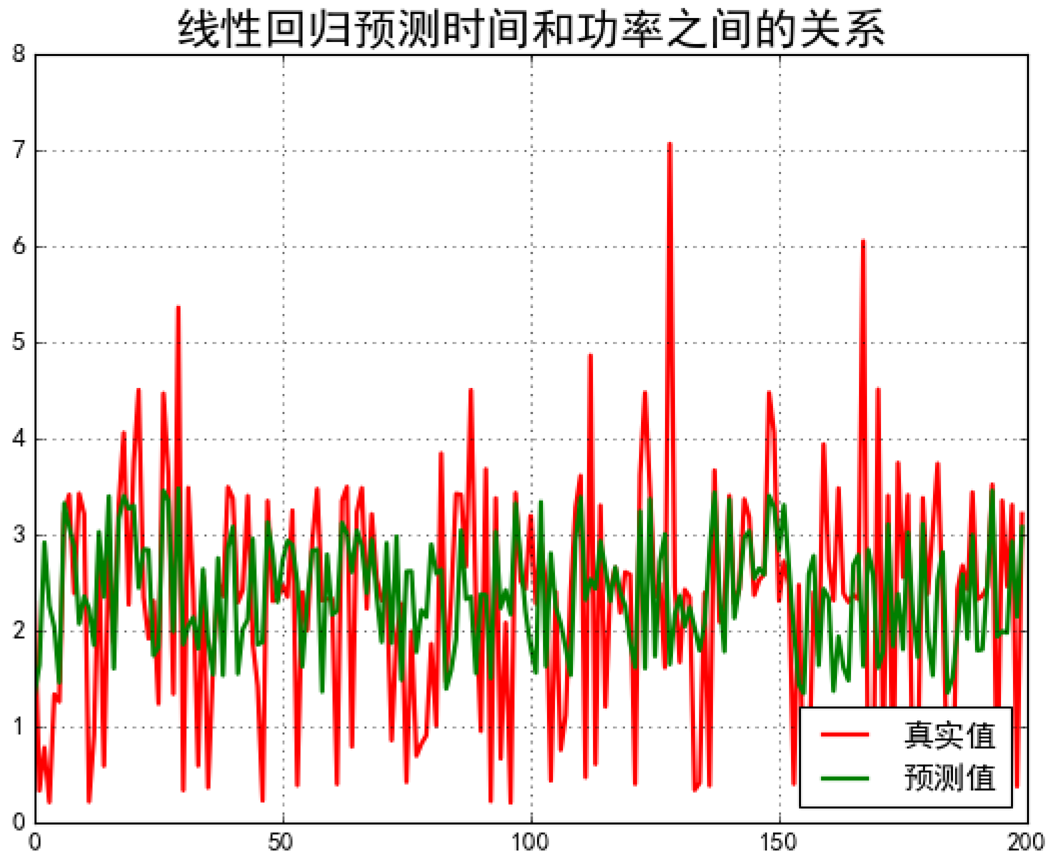
Abstract: Measurements of electric power consumption in one household with a one-minute sampling rate over a period of almost 4 years. Different electrical quantities and some sub-metering values are available.

Data Set Characteristics:	Multivariate, Time-Series	**Number of Instances:**	2075259	**Area:**	Physical
Attribute Characteristics:	Real	**Number of Attributes:**	9	**Date Donated**	2012-08-30
Associated Tasks:	Regression, Clustering	**Missing Values?**	Yes	**Number of Web Hits:**	135342

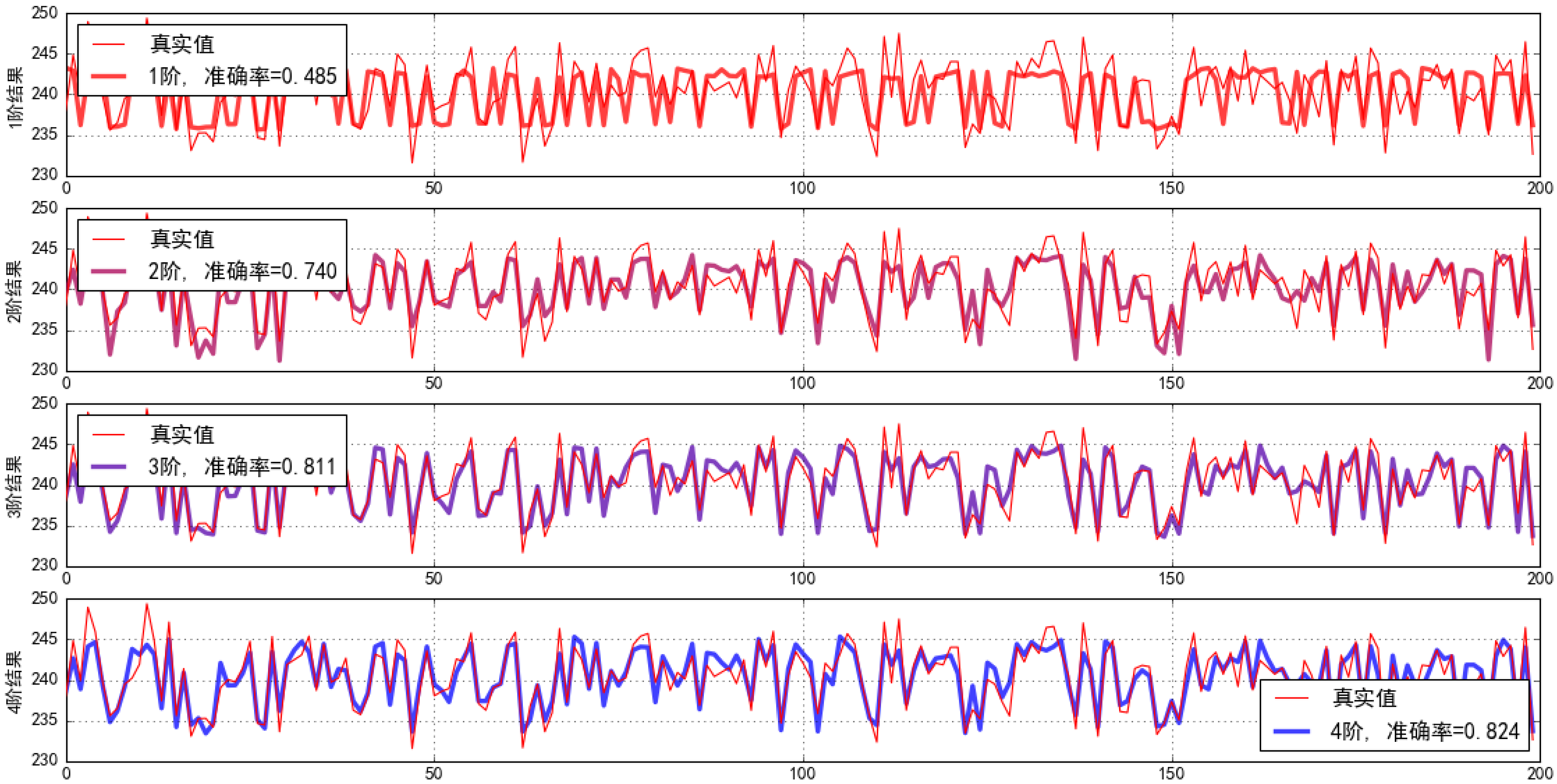
Attribute Information:

1.date: Date in format dd/mm/yyyy
2.time: time in format hh:mm:ss
3.global_active_power: household global minute-averaged active power (in kilowatt)
4.global_reactive_power: household global minute-averaged reactive power (in kilowatt)
5.voltage: minute-averaged voltage (in volt)
6.global_intensity: household global minute-averaged current intensity (in ampere)
7.sub_metering_1: energy sub-metering No. 1 (in watt-hour of active energy). It corresponds to the kitchen, containing mainly a dishwasher, an oven and a microwave (hot plates are not electric but gas powered).
8.sub_metering_2: energy sub-metering No. 2 (in watt-hour of active energy). It corresponds to the laundry room, containing a washing-machine, a tumble-drier, a refrigerator and a light.
9.sub_metering_3: energy sub-metering No. 3 (in watt-hour of active energy). It corresponds to an electric water-heater and an air-conditioner.

普通最小二乘法线性回归案例



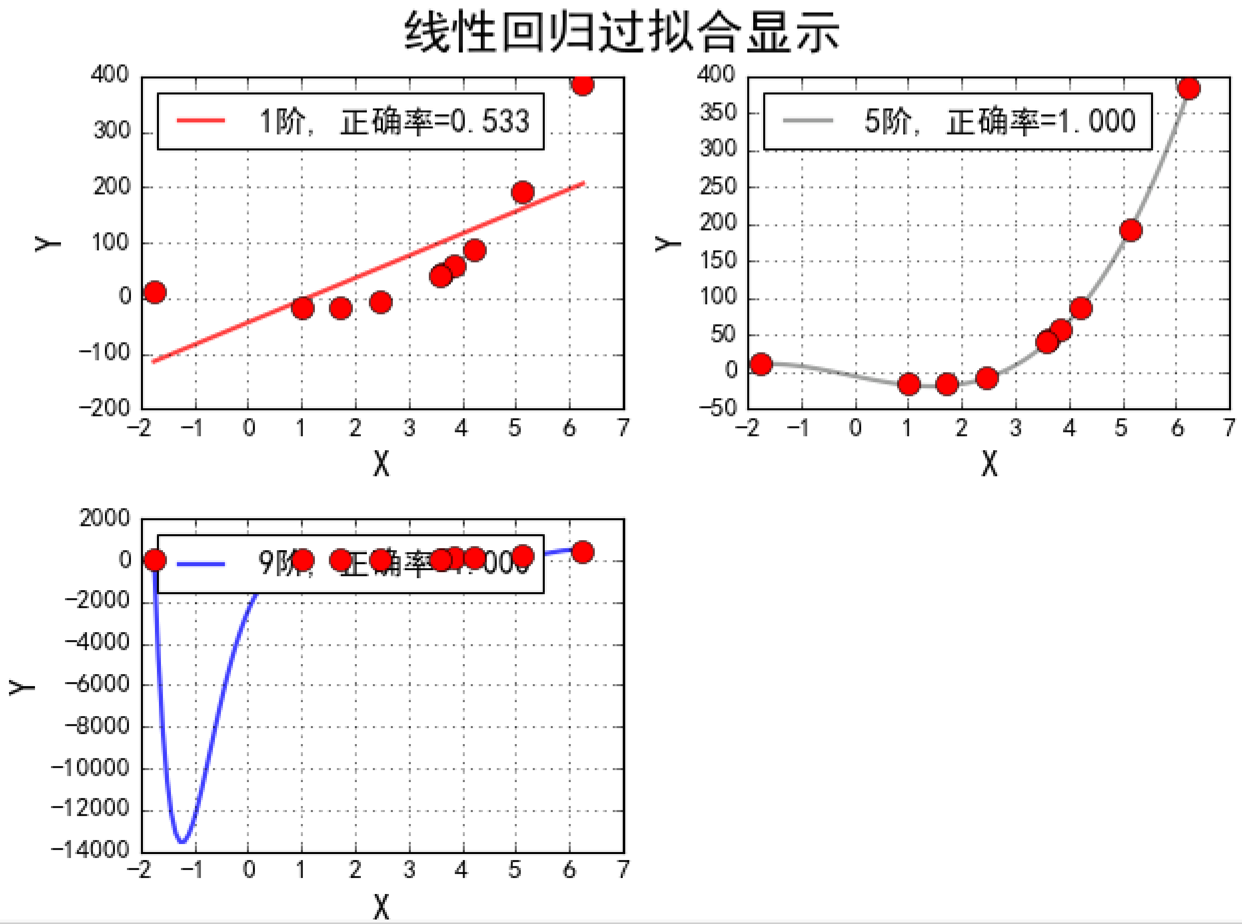
普通最小二乘法线性回归案例



目标函数(loss/cost function)

