

Estimation de volatilité dans la microstructure de marché

Intérêt et analyse comparative de différentes méthodes

EA RECHERCHE LONG - RAPPORT INTERMÉDIAIRE

Aloulou Mohamed

Chouik Elias

Wallaert Hippolyte

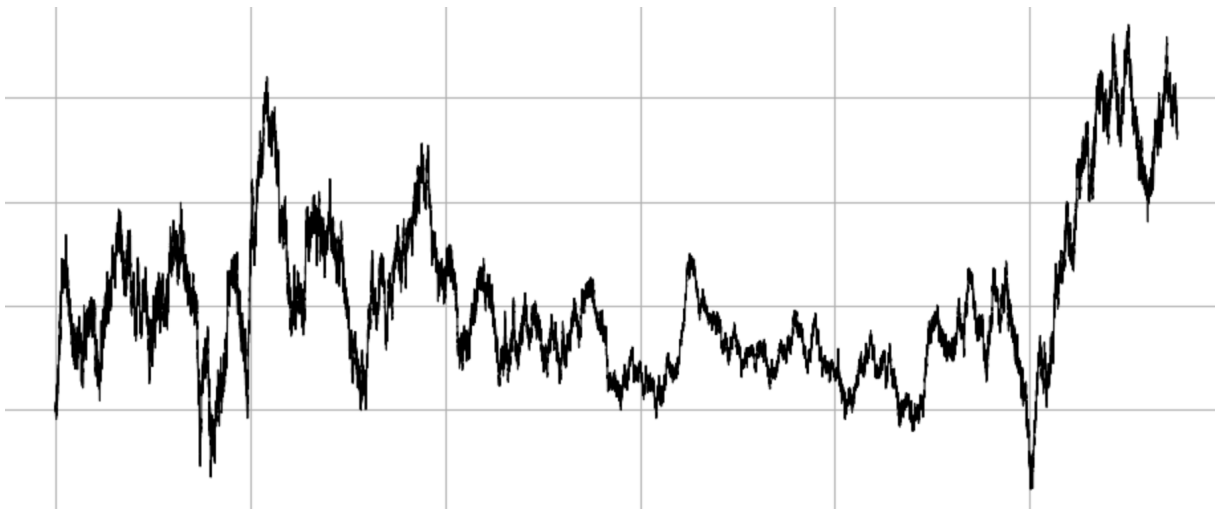


Table des matières

1	<i>Optimal Execution of Portfolio Transactions</i> : introduction et motivations du projet	2
1.1	Le modèle d'ALMGREN et CHRISS (2000)	2
1.1.1	Dynamique des prix	2
1.1.2	Coût d'une stratégie de trading	3
1.1.3	Stratégies extrêmes	4
1.2	Solution optimale avec mesure d'aversion au risque	4
1.3	Robustesse de la solution face à une erreur d'estimation de la volatilité	6
2	Techniques d'estimation de la volatilité dans différents modèles	7
2.1	Modèle de diffusion classique	7
2.2	Modèle avec bruit de microstructure	7
2.2.1	Estimateur 1 : Variance Réalisée $[X_t, X_t]_T$	8
2.2.2	Estimateur 2 : Échantillonnage à Basse Fréquence	10
2.2.3	Estimateur 3 : Échantillonnage Optimal	10
2.2.4	Estimateur 4 : Sous-échantillonnage et Moyennage	11
2.2.5	Estimateur 5 : Estimateur à Deux Échelles (Meilleur Estimateur)	12
2.2.6	Comparaison des résultats	13
3	Modèle des zones d'incertitude : Christian Yann Robert et Rosenbaum (2010)	14
3.1	Description du modèle	14
3.2	Construction de l'estimateur	16
3.3	Preuve de la convergence de l'estimateur $\hat{\eta}_{\alpha,t}$	17
3.4	Résultats numériques	20
3.4.1	Performances de l'estimateur avec le modèle des zones d'incertitudes	20
3.4.2	Comparaison avec l'estimateur de ZHANG, MYKLAND et AÏT-SAHALIA (2005)	21
4	Hedging d'options en microstructure : Christian Y. Robert et Rosenbaum (2012)	23
4.1	Estimations des erreurs de couverture	24
4.1.1	Erreur de couverture sans bruit de microstructure sur le prix	24
4.1.2	Erreur de couverture avec bruit de microstructure	25
4.1.3	Niveau optimal de rééquilibrage en présence de bruit de microstructure	25
4.2	Simulation du Hedging et visualisation des résultats de convergence	27
5	Effet de Epps et Estimateur HY : Hayashi et Yoshida (2005)	28
	Bibliographie	29
	Code source	29

1 *Optimal Execution of Portfolio Transactions* : introduction et motivations du projet

Introduction

La microstructure de marché consiste à analyser les processus de formation des prix sur des horizons de temps courts (de l'ordre de la seconde à la journée), tout en tenant compte des phénomènes discrets observables à cette échelle. Cette approche permet de développer une analyse plus fine et réaliste que celle des modèles généraux, qui décrivent mieux les évolutions des actifs sur des périodes plus longues (typiquement plusieurs semaines, mois ou années).

Avant de développer plus largement les différentes techniques d'estimation de la volatilité dans un contexte de microstructure de marché, il est pertinent de s'intéresser à une situation courante à laquelle sont confrontés les traders : l'exécution optimale d'un portefeuille de transactions sur un temps donné. En effet, l'analyse de cette problématique quotidienne des traders met particulièrement en lumière la pertinence de s'intéresser à l'estimation de la volatilité dans le contexte de la microstructure de marché.

1.1 Le modèle d'Almgren et Chriss (2000)

Lorsqu'un trader reçoit un portefeuille de transactions à réaliser au cours de la journée, la manière dont il s'organise pour effectuer ces opérations a un impact significatif sur leur coût. Supposons que le trader doive liquider des unités d'un certain titre financier au cours d'une journée. Qu'il décide de vendre tous ses titres dès l'ouverture du marché ou qu'il préfère répartir ses actions au fil du temps, le rendement de ces opérations ne sera pas nécessairement identique.

Dans le cadre de l'exécution optimale des transactions de portefeuille, Almgren et Chriss ont proposé un modèle qui vise à minimiser une combinaison de risques de volatilité et de coûts de transaction. Ces risques et ces coûts résultent de l'impact à la fois temporaire et permanents des actions prises sur le marché.

Formellement, le modèle considère un bloc de X unités d'un titre financier que l'on souhaite liquider avant un temps T . On décide de discrétiser ce temps en N intervalles distincts de taille $\tau := T/N$. Une stratégie de trading est alors définie par une suite de quantités x_k détenues aux temps $t_k = k \cdot \frac{T}{N}$ avec $N \rightarrow +\infty$. Initialement, nous avons $x_0 = X$, et à la fin de la période de liquidation, $x_N = 0$.

$$X = x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_N = 0$$

On note également :

$$x_k = X - \sum_{j=1}^k n_j = \sum_{j=k+1}^N n_j \quad (1)$$

avec $n_k := x_{k-1} - x_k$ la quantité échangée au temps t_k (supposée positive dans la suite).

1.1.1 Dynamique des prix

Le modèle prend en compte deux facteurs exogènes : la volatilité et le drift (que l'on a considéré comme nul dans toute la suite), et deux facteurs endogènes liés à l'impact des opérations de transaction sur marché :

- **Impact temporaire** : la transaction crée un déséquilibre entre l'offre et la demande, ce qui conduit à une variation temporaire du prix.

L'impact temporaire sur le marché est modélisé par la relation suivante :

$$\tilde{S}_k = S_{k-1} - \underbrace{h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)}_{\text{impact temporaire}} \quad (2)$$

où \tilde{S}_k correspond au montant reçu en t_k grâce aux ventes effectuées en t_{k-1} .

— **Impact permanent** : la transaction est perçue par les autres acteurs du marché comme une information sur la valeur du titre, entraînant une modification durable du prix.

La dynamique des prix est modélisée par la relation :

$$S_k = S_{k-1} + \underbrace{\sigma\sqrt{\tau}\xi_k}_{\text{incrément brownien}} - \underbrace{\tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right)}_{\text{impact permanent}} \quad (3)$$

où ξ_k est un tirage indépendant des autres d'une loi normale centrée réduite et σ représente la volatilité. Dans la suite on notera $\nu_k := n_k/\tau$ le taux de trading au temps t_k .

1.1.2 Coût d'une stratégie de trading

Maintenant que les impacts temporaires et permanents des actions sur le marché sont précisément définis, il est possible de calculer le revenu total d'une stratégie de trading. Celui-ci est donné par :

$$\sum_{k=1}^N n_k \tilde{S}_k = X S_0 + \sum_{k=1}^N \left(\sigma\sqrt{\tau}\xi_k - \tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right) \right) x_k - \sum_{k=1}^N n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right) \quad (4)$$

Démonstration. On utilise d'abord la relation d'impact temporaire (2) pour réécrire la somme comme la différence $\sum_{k=1}^N n_k S_{k-1} - \sum_{k=1}^N n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$. Il suffit alors de retrouver l'expression voulue pour le premier terme. Pour cela, on écrit une sommation d'Abel, à savoir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N n_k S_{k-1} &= \sum_{k=1}^N n_k \left(\sum_{j=1}^{k-1} (S_j - S_{j-1}) + S_0 \right) \\ &= S_0 \sum_{k=1}^N n_k + \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=j+1}^N n_k \right) (S_j - S_{j-1}) \\ &= x_0 S_0 + \sum_{k=1}^N x_k (S_k - S_{k-1}), \end{aligned}$$

puisque $x_k = \sum_{j=k+1}^N n_j$ d'après (1). On explicite ensuite la valeur de $S_k - S_{k-1}$ en utilisant la relation d'impact permanent, à savoir (3). En remettant tous les éléments en place, et en utilisant que $x_0 = X$ et $x_N = 0$, on parvient au résultat annoncé. \square

Le coût total d'une stratégie de trading, aussi appelé "*implementation shortfall*" est ensuite défini comme suit : $x = X S_0 - \sum_{k=1}^N x_k \tilde{S}_k$. Il se décompose sous la façon suivante :

$$x = \underbrace{\sum_{k=1}^N \tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right) x_k}_{\text{coût total dû à l'effet permanent de chaque transaction}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)}_{\text{coût total dû à l'effet temporaire de chaque transaction}} - \underbrace{\sum_{k=1}^N \sigma\sqrt{\tau}\xi_k x_k}_{\text{effets cumulés de la volatilité}}$$

À partir de cette écriture, on peut facilement calculer son espérance et sa variance, ce qui sera important dans la suite :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(x) = \sum_{k=1}^N \tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right) x_k + \sum_{k=1}^N n_k h\left(\frac{n_k}{T}\right), \\ \mathbb{V}(x) = \sigma^2 \sum_{k=1}^N \tau x_k^2. \end{cases} \quad (5)$$

Pour terminer la modélisation, il convient finalement de définir les fonctions d'impact qui seront utilisées dans la suite. ALMGREN et CHRISS font le choix d'étudier des fonctions d'impact linéaires, à savoir : $g(\nu) = \gamma\nu$ pour l'impact permanent et $h(\nu) = \epsilon \operatorname{sgn}(\nu) + \frac{\eta}{\tau}\nu$ pour l'impact temporaire.

1.1.3 Stratégies extrêmes

Remarquons d'abord que la stratégie de variance minimale consiste à vendre tous les titres d'un coup, ce qui revient à considérer qu'il existe $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $n_i = X$ et $n_j = 0$ pour tout $j \neq i$. L'espérance du coût s'écrit alors : $\mathbb{E}(x) = \epsilon X + \eta \frac{X^2}{\tau}$. La réduction de la variance à 0 a donc un coût significatif, puisque lorsque le nombre de périodes grandit, le coût de l'exécution du portefeuille devient arbitrairement grand.

À l'opposé, on peut minimiser l'espérance du coût en vendant les titres à un taux constant tout au long du temps imparti. En effet, on peut reprendre l'expression (5) de l'espérance du coût et remplacer les fonctions d'impact par leurs expressions. Un calcul direct fournit alors l'expression suivante en fonction des n_k :

$$\mathbb{E}(x) = \frac{\gamma}{2} X^2 + \epsilon X + \left(\frac{\eta}{\tau} - \frac{\gamma}{2}\right) \sum_{k=1}^N n_k^2 \quad (6)$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre bien que le minimum est atteint pour la stratégie constante $n_k = X/N$, sous réserve que le terme $\eta - \gamma\tau/2$ soit positif. Par contre, un calcul simple montre que la variance avec cette stratégie est linéaire en T et donc croît infiniment lorsque la durée d'exécution augmente, ce qui n'est pas satisfaisant du point du trader.

