MESSWERTVERARBEITUNG
UND
DIAGNOSETECHNIK

Verantwortlicher: Dr.-Ing. Zhirong Wang

Professur für Dynamik und Mechanismentechnik
Institut für Festkörpermechanik
Fakultät Maschinenwesen

PO2019: MW-MB-SIM-12, MW-MB-KST-12, MW-MB-AKM-19
PO2012:: MB-KS-10, MB-SM-12
PO2006: MT14: Höhere Dynamik (Teilmodul Messwertverarbeitung/Diagnostik)

Datum der Abgabe: 9. Juni 2022

1 FOURIERANALYSE PERIODISCHER KONTINUIERLICHER SIGNALE

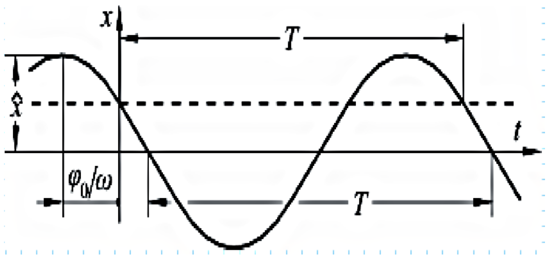


Abb. 1.1: Harmonische Signale

Merkmale:

- Amplitude: A
- Periodendauer: T
- Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$

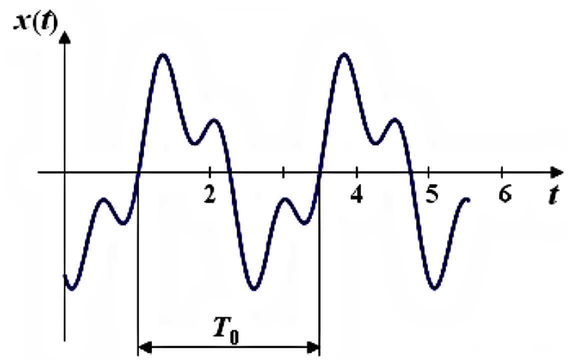
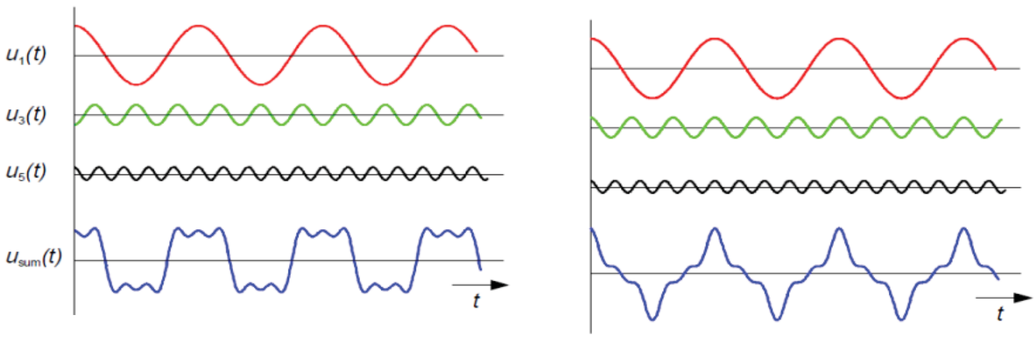


Abb. 1.2: Periodische Signale

Merkmale:

- Periodisch: $x(t) = x(t + T)$
- Periodendauer: T_1
- Grundfrequenz: $f_1 = \frac{1}{T_1}$
- Grundkreisfrequenz: $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

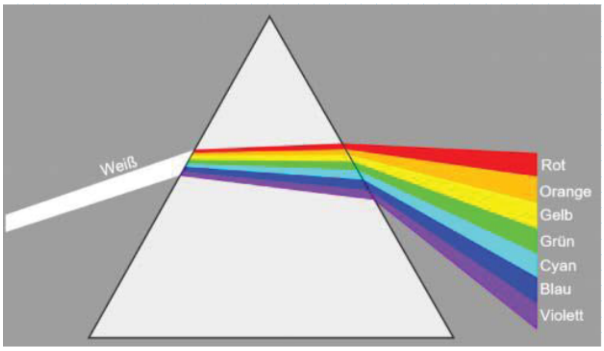


$$u_{sum}(t) = \cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{1}{3}\cos\left(3\omega_0 t + \pi\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\omega_0 t\right)$$

$$u_{sum}(t) = \cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{1}{3}\cos\left(3\omega_0 t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\omega_0 t\right)$$