- 0-1损失函数 $$J(\theta)=\begin{cases}1, Y\neq f(X)\\0, Y=f(X)\end{cases}$$
- 感知损失函数 $$J(\theta)=\begin{cases}1, |Y-f(X)|>t\\0, |Y-f(X)|\leq t\end{cases}$$
- 平方和损失函数 $$J(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2$$
- 绝对值损失函数 $$J(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\left|h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right|$$
- 对数损失函数 $$J(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log h_\theta\left(x^{(i)}\right)\right)$$

过拟合



结论：不是阶数越高效果越好

1阶，系数为： [-44.14102611 40.05964256]
5阶，系数为： [-5.60899679 -14.80109301 0.75014858 2.11170671 -0.07724668 0.00566633]
9阶，系数为： [-2465.58378507 6108.6381056 -5111.99327317 974.74973548 1078.89648247 -829.50276827 266.13230319 -45.71741527 4.11582735 -0.15281063]

线性回归的过拟合

- 目标函数： $J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2$
- 为了防止数据过拟合，也就是的θ值在样本空间中不能过大/过小，可以在目标函数之上增加一个平方和损失：

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\theta_j^2$$

- 正则项(norm)： $\lambda\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2$ ；这里这个正则项叫做L2-norm

过拟合和正则项

- L2-norm:

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\theta_j^2 \qquad \lambda>0$$

- L1-norm:

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\left|\theta_j\right| \qquad \lambda>0$$

Ridge回归

- 使用L2正则的线性回归模型就称为Ridge回归(岭回归)

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\theta_j^2 \qquad \lambda>0$$

LASSO回归

- 使用L1正则的线性回归模型就称为LASSO回归(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\left|\theta_j\right| \quad \lambda > 0$$

Ridge(L1-norm)和LASSO(L2-norm)比较

- L2-norm中，由于对于各个维度的参数缩放是在一个圆内缩放的，不可能导致有维度参数变为0的情况，那么也就不会产生稀疏解；实际应用中，数据的维度中是存在**噪音**和**冗余**的，稀疏的解可以找到有用的维度并且减少冗余，提高回归预测的**准确性**和**鲁棒性**（减少了overfitting）(L2-norm可以达到最终解的**稀疏性**的要求)
- Ridge模型具有较高的准确性、鲁棒性以及稳定性；LASSO模型具有较高的求解速度。

Ridge(L1-norm)和LASSO(L2-norm)比较

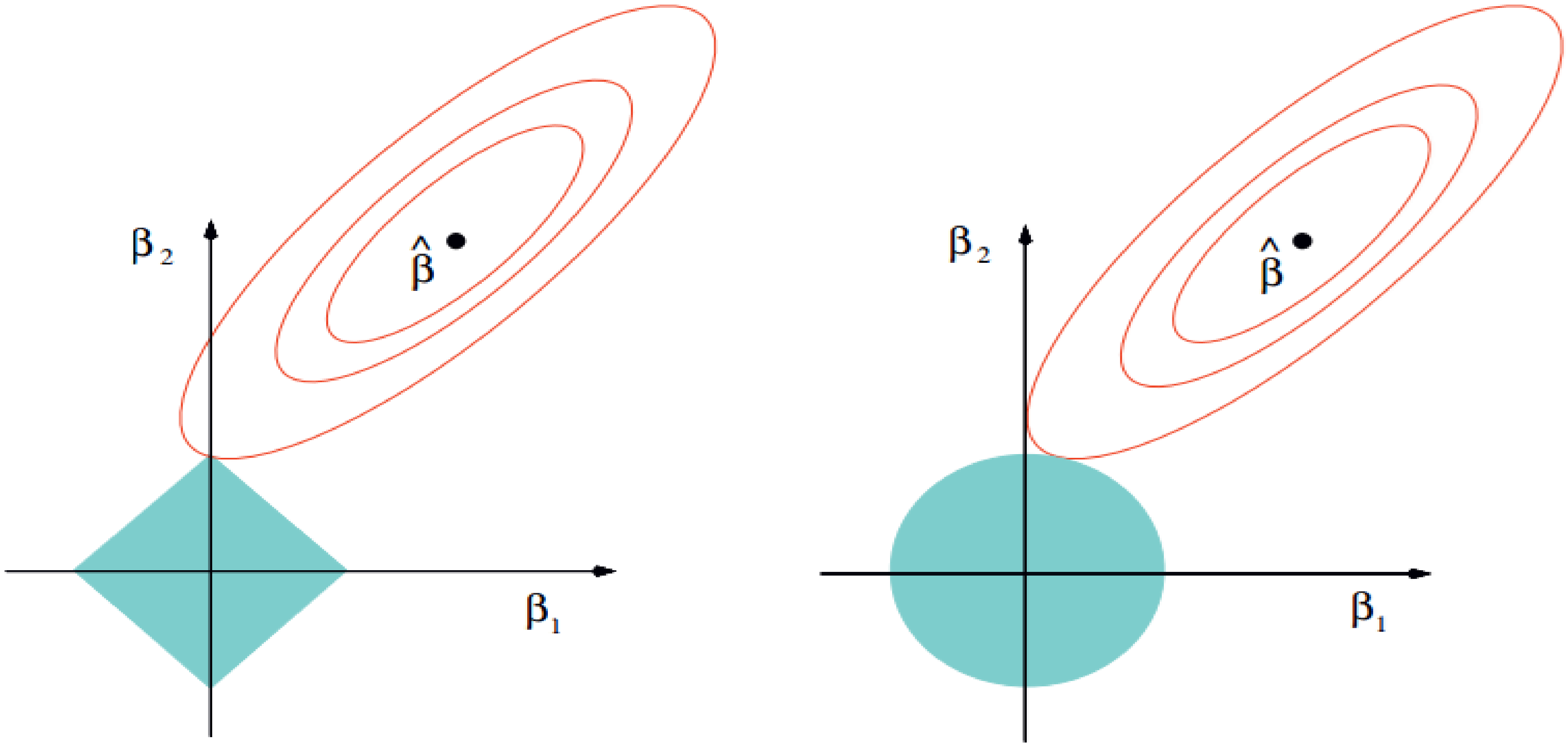


FIGURE 3.11. *Estimation picture for the lasso (left) and ridge regression (right). Shown are contours of the error and constraint functions. The solid blue areas are the constraint regions* $|\beta_1| + |\beta_2| \leq t$ *and* $\beta_1^2 + \beta_2^2 \leq t^2$*, respectively, while the red ellipses are the contours of the least squares error function.*

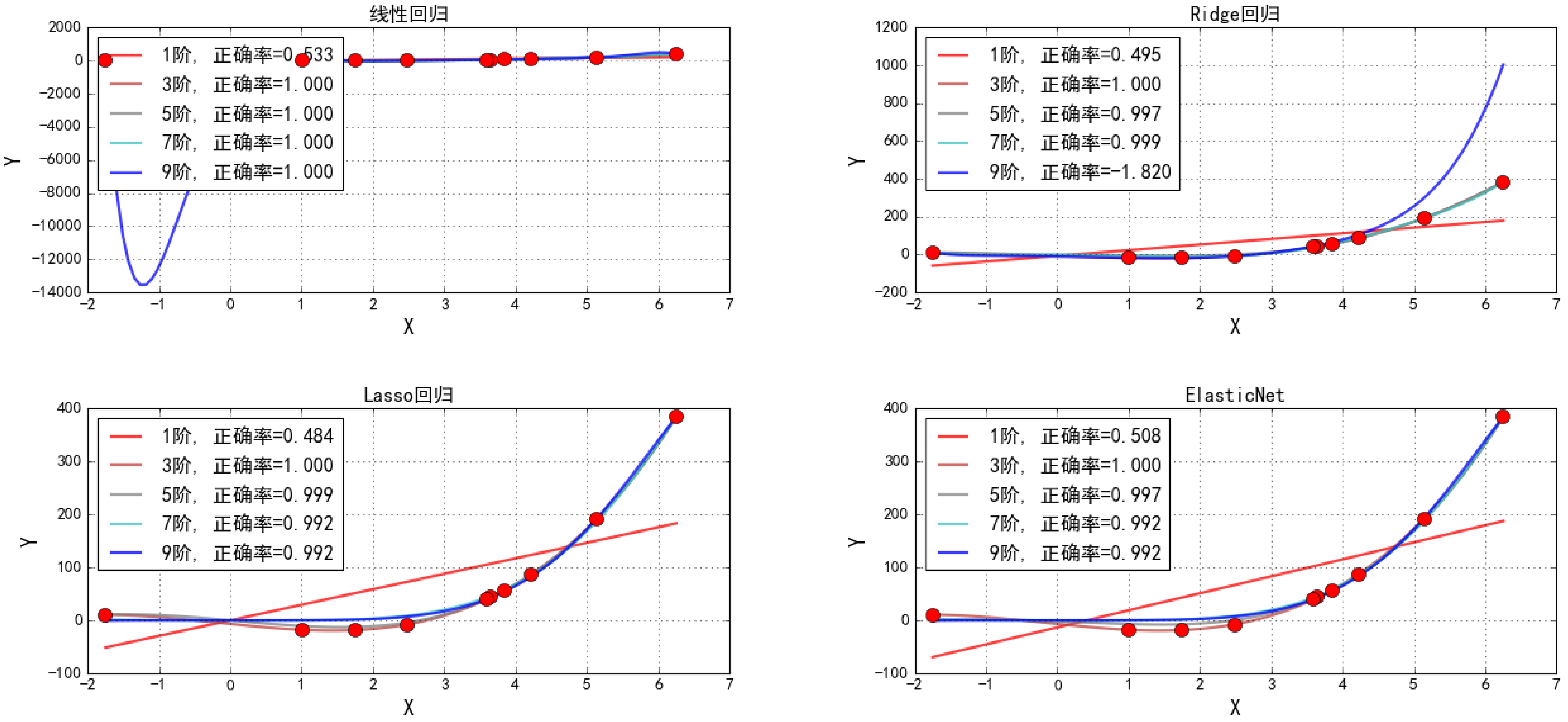
Elasitc Net

- 同时使用L1正则和L2正则的线性回归模型就称为Elasitc Net算法(弹性网络算法)

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)+\lambda\left(p\sum_{j=1}^{n}\left|\theta_j\right|+(1-p)\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2\right) \quad \begin{cases}\lambda>0\\ p\in[0,1]\end{cases}$$

线性回归算法过拟合比较(一)