1.2 Solution optimale avec mesure d'aversion au risque

Le but étant de donner une réponse à un problème réel auquel les traders font face quotidiennement, le paragraphe précédent montre qu'il est nécessaire d'introduire un trade-off entre espérance et variance du coût. ALMGREN et CHRISS minimisent donc le critère :

$$\min \mathbb{E}(x) \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{V}(x) \leq V^* \quad (7)$$

La résolution de ce problème pour tout V^* positif fournit une frontière optimale d'exécution. Or, l'espérance du coût d'exécution est strictement convexe d'après (6) et la variance du coût est convexe également. Pour tout $V^* \geq 0$, l'ensemble $\{x \mid \mathbb{V}(x) \leq V^*\}$ est aussi un convexe non vide. La dualité forte assure donc que la frontière optimale d'exécution s'obtient également en résolvant pour tout $\lambda \geq 0$:

$$\min_x \mathbb{E}(x) + \lambda \mathbb{V}(x) \quad (8)$$

puisque le terme en λV^* du lagrangien est indépendant de x .

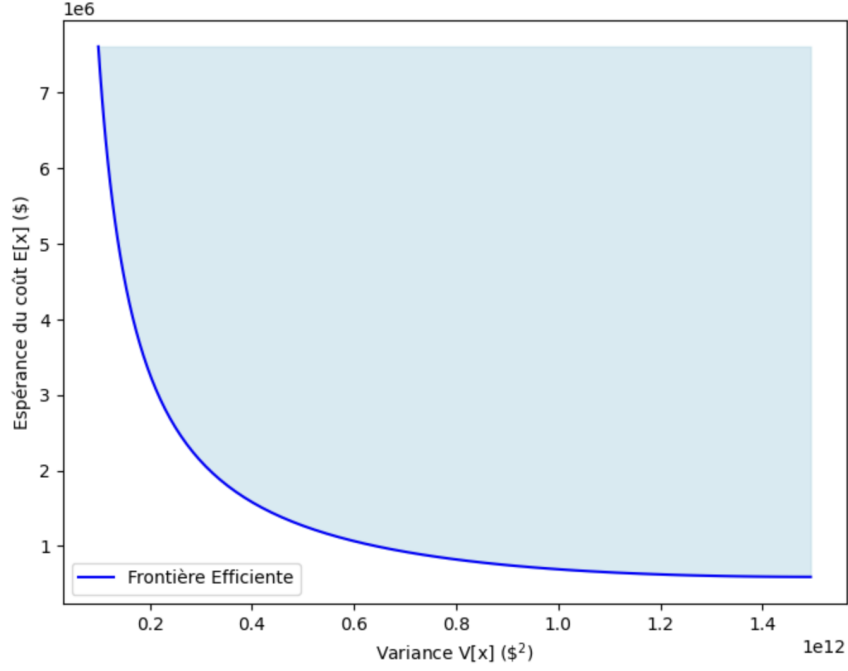


FIGURE 1 – Frontière efficiente.

Fixons donc $\lambda \geq 0$ et résolvons le problème 8. Le caractère strictement convexe et différentiable du critère à minimiser permet de caractériser la solution à l'aide des dérivées partielles. Les expressions 5 et 6 nous fournissent pour $j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 2\tau \left(\lambda \sigma^2 x_j - \left(\eta - \frac{\gamma\tau}{2} \right) \frac{x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}}{\tau^2} \right)$$

On peut réécrire la caractérisation du minimum global comme :

$$\frac{1}{\tau^2} (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) = \tilde{\kappa}^2 x_j \quad \text{avec} \quad \tilde{\kappa}^2 = \frac{2\lambda\sigma^2}{2\eta - \gamma\tau}.$$

On peut résoudre explicitement cette équation récurrente linéaire d'ordre deux grâce aux deux conditions limites $x_0 = X$ et $x_N = 0$. En exploitant le fait que $\lambda \geq 0$, la solution explicite s'écrit pour tout $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$x_j = \frac{\sinh(\kappa(T - t_j))}{\sinh(\kappa T)} X \quad (9)$$

où κ est défini comme la solution de :

$$\frac{2}{\tau^2} (\cosh(\kappa\tau) - 1) = \tilde{\kappa}^2$$

La liste des trades associée s'écrit quant à elle pour tout $j \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$:

$$n_j = \frac{2 \sinh(\frac{1}{2}\kappa\tau)}{\sinh(\kappa T)} \cosh(\kappa(T - t_j + \tau/2)) X \quad (10)$$

Précisons que dans le cas où λ est négatif, nous obtenons les mêmes expressions, à ceci près que les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont remplacées par leurs versions trigonométriques.

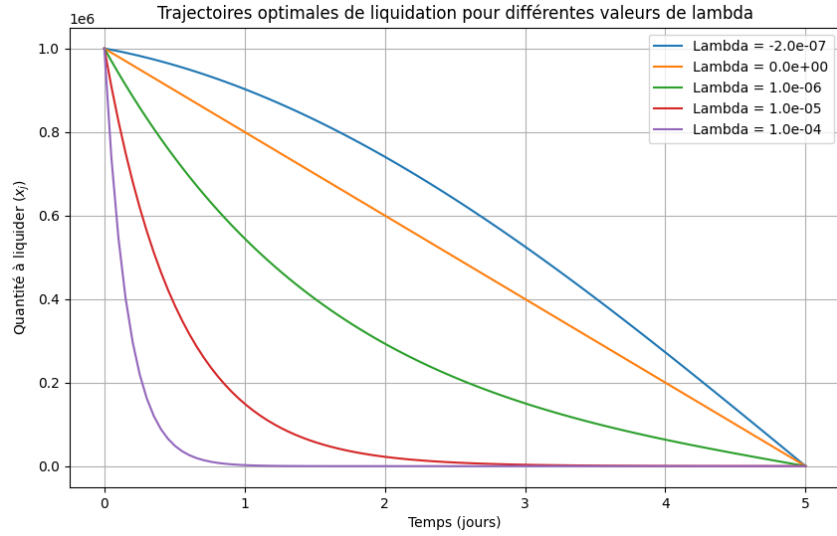


FIGURE 2 – Trajectoires optimales de liquidation en fonction la mesure d'aversion au risque.

1.3 Robustesse de la solution face à une erreur d'estimation de la volatilité

Il est important de rappeler que l'exécution de la stratégie optimale nécessite la connaissance de la volatilité de l'actif à liquider. Cette volatilité doit donc être estimée par le trader qui souhaite appliquer la stratégie. Le point crucial de notre analyse consiste maintenant à étudier la robustesse de la stratégie optimale vis-à-vis de l'erreur dans l'estimation de la volatilité. Nous avons calculé numériquement l'utilité d'une stratégie appliquée avec une mauvaise volatilité. On observe très clairement que la qualité de la stratégie se dégrade de manière importante lorsque la volatilité est mal estimée, que ce soit par le haut ou par le bas. Il est donc absolument nécessaire de développer des outils efficaces pour estimer précisément la volatilité, puisque cette estimation a un impact déterminant sur les actions des traders.

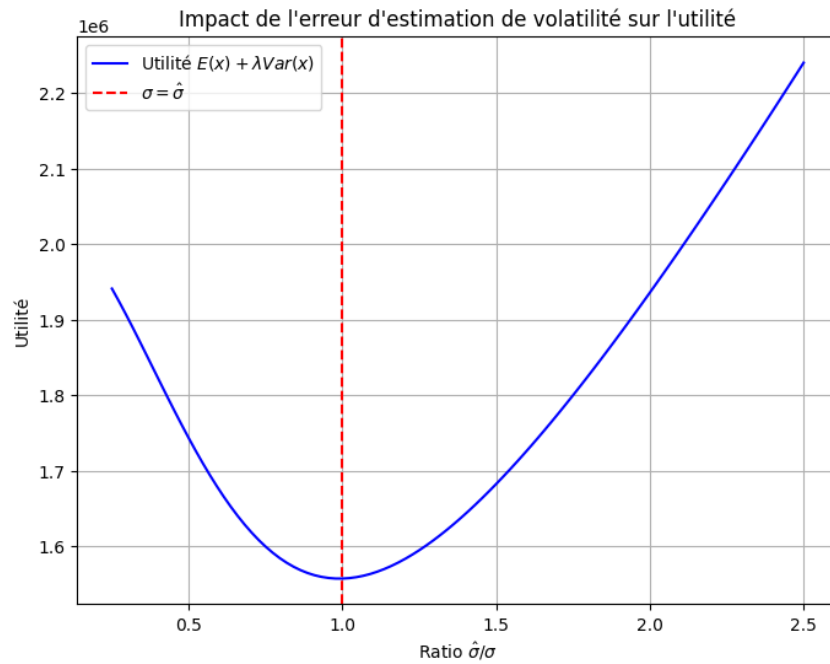


FIGURE 3 – Coût utilitaire d'une erreur d'estimation de la volatilité avant calcul d'une stratégie optimale.

2 Techniques d'estimation de la volatilité dans différents modèles

Dans la section précédente, nous avons introduit le modèle d'ALMGREN et CHRISS, qui établit un cadre théorique pour l'exécution optimale des transactions. Une hypothèse fondamentale de ce modèle est l'estimation précise de la volatilité, σ , paramètre clé qui influe directement sur les stratégies de trading. Si la volatilité est mal estimée, cela peut mener à de mauvaises décisions : soit en augmentant les risques pris par le trader, soit en rendant les transactions plus coûteuses. C'est pourquoi il est essentiel de s'appuyer sur des méthodes fiables pour estimer ce paramètre.

L'intérêt de cet exemple était d'illustrer à quel point l'estimation de la volatilité est déterminante pour des décisions financières efficaces. Dans cette section, nous examinerons différentes techniques d'estimation de la volatilité en tenant compte de modèles distincts de variations des prix.

2.1 Modèle de diffusion classique

Dans un premier temps, considérons le modèle classique de l'évolution du prix d'un actif S_t , où le logarithme du prix, $X_t = \log S_t$, suit l'équation d'Itô :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, \quad (11)$$

avec B_t un mouvement brownien standard, μ_t le coefficient de dérive, et σ_t^2 la variance instantanée du processus. Considérons par ailleurs, une discrétisation du temps sur $[0, T]$ en n sous-intervalles définis par des instants d'observation $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} = T$.

Dans ce modèle, on estime facilement la volatilité intégrée $\langle X_t, X_t \rangle := \int_0^T \sigma_t^2 dt$ par ce qu'on appelle "la variance réalisée" :

$$[X, X]_T := \sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad (12)$$

Sous l'hypothèse d'une discrétisation de plus en plus fine ($\max_i(t_{i+1} - t_i) \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$), que l'on supposera par la suite, cette somme converge en probabilité vers $\langle X_t, X_t \rangle$. Ainsi, la variance réalisée est un estimateur asymptotiquement consistant de la volatilité intégrée.

2.2 Modèle avec bruit de microstructure

Cependant, lorsqu'on échantillonne à haute fréquence, les données sont perturbées par des phénomènes liés aux mécanismes de marché. Ces perturbations, appelées bruit de microstructure, déforment les prix réels et introduisent un biais dans les estimations de volatilité. Ainsi, il devient nécessaire d'adapter le modèle (11). L'idée proposée dans l'article de ZHANG, MYKLAND et AÏT-SAHALIA, "A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility with Noisy High-Frequency Data" est de supposer que les prix observés Y_t sont perturbés de la manière suivante :

$$Y_t = X_t + \epsilon_t, \quad (13)$$

où ϵ_t est un bruit indépendant de X_t , avec $\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ et $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$. Le prix réel X_t , quant à lui, suit la même dynamique que précédemment, décrite par l'équation (11).

Dans nos simulations, nous avons utilisé le modèle de Heston, connu pour modéliser la variance stochastique des prix des actifs :

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\mu - \frac{v_t}{2} \right) dt + \sqrt{v_t} dB_t, \\ dv_t &= \kappa(\alpha - v_t) dt + \gamma \sqrt{v_t} dW_t, \end{aligned} \quad (14)$$

avec la condition de Feller $2\kappa\alpha \geq \gamma^2$. Les mouvements browniens B_t et W_t sont corrélés avec une corrélation de ρ . Pour modéliser cette corrélation, nous avons procédé de la manière suivante :

- On simule deux mouvements browniens indépendants $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ et $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$,
- On construit W_t à partir de B_t en posant :

$$W_t = \rho B_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2.$$

Le processus est ensuite simulé à l'aide d'une méthode d'Euler discrétisée, en prenant en compte les conditions nécessaires pour garantir que $v_t \geq 0$ à chaque instant.