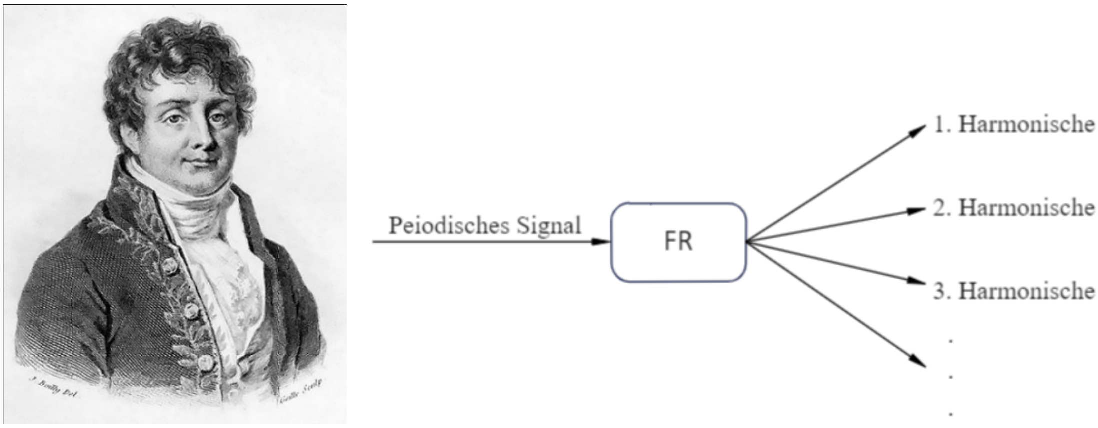
Abb. 1.3: Überlagerung mehrerer Harmonischen

Spektrum und Fourier-Reihe:



Spektrum: *Das Muster des monochromatischen Lichts, das in der Reihenfolge der Wellenlänge (oder Frequenz) gestreut wurde, wird als optisches Spektrum bezeichnet.*

Abb. 1.4: Spektrum



(a) Fourier: 1768-1830

(b) Fourier-Reihe

Abb. 1.5: Fourier und FR

1.1 FOUIRERREIHE

1.1.1 Orthogonale Reihenentwicklung

Periodisches Signal $x(t)$ mit Periodendauer soll durch einen Satz von Basisfunktionen approximiert werden.
Basisfunktion: $g_0^{(t)}, g_1^{(t)}, g_2^{(t)}, \cdots, g_k^{(t)}, \cdots$
Die Approximation von $x(t)$:

$$x_{\text{approx}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(t) \quad a_k\text{-Koeffizient der Reihe} \tag{1.1}$$

Kriterien zur Bestimmung der Koeffizienten a_k: → **bleibend Fehlerquadrat.**

$$\begin{aligned} QF &= \int_a^b \left(x(t) - x_{\text{approx}}(t)\right)^2 dt \rightsquigarrow \min \\ &= \int_a^b \left(x(t) - \sum_{l=0}^{\infty} a_l g_l(t)\right)^2 dt \rightsquigarrow \min \end{aligned} \tag{1.2}$$

Damit **QF** minimal wird, muss die Folgende Ableitung gelten:

$$\frac{\partial QF}{\partial a_k} = 0, \quad \textbf{\textit{für}}\ k = 0, 1, 2, ... \tag{1.3}$$

Die Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial QF}{\partial a_k} = \int_a^b 2\left[x(t) - \sum_{l=0}^{\infty} a_l g_l(t)\right](-g_k)\,dt = 0 \\ \int_a^b \left[x(t)g_k(t) - \sum_{l=0}^{\infty} a_l g_l(t) g_k(t)\right] \cdot dt = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Für jeden k, k=0,1,2,...:

$$\int_a^b x(t) \cdot g_k(t) \cdot dt = \sum_{l=0}^{\infty} \int_a^b a_l g_l(t) g_k(t) dt \tag{*}$$

Sonderfall:
Wenn die Basisfunktion $g_0^{(t)}, g_1^{(t)}, \cdots$ zueinander orthogonal sind, d.h.:

$$\int_a^b g_k(t) \cdot g_l(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ K_l & \text{für } k = l \end{cases} \tag{1.5}$$

Die Gleichung (*) vereinfacht sich zu:

$$\int_a^b x(t) g_k(t) dt = a_k \cdot \int_a^b g_k(t) \cdot g_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.6}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{\int_a^b x(t) g_k(t) dt}{\int_a^b g_k(t) \cdot g_k(t) dt} \tag{1.7}$$

1.1.2 Reelle Fourierreihe (trigonometrische Fourierreihe)

Basisfunktion:

1	$\cos(\omega_1 t)$	$\sin(\omega_1 t)$	$\cos(2\omega_1 t)$	$\sin(2\omega_1 t)$	$\cos(3\omega_1 t)$	$\cdots$
g_0	g_{1c}	g_{1s}	g_{2c}	g_{2s}	g_{3c}	$\cdots$
a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	$\cdots$

Es lässt sich prüfen, dass sie zueinander orthogonal sind.
Für ein periodischer Verlauf $x(t)$, Periodendauer T, Grundfrequenz $f_1 = \frac{1}{T}$, Grundkreisfre-

quenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.