各种不同线性回归过拟合显示



线性回归算法过拟合比较(二)

```
线性回归:1阶，系数为:  [-44.14102611  40.05964256]
线性回归:3阶，系数为:  [ -6.80525963 -13.743068     0.93453895   1.79844791]
线性回归:5阶，系数为:  [ -5.60899679 -14.80109301   0.75014858   2.11170671  -0.07724668   0.00566633]
线性回归:7阶，系数为:  [-41.70721172  52.38570529 -29.56451338  -7.66322829  12.07162703  -3.86969096   0.53286096  -0.02725536]
线性回归:9阶，系数为:  [-2465.58378507   6108.6381056   -5111.99327317    974.74973548   1078.89648247   -829.50276827    266.13230319    -45.71741527      4.11582735     -0.15281063]
Ridge回归:1阶，系数为:  [ -6.71593385  29.79090057]
Ridge回归:3阶，系数为:  [ -6.7819845   -13.73679293   0.92827639   1.79920954]
Ridge回归:5阶，系数为:  [-0.82920155 -1.07244754 -1.41803017 -0.93057536  0.88319116 -0.07073168]
Ridge回归:7阶，系数为:  [-1.62586368 -2.18512108 -1.82690987 -2.27495708  0.98685071  0.30551091 -0.10988434  0.00846908]
Ridge回归:9阶，系数为:  [-10.50566712  -6.12564342  -1.96421973   0.80200162   0.59148104  -0.23358235   0.20297017  -0.08109698   0.01325857  -0.00072184]
Lasso回归:1阶，系数为:  [ -0.          29.27359177]
Lasso回归:3阶，系数为:  [ -6.7688595   -13.75928024   0.93989323   1.79778598]
Lasso回归:5阶，系数为:  [ -0.          -12.00109345  -0.50746853   1.74395236   0.07086952  -0.00583605]
Lasso回归:7阶，系数为:  [-0.          -0.          -0.          -0.08083315  0.19550746  0.03066137 -0.00020584 -0.00046928]
Lasso回归:9阶，系数为:  [-0.          -0.          -0.          -0.           0.04439727  0.05587113  0.00109023 -0.00021498 -0.00004479 -0.00000674]
ElasticNet:1阶，系数为:  [-13.22089654  32.08359338]
ElasticNet:3阶，系数为:  [ -6.7688595   -13.75928024   0.93989323   1.79778598]
ElasticNet:5阶，系数为:  [-1.65823671 -5.20271875 -1.26488859  0.94503683  0.2605984   -0.01683786]
ElasticNet:7阶，系数为:  [-0.          -0.          -0.          -0.15812511  0.22150166  0.02955069 -0.00040066 -0.00046568]
ElasticNet:9阶，系数为:  [-0.          -0.          -0.          -0.           0.05255118  0.05364699  0.00111995 -0.00020596 -0.00004365 -0.00000667]
```

模型效果判断

$$MSE = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

模型效果判断

- MSE：误差平方和，越趋近于0表示模型越拟合训练数据。
- RMSE：MSE的平方根，作用同MSE
- R^2：取值范围(负无穷,1]，值越大表示模型越拟合训练数据；最优解是1；当模型预测为随机值的时候，有可能为负；若预测值恒为样本期望，R^2为0
- TSS：总平方和TSS(Total Sum of Squares)，表示样本之间的差异情况，是伪方差的m倍
- RSS：残差平方和RSS（Residual Sum of Squares），表示预测值和样本值之间的差异情况，是MSE的m倍

机器学习调参

- 在实际工作中，对于各种算法模型(线性回归)来讲，我们需要获取θ、λ、p的值；θ的求解其实就是算法模型的求解，一般不需要开发人员参与(算法已经实现)，主要需要求解的是λ和p的值，这个过程就叫做**调参(超参)**
- 交叉验证：将训练数据分为多份，其中一份进行数据验证并获取最优的超参：λ和p；比如：十折交叉验证、五折交叉验证(scikit-learn中默认)等

训练数据	测试数据

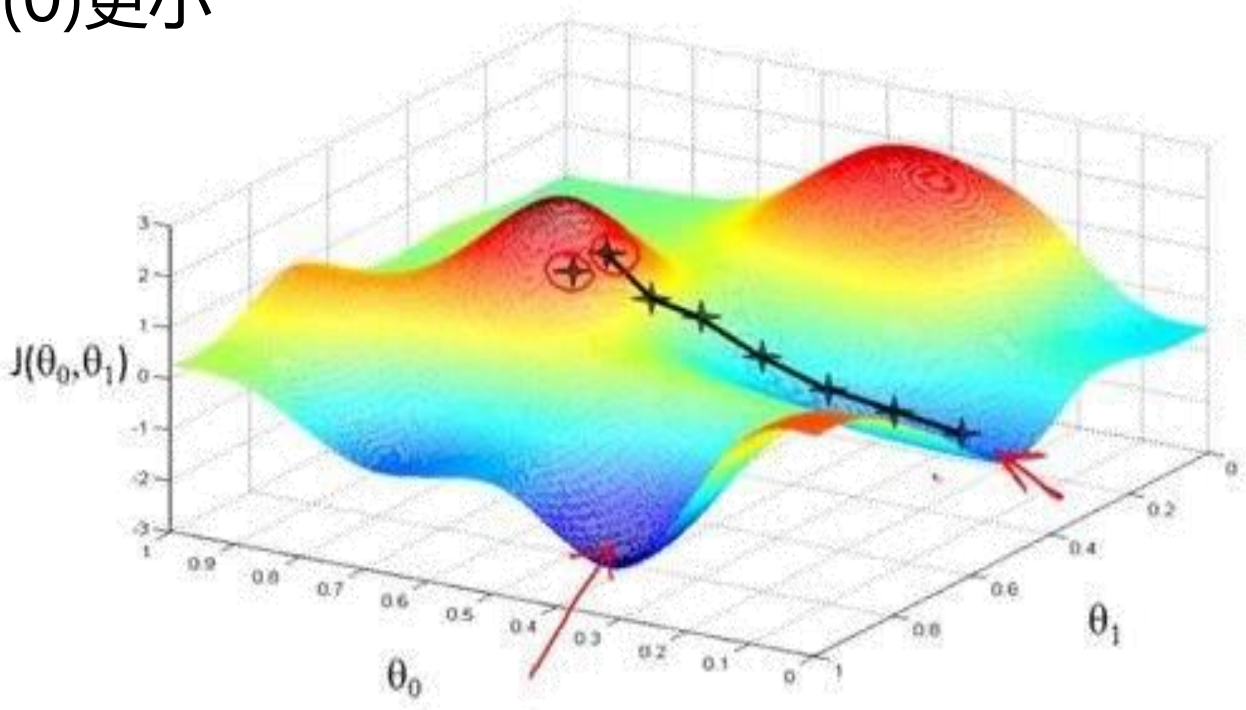
IT在线教育领导品牌
EDUCATION TO CREATE A BRIGHT FUTURE

梯度下降算法

- 目标函数θ求解 $J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2$
- 初始化θ(随机初始化，可以初始为0)
- 沿着负梯度方向迭代，更新后的θ使J(θ)更小

$$\theta=\theta-\alpha\bullet\frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta}$$

  - α：学习率、步长



梯度方向

$$J(\theta)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}J(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{1}{2}\left(h_\theta(x)-y\right)^2$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\left(h_\theta(x)-y\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(h_\theta(x)-y\right)$$

$$=\left(h_\theta(x)-y\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_j-y\right)$$

$$=\left(h_\theta(x)-y\right)x_j$$

批量梯度下降算法(BGD)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) = (h_\theta(x) - y) x_j$$

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{m} \left(x_j \left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)} \right) \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(h_\theta\left(x^{(i)}\right) - y^{(i)} \right) x_j^{(i)}$$

$$\theta_j = \theta_j + \alpha \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - h_\theta\left(x^{(i)}\right) \right) x_j^{(i)}$$

随机梯度下降算法(SGD)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta) = \left(h_\theta(x) - y\right) x_j$$

for i= 1 to m,{

$$\theta_j = \theta_j + \alpha\left(y^{(i)} - h_\theta\left(x^{(i)}\right)\right) x_j^{(i)}$$

}

BGD和SGD算法比较

- SGD速度比BGD快(迭代次数少)
- SGD在某些情况下(全局存在多个相对最优解/J(θ)不是一个二次)，SGD有可能跳出某些小的局部最优解，所以不会比BGD坏
- BGD一定能够得到一个局部最优解(在线性回归模型中一定是得到一个全局最优解)，SGD由于随机性的存在可能导致最终结果比BGD的差
- **注意：优先选择SGD**

小批量梯度下降法(MBGD)

- 如果即需要保证算法的训练过程比较快，又需要保证最终参数训练的准确率，而这正是小批量梯度下降法（Mini-batch Gradient Descent，简称MBGD）的初衷。MBGD中不是每拿一个样本就更新一次梯度，而且拿b个样本(b一般为10)的平均梯度作为更新方向。

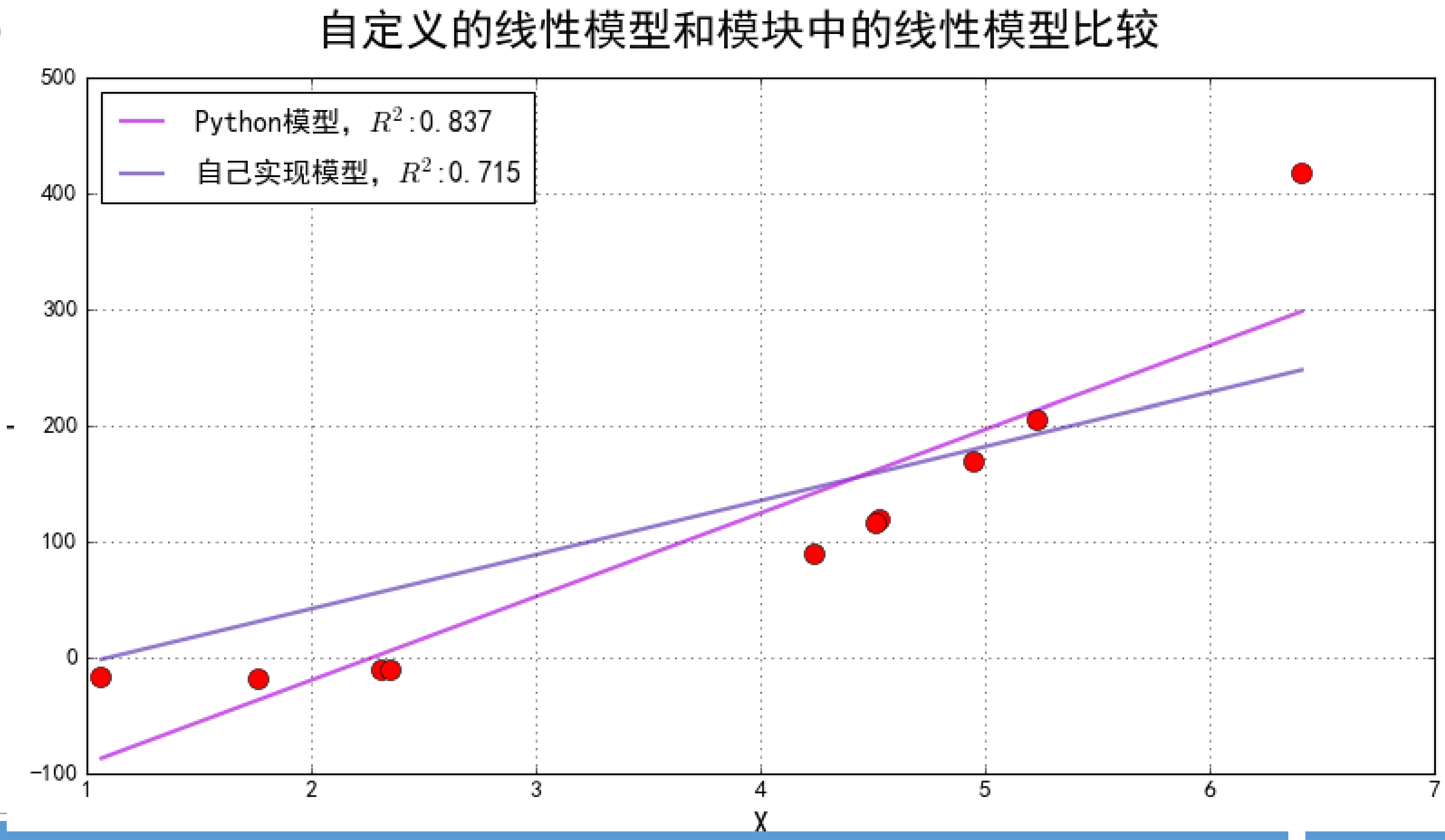
for i= 1 to m/10,{

$$\theta_j = \theta_j + \alpha \sum_{k=i}^{i+10} \left(y^{(k)} - h_\theta\left(x^{(k)}\right) \right) x_j^{(k)}$$