TABLE 1 – Paramètres de simulation

Taux de drift	$\mu = 0.05$
Volatilité initiale	$v_0 = 0.04$
Volatilité de la variance	$\gamma = 0.5$
Taux de réversion	$\kappa = 5.0$
Moyenne long terme de la variance	$\alpha = 0.4$
Corrélation des mouvements browniens	$\rho = -0.5$
Pas de temps	$\Delta t = 1 \text{ sec}$
Durée totale	$T = 6.5 H$
Paramètre du bruit de microstructure	$\sigma_\epsilon = 0.0005$
Nombre de simulations Monte-Carlo	10 000

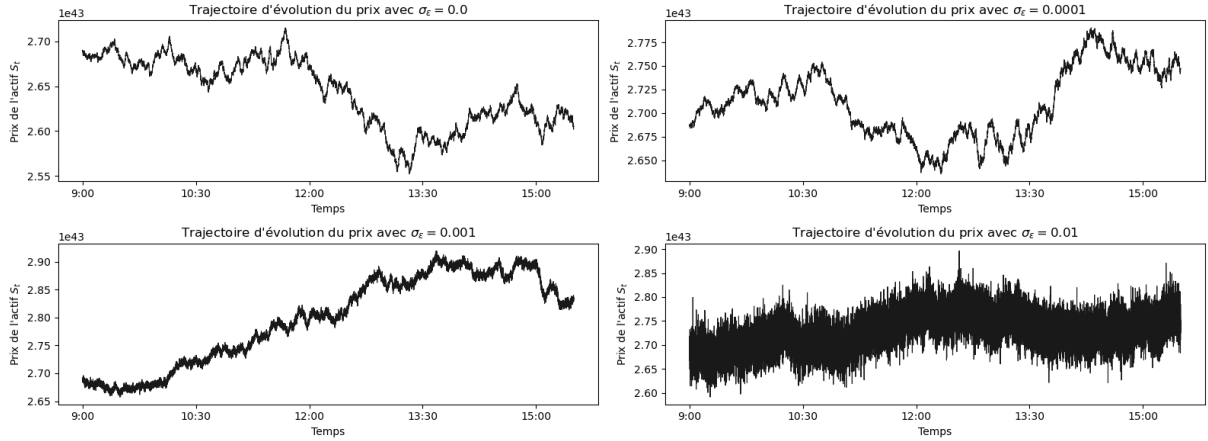


FIGURE 4 – Evolution du prix d'un actif en fonction de la variance du bruit de microstructure

2.2.1 Estimateur 1 : Variance Réalisée $[X_t, X_t]_T$

Lorsqu'on applique l'estimateur précédent $[Y, Y]_T$ au modèle avec bruit de microstructure, il surestime la volatilité réelle du prix sous-jacent X_t à haute fréquence d'échantillonnage. Le biais est dû à la variance du bruit, qui domine à des fréquences n élevées. Concrètement,

Proposition 1.

$$[Y, Y]_T = 2n\sigma_\epsilon^2 + O_p(\sqrt{n}), \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Définition 1. La notation $A_n = O_p(a_n)$, où A_n est une suite de variables aléatoires et a_n est une suite déterministe signifie que $\frac{A_n}{a_n}$ est borné asymptotiquement en probabilité, *i.e.* pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel fini $M > 0$ et un entier $N > 0$ tels que : $\forall n > N, \mathbb{P}\left(\left|\frac{A_n}{a_n}\right| > M\right) < \varepsilon$.

Lemme 1 (admis). Soit (A_n) une suite de variables aléatoires telle que chaque élément ait une variance finie. Alors :

$$A_n = \mathbb{E}(A_n) + O_p\left(\sqrt{\text{Var}(A_n)}\right). \quad (16)$$

Remarque: Dans la suite nous raisonnons conditionnellement à X , car cela permet d'évaluer l'estimateur a posteriori et d'isoler l'effet du bruit ε_t .

Démonstration de la proposition. On suppose le bruit iid avec $\varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et indépendant du processus X . On commence par développer le carré :

$$(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2 = (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + 2(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(\varepsilon_{t_{i+1}} - \varepsilon_{t_i}) + (\varepsilon_{t_{i+1}} - \varepsilon_{t_i})^2.$$

En sommant sur i , on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(\varepsilon_{t_{i+1}} - \varepsilon_{t_i})}_{:= [X, \varepsilon]_T} + \sum_{i=0}^{n-1} (\varepsilon_{t_{i+1}} - \varepsilon_{t_i})^2.$$

- Le premier terme converge en probabilité vers $\int_0^T \sigma_t^2 dt$.
- Le second terme est d'espérance nulle : $\mathbb{E}([X, \varepsilon]_T \mid X) = 0$. De plus, en le réécrivant ,

$$[X, \varepsilon]_T = \sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i} + X_{t_{i-1}} - X_{t_i})\varepsilon_{t_i} + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\varepsilon_{t_n} - (X_{t_1} - X_{t_0})\varepsilon_{t_0},$$

puis en développant sa variance, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Var}([X, \varepsilon]_T \mid X) &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i} + X_{t_{i-1}} - X_{t_i})\varepsilon_{t_i} + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\varepsilon_{t_n} - (X_{t_1} - X_{t_0})\varepsilon_{t_0} \right)^2 \mid X \right] \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i} + X_{t_{i-1}} - X_{t_i})^2 + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})^2 + (X_{t_1} - X_{t_0})^2 \right) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \left(2[X, X]_T - 2 \sum_{i=1}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \right) \\ &\leq 4\sigma_\varepsilon^2 2[X, X]_T \quad (\text{Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $[X, X]_T = O_p(1)$, on conclut par le lemme que $[X, \varepsilon]_T = O_p(1)$.

- Le troisième terme, quant à lui, a pour espérance conditionnellement à X ,

$$\mathbb{E}([\varepsilon, \varepsilon]_T \mid X) = \mathbb{E}([\varepsilon, \varepsilon]_T) = 2n\sigma_\varepsilon^2.$$

De plus, comme les termes $(\varepsilon_{t_{i+1}} - \varepsilon_{t_i})^2$ sont indépendants et identiquement distribués, la variance totale est donnée par :

$$\text{Var}([\varepsilon, \varepsilon]_T \mid X) = n \cdot \text{Var}((\varepsilon_{t_1} - \varepsilon_0)^2) = 8n\sigma_\varepsilon^4.$$

Ainsi, par le lemme 1, on conclut que $[\varepsilon, \varepsilon]_T = 2n\sigma_\varepsilon^2 + O_p(\sqrt{n})$.

En sommant, on retrouve bien la relation (15) : $[Y, Y]_T = 2n\sigma_\varepsilon^2 + O_p(\sqrt{n})$. \square

L'équation (15) montre que, dans le modèle de ZHANG, MYKLAND et AÏT-SAHALIA (2005), la variance réalisée $[Y, Y]_T$ n'est pas un estimateur fiable de la volatilité intégrée $\langle X, X \rangle_T$. Pour un grand n , la variance réalisée est davantage dominée par la contribution du bruit, à savoir $2n\mathbb{E}[\varepsilon^2]$, que par la variation quadratique réelle. Cependant, cela permet de construire un estimateur consistant de la variance du bruit, en posant :

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{1}{2n} [Y, Y]_T. \quad (17)$$

2.2.2 Estimateur 2 : Échantillonnage à Basse Fréquence

Comme nous l'avons mentionné, plus n est grand, plus la variance réalisée est dominée par le bruit ε . Pour contourner ce problème, une idée consiste à sous-échantillonner les données afin de réduire l'influence du bruit tout en préservant les informations essentielles sur la volatilité intégrée.

Cela consiste à ne pas utiliser toutes les observations disponibles, mais seulement une sous-séquence d'entre elles, sélectionnée à une fréquence plus basse. En pratique, cela revient à choisir un écart régulier entre les points d'échantillonnage, par exemple en considérant une observation chaque 5 minutes au lieu de chaque seconde. Ce processus réduit la contribution des termes liés au bruit dans l'estimation de la volatilité.

Formellement, notons l'ensemble des temps d'observation,

$$\mathcal{G} = \{t_0, \dots, t_n\}.$$

On considérera que $t_i = \frac{i}{n}T$, pour $0 \leq i \leq n$. On sous-échantillonne en prenant une sous-grille $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. On note alors les observations de \mathcal{H} , ordonnées de manière croissante, t'_0, t'_1, \dots, t'_m , avec $m = |\mathcal{H}| - 1 \leq n$.

En pratique, on prend un échantillonnage régulier : $t'_i = t_{\lfloor \frac{in}{m} \rfloor}$, pour $i = 0, \dots, m$.

A partir de cette sous-grille \mathcal{H} , on définit l'estimateur sous-échantillonné, donné par :

$$[Y, Y]_T^{(\mathcal{H})} = \sum_{i=0}^{m-1} (Y_{t'_{i+1}} - Y_{t'_i})^2$$

Les auteurs ZHANG, MYKLAND et AÏT-SAHALIA montrent la proposition suivante, qui permet d'établir le comportement asymptotique de l'estimateur.

Proposition 2. *Si l'on suppose que pour chaque n , la sous-grille \mathcal{H} choisie vérifie $m \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on a,*

$$[Y, Y]_T^{(\mathcal{H})} \approx_{\mathcal{L}} \langle X, X \rangle_T + 2\sigma_\varepsilon^2 m + \Upsilon Z, \quad (18)$$

où $\approx_{\mathcal{L}}$ désigne une convergence en loi asymptotique (à des facteurs négligeables près) lorsque $m \rightarrow \infty$ et ΥZ est une variable aléatoire asymptotiquement normale, centrée, avec une variance donnée par :

$$\Upsilon^2 = 4m\mathbb{E}(\varepsilon^4) + \frac{2T}{m} \int_0^T \sigma_t^4 dt.$$

2.2.3 Estimateur 3 : Échantillonnage Optimal

Comme le montre la figure 5 l'estimateur précédent dépend du choix de la fréquence de sous-échantillonnage m . Les auteurs proposent de déterminer de manière optimale m de sorte à minimiser l'erreur quadratique moyenne (MSE) :

$$\text{MSE} = \mathbb{E} \left[\left([X, X]_T^{(\mathcal{H})} - \langle X, X \rangle_T \right)^2 \right]$$

Proposition 3. *La fréquence optimale est donnée par :*

$$m^* \approx \left(\frac{T}{4\sigma_\varepsilon^4} \int_0^T \sigma_t^4 dt \right)^{1/3} \quad (19)$$

Démonstration. L'idée est d'utiliser la relation (18) afin d'écrire que la MSE comme étant

$$\text{MSE} = (2m\sigma_\varepsilon^2)^2 + \Upsilon^2.$$

Dans le cas où n est grand, minimiser la MSE implique alors de choisir m de manière à satisfaire la condition $\frac{\partial \text{MSE}}{\partial m} \approx 0$. Après calculs, on trouve (19). \square

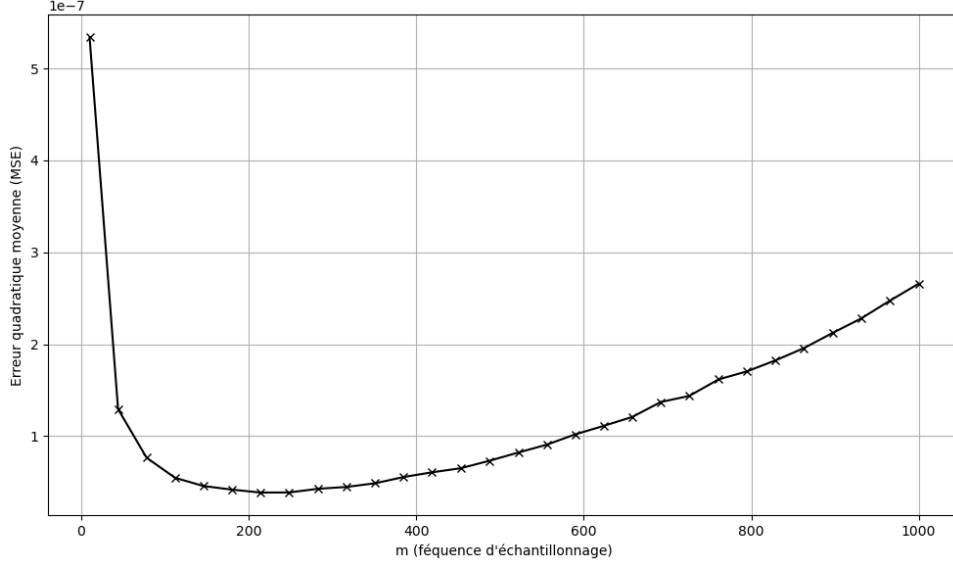


FIGURE 5 – Simulation Monte-Carlo de la MSE de l'estimateur $[Y, Y]_T^{(\mathcal{H})}$ en fonction de la fréquence d'échantillonnage m .

Remarque: Les auteurs ne proposent pas de méthode pour estimer $\int_0^T \sigma_t^4 dt$. Le choix de m^* suppose donc que σ_t , que l'on cherche à estimer, est connu.

Dans notre simulation, nous obtenons une valeur théorique de $m^* = 223$ (en utilisant la vraie valeur de $\int_0^T \sigma_t^4 dt$), ce qui est cohérent avec les valeurs pratiques observées dans la figure 5.