$$
\begin{aligned}
x(t) = \underbrace{a_0}_{\text{Mittelwert}} &+ \underbrace{a_1 \cdot \cos\omega_1 t + b_1 \cdot \sin\omega_1 t}_{\text{Grundschwingung: 1. Harmonische}} \\
&+ \underbrace{a_2 \cdot \cos 2\omega_1 t + b_2 \cdot \sin 2\omega_1 t}_{\text{Grundschwingung: 2. Harmonische}} \\
&+ \underbrace{a_3 \cdot \cos 3\omega_1 t + b_3 \cdot \sin 3\omega_1 t}_{\text{Grundschwingung: 3. Harmonische}} \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

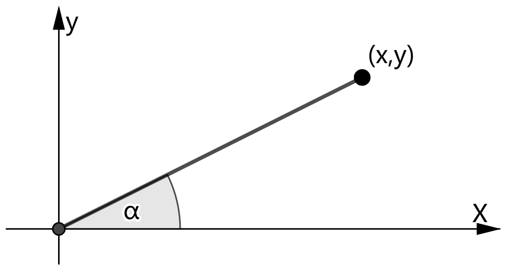
Die obige Entwicklung is als folgende Gleichung zusammenzufassen:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos k\omega_1 t + b_k \cdot \sin k\omega_1 t\right) \\
a_0 &= \frac{\int_T x(t) \cdot g_0(t) dt}{\underbrace{\int_T g_0(t) \cdot g_0(t) dt}_{T}} = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \\
a_k &= \frac{\int_T x(t) g_{kc}(t) dt}{\int_T g_{kc}(t) \cdot g_{kc}(t) dt} = \frac{\int_T x(t) \cdot \cos k\omega_1 t dt}{\int_T \left[\cos\left(k\omega_1 t\right)\right]^2 \cdot dt} = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \cos k\omega_1 t dt \\
b_k &= \frac{\int_T x(t) g_{ks}(t) dt}{\int_T g_{ks}(t) \cdot g_{ks}(t) dt} = \frac{\int_T x(t) \cdot \sin k\omega_1 t dt}{\int_T \left[\sin\left(k\omega_1 t\right)\right]^2 dt} = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cdot \sin k\omega_1 t dt
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Zusammenfassung der trigonometrischer Fourier-Entwicklung und deren Variaten:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t\right) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \cos\left(k\omega_1 t + \varphi_k\right) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot \sin\left(k\omega_n t + \psi_k\right) \\
c_k &= d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\
\varphi_k &= a \tan 2\left(-b_k, a_k\right) \\
\psi_k &= \operatorname{atan} 2\left(a_k, b_k\right)
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Ergänzung: Der Wertebereich der Tangensfunktion:



$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$
$$\alpha = \operatorname{atan2}(y, x) \in (-\pi, \pi)$$

Abb. 1.6: Tangensfunktion und Wertbereich

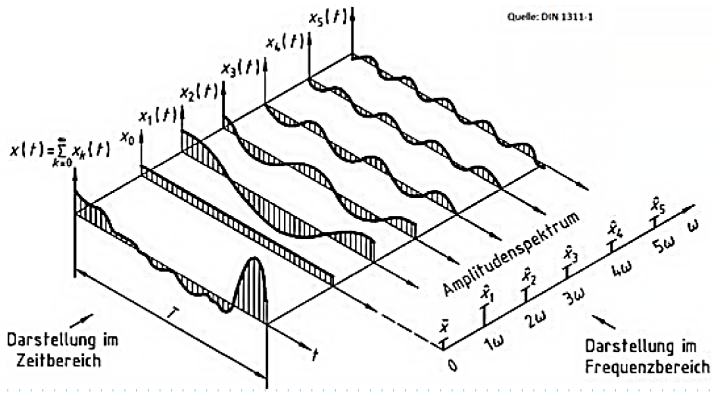
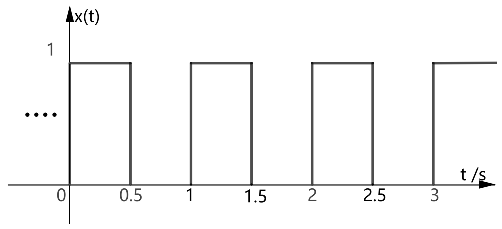


Abb. 1.7: Darstellung eines periodischen Signals im Zeit- sowie Frequenzbereich

Ein periodisches Zeitsignal $x(t)$ besitzt **nur die Grundfrequenz und deren Vielfache.** Ein Beispiel siehe unten:



- $T = 1s$
- $f_1 = \frac{1}{T} = 1Hz$
- $x(t)$ kann nur die diskreten Frequenzen $1Hz, 2Hz, 3Hz\ldots$ besitzen.