}

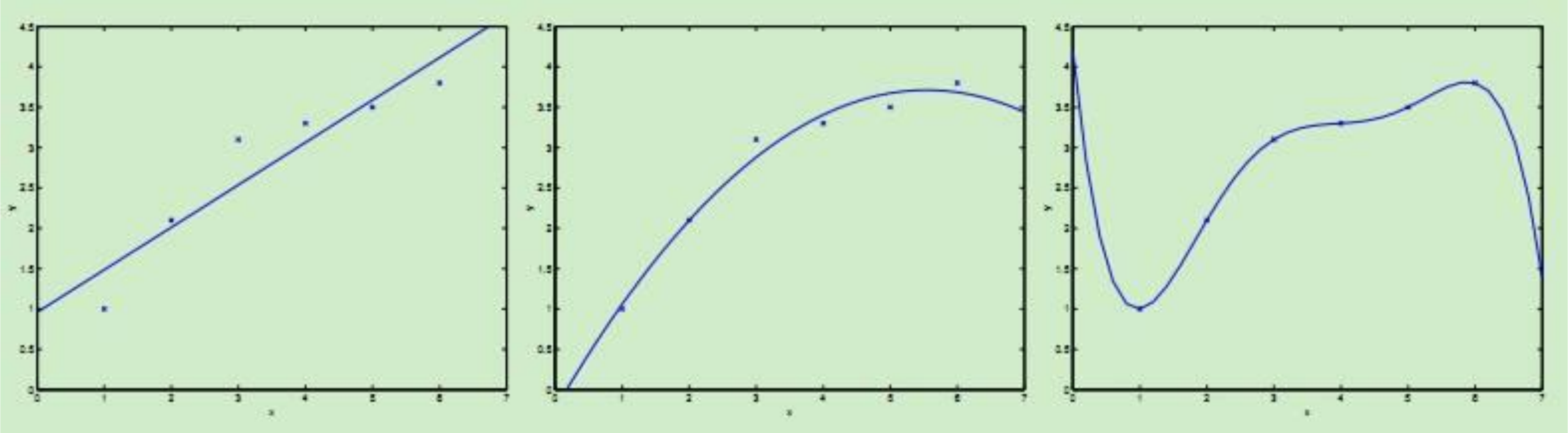
回归算法案例：基于梯度下降法实现线性回归算法

- 基于梯度下降法编写程序实现回归算法，并自行使用模拟数据进行测试，同时对同样的模拟数据进行两种算法的比较(python sklearn LinearRegression和自己实现的线性回归算法)



线性回归的扩展

- 线性回归针对的是θ而言是一种，对于样本本身而言，样本可以是非线性的
- 也就是说最终得到的函数f:x->y；函数f(x)可以是非线性的，比如：曲线等



$$y=\theta_0+\theta_1 x$$

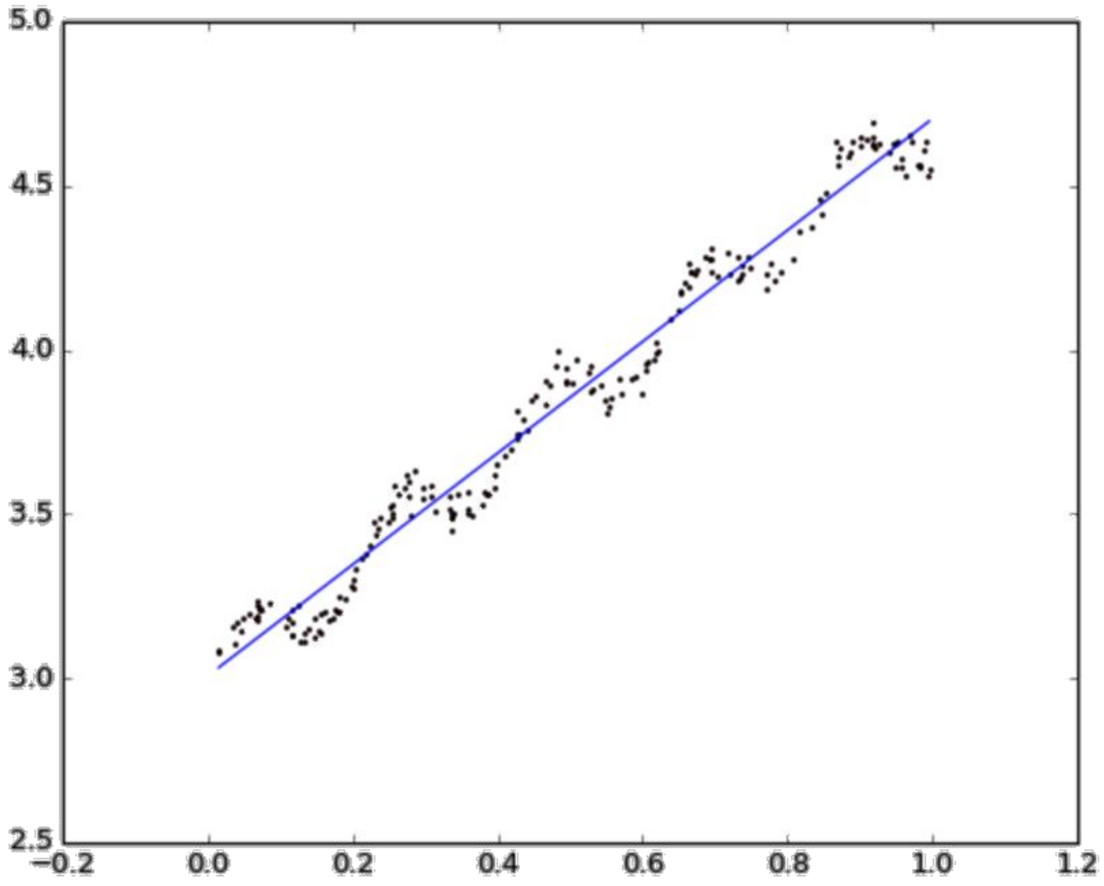
$$y=\theta_0+\theta_1 x+\theta_2 x^2$$

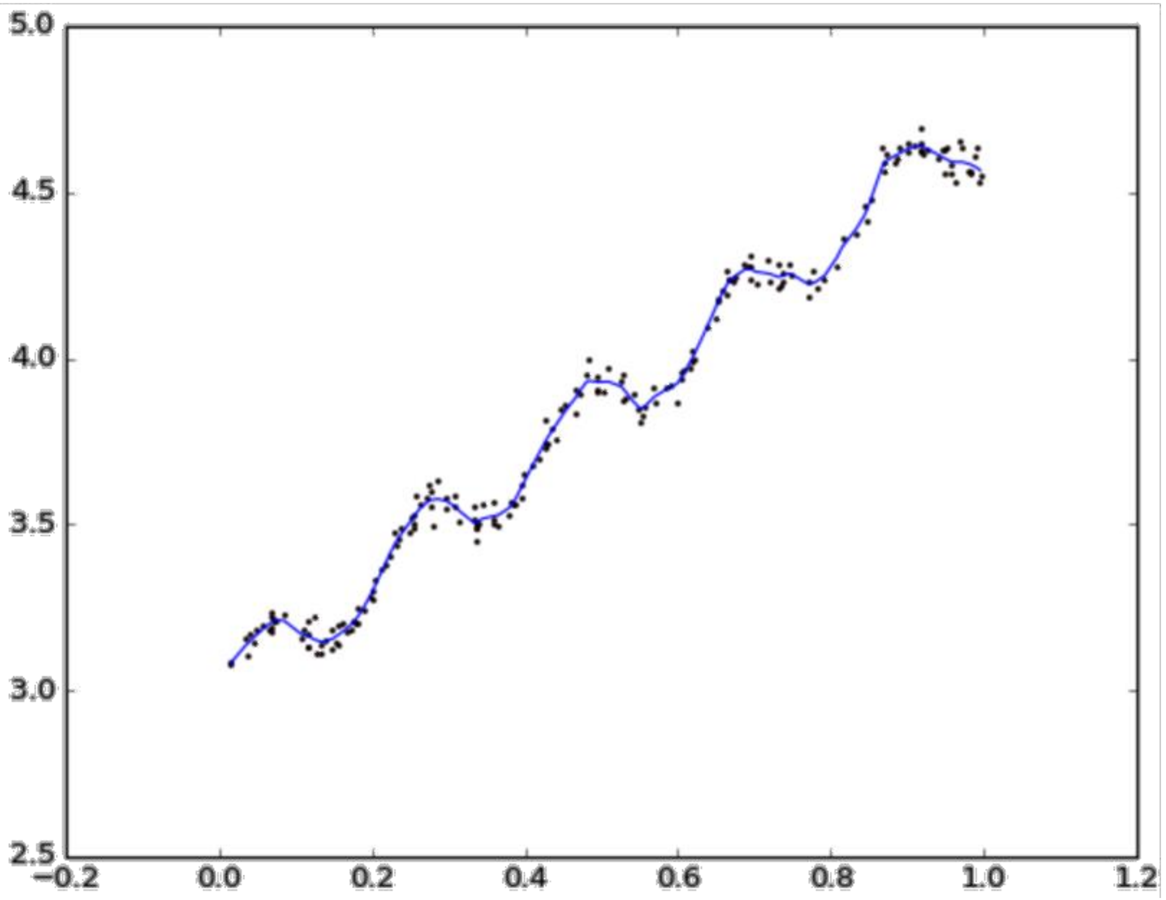
$$y=\theta_0+\theta_1 x+\theta_2 x^2+\theta_3 x^3+\theta_4 x^4$$

线性回归总结

- 算法模型：线性回归(Linear)、岭回归(Ridge)、LASSO回归、Elastic Net
- 正则化：L1-norm、L2-norm
- 损失函数/目标函数： $J(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^2 \longrightarrow \min_{\theta} J(\theta)$
- θ求解方式：最小二乘法(直接计算，目标函数是平方和损失函数)、梯度下降(BGD\SGD\MBGD)

局部加权回归-直观理解


5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2


5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2

局部加权回归-损失函数

- 普通线性回归损失函数：

$$J(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\left(h_{\theta}\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^{2}$$

- 局部加权回归损失函数：

$$J(\theta)=\sum_{i=1}^{m}w^{(i)}\left(h_{\theta}\left(x^{(i)}\right)-y^{(i)}\right)^{2}$$

局部加权回归-权重值设置

- $w^{(i)}$是权重，它根据要预测的点与数据集中的点的距离来为数据集中的点赋权值。当某点离要预测的点越远，其权重越小，否则越大。常用值选择公式为：

$$w^{(i)} = \exp\left(-\frac{\left(x^{(i)} - x\right)^2}{2k^2}\right)$$

- 该函数称为指数衰减函数，其中k为波长参数，它控制了权值随距离下降的速率
- 注意：使用该方式主要应用到样本之间的相似性考虑，主要内容在SVM中再考虑(核函数)