Bien que cette approche réduise le biais dû au bruit de microstructure, elle implique de jeter une grande partie des données disponibles, ce qui est sous-optimal.

2.2.4 Estimateur 4 : Sous-échantillonnage et Moyennage

Pour mieux utiliser l'ensemble des données, une stratégie consiste à sous-échantillonner sur une partition de K sous-grilles $(\mathcal{H}_k)_{1 \leq k \leq K}$ et à calculer une moyenne des volatilités réalisées sur ces sous-grilles. En d'autres termes, l'estimateur est donné par :

$$[Y, Y]_T^{(\text{moy})} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [Y, Y]_T^{(\mathcal{H}_k)}, \quad (20)$$

$$\text{avec } \mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^K \mathcal{H}_k \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_j = \emptyset.$$

Généralement et pour nos simulations, on prend $\mathcal{H}_k = \{t_{k-1}, t_{k-1+K}, t_{k-1+2K}, \dots, t_{k-1+n_k K}\}$, avec n_k la sous-fréquence d'échantillonnage associée à la grille \mathcal{H}_k .

On définit la fréquence moyenne

$$\bar{n} := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K n_k = \frac{n - K + 1}{K}.$$

De même que précédemment, il est montré dans l'article, la proposition suivante sur le comportement asymptotique de l'estimateur.

Proposition 4. *Si l'on suppose que $K \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on a,*

$$[Y, Y]_T^{(moy)} \approx_{\mathcal{L}} \langle X, X \rangle_T + 2\bar{n}\sigma_\varepsilon^2 + \Upsilon_{(moy)}Z, \quad (21)$$

où $\approx_{\mathcal{L}}$ désigne une convergence en loi asymptotique (à des facteurs négligeables près) lorsque $m \rightarrow \infty$ et $\Upsilon_{(moy)}Z$ est une variable aléatoire asymptotiquement normale, centrée, avec une variance donnée par :

$$\Upsilon_{(moy)}^2 = 4 \frac{\bar{n}}{K} \mathbb{E}(\varepsilon^4) + \frac{4T}{3\bar{n}} \int_0^T \sigma_t^4 dt.$$

Cette approche réduit le biais tout en utilisant plus de données, mais elle reste biaisée par le bruit de microstructure.

Encore une fois, l'estimateur dépend du choix d'un paramètre externe K . Les auteurs montrent que le nombre de grilles optimal est $K^* \approx \frac{n}{\bar{n}^*} = n \left(\frac{T}{6\sigma_\varepsilon^4} \int_0^T \sigma_t^4 dt \right)^{-1/3}$. Lors de notre simulation, nous avons trouvé comme valeur théorique $K^* = 119$, ce qui est cohérent avec la figure 7.

2.2.5 Estimateur 5 : Estimateur à Deux Échelles (Meilleur Estimateur)

L'estimateur final combine l'estimateur basé sur le sous-échantillonnage moyennée $[Y, Y]_T^{(moy)}$ avec l'estimateur du bruit $\hat{\sigma}_\varepsilon$ (17) pour corriger le biais causé par le bruit de microstructure dans la relation (21). Cela pousse à poser,

$$\widehat{\langle X, X \rangle}_T = [Y, Y]_T^{(moy)} - 2\bar{n}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = [Y, Y]_T^{(moy)} - \frac{\bar{n}}{n}[Y, Y]_T$$

Le nom de l'article "Two Scales" vient du fait que l'estimateur combine deux échelles de temps, à savoir "moy" et l'échelle totale. On effectue enfin un petit ajustement qui permet de construire l'estimateur final,

$$\widehat{\langle X, X \rangle}_T^{(adj)} = \frac{n}{n - \bar{n}} \widehat{\langle X, X \rangle}_T, \quad (22)$$

qui vérifie la proposition suivante.

Proposition 5. *Si l'on prend K de la forme $cn^{2/3}$, alors,*

$$\widehat{\langle X, X \rangle}_T^{(adj)} = \langle X, X \rangle_T + O_p \left(\frac{1}{n^6} \right).$$

Cet estimateur final est centré correctement sur la volatilité intégrée $\langle X, X \rangle_T$ et offre une solution optimale en utilisant toutes les données disponibles tout en corrigeant le biais dû au bruit.

L'estimateur final dépend également du paramètre K choisi pour $[Y, Y]_T^{(moy)}$. Cependant, le K optimal pour l'estimateur final n'est pas le même que celui de l'estimateur 4. Ici, $K^* = c^*n^{2/3}$ avec

$$c^* = \left(\frac{T}{12\sigma_\varepsilon^4} \int_0^T \sigma_t^4 dt \right)^{-1/3}. \quad (23)$$

Avec cette formule, la simulation Monte-Carlo fournit comme valeur théorique $K^* = 5$, ce qui coïncide avec le graphique 7.

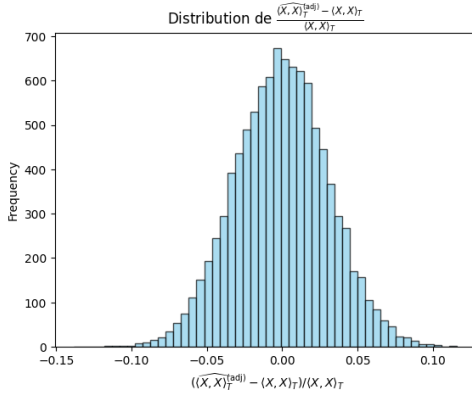


FIGURE 6 – Distribution du meilleur estimateur.

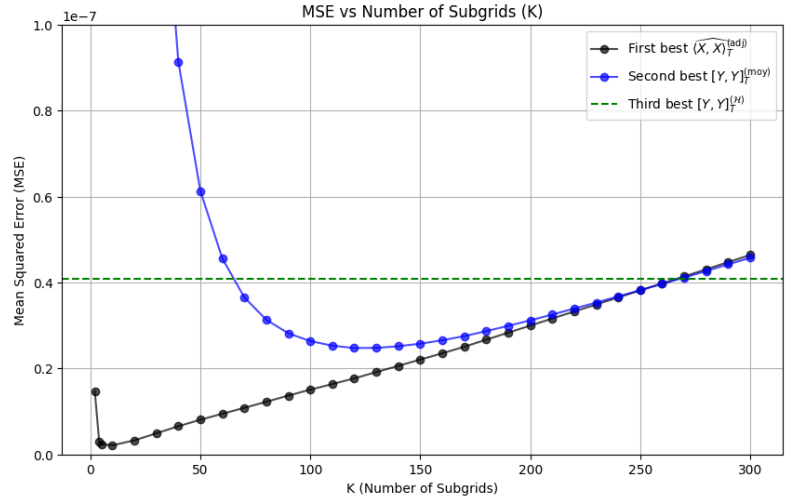


FIGURE 7 – Simulation Monte-Carlo de la MSE de $[Y, Y]_T^{(moy)}$ et $\widehat{\langle X, X \rangle}_T^{(adj)}$ en fonction du nombre de sous-grilles K .

2.2.6 Comparaison des résultats

Dans cette section, nous comparons les performances des différents estimateurs en termes de MSE et d'erreur relative moyenne (ERM) calculées sur des simulations Monte Carlo. L'ERM est définie comme suit :

$$\text{ERM} = \frac{1}{n_{\text{simu}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{simu}}} \left| \frac{\hat{X}_i - X_i}{X_i} \right| \times 100, \quad (24)$$

où n_{simu} est le nombre de simulations Monte Carlo, \hat{X}_i la valeur estimée, et X_i la valeur réelle. Le tableau 2 résume ces résultats.

Estimateur	$[Y_t, Y_t]_T$	$[Y, Y]_T^{(\mathcal{H})}$	$[Y, Y]_T^{(\mathcal{H}^*)}$	$[Y, Y]_T^{(moy)}$	$\widehat{\langle X, X \rangle}_T^{(adj)}$
MSE	$1.3e-4$	$7.3e-8$	$4.0e-8$	$2.7e-8$	$2.4e-9$
ER moyenne (en %)	750	13	10	8.1	2.5

TABLE 2 – Performance de cinq estimateurs en termes de MSE et d'erreur relative moyenne.

3 Modèle des zones d'incertitude : Christian Yann Robert et Rosenbaum (2010)

Comme cela a été développé dans la partie précédente, une méthode assez courante pour estimer la volatilité sur des échelles de temps courtes consiste à regarder le prix observé comme la superposition du prix efficace brownien et d'un bruit gaussien. Au-delà de celle qui a été étudiée précédemment, de nombreuses approches ont été développées pour estimer la volatilité sous cette hypothèse. Cependant, ces approches ont le défaut d'être très peu réalistes du point de vue des trajectoires (Figure 4) et apparaissent plutôt comme des artifices mathématiques. Le but dans cette partie est d'étudier un nouveau modèle proposé par Christian Yann ROBERT et ROSENBAUM (2010) qui permet de mieux modéliser les dynamiques de prix, tout en proposant un estimateur très performant de la volatilité.

Comme cela est expliqué dans leur article, toute l'idée derrière la construction de ce modèle repose sur une remarque simple : "si une transaction a lieu à un certain prix sur la grille discrète et provoque un changement du prix de transaction, alors le prix efficace était suffisamment proche de cette valeur peu de temps avant la transaction".

3.1 Description du modèle

Commençons par rappeler que dans un scénario idéal, les acteurs du marché observeraient le prix efficace et effectueraient des transactions dès que ce prix devient plus proche d'une nouvelle valeur sur la grille de prix. Cependant, il n'est pas possible d'observer directement ce prix efficace, ce qui implique que les acteurs du marché hésitent souvent avant d'ajuster leur prix. Ainsi, une modification du prix de transaction réel n'est observée que lorsque les acheteurs et vendeurs sont convaincus qu'il est nécessaire d'ajuster le prix, ce qui arrive seulement lorsqu'il est suffisamment éloigné du dernier prix négocié. L'idée de la modélisation proposée consiste donc à introduire des **zones d'incertitudes** entre les différentes valeurs de prix sur la grille discrétisée, et de considérer que le prix de transaction change seulement lorsque le prix efficace dépasse ces zones d'incertitudes.

Définissons formellement le cadre du modèle. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le prix efficace de l'actif. Sur un espace probabilisé $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, nous supposons que le logarithme du prix efficace $(Y_t)_{t \geq 0}$ est une semi-martingale continue adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et s'écrit sous la forme :

$$Y_t = \log X_t = \log X_0 + \int_0^t \sigma_u dW_u,$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard adapté à \mathcal{F}_t et $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté à \mathcal{F}_t , positif, avec des trajectoires càdlàg.

La première étape consiste à prendre en compte la discrétisation des prix, qui est inhérente à la construction du marché. C'est dès cette première étape que le modèle marque sa différence avec le modèle bruité précédent, qui ne permettait pas de modéliser cet aspect pratique du marché. Formellement, on fixe α le **pas de discrétisation monétaire** ou **tick de prix**, qui correspond à la différence minimale entre deux prix de transactions. Sa valeur est assez variable suivant les actifs et s'étend de 10^{-5} à 0.01 typiquement. L'ensemble des valeurs admissibles pour les prix de transactions s'écrit alors :

$$\{k\alpha \mid k \in \mathbb{N}\}$$

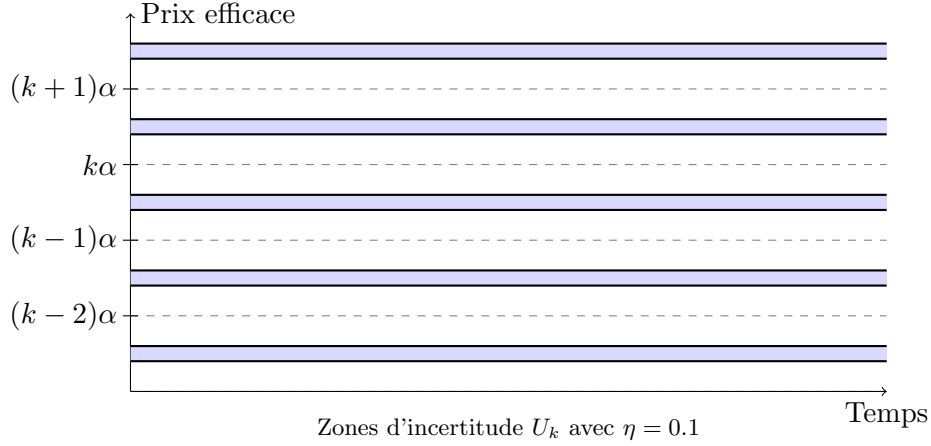
Le modèle introduit ensuite un paramètre $\eta \in [0, 1]$ qui quantifie l'**aversion globale aux changements de prix du marché**. Ce paramètre permet ensuite de définir formellement les

zones d'incertitudes introduites précédemment. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la zone d'incertitude \mathcal{U}_k est définie par :

$$\mathcal{U}_k := [0, +\infty) \times [d_k, u_k]$$

où

$$\begin{cases} u_k = (k + 1/2 + \eta)\alpha \\ d_k = (k + 1/2 - \eta)\alpha \end{cases}$$



On peut noter que les zones d'incertitudes se superposent dès que $\eta \geq 0.5$.