Fourierreihe für gerade/ ungerade periodische Signale:

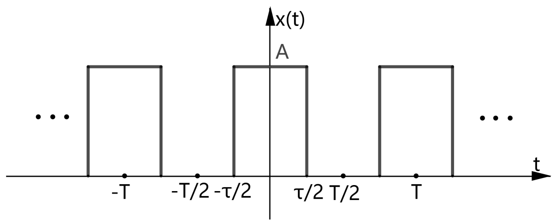
- *gerade Signale $x(t) = x(-t)$:*

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} x(t)dt \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(k\omega_1 t)dt = \frac{2}{T}\cdot 2\cdot\int_0^{T/2} \underbrace{x(t)\cdot\cos(k\omega_1 t)}_{gerade}\, dt \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{x(t)\cdot\sin(k\omega_1 t)}_{ungerade}\, dt = 0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

- *ungerade Signale $x(t) = -x(-t)$:*

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = 0 \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(k\omega_1 t)dt \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_{T} x(t)\cdot\sin(k\omega_1 t)dt = \frac{2}{T}\cdot 2\cdot\int_{0}^{T/2} x(t)\sin(k\omega_1 t)dt
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Beispiel: gerade Rechteckimpuls:



- Kraftverlauf $x(t)$ ist periodisch mit Periodendauer T
- Für den Kraftverlauf:
  - Periode T
  - Grundkreisfrequenz $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
  - nur diskrete Frequenz vorhanden $k\omega_1$
- **Gesucht: Fourierreihe**

Der gezeigte Rechteckimpuls ist in funktionaler Form umzuschreiben:

$$
x(t) = \begin{cases} 0 & t \in (\frac{-T}{2}, \frac{-\tau}{2}) \\ A & t \in (\frac{-\tau}{2}, \frac{\tau}{2}) \\ 0 & t \in (\frac{\tau}{2}, \frac{T}{2}) \end{cases}
$$

Nach dem Gleichungssystem **??**:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cdot dt = \frac{A\tau}{T} \\
a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot\cos(k\omega\omega_1 t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\pi/2} A\cdot\cos(k\omega_1 t)dt \\
&= \frac{2A}{T}\cdot\frac{\sin(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A\tau}{T}\,\frac{\cancel{2}\sin(\frac{k\omega_1\tau}{2})}{\frac{k\omega_1\tau}{2}} \\
&= \frac{2A\tau}{T}\cdot\mathrm{si}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \\
b_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot\sin(k\omega_1 t)dt = 0,\ \text{weil } x(t) \text{ gerade ist.}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Daraus ergibt sich die Fourierreihe:

$$
x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2A\tau}{T}\,\mathrm{si}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right)}_{A_k}\cdot\cos\left(k\omega_1 t\right)
$$

Da $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$:

$$A_k \cdot \cos\left(k\omega_1 t\right) = \begin{cases} A_k \cdot \cos\left(k\omega_1 t\right) & A_k \geqslant 0 \\ \left|A_k\right| \cdot \cos\left(k\omega_1 t + \pi\right) & A_k < 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Amplitudenspektrum:

$$a_0, \quad A_k = \frac{2A\tau}{T} \cdot \mathrm{si}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right), \text{ an Frequenzstelle } k\omega_1$$

Betragsspektrum:

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2A\tau}{T} \mathrm{si}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \right| \cdot \cos\left(k\omega_1 t + \varphi_k\right) \tag{1.14}$$

Phasenspektrum:

$$\varphi_k = \begin{cases} 0, & \dfrac{2nT}{\tau} \leqslant k \leqslant \dfrac{(2n+1)T}{\tau} \\ \pi, & \dfrac{(2n+1)T}{\tau} \leqslant k \leqslant \dfrac{(2n+2)T}{\tau} \end{cases} \tag{1.15}$$

Grafische Darstellung des Amplituden- sowie Phasenspektrums:

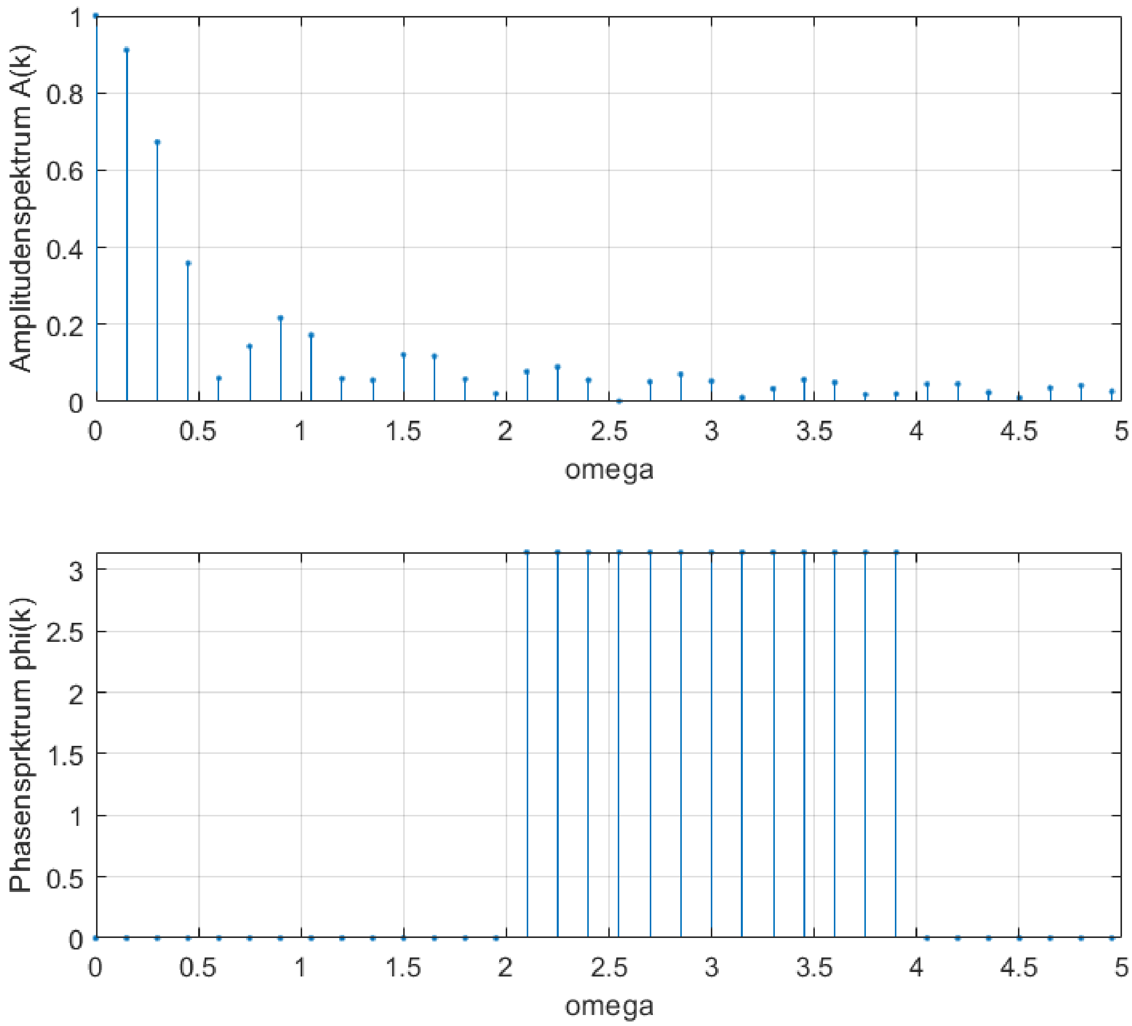


Abb. 1.8: Grafische Darstellung des Amplituden- sowie Phasenspektrums

Fourierreihe für periodisches Signal:

$$x(t) = x(t + T)$$

Grundkreisfrequenz:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Fourierreihe:

$$\begin{aligned} x_{(t)} &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t\right) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k\omega_1 t + \varphi_k\right) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Damit:

$$\begin{aligned} A_k &= A(k\omega_1) \ldots Amplitudenspektrum \\ \varphi_k &= \varphi(k\omega_1) \ldots Phasenspektrum \end{aligned} \tag{1.17}$$

1.1.3 Komplexe Fourierreihe

Eulersche Formel:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha}+e^{-j\alpha})\\ \sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha}-e^{-j\alpha})\\ &= -\frac{j}{2}(e^{j\alpha}-e^{-j\alpha})\end{aligned} \tag{1.18}$$

Einsetzen der Gleichungen **??** in die reelle Fourierreihe:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{2}\left(e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{j}{2}\left(e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}\right)\\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - jb_k}{2}e^{jk\omega_1 t}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k + jb_k}{2}e^{-jk\omega_1 t}\\ &= \underbrace{a_0}_{c_0\cdot e^{j0}} + \sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{a_k - jb_k}{2}}_{c_k}\cdot e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty}\underbrace{\frac{a_{-k} + jb_{-k}}{2}}_{c_{-k}} e^{jk\omega_1 t}\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{T}\int_T x(t)\cdot\cos\left(k\omega_1 t\right)dt \;\Rightarrow\; a_{-k} = a_k\\ b_k &= \frac{2}{T}\int_T x(t)\cdot\sin\left(k\omega_1 t\right)dt \;\Rightarrow\; b_{-k} = -b_k\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}x(t) &= x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{jk\omega_1 t}\\ c_0 &= a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt\\ c_k &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\left(\int_T x(t)\cdot\cos(k\omega_1 t)dt - j\cdot\int_T x(t)\cdot\sin(k\omega_1 t)dt\right)\right]\\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)[\underbrace{\cos(k\omega_1 t) - j\cdot\sin(k\omega_1 t)}_{e^{-jk\omega_1 t}}]dt\\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt\end{aligned}$$

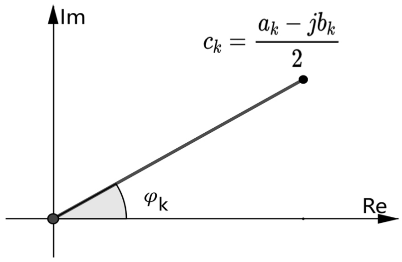
Zusammenfassung:

Komplexe Fourierreihe:

$$\begin{aligned}&x(t) = x(t+T),\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}\\ &x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\cdot e^{jk\omega_1 t},\quad c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt\\ &k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\end{aligned} \tag{1.20}$$

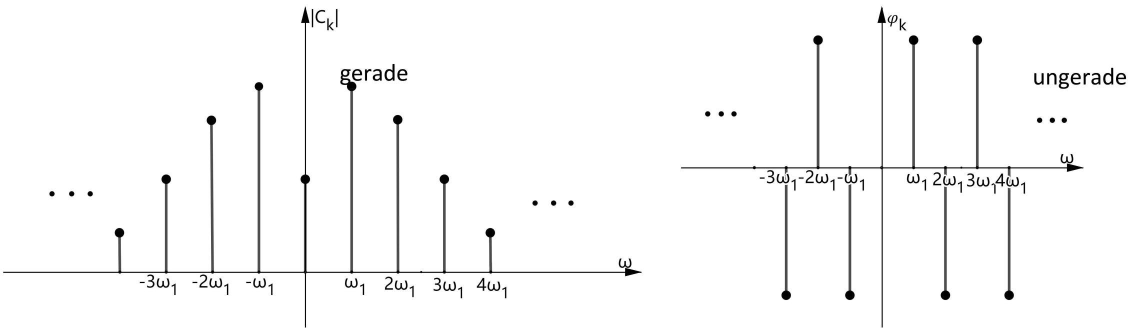
C_k ist eine komplexe Zahl,

$$
\begin{aligned}
c_k &= |c_k| \cdot e^{j\varphi k} \\
|c_k| &= \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{2}A_k \\
\varphi_k &= \arg(c_k) = \operatorname{atan2}(\operatorname{Im}(c_k), \operatorname{Re}(c_k)) \\
&= \operatorname{atan2}(-b_k, a_k) \\
c_k &= c_{-k}^* \quad * - \textit{konjugiert komplex}
\end{aligned}
$$



Darstellung von Amplituden- und Phasenspektrum:

- Wegen $c_k = c_{-k}^* \;\rightarrow\; |c_k| = c_{-k},\;\; \varphi_k = -\varphi_{-k}$
  ⇝ Betragspektrum ist gerade, Phasenspektrum ist ungerade.



- für gerade reelle Signale $x(t) = x(-t)$:

$$
\begin{aligned}
b_k &= 0 \\
c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{a_k}{2}
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

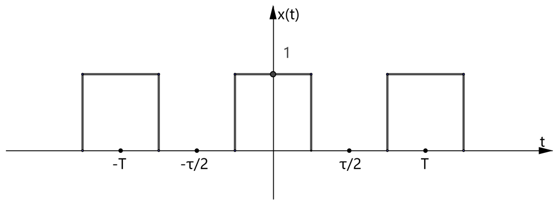
  c_k ist reell $\Longleftrightarrow$ $x(t)$ ist gerade.

- für ungerade reelle Signale $x(t) = -x(-t)$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= 0 \\
c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2} = -\frac{jb_k}{2} = \frac{b_k}{2j}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

  c_k ist imaginär $\Longleftrightarrow$ $x(t)$ ist ungerade.

Beispiel:



1. $x(t)$ ist periodisch
2. Periode T

Abb. 1.9: Rechteck-Puls und sinc-Funktion

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_1 t} \\
c_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot e^{-jk\omega_1 t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cdot e^{-jk\omega_1 t}dt \\
&= \frac{A\tau}{T}\cdot \mathrm{Si}\left(\frac{k\pi\tau}{T}\right) = \frac{A\tau}{T}\cdot \mathrm{Si}(\frac{1}{2}\cdot k\tau\omega_1)
\end{aligned}
$$