回归算法综合案例(二)：波士顿房屋租赁价格预测

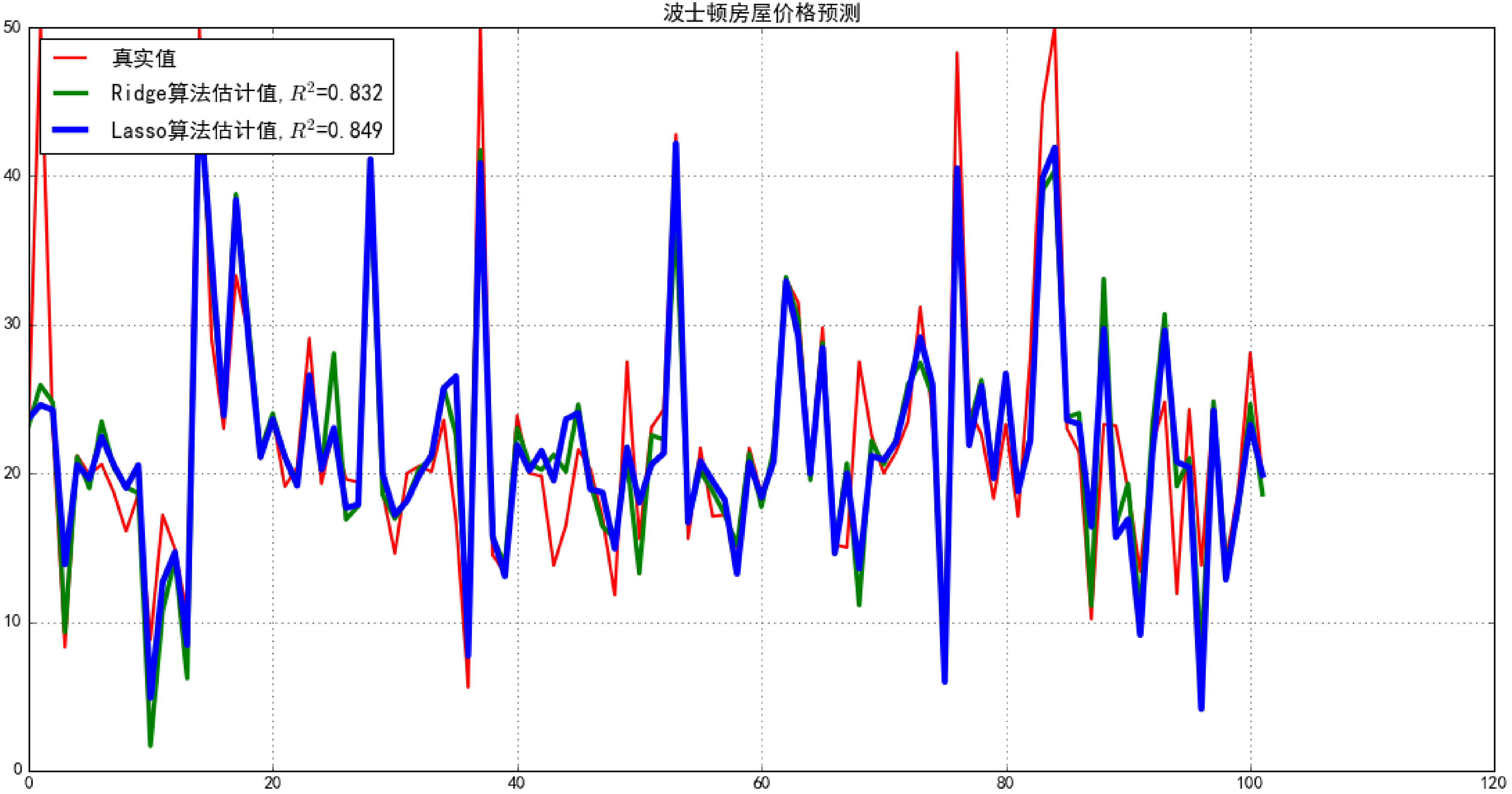
- 基于波士顿房屋租赁数据进行房屋租赁价格预测模型构建，分布使用Lasso回归、Ridge回两种回归算法构建模型，并分别构建1/2/3阶算法中的最优算法(参数)，并比较这两种回归算法的效果；另外使用lasso回归算法做特征选择
  - 数据下载url: http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Housing

Attribute Information:

1. CRIM: per capita crime rate by town
2. ZN: proportion of residential land zoned for lots over 25,000 sq.ft.
3. INDUS: proportion of non-retail business acres per town
4. CHAS: Charles River dummy variable (= 1 if tract bounds river; 0 otherwise)
5. NOX: nitric oxides concentration (parts per 10 million)
6. RM: average number of rooms per dwelling
7. AGE: proportion of owner-occupied units built prior to 1940
8. DIS: weighted distances to five Boston employment centres
9. RAD: index of accessibility to radial highways
10. TAX: full-value property-tax rate per $10,000
11. PTRATIO: pupil-teacher ratio by town
12. B: 1000(Bk - 0.63)^2 where Bk is the proportion of blacks by town
13. LSTAT: % lower status of the population
14. MEDV: Median value of owner-occupied homes in $1000's

0.31533	0.00	6.200	0	0.5040	8.2660	78.30	2.8944	8	307.0	17.40	385.05	4.14	44.80
0.52693	0.00	6.200	0	0.5040	8.7250	83.00	2.8944	8	307.0	17.40	382.00	4.63	50.00
0.38214	0.00	6.200	0	0.5040	8.0400	86.50	3.2157	8	307.0	17.40	387.38	3.13	37.60
0.41238	0.00	6.200	0	0.5040	7.1630	79.90	3.2157	8	307.0	17.40	372.08	6.36	31.60
0.29819	0.00	6.200	0	0.5040	7.6860	17.00	3.3751	8	307.0	17.40	377.51	3.92	46.70
0.44178	0.00	6.200	0	0.5040	6.5520	21.40	3.3751	8	307.0	17.40	380.34	3.76	31.50
0.53700	0.00	6.200	0	0.5040	5.9810	68.10	3.6715	8	307.0	17.40	378.35	11.65	24.30
0.46296	0.00	6.200	0	0.5040	7.4120	76.90	3.6715	8	307.0	17.40	376.14	5.25	31.70
0.57529	0.00	6.200	0	0.5070	8.3370	73.30	3.8384	8	307.0	17.40	385.91	2.47	41.70
0.33147	0.00	6.200	0	0.5070	8.2470	70.40	3.6519	8	307.0	17.40	378.95	3.95	48.30
0.44791	0.00	6.200	1	0.5070	6.7260	66.50	3.6519	8	307.0	17.40	360.20	8.05	29.00
0.33045	0.00	6.200	0	0.5070	6.0860	61.50	3.6519	8	307.0	17.40	376.75	10.88	24.00
0.52058	0.00	6.200	1	0.5070	6.6310	76.50	4.1480	8	307.0	17.40	388.45	9.54	25.10
0.51183	0.00	6.200	0	0.5070	7.3580	71.60	4.1480	8	307.0	17.40	390.07	4.73	31.50
0.08244	30.00	4.930	0	0.4280	6.4810	18.50	6.1899	6	300.0	16.60	379.41	6.36	23.70
0.09252	30.00	4.930	0	0.4280	6.6060	42.20	6.1899	6	300.0	16.60	383.78	7.37	23.30
0.11329	30.00	4.930	0	0.4280	6.8970	54.20	6.3361	6	300.0	16.60	391.25	11.38	22.00

回归算法综合案例(二)：波士顿房屋租赁价格预测




```
Ridge算法:最优参数: {'poly__degree': 3, 'linear__fit_intercept': True, 'poly__include_bias': True, 'poly__interaction_only': True}
Ridge算法:R值=0.832
Lasso算法:最优参数: {'poly__degree': 3, 'linear__fit_intercept': False, 'poly__include_bias': True, 'poly__interaction_only': True}
Lasso算法:R值=0.849
```

回归算法综合案例(二)：波士顿房屋租赁价格预测

```
## 模型训练 ===> 单个Lasso模型（一阶特征选择）<2参数给定1阶情况的最优参数>
model = Pipeline([
            ('ss', StandardScaler()),
            ('poly', PolynomialFeatures(degree=1, include_bias=True, interaction_only=True)),
            ('linear', LassoCV(alphas=np.logspace(-3,1,20), fit_intercept=False))
        ])
# 模型训练
model.fit(x_train, y_train)


# 模型评测
## 数据输出
print "参数:", zip(names,model.get_params('linear')['linear'].coef_)
print "截距:", model.get_params('linear')['linear'].intercept_
```

```
参数: [('CRIM', 22.600592809201991), ('ZN', -0.93534557687414488), ('INDUS', 1.0202352850146854), ('CHAS', -0.0), ('NOX', 0.594831384154614
9), ('RM', -1.8002644875942369), ('AGE', 2.5861907995357281), ('DIS', -0.064956108249539249), ('RAD', -2.8017533936656509), ('TAX', 1.934332
9692037559), ('PTRATIO', -1.7218677875512203), ('B', -2.2762334623842988), ('LSTAT', 0.70288003005515387)]
截距: 0.0
```

CHAS列的数据对于LassoCV模型而言无用，所以在进行实际模型构建的时候，可以不考虑该特征

回归算法综合案例(三)：葡萄酒质量预测

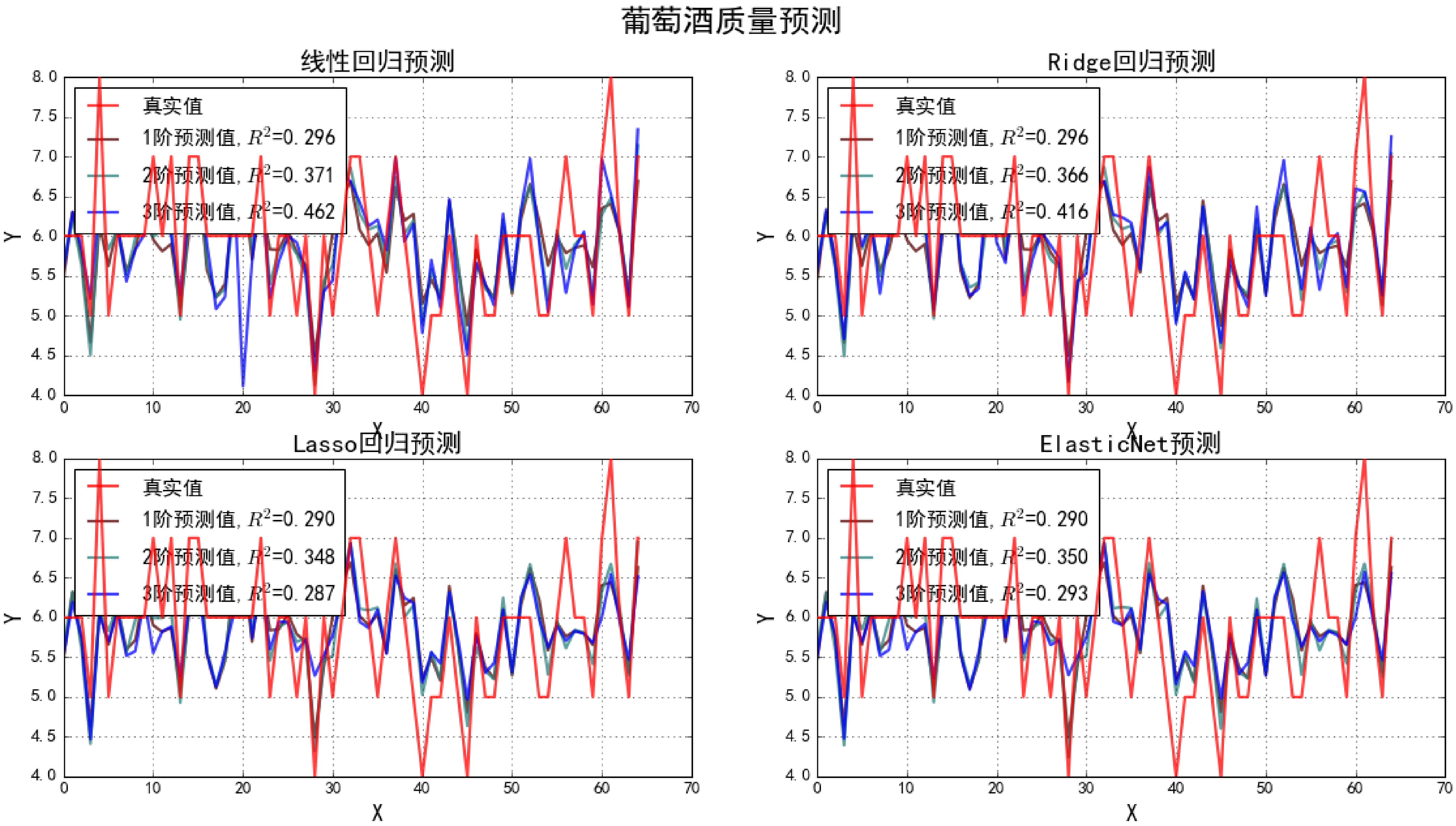
- 基于葡萄酒数据进行葡萄酒质量预测模型构建，分布使用线性回归、Lasso回归、Ridge回归、Elasitc Net四类回归算法构建模型(并分别测试1/2/3阶)，并比较这些回归算法的效果
  - 数据下载url: http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Wine+Quality