Essayons d'expliquer clairement le schéma d'évolution des prix. Supposons qu'au temps $t > 0$ un actif est échangé au prix $k\alpha$. On sait donc que le prix efficace est proche de $k\alpha$ au temps t , modulo l'incertitude sur le prix. Formellement le prix se situe donc dans l'intervalle $[d_{k-1}, u_k]$. Ensuite, tant que le prix efficace appartient cet intervalle, toutes les transactions se font au prix $k\alpha$. Si le prix efficace sort de la zone d'incertitude k par le haut ($> u_k$) ou de la zone d'incertitude $k-1$ par le bas ($< d_{k-1}$), alors la prochaine transaction se fera au prix le plus proche du prix efficace à ce moment t , à savoir $(k \pm 1)\alpha$. La figure 8 permet de visualiser cette construction du prix observé à partir du prix efficace.

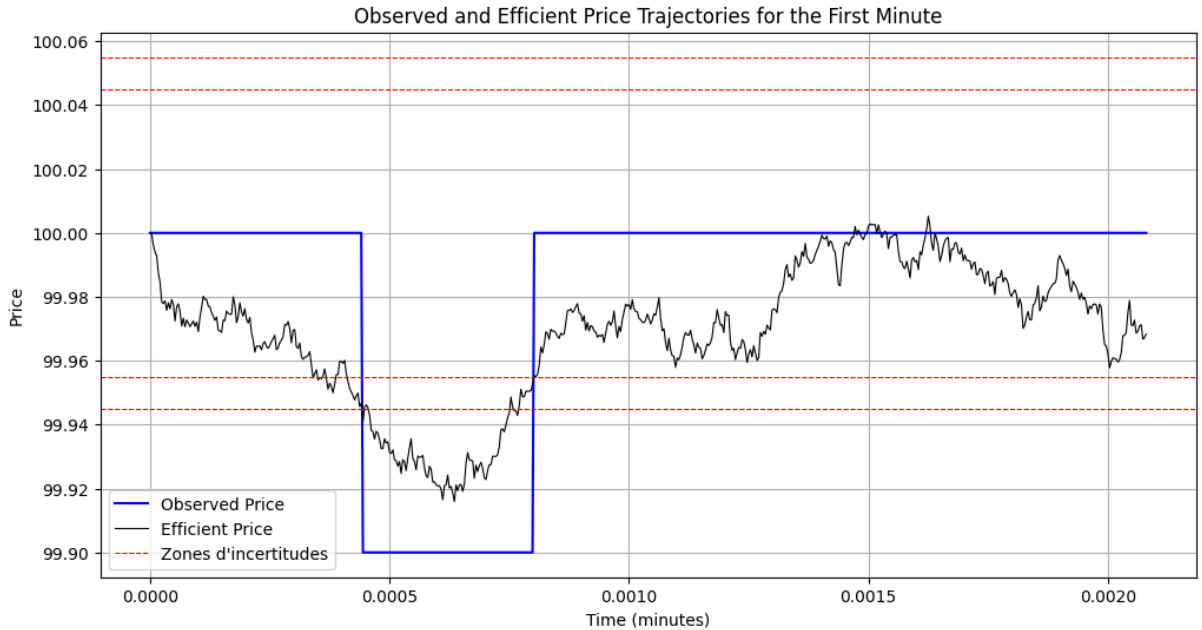


FIGURE 8 – Évolution du prix observé en fonction du prix efficace.

Précisons tout de même que le modèle développé dans Christian Yann ROBERT et ROSENBAUM, “Volatility and Covariation Estimation When Microstructure Noise and Trading Times Are Endogenous” est plus complet et propose que le prix puisse effectuer des sauts de plusieurs ticks. Nous faisons le choix dans la suite de nous restreindre à des sauts d’un tick seulement. Ceci permet de simplifier significativement le cadre mathématique nécessaire pour effectuer les démonstrations sans porter atteinte à l’esprit et au fonctionnement de la modélisation.

3.2 Construction de l’estimateur

Pour formaliser la construction du prix observé P_t à partir du prix efficace X_t , il est nécessaire d’introduire les temps d’arrêt τ_i qui correspondent aux différents instants des sauts du prix observé. On note d’abord $X_{\tau_i}^{(\alpha)}$ la valeur du prix observé à l’instant τ_i , à savoir $(\lfloor X_{\tau_i}/k \rfloor)\alpha$. On définit ensuite τ_i avec :

$$\tau_{i+1} := \inf\{t > \tau_i : X_t = X_{\tau_i}^{(\alpha)} - (\frac{1}{2} + \eta) \quad \text{ou} \quad X_t = X_{\tau_i}^{(\alpha)} + (\frac{1}{2} + \eta)\}$$

Désormais, on peut définir le prix observé P_t pour $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ par $X_{\tau_i}^{(\alpha)}$. Un point crucial de la modélisation consiste à remarquer que le prix observé à tout instant peut se calculer à partir seulement des valeurs X_{τ_i} et des paramètres du modèle α et η . En effet, on a la relation :

$$P_{t_i} = X_{\tau_i} + \text{sgn}\left((X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})(\frac{1}{2} - \eta)\alpha\right) \quad (25)$$

où $t_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ est un instant où une transaction a lieu au prix P_{t_i} .

Pour construire l’estimateur de la volatilité intégrée, l’idée est donc de construire d’abord un estimateur du paramètre η . Cette estimateur est basé sur le nombre de continuations et d’alternances du prix observé. On définit donc :

$$N_{\alpha,t}^{(a)} = \sum_{t_i \leq t} \mathbb{I}\{(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})(P_{t_{i-1}} - P_{t_{i-2}}) < 0 \text{ et } |P_{t_i} - P_{t_{i-1}}| = \alpha\} \quad (26)$$

et

$$N_{\alpha,t}^{(c)} = \sum_{t_i \leq t} \mathbb{I}\{(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})(P_{t_{i-1}} - P_{t_{i-2}}) > 0 \text{ et } |P_{t_i} - P_{t_{i-1}}| = \alpha\}, \quad (27)$$

qui représentent respectivement le nombre d’alternances et de continuations. Une alternance (continuation) est un saut d’un tick dont la direction est opposée (identique) à celle du saut précédent.

Remarquons que, pour $\eta \neq \frac{1}{2}$, l’événement dans la fonction indicatrice peut s’écrire :

$$|X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}| = 2\eta\alpha \quad \text{dans le cas d’une alternance,} \quad (28)$$

et

$$|X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}| = \alpha \quad \text{dans le cas d’une continuation.} \quad (29)$$

Ces notations étant introduites, on peut désormais construire l’estimateur de η puis l’estimateur de la volatilité intégrée.

Théorème 1. (Estimateur de η) Soit $t > 0$. Un estimateur consistant de η lorsque $\alpha \rightarrow 0$ est donné par :

$$\hat{\eta}_{\alpha,t} := \frac{N_{\alpha,t}^{(c)}}{2N_{\alpha,t}^{(a)}} \quad (30)$$

Pour obtenir l'estimateur de la volatilité intégrée à partir de cet estimateur, il suffit de réécrire la relation 25 en exploitant que $\text{sgn}(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}) = \text{sgn}(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})$:

$$X_{\tau_i} = P_{t_i} - \alpha \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \text{sgn}(P_{t_i} - P_{t_{i-1}}) \quad (31)$$

On utilise cette relation et l'estimateur de η pour construire l'estimateur de la volatilité intégrée. On a donc :

Théorème 2. (*Estimateur de la volatilité intégrée $\int_0^t \sigma_u^2 du$*) Soit $t > 0$. Un estimateur consistant de la volatilité intégrée lorsque $\alpha \rightarrow 0$ est donné par :

$$\hat{IV}_{\alpha,t} := \sum_{\tau_i \leq t} \left(\log(\hat{X}_{\tau_i,t}) - \log(\hat{X}_{\tau_{i-1},t}) \right)^2 \quad (32)$$

où on a :

$$\hat{X}_{\tau_i,t} = P_{t_i} - \alpha \left(\frac{1}{2} - \hat{\eta}_{\alpha,t} \right) \text{sgn}(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})$$

3.3 Preuve de la convergence de l'estimateur $\hat{\eta}_{\alpha,t}$

Théorème 3. [*Théorème de Dambis-Dubins-Schwarz*] Soit X_t une martingale locale continue démarrant en 0 et de variation quadratique $\langle X \rangle_t$. On définit les temps d'arrêt :

$$\chi_s = \inf\{t \geq 0 : \langle X \rangle_t \geq s\}.$$

Alors, le processus reparamétré $B_s = X_{\chi_s}$ est un mouvement brownien standard par rapport à la filtration \mathcal{F}_{ν_s} . Dans la suite, on notera $\nu_i := \chi^{-1}(\tau_i) = \langle X \rangle_{\tau_i}$ de telle sorte que $B_{\nu_i} = X_{\tau_i}$.

Lemme 2. (*Probabilités de sortie d'un intervalle*) Soit $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, et soit $d_-, d_+ > 0$ deux niveaux positifs. On définit le temps d'atteinte des niveaux d_+ ou $-d_-$ par :

$$\tau_{d_-} = \inf\{t \geq 0 : W_t = -d_-\} \quad \text{et} \quad \tau_{d_+} = \inf\{t \geq 0 : W_t = d_+\}$$

La probabilité que le processus W atteigne le niveau d_+ avant le niveau $-d_-$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(\tau_{d_+} < \tau_{d_-}) = \frac{d_-}{d_- + d_+}. \quad (33)$$

Démonstration. Rappelons d'abord que si τ est un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\tau) < \infty$, alors on sait que $\mathbb{E}(W_\tau) = 0$. Rappelons également que si τ est un temps d'arrêt borné, alors on sait que $\mathbb{E}[W_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau]$. Notons τ_{d_-} et τ_{d_+} les temps d'atteinte de d_- et d_+ respectivement. On a :

$$\underbrace{\mathbb{E}[W_{\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+} \wedge n}^2]}_{\leq \max\{d_-^2, d_+^2\}} = \mathbb{E}[\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+} \wedge n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+}] \quad \text{par convergence monotone.}$$

D'où : $\mathbb{E}[\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+}] \leq \max\{d_-^2, d_+^2\} < \infty$. On en déduit que : $\mathbb{E}[W_{\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+}}] = 0$. Or,

$$W_{\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+}} = d_- \mathbb{1}_{\{\tau_{d_-} < \tau_{d_+}\}} + d_+ \mathbb{1}_{\{\tau_{d_+} < \tau_{d_-}\}}$$

donc

$$\underbrace{\mathbb{E}[W_{\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+}}]}_{=0} = d_- (1 - \mathbb{P}(\tau_{d_+} < \tau_{d_-})) + d_+ \mathbb{P}(\tau_{d_+} < \tau_{d_-})$$

On retrouve bien le résultat attendu :

$$\mathbb{P}(\tau_{d_+} < \tau_{d_-}) = \frac{d_-}{d_- + d_+}.$$

□

Corollaire 1. (Probabilités d'alternance et de continuation) Soit $i > 0$. On a les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1}}}(|B_{\nu_i} - B_{\nu_{i-1}}| = 2\eta\alpha) = \frac{1}{2\eta + 1} & [\text{Alternance}] \\ \mathbb{P}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1}}}(|B_{\nu_i} - B_{\nu_{i-1}}| = \alpha) = \frac{2\eta}{2\eta + 1} & [\text{Continuation}] \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit d'invoquer la propriété de décalage en temps pour justifier que $B_t - B_{\nu_i}$ est un mouvement brownien standard. On applique ensuite le lemme précédent, en remarquant que $|B_{\nu_i} - B_{\nu_{i-1}}| = |X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}|$ grâce à la définition des ν_i donnée en 3. \square

Lemme 3. (Espérance du temps de sortie d'un intervalle) Avec τ_{d_-} et τ_{d_+} définis comme précédemment, on a :

$$\mathbb{E}[\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+}] = \frac{d_-^2 d_+ + d_- d_+^2}{d_+ - d_-} \quad (34)$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, définissons $f(x) = \mathbb{E}[\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+} \mid W_0 = x]$.

On sait que le mouvement brownien W_t est une diffusion gouvernée par l'opérateur infinitésimal \mathcal{L} , qui agit sur les fonctions suffisamment régulières f comme suit :

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}f''(x).$$

Puisque $f(x)$ représente l'espérance d'un temps d'arrêt lié à une diffusion, on sait qu'elle satisfait l'équation suivante :

$$\mathcal{L}f(x) = -1.$$

Ceci s'obtient par exemple à partir du théorème 11.9 dans BRETON, *Calcul stochastique*.