Plausibilität: $x(t)$ **ist gerade** → c_k **reell**

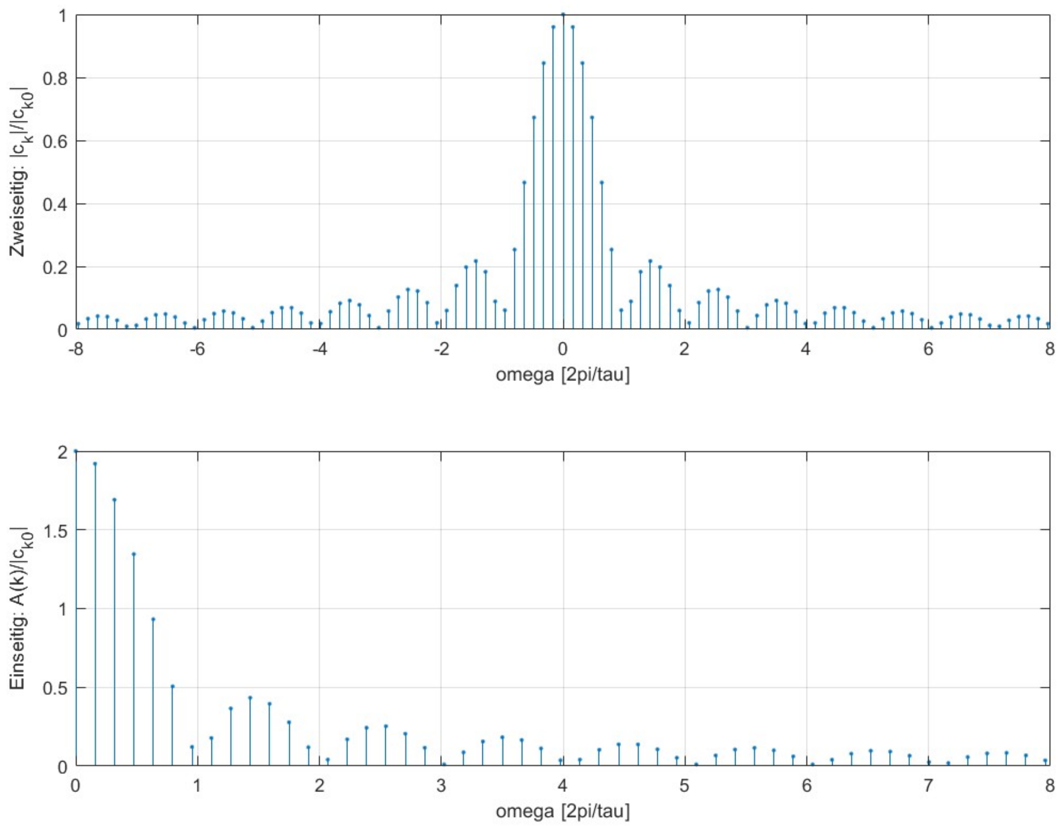


Abb. 1.10: Ein- und Zweiseitiges Amplitudenspektrum

1.1.4 Parsevalsche Gleichung

Die Durchschnittleistung eines reellen periodischen Signals:

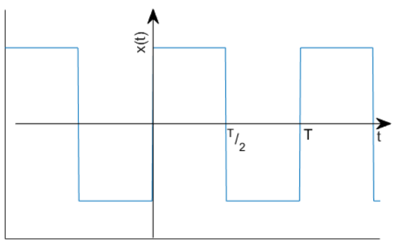
$$
\begin{aligned}
\overline{P_x} &= \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt \\
&= \frac{1}{T}\int_T \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t)\right]^2 dt \\
&= \frac{1}{T}\left[T \cdot a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right] \\
&= a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leftarrow \textit{reelle Fourierreihe} \\
\overline{P_x} &= \frac{1}{T}\int_T^2 x^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_1 t}\right)^2 dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k\right|^2
\end{aligned}
$$

Parsevalsche Gleichung:

$$\overline{P_x} = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_k\right|^2 \tag{1.23}$$

1.1.5 Gibbs Phänomen

Für Rechteck-Puls:



$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{2A}{\pi}\left(\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + ...\right) \\
\omega_1 &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}
$$

Erst wird der Rechteck-Puls aus der Überlagerung mehrerer Harmonischen grafisch dargestellt:

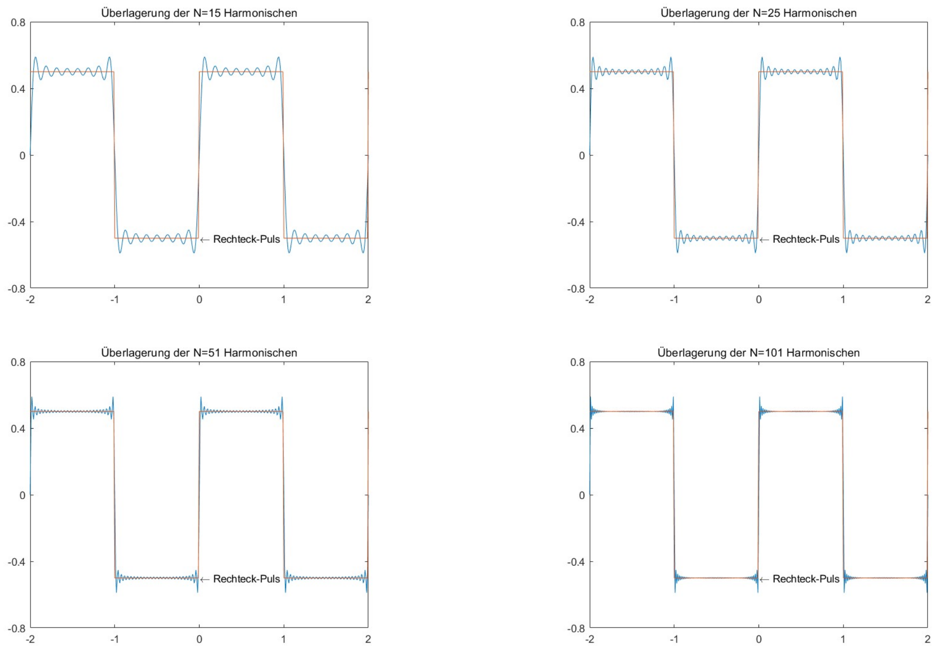
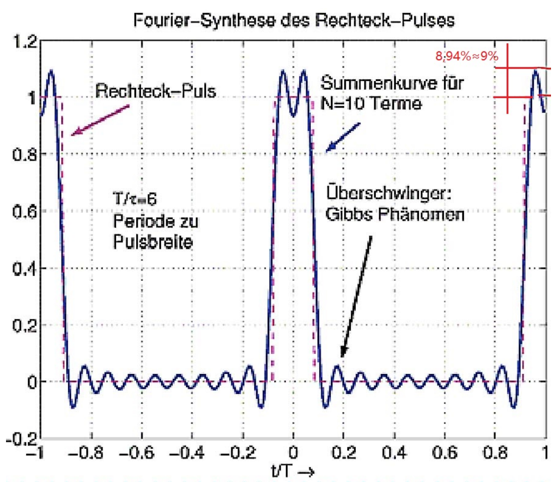