Attribute Information:

For more information, read [Cortez et al., 2009].
Input variables (based on physicochemical tests):
1 - fixed acidity
2 - volatile acidity
3 - citric acid
4 - residual sugar
5 - chlorides
6 - free sulfur dioxide
7 - total sulfur dioxide
8 - density
9 - pH
10 - sulphates
11 - alcohol
Output variable (based on sensory data):
12 - quality (score between 0 and 10)

```
7.4;0.7;0;1.9;0.076;11;34;0.9978;3.51;0.56;9.4;5
7.8;0.88;0;2.6;0.098;25;67;0.9968;3.2;0.68;9.8;5
7.8;0.76;0.04;2.3;0.092;15;54;0.997;3.26;0.65;9.8;5
11.2;0.28;0.56;1.9;0.075;17;60;0.998;3.16;0.58;9.8;6
7.4;0.7;0;1.9;0.076;11;34;0.9978;3.51;0.56;9.4;5
7.4;0.66;0;1.8;0.075;13;40;0.9978;3.51;0.56;9.4;5
7.9;0.6;0.06;1.6;0.069;15;59;0.9964;3.3;0.46;9.4;5
7.3;0.65;0;1.2;0.065;15;21;0.9946;3.39;0.47;10;7
7.8;0.58;0.02;2;0.073;9;18;0.9968;3.36;0.57;9.5;7
7.5;0.5;0.36;6.1;0.071;17;102;0.9978;3.35;0.8;10.5;5
```

回归算法综合案例(三)：葡萄酒质量预测



Logistic回归

- Logistic/sigmoid函数 $p = h_\theta(x) = g\left(\theta^T x\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\theta^T x}}$

$$y = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

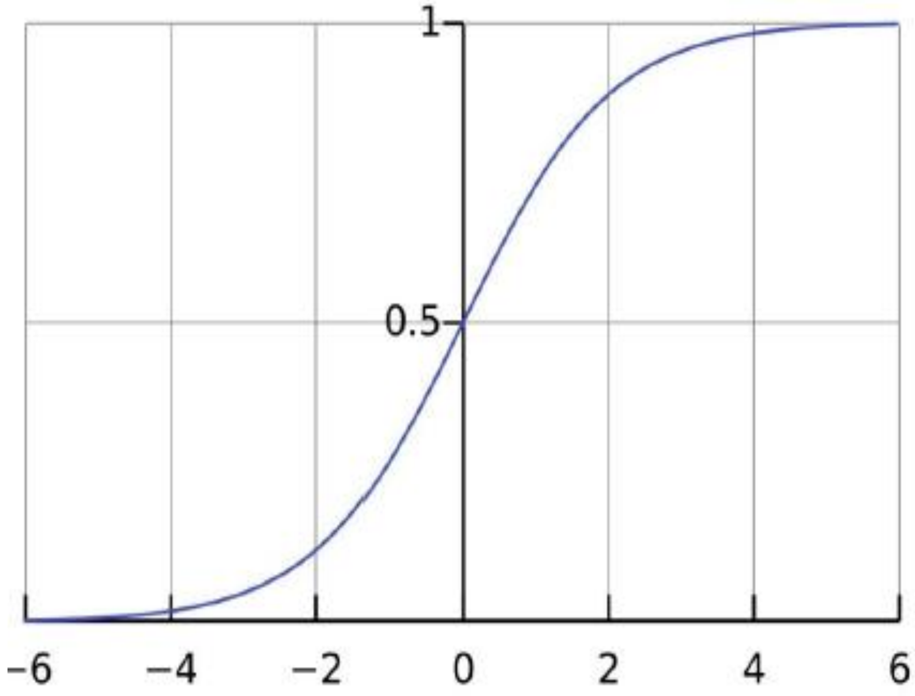
$$\hat{y} = \begin{cases} 1, P\left(\hat{y}=1\right) = p \\ 0, P\left(\hat{y}=0\right) = 1-p \end{cases}$$

$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$g'(z) = \left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)' = \frac{e^{-z}}{\left(1+e^{-z}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-z}} \cdot \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = \frac{1}{1+e^{-z}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z}}\right)$$

$$= g(z) \cdot \left(1 - g(z)\right)$$



Logistic回归及似然函数

	y=1	y=0
p(y|x)	θ	1-θ

- 假设： $P(y=1 \mid x;\theta)=h_\theta(x)$

  $P(y=0 \mid x;\theta)=1-h_\theta(x)$

$$P(y \mid x;\theta)=\left(h_\theta(x)\right)^y\left(1-h_\theta(x)\right)^{(1-y)}$$

- 似然函数： $L(\theta)=p(\vec{y} \mid X;\theta)=\prod_{i=1}^{m} p\left(y^{(i)} \mid x^{(i)};\theta\right)$

$$=\prod_{i=1}^{m}\left(h_\theta\left(x^{(i)}\right)\right)^{y^{(i)}}\left(1-h_\theta\left(x^{(i)}\right)\right)^{\left(1-y^{(i)}\right)}$$

- 对数似然函数： $\ell(\theta)=\log L(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log h_\theta\left(x^{(i)}\right)+\left(1-y^{(i)}\right)\log\left(1-h_\theta\left(x^{(i)}\right)\right)\right)$

最大似然/极大似然函数的随机梯度

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{y^{(i)}}{h_\theta\left(x^{(i)}\right)} - \frac{1-y^{(i)}}{1-h_\theta\left(x^{(i)}\right)}\right)\cdot\frac{\partial h_\theta\left(x^{(i)}\right)}{\partial \theta_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{y^{(i)}}{g\left(\theta^T x^{(i)}\right)} - \frac{1-y^{(i)}}{1-g\left(\theta^T x^{(i)}\right)}\right)\cdot\frac{\partial g\left(\theta^T x^{(i)}\right)}{\partial \theta_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{y^{(i)}}{g\left(\theta^T x^{(i)}\right)} - \frac{1-y^{(i)}}{1-g\left(\theta^T x^{(i)}\right)}\right)\cdot g\left(\theta^T x^{(i)}\right)\left(1-g\left(\theta^T x^{(i)}\right)\right)\cdot\frac{\partial \theta^T x^{(i)}}{\partial \theta_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\left(1-g\left(\theta^T x^{(i)}\right)\right)-\left(1-y^{(i)}\right)g\left(\theta^T x^{(i)}\right)\right)\cdot x_j^{(i)} = \sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}-g\left(\theta^T x^{(i)}\right)\right)\cdot x_n^{(i)}$$

θ参数求解

- Logistic回归θ参数的求解过程为(类似梯度下降方法，往正梯度方向迭代):

$$\theta_j = \theta_j + \alpha \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - h_\theta\left(x^{(i)}\right) \right) x_j^{(i)}$$

$$\theta_j = \theta_j + \alpha \left(y^{(i)} - h_\theta\left(x^{(i)}\right) \right) x_j^{(i)}$$

极大似然估计与Logistic回归损失函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{m} p\left(y^{(i)} \mid x^{(i)};\theta\right)=\prod_{i=1}^{m} p_i^{y^{(i)}}(1-p_i)^{1-y^{(i)}} \qquad p_i=h_\theta\left(x^{(i)}\right)=\frac{1}{1+e^{-\theta^T x^{(i)}}}=\frac{1}{1+e^{-f_i}}$$

$$\ell(\theta)=\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\ln\left[p_i^{y^{(i)}}(1-p_i)^{1-y^{(i)}}\right]=\sum_{i=1}^{m}\ln\left[\left(\frac{1}{1+e^{-f_i}}\right)^{y^{(i)}}\left(\frac{1}{1+e^{f_i}}\right)^{1-y^{(i)}}\right]$$

$$loss\left(y^{(i)},\hat{y}^{(i)}\right)=-\ell(\theta)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[y^{(i)}\ln\left(1+e^{-f_i}\right)+\left(1-y^{(i)}\right)\ln\left(1+e^{f_i}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\ln\left(1+e^{-f_i}\right), & y^{(i)}=1\\ \sum_{i=1}^{m}\ln\left(1+e^{f_i}\right), & y^{(i)}=0\end{cases} \Rightarrow loss\left(y^{(i)},\hat{y}^{(i)}\right)=\sum_{i=1}^{m}\ln\left(1+e^{\left(1-2y^{(i)}\right)\theta^T x^{(i)}}\right), y^{(i)}=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

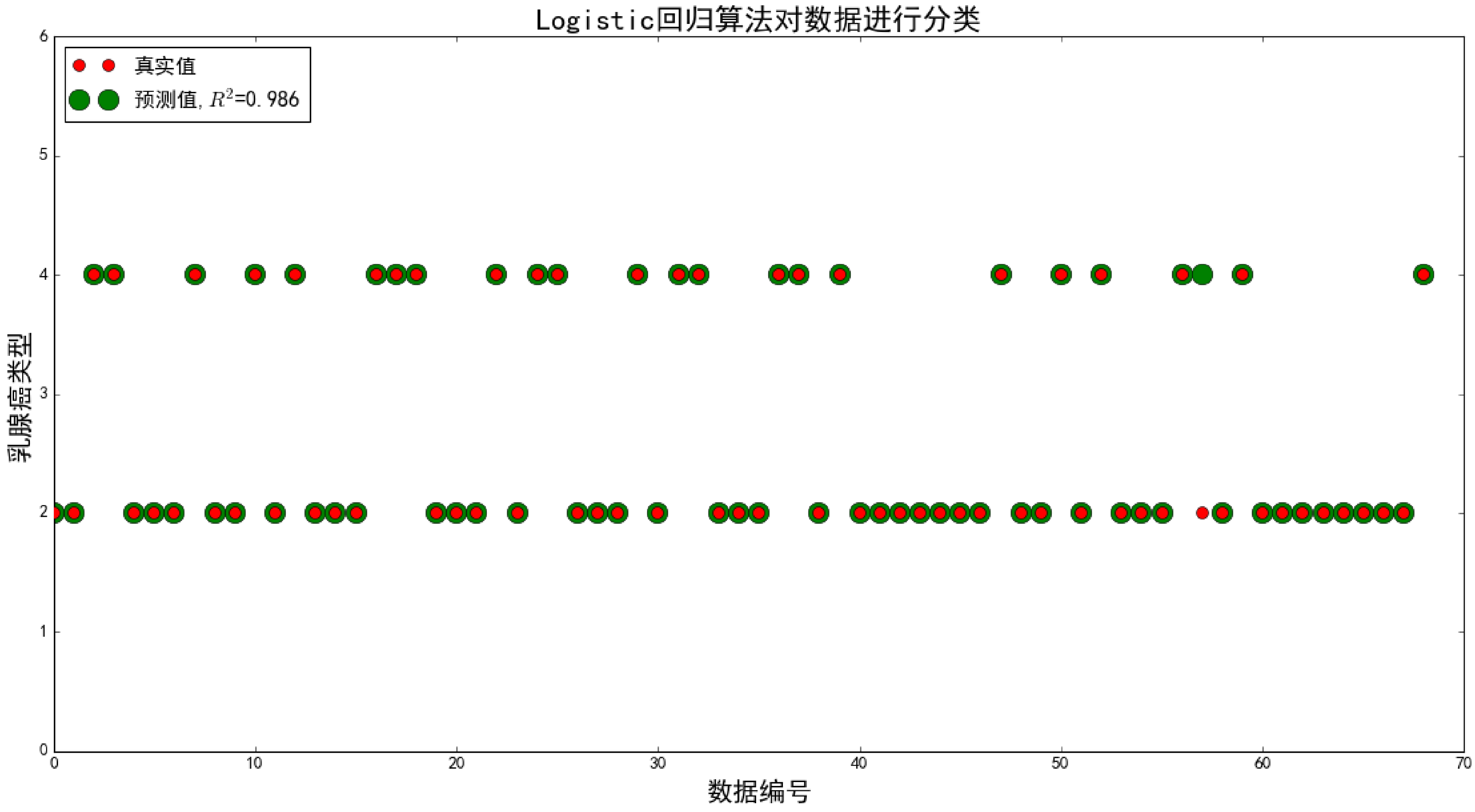
Logistic案例(一)：乳腺癌分类

- 基于病理数据进行乳腺癌预测(复发4/正常2)，使用Logistic算法构建模型
  - 数据来源：http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Breast+Cancer+Wisconsin+%28Original%29