En exploitant les conditions limites en $-d_-$ et en d_+ , on obtient l'expression de f qu'on évalue en 0 pour obtenir que :

$$\mathbb{E}[\tau_{d_-} \wedge \tau_{d_+}] = \frac{d_-^2 d_+ + d_- d_+^2}{d_+ - d_-}$$

\square

Corollaire 2. (Espérance du temps de sortie d'un intervalle) Soit $i > 0$. On a la formule suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1}}}[\nu_i - \nu_{i-1}] = 2\eta\alpha^2 \quad (35)$$

Démonstration. On applique directement la relation obtenue au lemme 2 avec $d_+ = 2\eta\alpha$ et $d_- = \alpha$. \square

Lemme 4. (Espérance du temps de sortie d'un intervalle au carré) - (admis) Soit $i > 0$. On a la formule suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1}}}[(\nu_i - \nu_{i-1})^2] = \frac{2\eta(1 + 6\eta + 4\eta^2)}{6}\alpha^4 = \mathcal{O}(\alpha^4) \quad (36)$$

Démonstration. On utilise la formule fournie au corollaire 4.4 dans Christian Yann ROBERT et ROSENBAUM (2010). \square

Dans ce qui suit, c.u.p. désigne la convergence uniforme en probabilité sur des ensembles compacts inclus dans $[0, T]$. Nous abusons légèrement de la notation, en disant qu'une famille de processus Z^α converge uniformément en probabilité (c.u.p.) vers Z lorsque α tend vers zéro, si pour toute suite α_n tendant vers zéro, $Z^{\alpha_n} \rightarrow Z$ en probabilité. On adapte nos notations en ajoutant un indice n qui indique que les valeurs sont calculées pour le prix observé calculé avec α_n .

Proposition 6. *On a alors le résultat suivant :*

$$\boxed{\alpha_n^2 N_{\alpha_n, t}^{(c)} \xrightarrow{c.u.p} \frac{\langle X \rangle_t}{1 + 2\eta}} \quad (37)$$

Démonstration. Nous effectuons la preuve dans le cas où $\eta \neq 1/2$ pour des soucis de simplifications. On peut d'abord écrire :

$$\alpha_n^2 N_{\alpha_n, t}^{(c)} = \alpha_n^2 \sum_{i=1}^{N_{\alpha_n, t}} \mathbb{1}_{\{|X_{\tau_{i,n}} - X_{\tau_{i-1,n}}| = \alpha_n\}} = \alpha_n^2 \sum_{\nu_{i,n} \leq \langle X \rangle_t} \mathbb{1}_{\{|B_{\nu_{i,n}} - B_{\nu_{i-1,n}}| = \alpha_n\}}$$

en utilisant le travail effectué au théorème 3. On utilise le lemme 4.2 (admis) dans Christian Yann ROBERT et ROSENBAUM (2010) pour justifier que

$$\alpha_n^2 \sum_{\nu_{i,n} \leq \langle X \rangle_t} \mathbb{1}_{\{|B_{\nu_{i,n}} - B_{\nu_{i-1,n}}| = \alpha_n\}}$$

et

$$\alpha_n^2 \sum_{\nu_{i,n} \leq \langle X \rangle_t} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1,n}}} [\mathbb{1}_{\{|B_{\nu_{i,n}} - B_{\nu_{i-1,n}}| = \alpha_n\}}]$$

ont la même limite en probabilité. Pour appliquer formellement le lemme, il faut tout de même préciser que : $\alpha_n^4 \sum_{\nu_{i,n} \leq \langle X \rangle_t} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1,n}}} [\mathbb{1}_{\{|B_{\nu_{i,n}} - B_{\nu_{i-1,n}}| = \alpha_n\}}] \xrightarrow{u.c.p} 0$, ce qui résultera directement du travail effectué ci-dessous.

On sait grâce au corollaire 1 que :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1,n}}} [\mathbb{1}_{\{|B_{\nu_{i,n}} - B_{\nu_{i-1,n}}| = \alpha_n\}}] = \mathbb{P}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1,n}}} (|B_{\nu_{i,n}} - B_{\nu_{i-1,n}}| = \alpha_n) = \frac{2\eta}{2\eta + 1}$$

On peut donc réécrire la limite comme :

$$\frac{1}{2\eta + 1} \sum_{\nu_{i,n} \leq \langle X \rangle_t} 2\eta \alpha_n^2$$

Or, on sait par le corollaire 2 que :

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1,n}}} [\nu_{i,n} - \nu_{i-1,n}] = 2\eta \alpha_n^2$$

On peut donc réécrire la somme comme :

$$\sum_{\nu_{i,n} \leq \langle X \rangle_t} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1,n}}} [\nu_{i,n} - \nu_{i-1,n}]$$

À nouveau le lemme 4.2 de l'article fournit que cette somme à la même limite en probabilité que :

$$\sum_{\nu_{i,n} \leq \langle X \rangle_t} (\nu_{i,n} - \nu_{i-1,n}) =: S$$

en utilisant le résultat du lemme 4. Or, on peut écrire par télescopage que :

$$\langle X \rangle_t - \sup_i (\nu_{i,n} - \nu_{i-1,n}) \leq S \leq \langle X \rangle_t$$

ce qui suffit à conclure puisque $\sup_i (\tau_{i,n} - \tau_{i-1,n})$ tend vers 0 grâce au lemme 4.5 dans Christian Yann ROBERT et ROSENBAUM (2010). En effet, on écrit simplement $\nu_i - \nu_{i-1} = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \sigma_u^2 X_u^2 du$. \square

Proposition 7. *De la même manière, on prouve que :*

$$\boxed{\alpha_n^2 N_{\alpha_n, t}^{(a)} \xrightarrow{c.u.p} \frac{\langle X \rangle_t}{2\eta(1 + 2\eta)}} \quad (38)$$

Théorème 4. *En combinant les relations 37 et 38, on obtient finalement que :*

$$\boxed{\frac{N_{\alpha, t}^{(c)}}{2N_{\alpha, t}^{(a)}} \xrightarrow{c.u.p} \eta} \quad (39)$$

3.4 Résultats numériques

3.4.1 Performances de l'estimateur avec le modèle des zones d'incertitudes

Nous avons implémenté le modèle des zones d'incertitude pour évaluer la performance des estimateurs. Commençons par insister sur le fait que les trajectoires de prix observé dans le cadre du modèle des zones d'incertitude ressemblent étroitement à des trajectoires de prix observé au cours d'une journée. Le modèle permet de proposer une modélisation beaucoup plus fidèle à la réalité que le travail effectué dans ZHANG, MYKLAND et AÏT-SAHALIA (2005). On fournit l'évolution d'un prix observé au cours d'une journée figure 9

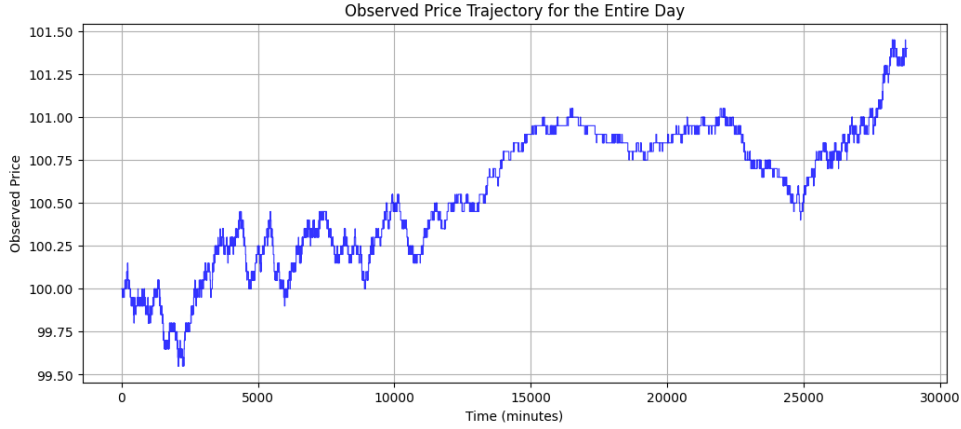
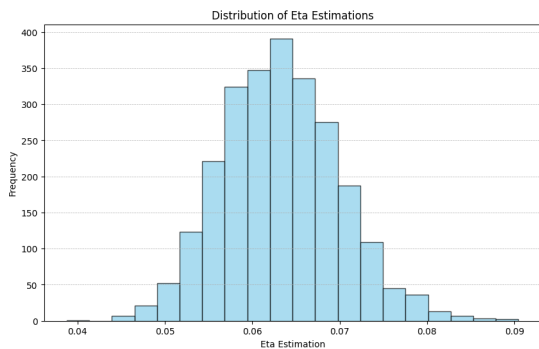
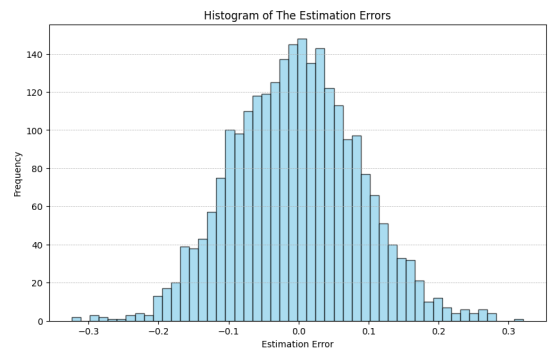


FIGURE 9 – Trajectoire du prix observé sur une journée.

Ensuite, nous avons implémenté les estimateurs de η et de la volatilité intégrée pour évaluer leurs performances. On observe sur la figure 10a que notre simulation estime correctement la valeur de η malgré un léger biais vers le haut. Ceci s'explique par le fait que notre simulation discrète du prix efficace peut parfois "rater" une alternance puisque les variations associées sont beaucoup plus petites que pour une continuation. Ainsi, si on reprend la formule de l'estimateur, on vérifie bien qu'estimer une valeur inférieure de $N_{\alpha,t}^{(a)}$ conduit à estimer une valeur supérieure de η .



(a) Estimation du η paramètre ($\eta_{\text{réel}} = 0.05$).



(b) Erreurs relatives de l'estimateur

FIGURE 10 – Distribution de l'estimation du η paramètre et des erreurs relatives de la volatilité intégrée.

Enfin, on observe sur la figure 10b que l'erreur relative de notre estimateur est de l'ordre de 10%, ce qui est assez remarquable. L'estimateur, au-delà de fournir une modélisation plus réaliste des prix observés, s'avère donc être très performant.

3.4.2 Comparaison avec l'estimateur de Zhang, Mykland et Aït-Sahalia (2005)

Bien qu'il ne soit a priori pas adapté, nous avons essayé d'appliquer le meilleur estimateur $\widehat{\langle X, X \rangle}_T^{(adj)}$ de ZHANG, MYKLAND et AÏT-SAHALIA au modèle des zones d'incertitudes de Christian Yann ROBERT et ROSENBAUM. Les résultats, en termes d'erreur relative, sont présentés dans la figure 11, nous calculons le nombre de sous-grilles optimal théorique K^* en utilisant la formule (23).

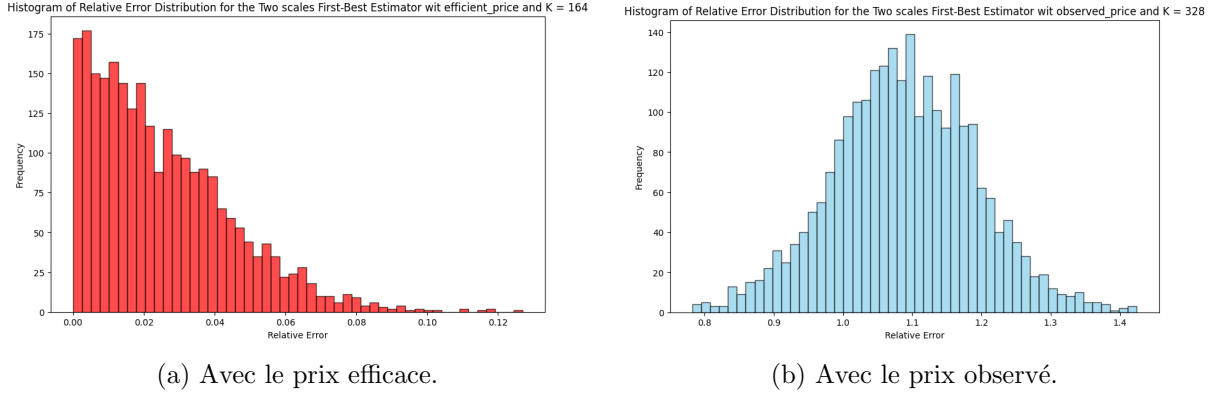


FIGURE 11 – Erreurs relatives de l'estimateur $\widehat{\langle X, X \rangle}_T^{(adj)}$ en calculant théoriquement l'hyperparamètre K^* .