Abb. 1.11: Rechteck-Puls aus der Überlagerung mehrerer Harmonischen

Dann wird das ”Gibbs-Phänomenäls folgende definiert und charakterisierst:



- ”Über- und Unterschiessen” vor und nach einer Sprungstelle
- Höhe der größten überschwingende Welle beträgt gegen 9% (8,94%) der gesamten Sprunghöhe
- Selbst bei ∞ vielen Harmonischen bleibt die größten überschwingende Welle ca. 9%, klingt aber schnell ab.

Bestimmung der Anzahl von Harmonischen in Bezug auf die mittlere Leistung:

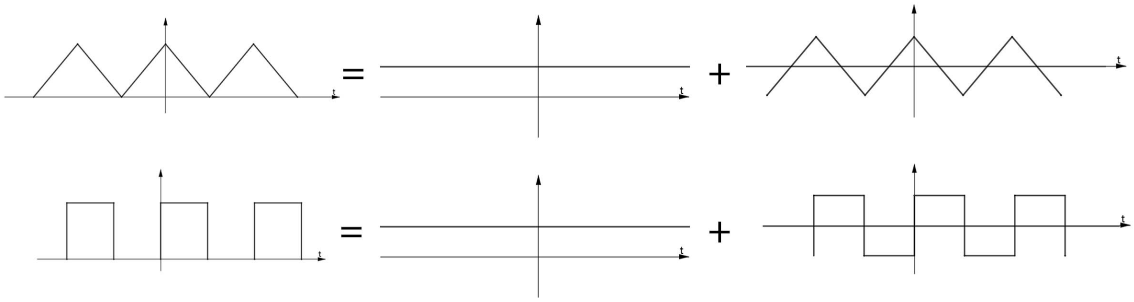
$$
\begin{aligned}
P_m &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \\
P_N &= \sum_{k=-N}^{N} |C_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)
\end{aligned}
\qquad (1.24)
$$

Wenn $\dfrac{P_N}{P_m} = 99\%$, dann hat die synthetisierte Profile 99% Leistung des theoretischen Verlaufs.

1.1.6 Eigenschaften der Fouierreihe

(1) Linearität:

$$FR\{x(t) + y(t)\} = FR\{x(t)\} + FR\{y(t)\}$$



(2) Lineare Modifikation:

$$FR\{\dot{x}\} = \frac{d}{dt}FR\{x(t)\}$$
$$FR\left\{\int x(t)dt\right\} = \int FR\{x(t)\}dt$$

(3) Verschiebungssatz:

$$FR\left\{x\left(t - t_0\right)\right\} = FR\{x(t)\} \cdot e^{-jk\omega_1 t_0} \tag{1.25}$$

D.h.,durch die Verschiebung im Zeitbereich um einen Abstand t_0: $x(t \pm t_0)$ ist die Multiplikation mit $e^{\mp jk\omega_1 t_0}$ im Frequenzbereich vorgesehen, und vice versa.

(4) Symmetrieeigenschaften:

- gerade reelle Signale:
  $b_k = 0, \quad c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}a_k, \; k = 1, 2, ...$
  c_k *ist reell.*

- ungerade Signale:
  $a_0 = a_k = 0, \quad c_k = \frac{b_k}{2j}$
  c_k *ist imagnär.*

Beispiel: s.o. Abb.**??**

1.2 FOURIERTRANSFORMATION UND ANALYSE APERIODISCHER SIGNALE

1.2.1 Von Fourierreihe zu Fouriertransformation

Wiederholung: Fourierreihe

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{(} - jn\omega_0 t) dt$$

$$\omega_0\text{–}Grundfrequenz,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_n\text{–}Fourierreihe - Koeffizient, C_n = \left|C_n\right| \cdot e^{(}j\angle C_n)$$

$$Frequenzkomponente\ bei\ Frequenz n \cdot \omega_0$$

Im folgenden wird der