#	Attribute	Domain
1.	Sample code number	id number
2.	Clump Thickness	1 - 10
3.	Uniformity of Cell Size	1 - 10
4.	Uniformity of Cell Shape	1 - 10
5.	Marginal Adhesion	1 - 10
6.	Single Epithelial Cell Size	1 - 10
7.	Bare Nuclei	1 - 10
8.	Bland Chromatin	1 - 10
9.	Normal Nucleoli	1 - 10
10.	Mitoses	1 - 10
11.	Class:	(2 for benign, 4 for malignant)

```
1000025,5,1,1,1,2,1,3,1,1,2
1002945,5,4,4,5,7,10,3,2,1,2
1015425,3,1,1,1,2,2,3,1,1,2
1016277,6,8,8,1,3,4,3,7,1,2
1017023,4,1,1,3,2,1,3,1,1,2
1017122,8,10,10,8,7,10,9,7,1,4
1018099,1,1,1,1,2,10,3,1,1,2
1018561,2,1,2,1,2,1,3,1,1,2
1033078,2,1,1,1,2,1,1,1,5,2
1033078,4,2,1,1,2,1,2,1,1,2
1035283,1,1,1,1,1,1,3,1,1,2
```

Logistic案例(一)：乳腺癌分类



Softmax回归

- softmax回归是logistic回归的一般化，适用于K分类的问题，第k类的参数为向量θ_k，组成的二维矩阵为θ_{k*n}；
- softmax函数的本质就是将一个K维的任意实数向量压缩（映射）成另一个K维的实数向量，其中向量中的每个元素取值都介于（0，1）之间。
- softmax回归概率函数为：

$$p(y=k \mid x;\theta) = \frac{e^{\theta_k^T x}}{\sum_{l=1}^{K} e^{\theta_l^T x}}, k = 1,2\cdots,K$$

Softmax回归与似然估计

- 似然函数 $$L(\theta)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{K}p\left(y=k\mid x^{(i)};\theta\right)^{y_k^{(i)}}=\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{e^{\theta_k^T x^{(i)}}}{\sum_{l=1}^{K}e^{\theta_l^T x^{(i)}}}\right)^{y_k^{(i)}}$$

- 对数似然 $$\ell(\theta)=\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K}y_k^{(i)}\left(\theta_k^T x^{(i)}-\ln\sum_{l=1}^{K}e^{\theta_l^T x^{(i)}}\right)$$

$$\ell(\theta)=\sum_{k=1}^{K}y_k\left(\theta_k^T x-\ln\sum_{l=1}^{K}e^{\theta_l^T x}\right)$$

- 随机梯度

$$\frac{\partial\ell(\theta)}{\partial\theta_k}=y_k x-\frac{e^{\theta_k^T x}}{\sum_{l=1}^{K}e^{\theta_l^T x}}x=\left(y_k-\frac{e^{\theta_k^T x}}{\sum_{l=1}^{K}e^{\theta_l^T x}}\right)\cdot x=\left(y_k-p\left(y=k\mid x;\theta\right)\right)\cdot x$$

Softmax案例(一)：葡萄酒质量分类

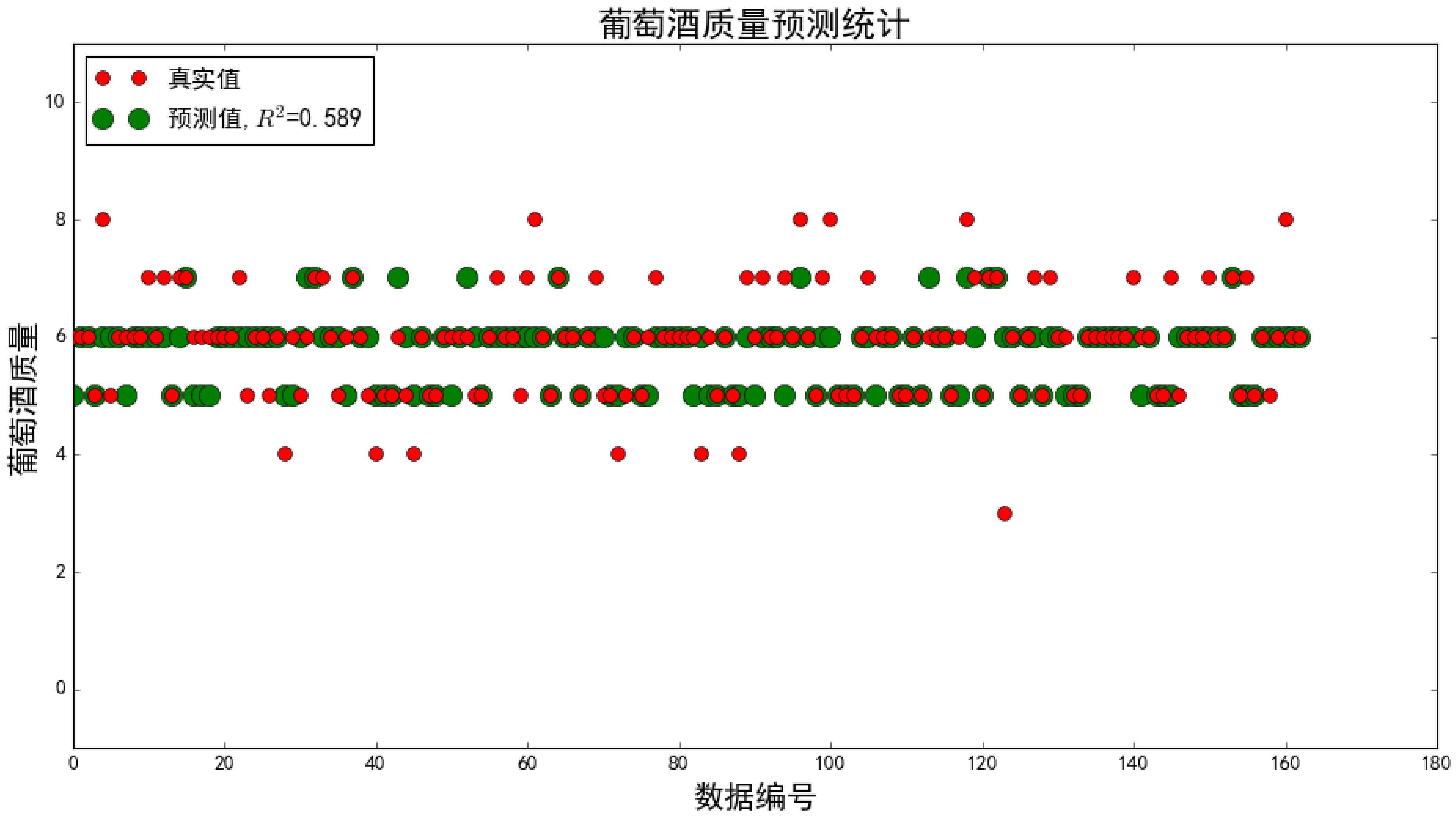
- 基于葡萄酒数据进行葡萄酒质量预测模型构建，使用Softmax算法构建模型，并获取Softmax算法构建的模型效果(注意：分成11类)
  - 数据来源：http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Wine+Quality

Attribute Information:

For more information, read [Cortez et al., 2009].
Input variables (based on physicochemical tests):
1 - fixed acidity
2 - volatile acidity
3 - citric acid
4 - residual sugar
5 - chlorides
6 - free sulfur dioxide
7 - total sulfur dioxide
8 - density
9 - pH
10 - sulphates
11 - alcohol
Output variable (based on sensory data):
12 - quality (score between 0 and 10)

```
7.4;0.7;0;1.9;0.076;11;34;0.9978;3.51;0.56;9.4;5
7.8;0.88;0;2.6;0.098;25;67;0.9968;3.2;0.68;9.8;5
7.8;0.76;0.04;2.3;0.092;15;54;0.997;3.26;0.65;9.8;5
11.2;0.28;0.56;1.9;0.075;17;60;0.998;3.16;0.58;9.8;6
7.4;0.7;0;1.9;0.076;11;34;0.9978;3.51;0.56;9.4;5
7.4;0.66;0;1.8;0.075;13;40;0.9978;3.51;0.56;9.4;5
7.9;0.6;0.06;1.6;0.069;15;59;0.9964;3.3;0.46;9.4;5
7.3;0.65;0;1.2;0.065;15;21;0.9946;3.39;0.47;10;7
7.8;0.58;0.02;2;0.073;9;18;0.9968;3.36;0.57;9.5;7
7.5;0.5;0.36;6.1;0.071;17;102;0.9978;3.35;0.8;10.5;5
```

Softmax案例(一)：葡萄酒质量分类



分类问题综合案例(一)：信贷审批

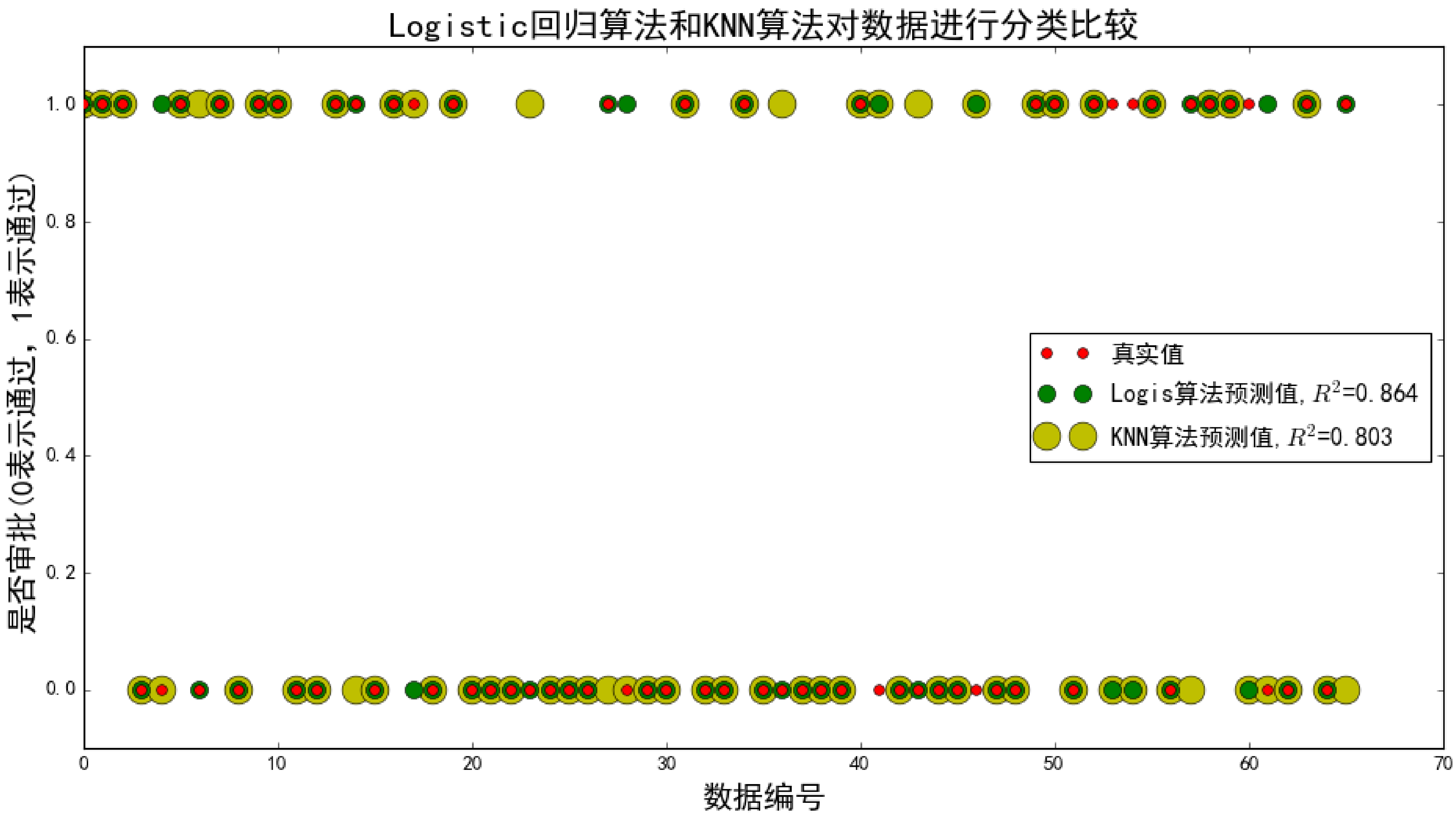
- 基于信贷数据进行用户信贷分类，使用Logistic算法和KNN算法构建模型，并比较这两大类算法的效果
  - 数据来源：http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Credit+Approval