Naturellement, l'estimateur est performant avec les prix efficaces. Cependant, il devient assez grossier lorsqu'on utilise les prix observés, avec une erreur relative moyenne de 108%. En réalité, nous sommes hors du modèle de bruit de microstructure, ce qui rend impossible l'utilisation de la formule théorique. Expérimentalement, il est possible de simuler la MSE en fonction de la valeur de K . Nous trouvons une valeur pratique de $K^* = 3820$, qui diffère significativement de la valeur théorique $K^* = 328$, calculée avec (23.)

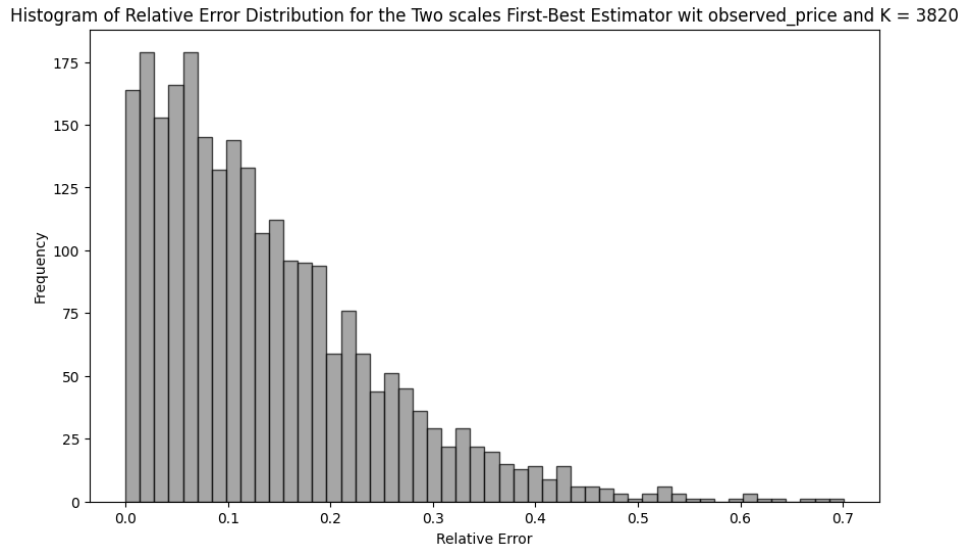


FIGURE 12 – Résultats de l'estimateur $\widehat{\langle X, X \rangle}_T^{(adj)}$ avec le prix observé et K optimal.

L'estimateur présente une erreur relative moyenne de 13,6%, ce qui est relativement acceptable, étant donné qu'il est construit à partir d'un modèle complètement différent. Cependant, il faudrait réfléchir, en pratique, à une méthode permettant d'estimer un hyperparamètre K adéquat, sans utiliser les vrais prix, afin de ne pas retomber dans le cas de la figure 11b.

Précisons finalement que toutes ces simulations étaient effectuées avec les paramètres suivants.

TABLE 3 – Paramètres de simulation

Aversion globale aux changements de prix	$\eta = 0.05$
Tick de prix	$\alpha = 0.05$
Volatilité	$\sigma_t = 0.01 \times (1 + 0.5 \times \sin(2\pi t + \pi/4))$
Pas de temps	$\Delta t = 0.1 \text{ sec}$
Durée totale	$T = 8 H$
Nombre de simulations Monte-Carlo	2 500

4 Hedging d'options en microstructure : Christian Y. Robert et Rosenbaum (2012)

Après avoir étudié différents modèles et calculé des estimateurs de la volatilité, voyons d'autres applications de la modélisation des zones d'incertitude. La problématique dans laquelle nous appliquons le modèle est la couverture d'une option européenne en présence de bruit de microstructure. En nous concentrant sur les effets du bruit de microstructure, notre objectif est d'évaluer l'erreur entre la stratégie de réplication théorique, mais irréalisable en pratique, et ses versions adaptées au marché. Cette étude se base sur l'article Christian Y. ROBERT et ROSENBAUM, "On the Microstructural Hedging Error".

Gardons toutes les notations du modèles des zones d'incertitude. Nous supposons aussi que les fonctions considérées sont assez régulières. On se dote d'un portefeuille auto-financé de réplication dont le prix selon un modèle théorique à l'instant t est de la forme $C(t, X_t)$. La fonction C satisfait l'équation suivante :

$$\dot{C}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)x^2\ddot{C}_{xx}(t, x) = 0, \quad C(T, x) = F(x),$$

où $\dot{C}(t, x) = \frac{\partial C(t, x)}{\partial t}$ et $\ddot{C}_{xx}(t, x) = \frac{\partial^2 C(t, x)}{\partial x^2}$.

Supposons que l'agent mette en œuvre cette stratégie dans un marché sans friction. Cela conduit à un portefeuille de couverture de référence sans friction dont la valeur Π_t satisfait :

$$\Pi_t = C(0, X_0) + \int_0^t \dot{C}_x(u, X_u) dX_u.$$

Nous supposons que le marché réel est un marché soumis à une zone d'incertitude, où il est possible d'acheter et de vendre au dernier prix de transaction, indépendamment du volume de la transaction ou de son signe. Ainsi, il est naturel d'imposer que les moments où le portefeuille de couverture peut être rééquilibré correspondent aux moments où le prix de transaction varie. Par conséquent, nous supposons que le portefeuille de couverture peut être rééquilibré uniquement aux instants de transaction τ_i . Dans ce cadre, les stratégies de trading sont donc par morceaux constantes.

Dans ce contexte, nous considérons des stratégies telles que, si τ_i est un instant de rééquilibrage, le nombre d'actions dans l'actif risqué à l'instant τ_i est donné par $\dot{C}_x(\tau_i, X_{\tau_i})$. Une telle stratégie est réalisable sous l'hypothèse que η est connu, ce qui permet de calculer X_{τ_i} . Cette hypothèse n'est pas restrictive, car η peut être estimé par ce qui précède.

Nous considérons deux stratégies de couverture pour voir laquelle minimise l'erreur de hedging :

1. Le portefeuille de couverture est rééquilibré chaque fois que le prix de transaction varie ;
2. Le portefeuille de couverture est rééquilibré uniquement lorsque le prix de transaction a varié de plus qu'une valeur sélectionnée.

Dans notre cadre, l'erreur de couverture microstructurelle est attribuable à deux facteurs principaux :

- **Trading discret** : le portefeuille de couverture est rééquilibré un nombre fini de fois.
- **Bruit de microstructure sur le prix** : entre deux instants de rééquilibrage, la variation du prix de marché (multiple de la taille du tick) diffère de la variation du prix efficient.

4.1 Estimations des erreurs de couverture

Le but de l'étude des différentes erreurs de couverture est d'aboutir à un équivalent asymptotique de ces erreurs pour analyser les effets de la microstructure et conclure sur une stratégie de couverture utilisable en pratique.

Le nombre de changements de prix dans l'intervalle $[0, t]$ est donné par :

$$N_{\alpha,t} = N_{\alpha,t}^{(a)} + N_{\alpha,t}^{(c)},$$

4.1.1 Erreur de couverture sans bruit de microstructure sur le prix

Soit $\varphi(t) = \sup\{\tau_i : \tau_i < t\}$. En l'absence de bruit de microstructure sur le prix, l'erreur de couverture est donnée par :

$$L_{\alpha,t}^{(1)} = \int_0^t \left[\dot{C}_x(u, X_u) - \dot{C}_x(\varphi(u), X_{\varphi(u)}) \right] dX_u.$$

Soit f_t la limite en probabilité de $\alpha^2 N_{\alpha,t}$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$. On a :

$$f_t = \frac{1}{2\eta} \int_0^t \sigma_u^2 X_u^2 du,$$

par la partie qui précède.

L'inverse de la fonction f , notée θ , est une transformation temporelle pour laquelle les temps d'observation sont asymptotiquement uniformément distribués sur tout intervalle fini. Soit $\Delta X_{\tau_i} = X_{\tau_{i+1}} - X_{\tau_i}$, et soit $\tau_{i_t} = \inf\{\tau_i, \tau_i \geq t\}$ et τ_{i_t-1} (resp. τ_{i_t+1}) le premier τ_i après (resp. avant) τ_{i_t} . Nous introduisons le quatrième moment conditionnel asymptotique de la variation normalisée des prix à l'instant t :

$$\mu_4 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\varepsilon_{\tau_{i_t}, t}} [\alpha^{-4} (\Delta X_{\tau_{i_t}})^4] = 2\eta(4\eta^2 - 2\eta + 1).$$

Démonstration. On utilise le lemme 2 pour calculer explicitement l'espérance. □

Soit \mathcal{I} la filtration engendrée par les processus X et χ . Nous avons le résultat suivant :

Théorème 5 (admis). *Lorsque $\alpha \rightarrow 0$,*

$$N_{\alpha,t}^{1/2} L_{\alpha,t}^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{I}-\mathcal{L}_s} L_t^{(1)} := f_t^{1/2} \int_0^t c_f^{(1)} d\mathcal{W}_f^{(1)},$$

où $\mathcal{W}^{(1)}$ est un mouvement brownien défini sur une extension de l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et indépendant de toutes les quantités précédentes, et où $c_s^{(1)}$ est tel que :

$$(c_s^{(1)})^2 = \frac{1}{6} \ddot{C}_{xx}^2(\theta_s, X_{\theta_s}) \mu_4.$$

Nous observons que la variance de l'erreur de couverture est proportionnelle à l'inverse du nombre de transactions de rééquilibrage et dépend du gamma de la volatilité locale du produit dérivé.

4.1.2 Erreur de couverture avec bruit de microstructure

En présence de bruit de microstructure sur le prix, les prix de transaction diffèrent des prix efficients. L'erreur de couverture est alors donnée par :

$$L_{\alpha,t}^{(2)} = \int_0^t \dot{C}_x(u, X_u) dX_u - \int_0^t \dot{C}_x(\varphi(u), X_{\varphi(u)}) dP_u.$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 6 (admis). *Lorsque $\alpha \rightarrow 0$,*

$$L_{\alpha,t}^{(2)} \xrightarrow{\mathcal{I}-\mathcal{L}_s} L_t^{(2)} := \int_0^t a_s^{(2)} ds + \int_0^t b_s^{(2)} dX_s + \int_0^t c_s^{(2)} d\mathcal{W}_s^{(2)},$$

dans $\mathbb{D}[0, T]$, où $\mathcal{W}^{(2)}$ est un mouvement brownien défini sur une extension de l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et indépendant de toutes les quantités précédentes. Les termes $a_s^{(2)}$, $b_s^{(2)}$, et $c_s^{(2)}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_s^{(2)} &= -\frac{1-2\eta}{1+2\eta} \ddot{C}_{xx}(\theta_s, X_{\theta_s}), \\ b_s^{(2)} &= \frac{1-2\eta}{1+2\eta} \dot{C}_x(\theta_s, X_{\theta_s}), \\ (c_s^{(2)})^2 &= \left(\frac{1-2\eta}{1+2\eta} \right)^2 \dot{C}_x^2(\theta_s, X_{\theta_s}). \end{aligned}$$

Il est important de noter que le processus d'erreur de couverture microstructurelle n'est pas renormalisé comme dans le cas précédent. Cela signifie que l'erreur de couverture ne disparaît pas, même si le nombre de transactions de rééquilibrage tend vers l'infini, et reste donc de l'ordre de grandeur de l'erreur de suivi habituelle.

4.1.3 Niveau optimal de rééquilibrage en présence de bruit de microstructure

Nous construisons des stratégies où le portefeuille est rééquilibré lorsque le prix varie de manière "significative". Cela est probablement plus naturel qu'une stratégie de rééquilibrage basée sur le temps et devrait réduire l'impact du bruit de microstructure. Nous supposons donc que le portefeuille de couverture est rééquilibré uniquement lorsque le prix a varié de ℓ_α ticks.

Pour simplifier, nous supposons ici que $m = 1$. Nous choisissons ℓ_α tel que $\ell_\alpha \rightarrow \infty$ et $\alpha \ell_\alpha \rightarrow 0$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$. De cette manière, les erreurs de couverture dues, respectivement, au bruit de microstructure sur le prix et au rééquilibrage discret disparaîtront à mesure que la taille du tick tendra vers zéro. Cela revient à considérer que le prix de transaction repose sur une sous-grille avec une nouvelle taille de tick $\alpha \ell_\alpha$ et que le portefeuille est rééquilibré dès que le prix de transaction prend une nouvelle valeur sur cette sous-grille.

Soit $N_{\alpha,t}^{(\ell)}$ le nombre de transactions de rééquilibrage entre 0 et t . Nous définissons la séquence $(\tau_i^{(\ell)})_{i \geq 1}$ de manière récursive par :

$$\tau_{i+1}^{(\ell)} = \inf \left\{ t : t > \tau_i^{(\ell)}, X_t = X_{\tau_i^{(\ell)}}^{(\alpha)} - \alpha \left(\ell_\alpha - \frac{1}{2} + \eta \right) \text{ ou } X_t = X_{\tau_i^{(\ell)}}^{(\alpha)} + \alpha \left(\ell_\alpha - \frac{1}{2} + \eta \right) \right\}.$$

Soit $f_t^{(\ell)}$ la limite en probabilité de $(\alpha \ell_\alpha)^2 N_{\alpha,t}^{(\ell)}$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$. On a :

$$f_t^{(\ell)} = \int_0^t \sigma_u^2 X_u^2 du.$$

Pour démontrer ce résultat de convergence, nous avons besoin de quelques formules similaires à celle de la partie 1.

Corollaire 3. (*Probabilités d'alternance et de continuation*) Soit $i > 0$. On a les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1}}}(|B_{\nu_i} - B_{\nu_{i-1}}| = (l-1+2\eta)\alpha) = \frac{l}{2l-1+2\eta} & [Alternance] \\ \mathbb{P}_{\mathcal{F}_{\nu_{i-1}}}(|B_{\nu_i} - B_{\nu_{i-1}}| = l\alpha) = \frac{l-1+2\eta}{2l-1+2\eta} & [Continuation] \end{cases}$$

Lemme 5 (Lemme 6.10). *Lorsque $n \rightarrow \infty$, nous avons :*

$$(\alpha_n \ell_{\alpha_n})^2 N_{n,t}^{(\ell)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X \rangle_t.$$

Démonstration. Nous procédons exactement de la même manière que dans 6.

$$(\alpha_n \ell_{\alpha_n})^2 N_{\alpha_n,t}^{(\ell)} = (\alpha_n \ell_{\alpha_n})^2 \sum_{\nu_{i,n}^{(\ell)} \leq \langle X \rangle_t} 1.$$

Nous suivons les mêmes étapes que 6 en utilisant les formules de l'article Christian Yann ROBERT et ROSENBAUM (2010) pour $k = l$ au lieu de $k = 1$. \square

Soit $\varphi^{(\ell)}(t) = \sup\{\tau_i^{(\ell)} : \tau_i^{(\ell)} < t\}$. L'erreur de couverture est donnée par :

$$L_{\alpha,t}^{(3)} = \int_0^t \dot{C}_x(u, X_u) dX_u - \int_0^t \dot{C}_x(\varphi^{(\ell)}(u), X_{\varphi^{(\ell)}(u)}) dP_u.$$

$L_{\alpha,t}^{(3)}$ admet un résultat de convergence tout comme les deux erreurs précédemment citées. Nous énonçons seulement la convergence dans le cas particulier $\ell_\alpha = \alpha^{-1/2}$ puisqu'il permet de comprendre qu'un bon choix de ℓ_α aboutit à une convergence plus rapide que si l'on rééquilibre le portefeuille à chaque changement de prix.

Théorème 7 (admis). *Soit $\ell_\alpha = \alpha^{-1/2}$. Lorsque $\alpha \rightarrow 0$,*

$$\left(N_{\alpha,t}^{(\ell)}\right)^{1/4} L_{\alpha,t}^{(3)} \xrightarrow{\mathcal{I}-\mathcal{L}_s} L_t^{(3)} := \left(f_t^{(\ell)}\right)^{1/4} \left(\int_0^t a_s^{(3)} ds + \int_0^t b_s^{(3)} dX_s + \int_0^t c_s^{(3)} d\mathcal{W}_s^{(3)} \right),$$

où $\mathcal{W}_s^{(3)}$ est un mouvement brownien, et les coefficients $a_s^{(3)}$, $b_s^{(3)}$, et $c_s^{(3)}$ dépendent des propriétés locales de la volatilité.

4.2 Simulation du Hedging et visualisation des résultats de convergence

Nous présentons des résultats numériques concernant les erreurs de couverture d'un call européen avec un strike $K = 100$ et une maturité $T = 1$. Nous considérons le modèle suivant pour l'actif sous-jacent pendant la période de trading. Le prix efficient est donné par la dynamique de Black-Scholes :

$$dX_t = \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = 100, \quad t \in [0, T],$$

où $\sigma = 0.01$, et nous prenons $\alpha = 0.05$, $\eta = 0.05$, et, pour $i \geq 1$, $L_i = 1$. Enfin, nous supposons que la stratégie de référence de l'agent est la stratégie de Black-Scholes avec $\sigma = 0.01$.

Nous fournissons ici des statistiques sur le nombre de rééquilibrages (NR) et l'histogramme de l'erreur de couverture pour les différentes stratégies sur 1000 simulations Monte Carlo ; voir la Figure 2. Notez que $L_{\alpha,T}^{(3)}$ est calculé pour des variations de prix de 5 ticks.

	Moyenne de NR	Écart-type de NR
Rééquilibrage à chaque variation de prix	3487	108
Rééquilibrage tous les variations de 5 ticks	20.22	3.55

TABLE 4 – Statistiques pour le nombre de rééquilibrages

Nous observons que rééquilibrer à chaque changement de prix est moins efficace que rééquilibrer moins souvent avec $\ell = 5$. Rééquilibrer moins souvent permet de minimiser l'erreur de hedging, ce qui est cohérent avec les résultats théoriques des convergences.

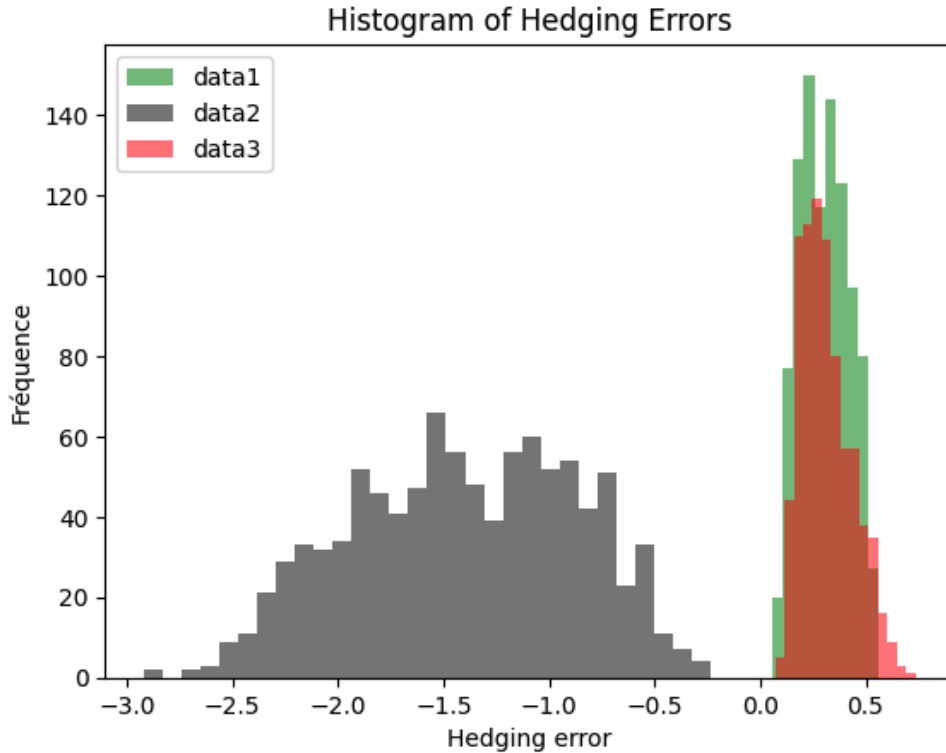


FIGURE 13 – Exemple de Hedging Error.

La figure 13 montre que le fait de dicrétiser et de rééquilibrer de un nombre fini de fois induit une erreur de hedging (courbe verte). L'intérêt de la stratégie de rééquilibrer moins souvent se voit sur la figure. L'histogramme rouges sont plus proche de 0 en moyenne (espérance plus faible) et moins étalés (variance plus faible) que l'histogramme noir.

5 Effet de Epps et Estimateur HY : Hayashi et Yoshida (2005)

Nous savons maintenant évaluer la volatilité d'un actif risqué. Au sein d'un portefeuille composé de plusieurs actifs, il devient intéressant de calculer la corrélation entre ces derniers dans un cadre microstructurel. Ce problème est cependant sujet à diverses difficultés. En effet, supposons deux actifs A et B dont les prix sont modélisés à l'aide de zones d'incertitudes. On introduit alors deux suites d'indices (τ_i^A) et (τ_i^B) correspondant aux moments des changements de prix. Cependant, les prix ne changeant pas au même moment, on peut se retrouver avec deux discrétisations temporelles totalement différentes. De plus, même si les discrétisations sont identiques, il est possible d'obtenir des séries temporelles qui, pour un pas de temps très petit, semblent décorréélées malgré une tendance commune (voire une corrélation pour de 1 pour un autre choix de pas de temps) comme le montre l'exemple .

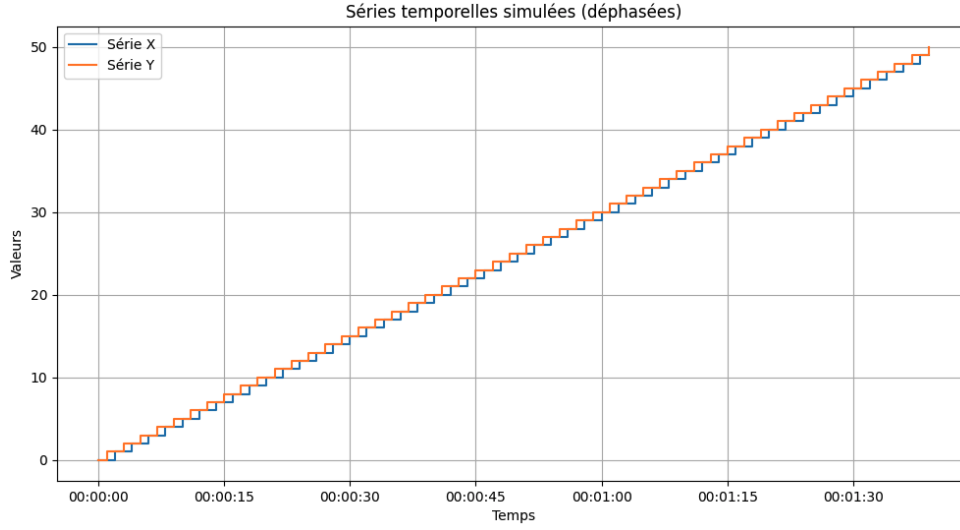


FIGURE 14 – Exemple de Séries Déphasées.

Pour un pas de temps de 1, la corrélation est nulle alors que pour un pas de temps de 2, elle vaut 1.

Cela est dû à l'**effet de Epps**, qui décrit la diminution de la corrélation empirique entre deux actifs financiers lorsque la fréquence des observations augmente, en raison de la non-synchronisation et du bruit microstructurel.

Une solution à ce problème est l'estimateur de HAYASHI et YOSHIDA (2005) qui permet de calculer la corrélation entre deux actifs en choisissant correctement les indices à utiliser pour l'observation :

$$\frac{1}{T} \sum_{i,j} \frac{\Delta P^1(I^i) \Delta P^2(J^j)}{\sigma^1 \sigma^2} \mathbf{1}_{\{I^i \cap J^j \neq \emptyset\}}.$$

avec la notation pour $I :=]a, b]$, $0 \leq a < b < \infty$, $\Delta X(I) := X(b) - X(a)$ où X est un prix d'actif.

Bibliographie

- ALMGREN et CHRISS. “Optimal execution of portfolio transactions”. In : *Journal of Risk* 3.2 (2000), p. 5-39.
- ZHANG, Lan, Per A. MYKLAND et Yacine AÏT-SAHALIA. “A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility with Noisy High-Frequency Data”. In : *Journal of the American Statistical Association* 100.472 (2005), p. 1394-1411. DOI : 10.1198/016214505000000169.
- ROBERT, Christian Yann et Mathieu ROSENBAUM. “Volatility and Covariation Estimation When Microstructure Noise and Trading Times Are Endogenous”. In : *Mathematical Finance* xx.x (2010), p. 1-32.
- BRETON, Jean-Christophe. *Calcul stochastique*. Université de Rennes, Version du 31 octobre 2024. 2021. URL : https://perso.univ-rennes1.fr/jean-christophe.breton/Fichiers/calculsto_M2.pdf.
- ROBERT, Christian Y. et Mathieu ROSENBAUM. “On the Microstructural Hedging Error”. In : *SIAM Journal on Financial Mathematics* 3.1 (2012), p. 507-547.
- HAYASHI, Takaki et Nakahiro YOSHIDA. “On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes”. In : *Bernoulli* 11.2 (2005), p. 359-379.

Code source

Notre code est disponible sur GitHub : <https://github.com/Alouloum/EA>. Il contient toutes les implémentations nécessaires pour reproduire les résultats présentés dans ce rapport.