Attribute Information:

A1: b, a.
A2: continuous.
A3: continuous.
A4: u, y, l, t.
A5: g, p, gg.
A6: c, d, cc, i, j, k, m, r, q, w, x, e, aa, ff.
A7: v, h, bb, j, n, z, dd, ff, o.
A8: continuous.
A9: t, f.
A10: t, f.
A11: continuous.
A12: t, f.
A13: g, p, s.
A14: continuous.
A15: continuous.
A16: +,- (class attribute)

```
a,40.83,10,u,g,q,h,1.75,t,f,0,f,g,00029,837,+
b,19.33,9.5,u,g,q,v,1,t,f,0,t,g,00060,400,+
a,32.33,0.54,u,g,cc,v,0.04,t,f,0,f,g,00440,11177,+
b,36.67,3.25,u,g,q,h,9,t,f,0,t,g,00102,639,+
b,37.50,1.125,y,p,d,v,1.5,f,f,0,t,g,00431,0,+
a,25.08,2.54,y,p,aa,v,0.25,t,f,0,t,g,00370,0,+
b,41.33,0,u,g,c,bb,15,t,f,0,f,g,00000,0,+
b,56.00,12.5,u,g,k,h,8,t,f,0,t,g,00024,2028,+
a,49.83,13.585,u,g,k,h,8.5,t,f,0,t,g,00000,0,+
```

分类问题综合案例(一)：信贷审批



分类问题综合案例(二)：鸢尾花数据分类

- 基于鸢尾花数据进行分类模型构建，使用logistics算法和KNN算法进行构建，并计算两种算法的AOC值，以及画出对应的ORC曲线
  - 数据来源：http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Iris

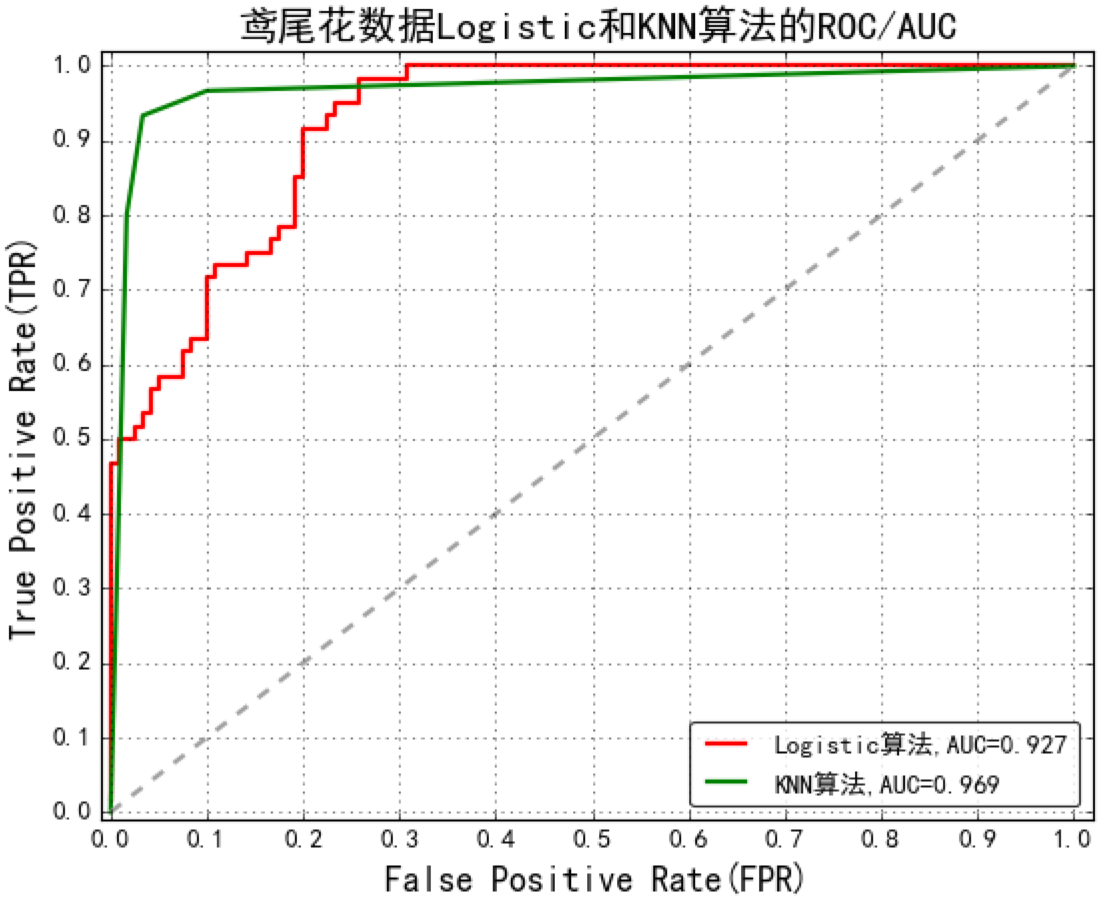
Data Set Characteristics:	Multivariate	Number of Instances:	150	Area:	Life
Attribute Characteristics:	Real	Number of Attributes:	4	Date Donated	1988-07-01
Associated Tasks:	Classification	Missing Values?	No	Number of Web Hits:	1319181

Attribute Information:

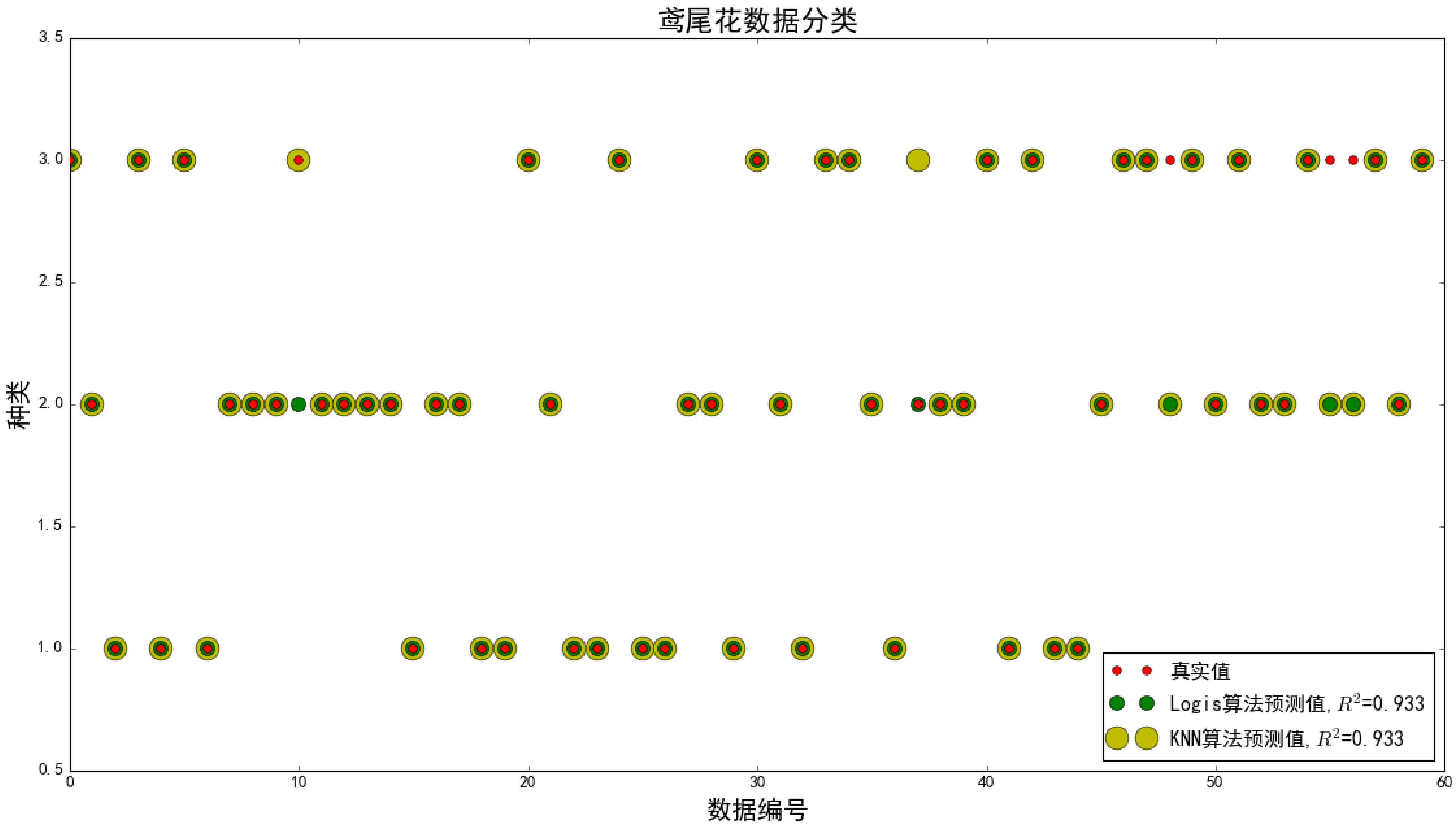
1. sepal length in cm
2. sepal width in cm
3. petal length in cm
4. petal width in cm
5. class:

-- Iris Setosa
-- Iris Versicolour
-- Iris Virginica

分类问题综合案例(二)：鸢尾花数据分类



分类问题综合案例(二)：鸢尾花数据分类



总结

- 线性模型一般用于回归问题，Logistic和Softmax模型一般用于分类问题
- 求θ的主要方式是梯度下降算法，梯度下降算法是参数优化的重要手段，主要是SGD，适用于在线学习以及跳出局部极小值
- Logistic/Softmax回归是实践中解决分类问题的最重要的方法
- 广义线性模型对样本要求不必要服从正态分布、只需要服从指数分布簇(二项分布、泊松分布、伯努利分布、指数分布等)即可；广义线性模型的自变量可以是连续的也可以是离散的。

IBEIFENG.COM

THANK YOU

上海育创网络科技有限公司